14 قیاسیات
Probability

قیاسیات آدمی کی حسی صلاحیت کو حسابی عمل میں تبدیل کر دینے کا نام ہے۔

- پیری۔سمن لاپلیس

14.1 تعارف

شکیل اور اکرم ہم جماعت ہیں، ایک دن وہ دو پہر کے کھانے کے دوران گفتگو کر رہے ہیں۔ان کی گفتگو پر غور کیجیے۔

شکیل : السلام علیکم اکرم! آج شام آپ کی کیا مصروفیت ہے؟

اکرم : زیادہ ممکن ہے ہندوستان اور آسٹریلیا کے کرکٹ میچ کا مشاہدہ کروں گا۔

شکیل : آپ کے خیال میں ٹاس کون جیتے گا؟

اکرم : دونوں ٹیموں کے ٹاس جیتنے کا مساوی امکان ہے۔کیا تم کرکٹ میچ گھر پر ہی دیکھو گے؟

شکیل : مجھے گھر پر کرکٹ میچ کے مشاہدہ کا موقع نہیں۔کیونکہ میرا ٹیلی ویژن درستگی کے لیے دیا ہوا ہے۔

اکرم : تم میرے گھر چلے آؤ۔ہم ایک ساتھ میچ دیکھیں گے۔

شکیل : میں اپنا ہوم ورک کرنے کے بعد آؤں گا۔

اکرم : کل 2/اکٹوبر ہے اور ہمیں گاندھی جینتی کی تعطیل ہے، تم ہوم ورک کل کیوں نہیں کر لیتے؟

شکیل : نہیں، پہلے میں اپنا ہوم ورک کرلوں گا پھر تمہارے گھر آؤں گا۔

اکرم : ٹھیک ہے۔

اب ذیل کے بیانات پر غور کریں۔

ہندوستان اور آسٹریلیا کے کرکٹ میچ کا مشاہدہ کروں گا۔

مجھے گھر پر کرکٹ میچ کے مشاہدہ کا موقع نہیں۔

دونوں ٹیموں کے ٹاس جیتنے کا مساوی امکان ہے۔

مکالمے میں شکیل اور اکرم خاص مواقع سے متعلق امکانات پر غور کر رہے ہیں۔

SCERT TELANGANA

ایسے مواقع پر ہم امکانات پر غور کرتے ہوئے منطقی طریقے پر فیصلہ کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر میں چھتری کے بغیر ہی باہر نکلوں گا، اس جملہ پر غور کیجیے۔ آج خوشگوار دن ہے۔

لیکن حالات ہمیشہ ہماری سوچ کے مطابق نہیں ہوتے۔

اس جملہ پر غور کیجیے ''مریم برسات کے موسم میں روزانہ اپنی چھتری اسکول لیجاتی ہے۔ وہ کئی روز تک ایسا ہی کرتی رہی مگر اس دوران کبھی بارش نہیں ہوئی۔ اتفاقاً ایک دن وہ اپنی چھتری ساتھ رکھنا بھول گئی اور اسی دن بہت تیز بارش ہوئی۔

عام طور پر گرمی کا موسم مارچ کے مہینہ سے شروع ہوتا ہے، لیکن اس مہینہ میں ایک شام بہت تیز بارش ہوئی۔ خوش قسمتی سے مریم اس دن بھی چھتری لے گئی تھی اس لیے وہ بھیگنے سے بچ گئی۔

اس طرح ہم امکانی واقعات کا اندازہ لگا کر فیصلہ کر لیتے ہیں کہ ایسا ہوگا یا نہیں ہوگا۔ اوپر کی مثال میں بھی مریم نے اندازہ قائم کیا تھا، ہمارا اندازہ بعض دفعہ صحیح ہوسکتا ہے، اور بعض دفعہ صحیح نہیں ہوتا۔ (کیوں؟)

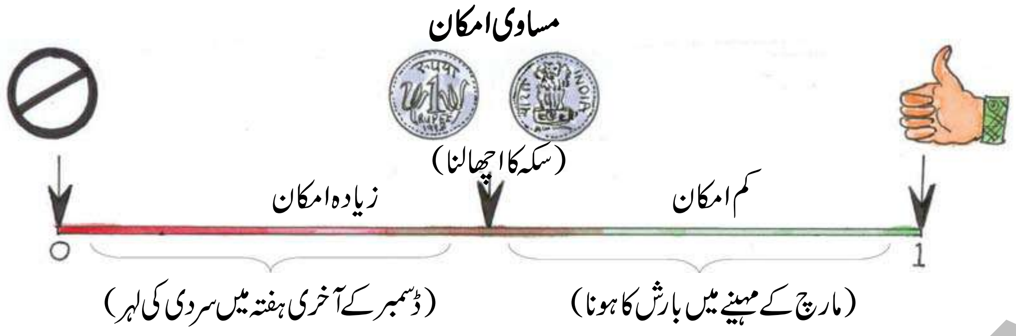
آیئے ہم بعض واقعات کے وقوع پذیر ہونے یا نہ ہونے سے متعلق حسابی طریقے سے جائزہ لیں گے، ایسا ہی جیسا کہ ہم روزمرہ زندگی میں دوسرے چیزوں کی پیمائش کرتے ہیں۔ اس قسم کی پیمائش ہم کو زیادہ منظم انداز میں فیصلہ کرنے کا موقع فراہم کرتی ہے۔ لہٰذا ہم واقعات کے امکانات پر فیصلہ کرنے جیسے مواقع کے لیے قیاسات کا مطالعہ کریں گے۔

