1. **આપેલા અવલોકનો 3, 10, 10, 4, 7, 10, 5 નું મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન .... છે.**

(A) 2 (B) 2.57 (C) 3 (D) 3.75

જવાબ **(B) 2.57**

➡ અહીં 3, 10, 10, 4, 7, 10 અને 5 આપેલા અવલોકનો છે.

$\therefore$ મધ્યક $\bar{x} = \dfrac{3 + 10 + 10 + 4 + 7 + 10 + 5}{7}$

$= \dfrac{49}{7} = 7$

x_i	$d_i = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
3	4
10	3
10	3
4	3
7	0
10	3
5	2
કુલ	$\Sigma d_i = 18$

મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન $\delta\bar{x} = \dfrac{\Sigma d_i}{N} = \dfrac{18}{7} = 2.57$

2. **$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ એ કોઈ માહિતીના n અવલોકનો છે અને $\bar{x}$ તેનો મધ્યક છે. તો મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન નીચેના .... સૂત્રથી મળે.**

(A) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$ (B) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert$ (C) $\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert$ (D) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

જવાબ **(B)** $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert$

➡ મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન $\delta M = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert$

3. **5 વિજળીના ગોળાનું આયુષ્ય કલાકમાં નીચે મુજબ છે. 1357, 1090, 1666, 1494, 1623 તેમનો મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન .... કલાક થાય.**

(A) 178 (B) 179 (C) 220 (D) 356

જવાબ **(A) 178**

➡ 5 ગોળાનું આયુષ્ય 1357, 1090, 1666, 1494 અને 1623 કલાકમાં છે.

અહીં $n = 5$ અવલોકનોની સંખ્યા

$\therefore$ $\bar{x}$ મધ્યક $= \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{1357 + 1090 + 1666 + 1494 + 1623}{5}$$

$$= \frac{7230}{5}$$

$$= 1446$$

xi	1357	1090	1666	1494	1623	કુલ
$d_i = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	89	356	220	48	177	$890 = \Sigma d_i$

$\therefore$ મધ્યકથી સરેરાશ વિચલન $\delta\bar{x} = \frac{\Sigma d_i}{n}$

$$= \frac{890}{5}$$

$= 178$ કલાક

4. **100 ગુણની પરીક્ષામાં 9 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિત વિષયમાં મેળવેલા ગુણની માહિતી નીચે મુજબ છે.**
50, 69, 20, 33, 53, 39, 40, 65 અને 59 આ માહિતીનો મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલનનું મૂલ્ય .... છે.

(A) 9 (B) 10.5 (C) 12.67 (D) 14.76

જવાબ **(C) 12.67**

➡ સૌ પ્રથમ આપેલા અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં (Ascending order) માં લખતાં, 20, 33, 39, 40, 50, 53, 59, 65, 69.
અહીં n = અવલોકનોની સંખ્યા = 9
જે અયુગ્મ છે.

$\therefore$ મધ્યસ્થ $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

= 5 મું અવલોકન

$\therefore$ મધ્યસ્થ $Me = 50$

xi	20	33	39	40	50	53	59	65	69	કુલ
$\lvert x_i - Me \rvert$	30	17	11	10	00	03	09	15	19	114

મધ્યસ્થથી સરેરાશ વિચલન $= \frac{\Sigma \lvert x_i - M_e \rvert}{n}$

$$= \frac{114}{9}$$

$$= 12.67$$

5. **અવલોકનો 6, 5, 9, 13, 12, 8 અને 10 માટે પ્રમાણિત વિચલન σ = ...**

(A) $\sqrt{\frac{52}{7}}$ (B) $\frac{52}{7}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 6

જવાબ **(A)** $\sqrt{\frac{52}{7}}$

➡

xi	6	5	9	13	12	8	10	કુલ 63
x_i^2	36	25	81	169	144	64	100	$619 = \Sigma x_i^2$

અહીં $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{63}{7} = 9$

પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$

$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{619}{7} - 81}$

$= \sqrt{\frac{619 - 567}{7}}$

$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{52}{7}}$

6. જો $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ કોઈ માહિતીના n અવલોકનો હોય તથા $\bar{x}$ તેનો મધ્યક હોય તો પ્રમાણિત વિચલન નીચેના પૈકી .... સૂત્રથી મળે.