سب سے پہلے ہم قیاسات سے متعلق بعض اصطلاحوں کی درجہ بندی کریں، انہیں ذیل کے جدول میں دیا گیا ہے۔

ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

مکالمہ سے ماخوذ مثالیں	قیاس (امکان)	اصطلاح
گاندھی جینتی 2/ اکٹوبر کو منائی جاتی ہے۔	جس کا وقوع پذیر ہونا یقینی ہو۔	**یقینی**
اکرم کرکٹ میچ کا مشاہدہ کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا زیادہ امکان ہو۔	**زیادہ امکان**
دونوں میں سے کوئی ٹیم ٹاس جیت سکتی ہیں۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا مساوی امکان ہو۔	**مساوی امکان**
اکرم کرکٹ میچ کے دن ہوم ورک کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کم ہو۔	**کم امکان**
شکیل گھر پر کرکٹ میچ کا مشاہدہ کرے گا۔	جس کے وقوع پذیر ہونے کا امکان نہ ہو۔	**ناممکن**

SCERT TELANGANA

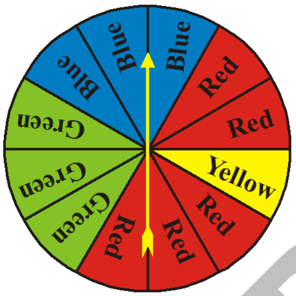


یہ کیجیے

1. پچھلے صفحہ میں دیے گئے جدول کا مشاہدہ کیجیے اور ہر ایک اصطلاح کے لیے کوئی دوسری مثال دیجیے۔
2. ذیل کے بیانات کی اصطلاحات جیسے کم امکان، مساوی امکان، زیادہ امکان میں درجہ بندی کیجیے۔
   (a) پانسہ اچھالنا، اور اوپری رخ پر عدد 5 کے وقوع کا قیاس۔
   (b) نومبر کے مہینے میں آپ کے گاؤں میں سردی کی لہر کا چلنا۔
   (c) ہندوستان اگلا فٹ بال ورلڈ کپ جیتے گا۔
   (d) سکّہ اچھالنے پر چت یا پٹ کا وقوع۔
   (e) لاٹری ٹکٹ خرید کر جیک پاٹ جیتنے کا امکان۔

14.2 قیاسیات

14.2.1 بلا منصوبہ تجربہ اور اس سے حاصل ہونے والے نتائج



واقعات کے قیاس کے لیے ہم، ایک سکّہ کو اچھالنا، ایک پانسہ کو لڑھکانا اور چرخے کو گھمانا وغیرہ جیسے تجربات کرتے ہیں۔

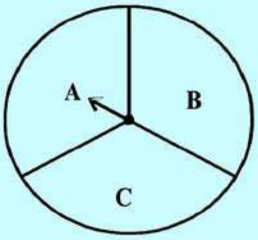
جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے ہیں تو صرف دو امکانی نتائج ہوتے ہیں، چت Head (H) اور پٹ Tail (T)۔ فرض کیجیے کہ آپ ایک کرکٹ ٹیم کے کپتان ہیں اور آپ کا دوست دوسری کرکٹ ٹیم کا کپتان۔ آپ سکّہ اچھالیے اور اپنے دوست کو چت یا پٹ منتخب کرنے کے لیے کہیے۔ کیا نتیجہ آپ کی مرضی کے مطابق ہوگا؟ عام طور پر ایسا ضروری نہیں ہے۔ آپ یہ نہیں کہہ سکتے کہ آپ کی توقع کے مطابق نتیجہ ہوگا، اس طرح ایک سکّہ کو اچھالنے کا تجربہ 'بلا منصوبہ تجربہ' کہلاتا ہے۔ اس طرح کے تجربات میں ہم کو تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج پہلے سے معلوم ہوتے ہیں، لیکن کیا خاص موقع پر ''نتیجہ'' پہلے سے معلوم نہیں ہوتا۔ بلا منصوبہ تجربات کے نتائج کے امکانات تو مساوی ہوتے ہیں مگر خصوصی نتیجہ برآمد ہونا ضروری نہیں۔ سکّہ اچھالنے کے تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج چت (Head) اور پٹ (Tail) ہوسکتے ہیں۔

سکہ

☆ پانسہ چھ رخوں والا ایک متوازن مکعب ہوتا ہے جس کے ہر رخ پر ایک عدد لکھا ہوتا ہے۔(1 سے 6 تک) بعض دفعہ اعداد کی جگہ نقاط کا بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

اس کی کوشش کیجیے



1. اگر آپ اسکوٹر اسٹارٹ کرنا چاہیں تو بتائیے کہ ممکنہ نتائج کیا ہوں گے؟
2. اگر آپ ایک پانسہ کو اچھالتے ہوں تو چھ ممکنہ نتائج کیا ہوں گے؟
3. جب آپ کسی پہیہ کو زور سے گھماتے ہوں تو نتائج کیا ہوں گے؟

(یہاں نتائج ممکنہ وہ قطاع ہے جہاں پوائنٹر رکتا ہے)

4. آپ کی بوتل میں مختلف رنگوں کی پانچ مشابہہ گیندیں ہیں۔ (سفید، سرخ، نیلی، سرمئی اور زرد) انہیں دیکھے بغیر آپ کو ان میں کوئی ایک گیند نکالنی ہے۔ وقوع پذیر ہونے والے ممکنہ نتائج کی فہرست بنائیے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک پانسہ کو اچھالنے میں

- کیا پہلے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہونے کا زیادہ امکان ہے؟
- کیا اس کے بعد کھیلنے والے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہونے کا کم امکان ہے؟
- فرض کیجیے کہ دوسرے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' حاصل ہوتا ہے، کیا اس کا مطلب یہ ہے کہ تیسرے کھلاڑی کو اوپری رخ پر 'چھ' وقوع ہونے کی توقع نہیں ہے؟

14.2.2 مساوی ممکنہ / نتائج

جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے یا ایک پانسہ کو لڑھکانے کا بلا منصوبہ تجربہ کرتے ہیں تو جانتے ہیں کہ سکّہ اور پانسہ کا نتیجہ امکانی ہونے کی بناء پر کسی کے بھی حق میں ہو سکتا ہے، تمام رخوں سے کسی ایک رخ کے اوپر آنے کے امکانات یکساں ہیں۔

ہم اس تجربہ کو کئی بار دہراتے ہوئے مشاہدات کو اکٹھا کریں گے، اور اکٹھا کیے ہوئے معطیات کے استعمال سے ''ایک خاص سعی'' کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس کریں گے۔

مثال کے طور پر ایک سکّہ کو اچھالنے کا عمل کئی بار کرتے ہوئے ہم چت (H) اور پٹ (T) کے متعدد بار وقوع پذیر ہونے کا مشاہدہ کریں گے۔ اس مقصد کے لیے ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

پٹ کے وقوع ہونے کی تعداد	گنتی کے نشان پٹ (Tails)	چت وقوع ہونے کی تعداد	گنتی کے نشان چت (Heads)	سکہ کے اچھالنے کی تعداد
28	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	22	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	50
34	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	60
40	......	30	......	70
44	......	36	......	80
48	......	42	......	90
52	......	48	......	100

اوپر کے جدول سے ہم یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ، جتنی مرتبہ سکّے کو اچھالا جائے گا اتنی ہی مرتبہ چت اور پٹ کے ظاہر ہونے کے امکانات زیادہ ہوں گے۔

یہ کیجیے

جدول میں بتلائی گئی تعداد کے مطابق ایک سکّہ کو اچھالیے اور جدول میں اپنی معلومات کا اندراج کیجیے۔

پٹ وقوع ہونے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	سکہ کو اچھالنے کی تعداد
		10
		20
		30
		40
		50

سکّہ کو اچھالنے کے عمل میں اضافہ کرنے پر آپ نتیجہ سے متعلق کیا قیاس کریں گے۔

یہ عمل ایک پانسہ کے ذریعہ بھی کیا جا سکتا ہے، اس کو متعدد بار لڑھکایئے اور مشاہدہ کیجیے۔

SCERT TELANGANA

پانسہ کولڑھکانے کے عمل کی تعداد	ہر نتیجہ کے وقت پانسہ کی تعداد (یعنی اوپری رُخ پر ظاہر ہونے والا عدد)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

اوپر کے جدول سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ 'ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل'' جتنی زیادہ مرتبہ دہرایا جاتا ہے''۔ چھ ممکنہ نتائج میں سے ہر ایک کے وقوع ہونے کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے۔

اوپر کے دو تجربات کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ تجربہ کے مختلف نتائج مساوی' ممکنہ' یا مساوی امکانی ہوتے ہیں۔

14.2.3 بار بار دہرایا جانے والا تجربہ اور وقوع

اوپر کے تجربات میں سکّہ کا ایک مرتبہ اچھالنا یا پانسہ کا ایک مرتبہ لڑھکانا 'تجربہ' یا 'بلا منصوبہ تجربہ' ہوتا ہے۔

ایک پانسہ کو اچھالنے کے عمل پر غور کیجیے۔

اوپری رخ پر 5 سے بڑا عدد وقوع ہونے کے کتنے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں؟

صرف ایک (جو 6 ہے)

پانسہ کے اوپری رخ پر کتنے جفت عدد وقوع پذیر ہونے کے امکانات ہو سکتے ہیں؟

تین نتائج ہو سکتے ہیں (2، 4 اور 6)

اس طرح ایک مخصوص نتیجہ یا مخصوص نتائج کا مجموعہ ایک وقوع ہوتا ہے۔

اوپر کے تجربہ میں ایک عدد جو 5 سے بڑا ہو اور ایک جفت عدد کا اوپری رخ پر ظاہر ہونا دو وقوع ہوں گے۔ غور کیجیے کہ وقوع کا صرف ایک واحد نتیجہ ضروری نہیں' لیکن ایک بلا منصوبہ تجربہ کا ہر نتیجہ ایک وقوع ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

یہاں ہم وقوع کا صرف بنیادی تصور سمجھیں گے' اور اگلی جماعتوں میں اس کے بارے میں بہت کچھ سمجھا جاسکتا ہے۔

14.2.4 امکانی وقوع کی ہم ربطی

غور کیجیے کہ ہم صرف ایک دفعہ سکّہ کو اچھالتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں' اس تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج ہوسکتے ہیں۔

چت (Head) یا پٹ (Tail) اور یہ دونوں نتائج بھی مساوی امکانات رکھتے ہیں۔

ایک چت کے وقوع ہونے کا کتنا موقع ہے؟

یہ دو ممکنہ نتائج میں سے ایک ہے جو کہ $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں' ایک سکّہ کو اچھالنے پر ایک چت (H) وقوع ہونے کا امکان $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