(A) $\sum(x_i - \bar{x})^2$ (B) $\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ (C) $\sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$ (D) $\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^{-2}}$

જવાબ **(C)** $\sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

➥ પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$ સૂત્રથી મળે.

7. 50 અવલોકનો માટેનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 50 અને 5 છે, તો આ અવલોકનોનો વર્ગોનો સરવાળો .... છે.

(A) 50000 (B) 250000 (C) 252500 (D) 255000

જવાબ **(C) 252500**

➥ અહીં n = અવલોકનોની સંખ્યા = 100

$\bar{x}$ = અવલોકનોનો મધ્યક = 50

σ = અવલોકનોનું પ્રમાણિત વિચલન = 5

હવે $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$\therefore 50 = \frac{\sum x_i}{100}$

$\therefore \Sigma x_i = 50000$

હવે $(\sigma)^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$

$\therefore 25 = \frac{\sum x_i^2}{100} - (50)^2$

$\therefore 25 + (50)^2 = \frac{\sum x_i^2}{100}$

$\therefore 25 + 2500 = \frac{\sum x_i^2}{100}$

$\therefore \frac{\sum x_i^2}{100} = 2525$

$\therefore \Sigma x_i^2 = 252500$

$\therefore$ અવલોકનોના વર્ગોનો સરવાળો = 252500 થાય.

8. જો a, b, c, d અને e કોઈ પ્રયોગના 5 અવલોકનો છે. તેમનો મધ્યક m અને પ્રમાણિત વિચલન S છે. જો દરેક અવલોકનોમાં k ઉમેરવામાં આવે તો નવા અવલોકનો $a + k, b + k, c + k, d + k$ અને $e + k$ નું પ્રમાણિત વિચલન .... છે.

(A) S (B) $k \cdot$ S (C) S + k (D) $\frac{S}{k}$

જવાબ **(A) S**

➥ માહિતીના આપેલા અવલોકનોમાં કોઈ શૂન્યેતર અચળ k ઉમેરવામાં આવે તો મધ્યકમાં અચળ k જેટલો વધારો થશે. અર્થાત્ નવો મધ્યક $(m + k)$ થાય. જ્યારે પ્રમાણિત વિચલનમાં કોઈ ફેર મડી નહીં. આમ અચળ k ઉમેરતાં નવું પ્રમાણિત વિચલન S જ રહે.

<u>અગત્યની નોંધ :</u>

ધારો કે $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ માહિતીના n અવલોકનોનો મધ્યક $\overline{x}$ તથા પ્રમાણિત વિચલન S છે.

હવે દરેક અવલોકનને અચળ a વડે ગુણીને k ઉમેરવામાં આવે તો નવો મધ્યક $a \cdot \overline{x} + k$ થાય. અને નવું પ્રમાણિત વિચલન $|a| \cdot$ S થાય.

9. $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ કોઈ માહિતીના n અવલોકનોનો મધ્યક m અને પ્રમાણિત વિચલન S છે. જો દરેક અવલોકનને k વડે ગુણવામાં આવે તો નવું પ્રમાણિત વિચલન .... થાય.(જ્યાં $k \neq 0$)

(A) $|k| + S$ (B) $\frac{S}{|k|}$ (C) $|k| \cdot S$ (D) S

જવાબ **(C) $|k| \cdot S$**

➥ માહિતીના n અવલોકનોને અચળ k વડે ગુણવામાં આવે તો નવી માહિતીનો મધ્યક $|k| \cdot S$ થાય. (આંકડાશાસ્ત્રનો મૂળભૂત ખ્યાલ).

10. $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ કોઈ માહિતીના n અવલોકનો n છે. હવે $W_i = lx_i + k$ જ્યાં $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ હોય તથા માહિતીનો મધ્યક 48, પ્રમાણિત વિચલન 12 તથા W_i નો મધ્યક 55 હોય તો અને W_i નું પ્રમાણિત વિચલન 15 હોય તો l તથા k ના મૂલ્યો અનુક્રમે .... થાય.