جس کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے۔

$$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ یا } 50\%$$

ایک پٹ (T) کے وقوع پذیر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

اب ہم ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل کرتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں کہ اس میں کتنے ممکنہ نتائج ہوسکتے ہیں۔ اس تجربہ میں 6 مساوی ممکنہ نتائج 1' 2' 3' 4' 5 اور 6 ہوسکتے ہیں۔ ایک پانسہ کے اوپری رخ پر ایک طاق عدد کے وقوع ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

جملہ چھ ممکنہ نتائج میں سے تین موافق نتائج 1' 3 یا 5 ہوسکتے ہیں جو کہ $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$۔

ایک وقوعہ 'A' کے امکان کے لیے ضابطہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$P(A) = \frac{\text{وقوعہ 'A' کے لیے موافق ممکنہ نتائج کا تعدد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد}}$$

اب چند مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال (1) : اگر دو مشابہہ سکّوں کو ایک ساتھ اچھالا جاتا ہے تو معلوم کیجیے۔(a) ممکنہ نتائج (b) جملہ ممکنہ نتائج کا تعدد (c) دو چت وقوع ہونے کے امکان (d) کم از کم ایک چت وقوع ہونے کا امکان (e) ایک بھی چت وقوع نہ ہونے کا امکان اور (f) صرف ایک چت وقوع ہونے کا امکان۔

حل : (a) ممکنہ نتائج ہوسکتے ہیں

سکہ 1	سکہ 2
چت	چت
چت	پٹ
پٹ	چت
پٹ	پٹ

SCERT TELANGANA

(b) اس طرح جملہ ممکنہ نتائج کا تعداد 4 ہے۔

(c) دوچت وقوع ہونے کا امکان

$$\frac{\text{دوچت وقوع ہونے موافق ممکنہ نتائج کا تعداد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کا تعداد}} = \frac{1}{4}$$

(d) کم ازکم ایک وقوع ہونے کا امکان = $\frac{3}{4}$

(کم ازکم ایک چت کے وقوع ہونے کا مطلب زیادہ سے زیادہ ایک چت کتنی مرتبہ وقوع پذیر ہوسکتا ہے)

(e) ایک بھی چت وقوع نہ ہونے کا امکان = $\frac{1}{4}$

(f) صرف ایک چت وقوع ہونے کا امکان = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

یہ کیجیے

1. اگر بیک وقت تین سکّوں کو اچھالا جاتا ہے تو

(a) تمام ممکنہ نتائج لکھیے۔

(b) ممکنہ نتائج کی تعداد۔

(c) کم ازکم ایک چت وقوع ہونے کا قیاس کیجیے

(یعنی ایک چت زیادہ سے زیادہ کتنی بار وقوع پذیر ہوسکتا ہے)

(d) دوچت کے کم ازکم دو دو بار وقوع پذیر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

(e) ایک بھی پٹ (T) وقوع پذیر نہ ہونے کا قیاس کیجیے۔

مثال (2) : (a) ذیل کے جدول میں ایک پانسہ کولڑھکانے کے تجربہ میں اوپری رخ پر ہر ایک عدد کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس لکھیے۔ (b) تمام ممکنہ نتائج کے امکانات کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل : (a) تمام چھ ممکنہ نتائج میں سے، عدد 4 صرف ایک بار وقوع پذیر ہوتا ہے۔ اس لیے اس کا امکان $\frac{1}{6}$ ہوگا۔ اسی طرح ہم باقی خانے پر کریں گے۔

نتیجہ	1	2	3	4	5	6
امکان (P)				1/6		

SCERT TELANGANA

(b) تمام قیاسات کا مجموعہ

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

عام طور پر ہم اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

”ایک بلا منصوبہ تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کے قیاسات کا مجموعہ ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔“

اس کی کوشش کیجیے

جب پانسہ کو ایک دفعہ لڑھکایا جاتا ہے تو ہر ایک وقوعہ کا امکان معلوم کیجیے۔

وقوعہ (Event)	موافق نتیجہ (S)	موافق نتیجہ کی تعداد (S)	جملہ ممکنہ نتائج	ممکنہ نتائج کی تعداد	قیاس = موافق نتائج کی تعداد / تمام جملہ نتائج کی تعداد
اوپری رخ پر عدد 5 کا وقوع پذیر ہونا	5	1	1، 2، 3، 4، 5 اور 6	6	1/6
اوپری رخ پر 3 سے بڑا عدد وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر ایک جفت عدد کا وقوع ہونا					
اوپری رخ پر ایک عدد کا 5 سے کم بار وقوع پذیر ہونا					
اوپری رخ پر اس عدد کا وقوع ہونا جو 6 کا جزو ہو					
اوپری رخ ہر ایک عدد کا 7 سے زیادہ بار وقوع ہونا					
اوپری رخ پر اس عدد کا وقوع ہونا جو 3 کا ضعف ہو					
اوپری رخ پر عدد 6 کا 6 سے کم بار وقوع ہونا					

SCERT TELANGANA

آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ

ایک وقوعہ کا امکان ہمیشہ 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔(0 اور ایک شامل ہوں گے)

(a) $0 \leq$ ایک وقوعہ کا امکان ≤ 1

(b) ایک وقوعہ کا امکان (جو ناممکن ہے) = 0

14.2.5 تجربہ کیجیے

1. ہم یہاں 3 تا 4 طلباء پر مشتمل ایک گروپ بنا کر تجربہ کریں گے' ہر گروپ ایک ہی پیمائش رکھنے والا اور ایک ہی قسم کا سکّہ استعمال کرے گا۔ ہر گروپ کا ایک طالب علم سکّہ کو 20 دفعہ اچھالتے ہوئے حاصل ہونے والے نتائج کا اندراج کرے گا۔ تمام گروپس معطیات کو نیچے کے جدول میں درج کریں گے۔ (جدول میں مثالیں بتلائی گئی ہیں)

گروپ نمبر	سکہ اچھالے جانے کی تعداد	گروپس کے سکہ اچھالنے کی مجموعی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی مجموعی تعداد	چت وقوع ہونے کی مجموعی تعداد / سکہ اچھالے جانے کی جملہ تعداد	پٹ وقوع ہونے کی مجموعی تعداد / سکہ اچھالے جانے کی جملہ تعداد
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20}=\frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40}=\frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

گروپس (6) اور (7) میں جب سکّہ کو اچھالنے کی جملہ تعداد بڑھائی جاتی ہے تو کسور کی قدر میں کیا تبدیلی ہوگی؟ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ترتیب وار ایک چت (H) اور ایک پٹ (T) کے وقوع پذیر ہونے کا امکان بھی بڑھ رہا ہے۔

2. اس مشغلہ میں بھی 3 تا 4 طلباء کا ایک گروپ ہوگا' ہر گروپ کا ہر ایک طالب علم 30 دفعہ بلا منصوبہ پانسہ لڑھکانے کے عمل کا تجربہ کرے گا۔ دوسرے طلباء ذیل کے جدول میں مشاہدات کا اندراج کریں گے۔ تمام گروپس ایک ہی قسم کے پانسہ کا استعمال کریں گے تاکہ سب کے پانسہ پھینکنے کا فعل ایک جیسا ہو۔

SCERT TELANGANA

پانسہ کولڑھکانے کی تعداد	ذیل کے نتائج کی تعداد					
	1	2	3	4	5	6
30						

تمام گروپس کے محصلہ معطیات کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے۔

گروپ (S)	پانسہ لڑھکانے پر '1' آنے کی تعداد	ایک پانسہ لڑھکانے کی جملہ تعداد	$\frac{\text{پانسہ لڑھکانے پر '1' آنے کی تعداد}}{\text{پانسہ لڑھکانے کی جملہ تعداد}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st} $1^{st}+2^{nd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$ $1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں جب پانسہ کو لڑھکانے کے عمل کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تو کالم (4) میں کسور $\frac{1}{6}$ سے قریب ہوتی جاتی ہیں۔نتیجہ 1 حاصل کرنے کے لیے ہم نے اوپر کا تجربہ کیا نتیجہ 2 اور نتیجہ 5 حاصل ہونے کے لیے بھی ایسی ہی جانچ کیجیے۔

کالم (4) میں حاصل ہونے والی کسری قدروں سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں اوران کے تقابل، ایک پانسہ کولڑھکانے پر امکانات 1، 2 اور 5 کے حاصل ہونے سے کیجیے۔

3. آپ یکبارگی دوسکّے اچھالیں تو کیا ہوگا؟ دونوں سکّے چت ظاہر کرسکتے ہیں یا دونوں بھی پٹ یا ایک چت اور ایک پٹ۔ کیا ان تینوں کے وقوع پذیر ہونے کا امکان یکساں ہوگا؟ گروہی مشغلہ میں انہی پرغور کیجیے۔

جماعت کو 9 بچوں کے گروپ میں تقسیم کیجیے۔ ہر گروپ کو دوسکّے رکھنا ہوگا۔ یاد رکھیے کہ استعمال کئے جانے والے سکّے یکساں پیائش اور یکساں قسم کے ہوں۔

ہر گروپ ایک ساتھ 20 دفعہ دوسکّے پھینکے گا اور جدول میں مشاہدات کو درج کرے گا۔

دوسکے ہم وقت اچھالنے کی تعداد	چت(H) وقوع نہ ہونے کی تعداد	ایک بار چت (H) وقوع ہونے کی تعداد	دو چت ایک ساتھ وقوع نہ ہونے کی تعداد
20			

SCERT TELANGANA

اب تمام گروپس کا مجموعی جدول بنانا ہوگا۔

گروپ (S)	دو سکے یکبارگی اچھالے جانے کی تعداد	چت (H) وقوع نہ ہونے کی تعداد	ایک چت (H) وقوع ہونے کی تعداد	دو چت وقوع ہونے کی تعداد
1^{st}				
$1^{st} + 2^{nd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd}$				
$1^{st} + 2^{nd} + 3^{rd} + 4^{th}$				
....				

اب ہم چت وقوع نہ ہونے کی تعداد اور دو سکّے بیک وقت اچھالنے کی جملہ تعداد میں نسبت معلوم کریں گے۔ کیا ایک چت اور دو چت وقوع پذیر ہونے کے لیے بھی یہی طریقہ ہوگا؟

ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے

گروپ (S)	چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد	ایک چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد	دو چت وقوع ہونے کی تعداد / سکوں کو اچھالنے کی جملہ تعداد
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st}			
$1 + 2^{nd}$			
$1 + 2 + 3^{rd}$			
$1 + 2 + 3 + 4^{th}$			
....			