(A) $l = 1.25$ અને $k = -5$ (B) $l = -1.25$ અને $k = 5$ (C) $l = 2.5$ અને $k = -5$ (D) $l = 2.5$ અને $k = 5$

જવાબ **(A) $l = 1.25$ અને $k = -5$**

➥ માહિતીના અવલોકનો $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ના દરેક ઘટકને l વડે ગુણીને અચળ k ઉમેરતાં નવો મધ્યક $W_i = l\overline{x} + k$ થાય.

અહીં $W_i = 55$ છે.

$\therefore 55 = l(48) + k$ ....(i)

નવું પ્રમાણિત વિચલન $= |l| \cdot S$

$\therefore 15 = |l| \cdot 12$

$\therefore \frac{15}{12} = l$

$\therefore l = \frac{5}{4}$

$\therefore l = 1.25$ થાય.

આ મૂલ્ય પરિણામ (i) માં મૂકો.

$\therefore 55 = \frac{5}{4}(48) + k$

$= 60 + k$

$\therefore 50 - 60 = k$

$\therefore k = -5$

11. પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત વિચલન .... થાય.

(A) 5.5 (B) 3.87 (C) 2.97 (D) 2.87

જવાબ **(D) 2.87**

➥ <u>યાદ રાખો :</u>

પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત વિધાન $S = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$ છે.

$\therefore$ પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત વિચલન

$= \sqrt{\frac{(10)^2 - 1}{12}}$

$= \sqrt{\frac{100 - 1}{12}}$

$= \sqrt{\frac{99}{12}}$

$= \sqrt{\frac{33}{4}}$

$\therefore \ \sigma = \sqrt{8.25}$

$\therefore \ \sigma = 2.87$

12. પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ 1, 2, 3, 4, ..., 10 દરેક સંખ્યામાં 1 (એક) ઉમેરતાં મળતી નવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું વિચરણ .... થશે.

(A) 6.5 (B) 2.87 (C) 3.87 (D) 8.25

જવાબ **(D) 8.25**

➡ આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું વિચરણ $= \frac{n^2 - 1}{12}$ છે.

હવે $n = 10$ મૂકો.

$\therefore$ પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું વિચરણ $= \frac{(10)^2 - 1}{12}$

$= \frac{100 - 1}{12}$

$= \frac{99}{12}$

$= \frac{33}{4} = 8.25$

$\therefore$ પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું વિચરણ = 8.25

અહીં દરેક સંખ્યામાં 1 ઉમેરતાં નવું વિચરણ $|1|$ 8.25 થાય. અર્થાત્ વિચરણ 8.25 જ રહે.

આમ, પ્રથમ દસ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાં દરેક 1 ઉમેરતાં નવી સંખ્યાઓનું વિચરણ = 8.25 રહે.

<u>નોંધ :-</u>

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ માહિતીના n અવલોકનોનું પ્રમાણિત વિચલન (અર્થાત્ વિચરણનું ધન વર્ગમૂળ) S છે. જો દરેક અવલોકનને શૂન્યેતર k વડે ગુણતાં નવું પ્રમાણિત વિચલન $|k| \cdot S$ થાય.

13. પ્રથમ 10 ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને –1 વડે ગુણીને દરેક સંખ્યામાં 1 ઉમેરવામાં આવે છે. તો નવી સંખ્યાઓનું વિચરણ .... થાય.

(A) 8.25 (B) 6.5 (C) 3.87 (D) 2.87

જવાબ **(A) 8.25**

➡ પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો વિચરણ $= \frac{n^2 - 1}{12}$ છે.

હવે 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાોનું વિચરણ $= \frac{(10)^2 - 1}{12}$

$= \frac{99}{12}$

$= \frac{33}{4} = 8.25$

હવે દરેક સંખ્યાને –1 વડે ગુણીને 1 ઉમેરતાં Ex.No.(31) ની નોંધ મુજબ પ્રમાણિત વિચલન બદલાશે નહીં.

14. એક માહિતીના 60 અવલોકનો માટે $\Sigma x_i^2 = 18000$ અને $\Sigma x_i = 960$ છે. તો વિચરણ .... થાય.