سکّہ اچھالنے کی تعداد جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے، کالموں (2)، (3) اور (4) کی قدریں بتدریج 0.25، 0.5 اور 0.25 کے نزدیک ہوتی جائیں گی۔

مثال (3) : ایک چرخہ کو 1000 بار گھمایا گیا ہے نتائج کی تعداد کو ذیل کے جدول میں درج کیا گیا

نتیجہ	لال	زعفرانی	کاسنی	پیلا	ہرا
تعدد	185	195	210	206	204

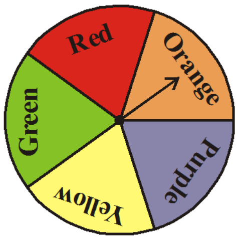
معلوم کیجیے (a) ممکنہ نتائج کی فہرست بنائیے جو آپ چرخی گھماتے وقت دیکھ سکتے ہیں۔ (b) ہر نتیجہ کے امکان کا تخمینہ کیجیے۔

(c) ہر نتیجہ اور چرخہ کے گھومنے کی تعداد میں نسبت معلوم کیجیے۔ (جدول دیکھیے)

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

حل :



اسپنر

(a) ممکنہ نتائج 5 ہیں۔وہ یہ ہیں: لال، زعفرانی، کاسنی، پیلا اور ہرا۔
یہاں چرخی میں پانچ رنگوں کا گھرا ہوا رقبہ مساوی ہے۔ یہ مساوی متوقع ہیں۔

(b) ہر وقوعہ کے امکان کا تخمینہ کیجیے۔

$$P(\text{لال}) = \frac{\text{لال رنگ وقوع ہونے کے موافق نتائج}}{\text{ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2$$

اسی طرح

P (زعفرانی)، P (کاسنی)، P (پیلا)، P (ہرا) بھی $\frac{1}{5}$ یا 0.2 ہوں گے۔

(c) تجربہ سے جدول میں تعدد کا اندراج کیا گیا۔

$$\text{لال کے لیے نسبت} = \frac{\text{اوپر کے تجربہ میں لال رنگ وقوع ہونے کے نتائج کی تعداد}}{\text{چرخی کے گھومنے سے بننے والے وقوعوں کی تعداد}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

اسی طرح زعفرانی، کاسنی، پیلے اور ہرے کی متناظر نسبتیں بتدریج 0.195، 0.210، 0.206 اور 0.204 ہوں گی۔
کیا ہم دیکھ سکتے ہیں کہ (b) میں ہر نسبت محصلہ امکانی قدر کے مساوی ہے۔ (تجربہ سے پہلے)

مثال (4) : ایک سینما تھیٹر میں بیٹھے ہوئے شائقین کی عمریں ذیل کے جدول میں دی گئی ہیں۔ ہر شخص کو ایک سلسلہ نشان دیا گیا ہے، اور ایک سلسلہ نشان بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہوئے اس سلسلہ نشان والے شخص کو بمپر پرائز کے لیے منتخب کیا جاتا ہے۔ اب آپ ہر وقوعہ کا قیاس کیجیے۔

عمر	مرد	عورتیں
2 سال تک	3	5
3 - 10 سال	24	35
11 - 16 سال	42	53
17 - 40 سال	121	97
41 - 60 سال	51	43
60 سال کے اوپر	18	13

شائقین کی جملہ تعداد = 505

SCERT TELANGANA

ذیل میں دیے گئے ہر وقوع کا قیاس کیجیے۔

(a) 10 سال یا اس سے کم عمر شائقین کا امکان

حل : $24 + 35 + 5 + 3 = 67$ 10 سال یا اس سے کم عمر کے شائقین   جملہ لوگوں کی تعداد = 505

P (شائقین کی عمر ≤ 10 سال) = $\frac{67}{505}$

(b) 16 سال یا اس سے کم عمر کی لڑکیوں کا قیاس

حل : $53 + 35 + 5 = 93$ 16 سال یا اس سے کم عمر کی لڑکیاں   P (لڑکیوں کی عمر ≤ 16 سال) = $\frac{93}{505}$

(c) 17 سال یا اس سے زیادہ عمر کے نوجوانوں کا قیاس

حل : $121 + 51 + 18 = 190$ = 17 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد

P (نوجوانوں کی عمر ≥ 17 سال) = $\frac{190}{505} = \frac{38}{101}$

(d) 40 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد کا قیاس

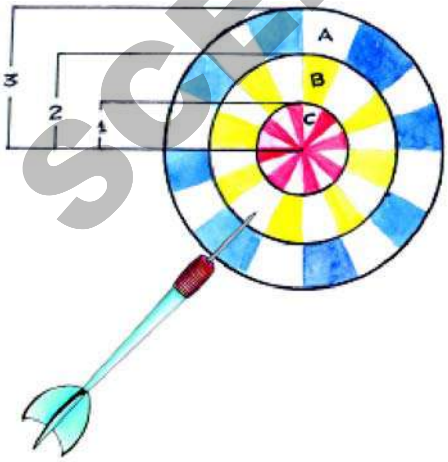
حل : $51 + 43 + 18 + 13 = 125$ = 40 سال یا اس سے زیادہ عمر کے افراد

P (شائقین کی عمریں > 40 سال) = $\frac{125}{505} = \frac{25}{101}$

(e) خواتین کا قیاس

حل : $5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246$ = خاتون شائقین

P (خاتون شائقین) = $\frac{246}{505}$



مثال (5) : فرض کیجیے کہ ایک برچھی نما کانٹا، ڈارٹ بورڈ سے ٹکراتا ہے، ڈارٹ بورڈ پر تمام تین ہم مرکز دائرے ہیں ان کے نصف قطر 1 سمر 2 سمر اور 3 سمر ہیں۔

ہر نقطہ مساوی امکانات پر وقوع بناتا ہے، جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

بورڈ کے خطہ 'A' (بیرونی حلقہ) میں ڈارٹ کے ٹکرانے سے وقوع ہونے کا قیاس کیجیے۔

حل : یہاں وقوع خطہ A سے ٹکراتا ہے۔

3 ہم نصف قطر سے دائری خطہ کا جملہ رقبہ = $\Pi(3)^2$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21
SCERT TELANGANA

دائروی خطہ 'A' کا رقبہ(حلقہ A) $= \Pi(3)^3 - \Pi(2)^2$

خطہ 'A' میں ڈارٹ بورڈ پر برچھی نما کانٹے کے ٹکرانے کے وقوع کا امکان

$$P(A) = \frac{\text{دائروی خطہ 'A' کا رقبہ}}{\text{جملہ رقبہ}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi}$$

$$\frac{5}{9} = 0.556 = 55.6\%$$

یاد رہے کہ

دائرہ کا رقبہ = πr^2

دائری حلقہ کا رقبہ = $\pi R^2 - \pi r^2$

کوشش کیجیے

مثال 5 میں دی گئی شکل سے

1. ڈارٹ بورڈ کے دائروی خطہ 'B' میں برچھی نما کانٹے (ڈارٹ) کے ٹکرانے کے وقوع کا قیاس کیجیے۔(جو حلقہ 'B' ہے)
2. بغیر محسوب کیے کہ بورڈ کے دائروی خطہ 'C' میں برچھی نما کانٹے (ڈارٹ) کے ٹکرانے کے وقوع کا قیاس کیجیے اور اس کا فیصد بھی معلوم کیجیے۔(جو حلقہ 'C' ہے)

14.3 عملی زندگی میں قیاس کا اطلاق

1. محکمہ موسمات، قدیم ریکارڈ کی مدد سے موسم کی پیش قیاسی کرتا ہے۔
2. بیمہ کمپنیاں حادثات کے امکانات کا اندازہ کر کے بیمہ کی اقساط کا تعین کرتی ہیں۔
3. انتخاب کے بعد Exit poll (امکانی نتائج) کے سلسلہ میں رائے دہندوں سے پوچھا جاتا ہے کہ انہوں نے کس جماعت کے حق میں ووٹ دیا ہے۔اس کے مطابق ہر امیدوار کے جیتنے کی پیش قیاسی کی جاتی ہے۔

SCERT TELANGANA

مشق 14.1

.1 پانسہ کے چھ رخ ہوتے ہیں اور ہر رخ پر 1 سے 6 تک اعداد لکھے ہوتے ہیں' پانسہ کو اچھالا جاتا ہے اور اوپری رخ پر وقوع ہونے والے عدد کو درج کرلیا جاتا ہے۔ اسے بلا منصوبہ تجربہ کہتے ہیں۔

(a) ممکنہ نتائج کیا ہیں؟

(b) کیا ان کے امکانات مساوی ہوتے ہیں؟

(c) اوپری رخ پر غیر مفرد عدد وقوع ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

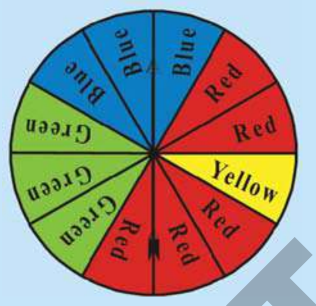
.2 ایک سکّہ کو 100 مرتبہ اچھالتے ہوئے اس سے حاصل ہونے والے نتائج کو اس طرح درج کیا گیا۔

چت (H) : 45 مرتبہ' پٹ (T) : 55 مرتبہ (تجربہ ہے)

(a) ہر نتیجہ کے احتمال کا تخمینہ کیجیے۔

(b) تمام نتائج کے امکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

.3 ایک چرخی میں چار رنگ ہیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ جب ہم اسے ایک دفعہ گھماتے ہیں' تو معلوم کیجیے۔



(a) کانٹے کے کس رنگ پر وقوع ہونے کے امکانات زیادہ ہیں؟

(b) کانٹے کے کس رنگ پر وقوع ہونے کے کم امکان ہیں؟

(c) کانٹے کے کن رنگوں پر وقوع ہونے کے مساوی امکانات مساوی ہیں؟

(d) کانٹے کے سفید رنگ پر وقوع ہونے کے کیا امکانات ہیں؟

(e) کیا کوئی بھی ایسا رنگ ہے جس پر کانٹا یقینی طور پر وقوع ہو سکے گا؟

.4 ایک تھیلی میں پانچ ہری گولیاں' تین نیلی گولیاں' دو لال گولیاں اور دو پیلی گولیاں پائی جاتی ہیں۔ اس میں سے بلا منصوبہ ایک کے بعد دیگرے گولیاں نکالی جاتی ہیں۔

(a) کیا چار مختلف رنگوں کے وقوعوں سے مساوی نتائج کا حصول متوقع ہے؟

(b) بلا منصوبہ نکالی جانے والی گولی کا امکان معلوم کیجیے۔

جیسے (پیلی) P اور (لال) P' (نیلی) P' (ہری) P

(c) ان کے امکانات کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

.5 انگریزی حروف تہجی سے کوئی ایک حرف کو منتخب کیا گیا حروف ہونے کا امکان معلوم کیجیے۔