(A) 6.63 (B) 16 (C) 22 (D) 44

જવાબ **(D) 44**

➡ અહીં વિચરણ $= \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$

$= \frac{18000}{60} - \left(\frac{960}{60}\right)^2$

$= 300 - (16)^2$

$= 300 - 256 = 44$

15. બે માહિતીના વિતરણના અવલોકનોનો ચલનાંક અનુક્રમે 50 અને 60 છે તથા તેમનો સમાંતર મધ્યક 30 તથા 25 છે. તો તેમના પ્રમાણિત વિચલનનો તફાવત .... થાય.

(A) 0 (B) 1 (C) 1.5 (D) 2.5

જવાબ **(A) 0**

➡ પ્રથમ માહિતીનો ચલનાંક $CV_1 = 50$

બીજી માહિતીનો ચલનાંક $CV_2 = 60$

પ્રથમ માહિતીનો સમાંતર મધ્યક $\bar{x}_1 = 30$

બીજી માહિતીનો સમાંતર મધ્યક $\bar{x}_2 = 25$

હવે $CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

$\therefore 50 = \frac{\sigma_1}{30} \times 100$

$\therefore \sigma_1 = 15$

આજ રીતે $\sigma_2 = 15$ મળે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલનનો તફાવત $= \sigma_1 - \sigma_2$

$= 15 - 15$

$= 0$

16. એક તાપમાનનું સેલ્સિયસમાં પ્રમાણિત વિચલન 5 છે. જો આ માહિતીને ફેરનહીટમાં રૂપાંતર કરવામાં આવે તો વિચરણ .... થશે.

(A) 81 (B) 57 (C) 36 (D) 25

જવાબ **(A) 81**

➡ ધારો કે $\sigma_C = 5 \Rightarrow \frac{5}{9}(F - 32) = C$

$F = \frac{9C}{5} + 32$

$\sigma_F = \frac{9}{5}\sigma_C = \frac{9}{5} \times 5 = 9$

અહીં $\sigma_F^2 = (9)^2 = 81$

17. એવા વિધાન $P(n)$ નું ઉદાહરણ આપો, જે દરેક $n \geq 4$ માટે સત્ય હોય. પણ $P(1)$, $P(2)$ અને $P(3)$ સત્ય ન હોય. તમારા જવાબની ચકાસણી કરો.

➡ ધારો કે વિધાન $P(n) : 3n < n!$ છે.

હવે $n = 1$ માટે $P(1) : 3(1) < 1!$

$\therefore 3 < 1$

જે સત્ય નથી.

હવે $n = 2$ માટે $P(2) : 3(2) < 2!$

$\therefore 6 < 1 \times 2$

$\therefore\ 6 < 2$

જે સત્ય નથી.

હવે $n = 3$ માટે P(3) : $3(3) < 3!$

$\therefore\ 9 < 1 \times 2 \times 3$

$\therefore\ 9 < 6$

જે સત્ય નથી.

હવે $n = 4$ માટે P(4) : $3(4) < 4!$

$\therefore\ 12 < 1 \times 2 \times 3 \times 4$

$\therefore\ 12 < 24$

જે સત્ય છે.

$n = 5$ માટે P(5) : $3(5) < 5!$

$15 < 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$15 < 120$

જે સત્ય છે.

આમ, વિધાન P(n) : $3n < n!$ એ પ્રત્યેક $n \geq 4$ માટે સત્ય છે.

18. એવા વિધાન P(n) નું ઉદાહરણ આપો, જે પ્રત્યેક n માટે સત્ય હોય. તમારા જવાબની ચકાસણી કરો.

➥ ધારો કે, વિધાન P(n) નીચે મુજબ છે.

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ માટે P(1) : $1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$

$\therefore\ 1 = \frac{2(3)}{6}$

$\therefore\ 1 = 1$

$n = 2$ માટે P(2) : $1 + 2^2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6}$

$\therefore\ 5 = \frac{30}{6} \Rightarrow 5 = 5$

$n = 3$ માટે P(3) : $1 + 2^2 + 3^2 = \frac{3(3+1)(7)}{6}$

$\therefore\ 1+4+9 = \frac{3 \times 4 \times 7}{6}$

$\therefore\ 14 = 14$

આમ, આપેલ વિધાન તમામ n માટે સત્ય છે.

19. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો :
$4^n - 1$ એ પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

➥ P(n) : $4^n - 1$ એ પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

સૌ પ્રથમ $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore$ P(1) : $4^1 - 1$

$= 4 - 1$

$= 3$

અહીં સ્પષ્ટ છે કે, 3 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન P(n) એ $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ, P(k) : $4^k - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore\ 4^k - 1 = 3q$, જ્યાં $q \in N$

$\therefore$ વિધાન P(n) એ $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે, તેમ સાબિત કરતાં,

$\therefore$ P($k + 1$) : $(4^{k+1}) - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે, તેમ સાબિત કરતાં,

$\therefore$ P(k + 1) : $4^{k+1} - 1$

$= 4^k \cdot 4 - 1$

$= 3.4^k + 4^k - 1$

$= 3.4^k + 3q$

$= 3(4^k + 1)$

આમ, $4^{k+1} - 1$ એ 3 નો સહગુણક છે.

$\therefore$ $4^{k+1} - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $n = k + 1$ માટે સત્ય છે.

આમ $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન P(n) એ પ્રત્યેક $n \in$ N માટે સત્ય છે.

20. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $2^{3n} - 1$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in$ N

➡ P(n) : 2^{3n-1} એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in$ N

$n = 1$ માટે,

$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ જે 7 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k), $k \in$ N માટે સત્ય છે.

$\therefore$ $2^{3k} - 1$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $2^{3k} - 1 = 7m$ જ્યાં $m \in$ N

$\therefore$ $2^{3k} = 7m + 1$ ... (i)

$n = k + 1$ માટે,

$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \cdot 2^3 - 1$

$= (7m + 1)\, 8 - 1$ ($\because$ (i) પરથી)

$= 7m \times 8 + 8 - 1$

$= 7m \times 8 + 7$

$= 7(8m + 1)$ જે 7 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે $\forall n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

21. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $n^3 - 7n + 3$ એ પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ P(n) : $n^3 - 7n + 3$ એ $\forall n \in$ N માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

સૌ પ્રથમ $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

P(1) : $(1)^3 - 7(1) + 3$

$= 1 - 7 + 3$

$= 4 - 7$

$= -3$

જે 3 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.

$\therefore$ વિધાન P(n) એ $n = 1$ માટે સત્ય છે.

હવે ધારો કે આપેલ વિધાન P(n) એ $n = k \in$ N માટે
સત્ય છે.

આમ, વિધાન P(k) : $k^3 - 3k + 3$ એ $\forall n \in$ N માટે સત્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,

આમ, $k^3 - 7k + 3 = 3t$ જ્યાં $t \in$ N

હવે વિધાન P(n) ને $n = k + 1 \in$ N સાબિત કરતાં,

∴ $P(k + 1) : (k + 1)^3 - 7(k + 1) + 3$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. તેમ સાબિત કરતાં,

∴ $(k + 1)^3 - 3(k + 1) + 3$

$= k^3 + 1 + 3k(k + 1) - 7k - 7 + 3$

$= k^3 - 7k + 3 + 3k(k + 1) - 6$

$= 3t + 3[k(k + 1) - 2]$

$= 3[t + k(k + 1) - 2]$

આમ, $P(k + 1)$ એ 3 નો સહગુણક ધરાવતી સંખ્યા છે.

∴ $P(k + 1)$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

∴ વિધાન $P(n)$ એ $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

∴ ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન $\forall n \in N$ માટે સત્ય છે તેમ કહેવાય.

22. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $\forall n \in N$ માટે $3^{2n} - 1$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ $P(n) : 3^{2n} - 1$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

∴ $P(1) : 3^{2(1)} - 1$

$= 9 - 1$

$= 8$

જે 8 વડે વિભાજ્ય છે.

∴ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : 3^{2k} - 1, k \in N$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

∴ $3^{2k} - 1 = 8t, \quad t \in N$

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

∴ $P(k + 1) : 3^{2(k+1)} - 1$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે તેમ સાબિત કરતાં,

હવે $3^{2(k+1)} - 1$

$= 3^{2k+2} - 1$

$= 3^{2k} \cdot 3^2 - 1$

$= 3^{2k}(9) - 1$

$= 3^{2k}(8 + 1) - 1$

$= 8 \cdot (3^{2k}) + 3^{2k} - 1$

$= 8(3^{2k}) + 8t$

$= 8(3^{2k} + t)$

આમ, વિધાન $P(k + 1)$એ 8 નો સહગુણક ધરાવતી સંખ્યા છે.