(a) ایک حرف علت

(b) حرف جو p کے بعد آتا ہے۔

(c) ایک حرف علت یا ایک حرف سہی

(d) ایک حرف علت نہیں

SCERT TELANGANA

6. گیہوں کے آٹے کے گیارہ تھیلے ہیں جس پر 5 کلوگرام کا نشان لگایا گیا ہے، حقیقت میں یہ تھیلے ذیل میں دیے گئے اوزان پر مشتمل ہیں۔ (کلوگرام میں)

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

بلامنصوبہ تجربہ سے تھیلوں کا انتخاب کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ 5 کلوگرام سے زائد وزن رکھنے والے تھیلوں کا امکان کیا ہوگا؟

7. ایک بیمہ کمپنی، عمر اور حادثات میں ہم رشتگی محسوب کرنے کے مقصد سے ایک شہر سے بلامنصوبہ 2000 ڈرائیورس کا انتخاب کرتی ہے۔ اس سلسلہ کے معطیات ذیل کے جدول میں درج کیے گئے ہیں۔

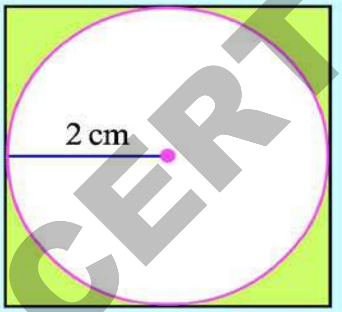
ڈرائیوروں کی عمر (سال میں)	ایک سال میں رونما ہونے والے حادثات				3 سے زیادہ حادثات
	0	**1**	**2**	**3**	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
Over 50	360	45	35	15	9

ذیل کے شہر سے بلامنصوبہ نتیجہ ایک ڈرائیور سے وقوع ہونے والے حادثات کا امکان معلوم کیجیے۔

(i) 18 سے 29 سال عمر والے ڈرائیورس سے ایک سال میں 3 حادثات ہوتے ہیں۔

(ii) 30 سے 50 سال عمر رکھنے والے ڈرائیورس سے ایک سال میں ایک یا زائد حادثات ہوتے ہیں۔

(iii) سال میں کوئی حادثات نہیں ہوتے۔



8. بلامنصوبہ پھینکا گیا کانٹا جب مربع بورڈ کے سایہ دار خطہ سے ٹکرائے تو اس کا امکان کیا ہوگا؟

(اشارہ: $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے اور فیصد میں ظاہر کیجیے)

SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا

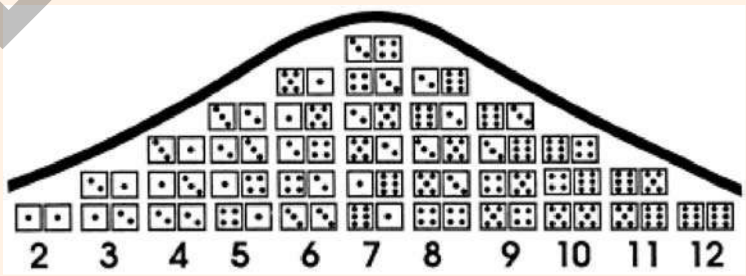
- روزمرہ زندگی میں ہم' زیادہ ممکن ہے' توقع نہیں ہے' مساویانہ امکان جیسے الفاظ کا استعمال کرتے ہیں' جس سے فیصلہ کرنے کا اندازہ کیا جاتا ہے۔
- بعض ایسے حقیقی تجربات ہوتے ہیں جس کے نتائج کے وقوع پذیر ہونے کا یکساں/مساوی امکان ہوتا ہے ایسے تجربات سے اخذ کیے گئے نتائج ''مساوی متوقع'' یا 'یکساں امکانی' کہلاتے ہیں۔
- تجربہ کے ذریعہ کسی نتیجہ یا نتائج کا اکٹھا کرنا ایک 'وقوعہ' کہلاتا ہے۔
- چند بلا منصوبہ تجربات میں تمام نتائج کے وقوع پذیر ہونے کا مساوی امکان ہوتا ہے۔
- تجربہ میں جیسے جیسے وقوعوں کی تعداد بڑھتی جاتی ہے' تمام ''مساویانہ متوقع'' نتائج کا امکان قریب تر ہوتا جاتا ہے۔
- ایک وقوعہ 'A' کا امکان

$$P(A) = \frac{\text{ممکنہ موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

- ایک وقوعہ کا امکان جو حقیقی ہے = 1
- ایک وقوعہ کا امکان جو ناممکن ہے = 0
- ایک وقوعہ کا امکان ہمیشہ 0 اور 1 کے درمیان پایا جاتا ہے۔(جس میں 0 اور 1 دونوں شامل ہیں)

کیا آپ جانتے ہیں؟

نیچے کا خاکہ بتلاتا ہے کہ جب ایک پانسہ کی جوڑی پھینکی جاتی ہے تو 36 ممکنہ نتائج وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ ایک دلچسپ مشاہدہ ہے کہ (2 سے 12 تک) مختلف ممکنہ اعداد کے نتائج کا تعدد کس طرح ترتیب دیا جاتا ہے۔ منحنی کو نیچے کی مثال کے ذریعہ سمجھیے۔



مندرجہ بالا منحنی خط کو گاشین منحنی کہتے ہیں جو کہ 19 ویں صدی کے مشہور ریاضی داں *Carl Friedrich Gauss* کی یادگار میں اس کے نام سے موسوم کیا گیا تھا۔

SCERT TELANGANA