∴ તે 8 વડે વિભાજ્ય છે.

∴ વિધાન $P(k + 1), \forall k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

∴ ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન $P(n)$ પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n \in N$ માટે સત્ય છે.

23. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $\forall n \in N$ માટે $7^n - 2^n$ એ 5 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ $P(n) : 7^n - 2^n$ એ 5 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

∴ $P(1) : 7^1 - 2^1$

$= 7 - 2$

$= 5$

જે 5 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ, $P(k) : 7^k - 2^k$ એ 5 વડે વિભાજ્ય છે.

તેમ સ્વીકારતાં,

$\therefore 7^k - 2^k = 5t$, જ્યાં $t \in N$

હવે વિધાન $P(n)$ ને $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

અર્થાત્ $P(k + 1) : 7^{k+1} - 2^{k+1}$ એ 5 વડે વિભાજ્ય છે તેમ સાબિત કરતાં,

$\therefore 7^{k+1} - 2^{k+1} = 7^k \cdot 7 - 2^k \cdot 2$

$= 7^k(5 + 2) - 2^k \cdot 2$

$= 5(7^k) + 2 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k$

$= 5(7^k) + 2(7^k - 2^k)$

$= 5(7^k) + 2(5t)$ ($\because$ વિધાન $P(k)$ પ્રમાણે)

$= 5(7^k + 2t)$

આમ, વિધાન $P(k + 1)$એ 5 વડે વિભાજ્ય છે.

તેમ સાબિત થાય છે.

$P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન $\forall n \in N$ માટે સત્ય છે.

24. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $x^n - y^n$ એ $x - y$ વડે વિભાજ્ય છે $n \in N$. જ્યાં x અને y ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

➡ અહીં $P(n) : x^n - y^n$ એ $x - y$ વડે વિભાજ્ય છે, $n \in N$

જ્યાં x તથા y ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

હવે $n = 1$ માટે વિધાન સાબિત કરતાં,

$P(1) : x' - y'$

$= x - y$

જે $x - y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : x^k - y^k$ એ $x - y$ વડે વિભાજ્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,

$\therefore x^k - y^k = t(x - y)$ જ્યાં $t \in N$.

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(k + 1) : x^{k+1} - y^{k+1}$ એ $x - y$ વડે વિભાજ્ય છે. તેમ સાબિત કરતાં,

હવે $x^{k+1} - y^{k+1}$

$= x^k \cdot x - y^k \cdot y$

$= x^k \cdot x - x^k \cdot y + x^k \cdot y - y^k \cdot y$

$= x^k(x - y) + y(x^k - y^k)$

$= x^k(x - y) + y \cdot t(x - y)$ ($\because$ વિધાન $P(k)$ પરથી)

$= (x - y) \{x^k + yt\}$

આમ, વિધાન $P(k + 1)$ એ $(x - y)$ વડે વિભાજ્ય છે, તેમ કહેવાય.

$\therefore$ વિધાન $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન $P(n)$, $\forall n \in N$ માટે સત્ય છે.

25. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો :

$\forall n \geq 2$ માટે $n^3 - n$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ $P(n) = n^3 - n$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે. જ્યાં $n \geq 2 \in N$.

હવે $n = 2$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(2) : 2^3 - 2$

$= 8 - 2$

$= 6$

જે 6 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $n = 2$ માટે સત્ય છે.

હવે ધારો કે આપેલ વિધાન $P(n)$ એ $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : k^3 - k$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

જ્યાં $k \neq 2 \in N$.

અર્થાત્ $k^3 - k = 6t,\ t \in N$.

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(k + 1) : (k + 1)^3 - (k + 1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે. તેમ સાબિત કરતાં,

હવે $(k + 1)^3 - (k + 1)$

$= k^3 + 1 + 3k(k + 1) - (k + 1)$

$= k^3 + 1 + 3k^2 + 3k - k - 1$

$= k^3 - k + 3k(k + 1)$

$= 6t + 3k(k + 1)$ ($\because$ વિધાન $P(k)$ પરથી)

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\forall k \in N$ માટે $3k(k + 1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય થાય.

$\therefore$ આપેલ વિધાન $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ વિધાન $P(n)$ એ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે તેમ કહેવાય.

26. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : પ્રત્યેક $n \in N$ માટે વિધાન $n(n^2 + 5)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

➡ $P(n) : n(n^2 + 5)$ એ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે 6 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(1) : 1(1^2 + 5)$

$= 1(6)$

$= 6$

જે 6 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $P(n)$ એ $n = 1$ માટે સત્ય છે.

હવે ધારો કે $n = k \in N$ માટે વિધાન $P(k)$ સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : k(k^2 + 5)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

તેમ સ્વીકારતાં,

અર્થાત્ $k(k^3 + 5) = 6t,\ t \in N$.

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

અર્થાત્ $P(k + 1) : (k + 1)\{(k + 1)^2 + 5\}$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે. તેમ સાબિત કરતાં,

અહીં $(k + 1)\{(k + 1)^2 + 5\}$

$= (k + 1)^3 + 5(k + 1)$

$= k^3 + 1 + 3k(k + 1) + 5k + 5$

$= k^3 + 1 + 3k^2 + 3k + 5k + 5$

$= k^3 + 3k^2 + 6k + 6$

$= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6$

$= k(k + 5) + 3(k^2 + k + 2)$

$= 6t + 3(k^2 + k + 2)$

અહીં, $k^2 + k + 2$ એ પ્રત્યેક $k \in N$ માટે 2 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $3(k^2 + k + 2)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય થાય.

$\therefore$ $P(k + 1) : 6t + 3(k^2 + k + 2)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે. તેમ સાબિત થાય છે.

$\therefore$ વિધાન $P(k + 1)$ સત્ય છે.

આમ, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન $P(n)$ એ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

27. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરો : $n^2 < 2^n$, $n \geq 5$.

➥ $P(n) : 2^n > n^2, \ n \geq 5, \ \forall n \in N$

$n = 5$ માટે $P(5) : 2^5 > 5^2$

$\therefore$ $32 > 25$ જે સત્ય છે.

$\therefore$ $P(5)$ સત્ય છે.

$n = k, \ k > 5, \ k \in N$ માટે ધારો કે $P(k)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k) : 2^k > k^2$

$\therefore$ $k^2 < 2^k$

$\therefore$ $k^2 + (2k + 1) < 2^k + (2k + 1)$

$\therefore$ $(k + 1)^2 < 2^k + (2k + 1)$ પરંતુ $(2^k + 1) < 2^k, \ k \geq 5$

$\therefore$ $(k + 1)^2 < 2^k + 2^k$

$\therefore$ $(k + 1)^2 < 2 \cdot 2^k$

$\therefore$ $(k + 1)^2 < 2^{k+1}$

$\therefore$ $2^{k+1} > (k+1)^2$

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત પરથી $P(n), \ \forall n \in N$ સત્ય છે.

28. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $2n < (n + 2)! \ \forall n \in N$.

➥ $P(n) : 2n < (n + 2)! \ n \in N$

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(1) : 2(1) < (1 + 2)!$

$= 2 < 3!$

$= 2 < 1 \times 2 \times 3$

$= 2 < 6$

જે સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $P(n)$ એ $n = k \in N$ સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : 2k < (k + 2)! \ k \in N$ સત્ય વિધાન છે તેમ સ્વીકારતાં,

હવે વિધાન $P(n)$ એ $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત કરતાં,

અર્થાત્ $P(k + 1) : 2(k + 1) < (k + 1 + 2)!$ સાબિત કરતાં,

હવે $2k < (k + 2)!$ ($\because$ વિધાન $P(k)$ પરથી)

$\therefore$ $2k + 2 < (k + 2)! + 2$

$\therefore$ $2(k + 1) < (k + 2)! + 2$ ....(i)

તથા $(k + 2)! + 2 < (k + 3)!$ ....(ii)

$\therefore$ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$2(k + 1) < (k + 3)\,!$

$\therefore\ 2(k + 1) < (k + 1 + 2)\,!$

$\therefore$ આપેલ વિધાન $n = k + 1 \in N$ માટે પણ સત્ય છે.

આમ, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$\therefore$ ગાણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન

$\forall n \in N$ માટે સત્ય છે.

29. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો :

$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ **જ્યાં** $n \geq 2 \in N.$

➥ $P(n) : \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

જ્યાં $n \geq 2 \in N.$

સૌ પ્રથમ $n = 2$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(2) : \sqrt{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 2 < \sqrt{2} + 1$

જે સત્ય છે.

$\because$ અહીં $\sqrt{2} = 1.41$ થાય.

$\therefore \sqrt{2} + 1 = 1.41 + 1 = 2.41$ થશે.

$\therefore 2 < 2.41$ જે સત્ય છે.

વિધાન $n = 2$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે, આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) : \sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}}$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(k + 1) : \sqrt{k + 1} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{k + 1}}$

સાબિત કરતાં,

અહીં $\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($\because$ વિધાન $P(k)$ મુજબ)

➥ $P(n) : \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

જ્યાં $n \geq 2 \in N.$

સૌ પ્રથમ $n = 2$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(2) : \sqrt{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 2 < \sqrt{2} + 1$

જે સત્ય છે.

$\because$ અહીં $\sqrt{2} = 1.41$ થાય.

$\therefore \sqrt{2} + 1 = 1.41 + 1 = 2.41$ થશે.

$\therefore 2 < 2.41$ જે સત્ય છે.

વિધાન $n = 2$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે, આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore P(k) : \sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}}$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(k + 1) : \sqrt{k+1} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} .... + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

સાબિત કરતાં,

અહીં $\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} .... + \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($\because$ વિધાન $P(k)$ મુજબ)

30. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો : $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n, \ n \in N$.

➡ $P(n) : 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n, \ \forall n \in N$

$n = 1$ માટે ડા.બા. $= 2$, જ.બા. $= (1)^2 + 1 = 2$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore P(1)$ સત્ય છે.

$P(k) : 2 + 4 + 6 + ... + 2k = k^2 + k$ સત્ય છે. $(k \in N)$... (i)

$n = k + 1$ માટે,

$P(k + 1) = 2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1)$

$= k^2 + k + 2(k + 1)$ ($\because$ પરિણામ (i) પરથી)

$= k^2 + k + 2k + 2$

$= k^2 + 2k + 1 + k + 1$

$= (k + 1)^2 + (k + 1)$

$\therefore P(k + 1)$ સત્ય છે.

$P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંત મુજબ $P(n), \ \forall n \in N$ સત્ય છે.

31. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો :
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1, \ n \in N$.

➡ $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1, \ n \in N$.

<u>નોંધ :</u> અહીં ડા.બા.માં કુલ $(n + 1)$ પદ છે. હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(1)$: ડા.બા. $= 1 + 2$

$= 3$

જ.બા.$= 2^{1+1} - 1$

$= 2^2 - 1$

$= 4 - 1$

$= 3$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે આપેલ વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$,

$k \in N$ માટે સત્ય છે. તેમ સ્વીકારતાં,

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

$\therefore P(k + 1) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1, \ (k + 1) \in N$

સાબિત કરતાં,

$P(k + 1) : 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1}$

$= \{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k\} + 2^{k+1}$

$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$

$= 2(2^{k+1}) - 1$

$= 2^{k+2} - 1$

$= 2^{(k+1)} - 1$

= જ.બા.

વિધાન $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

32. આપેલ પ્રત્યેક વિધાન ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો :
$1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1), n \in N$.

➥ ધારો કે $P(n) : 1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1), n \in N$

$n = 1$ માટે,

ડા.બા. = 1

જ.બા. = $1 (2 \times 1 - 1) = 1$

ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$ માટે સત્ય છે, તેમ સ્વીકારતાં $k \in N$

$P(k) : 1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) = k(2k - 1)$ .... (1)

$n = k + 1$ માટે, આપેલ વિધાન સત્ય સાબિત કરતાં

ડા.બા. $= 1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) + (4(k + 1) - 3)$

$= k(2k - 1) + (4k + 4 - 3)$ ($\because$ (1) પરથી)

$= 2k^2 - k + 4k + 1$

$= 2k^2 + 3k + 1$

$= 2k^2 + 2k + k + 1$

$= (k + 1)(2k + 1)$

$= (k + 1)[2(k + 1) - 1]$

ડા.બા. = જ.બા.

$\therefore$ વિધાન $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંતથી $\forall\ n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.