1. **જો $\sin x + i\cos 2x$ અને $\cos x - i\sin x$ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા હોય, તો નીચેના પૈકી .... વિકલ્પ સત્ય હોય.**

(A) $x = n\pi,\ n \in Z$ (B) $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2},\ n \in Z$

(C) $x = 0$ (D) xની એકપણ કિંમત ન મળે.

જવાબ **(D) x ની એકપણ કિંમત ન મળે.**

➡ ધારો કે $z = \sin x + i\cos 2x$

અને $\bar{z} = \sin x + i\cos 2x$ ....(i)

અહીં $\bar{z} = \cos x - i\sin 2x$ ....(ii)

$\therefore \sin x - i\cos 2x = \cos x - i\sin 2x$

$\therefore \sin x = \cos x$ અને $\cos 2x = \sin 2x$

$\therefore \tan x = 1$ અને $\tan 2x = 1$

$\therefore \tan x = \tan\frac{\pi}{4}$ અને $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ અને $2x = n\pi + \frac{\pi}{4}\quad n \in Z$

$\therefore 2x - x = 0 \Rightarrow x = 0$

2. **જો $\frac{1 - i\sin\alpha}{1 + 2i\sin\alpha}$ શુદ્ધ વાસ્તવિક સંકર સંખ્યા હોય, તો α = ...**

(A) $(n+1)\frac{\pi}{2}$ (B) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (C) $n\pi$ (D) આ પૈકી એકપણ નહીં.

જવાબ **(C) $n\pi$**

➡ અહીં $z = \frac{1 - i\sin\alpha}{1 + 2i\sin\alpha}$

$$= \frac{(1 - i\sin\alpha)(1 - 2i\sin\alpha)}{(1 + 2i\sin\alpha)(1 - 2i\sin\alpha)}$$

$$= \frac{1 - i\sin\alpha - 2i\sin\alpha + 2i^2\sin^2\alpha}{1 - 4i^2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1 - 3i\sin\alpha - 2\sin^2\alpha}{1 + 4\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + 4\sin^2\alpha} - \frac{3i\sin\alpha}{1 + 4\sin^2\alpha}$$

અહીં z શુદ્ધ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$\therefore \frac{-3\sin\alpha}{1 + 4\sin^2\alpha} = 0$

$\therefore -3\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

$\therefore \alpha = n\pi,\ n \in N$

3. **જો $z = x + iy$ ત્રીજા ચરણમાં હોય અને $\frac{\bar{z}}{z}$ ત્રીજા ચરણમાં હોય તો ....**

(A) $x > y > 0$ (B) $x < y < 0$ (C) $y < x < 0$ (D) $y > x > 0$

જવાબ (B) $x < y < 0$

➡ $z = x + iy$ ત્રીજા ચરણમાં છે.

$\therefore\ x < 0$ અને $y < 0$

હવે $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{x - iy}{x + iy} = \dfrac{(x - iy)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2}$

$\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{2ixy}{x^2 + y^2}$

અહીં $\dfrac{\overline{z}}{z}$ ત્રીજા ચરણમાં છે.

$\therefore\ \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < 0$ અને $\dfrac{-2xy}{x^2 + y^2} < 0$

$\therefore\ x^2 - y^2 < 0$ અને $2xy < 0$

$\therefore\ x^2 < y^2$ અને $xy > 0$

$\therefore\ x < y < 0$

4. $(z + 3)(\overline{z} + 3)$ નું મૂલ્ય = ...

(A) $|z + 3|^2$ (B) $|z - 3|$ (C) $z^2 + 3$ (D) આ પૈકી એકપણ નહીં.

જવાબ (A) $|z + 3|^2$

➡ $(z + 3)(\overline{z} + 3)$ આપેલ છે.

ધારો કે, $z = x + iy$

$\therefore\ (z + 3)(\overline{z} + 3) = (x + iy + 3)(x + 3 + iy)$

$= (x + 3)^2 - (iy)^2 = (x + 3)^2 + y^2$

$= |x + 3 + iy|^2 = |z + 3|^2$

5. જો $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^x = 1$ હોય તો ...., જ્યાં $n \in$ N.

(A) $x = 2n + 1$ (B) $x = 4n$ (C) $x = 2n$ (D) $x = 4n + 1$

જવાબ (B) $x = 4n$

➡ અહીં $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^x = 1$

$\therefore\ \left[\dfrac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right]^x = 1 \Rightarrow \left[\dfrac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2}\right]^x = 1$

$\therefore\ \left[\dfrac{2i}{1 + 1}\right]^x = 1 \Rightarrow \left[\dfrac{2i}{2}\right]^x = 1$

$\therefore\ i^x = 1 \Rightarrow i^x = (i^{4n})$ $[\therefore\ i^{4n} = 1,\ n \in \text{N}]$

$\therefore\ x = 4n$

6. વાસ્તવિક સંખ્યા x એ સમીકરણ $\left(\dfrac{3 - 4ix}{3 + 4ix}\right) = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \text{R})$ નું સમાધાન કરે, તો $\alpha^2 + \beta^2$ = ...

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

જવાબ (A) 1

➡ અહીં $\left(\dfrac{3 - 4ix}{3 + 4ix}\right) = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \text{R})$

હવે $(\alpha - i\beta) = \dfrac{(3-4ix)(3-4ix)}{(3+4ix)(3-4ix)} = \dfrac{9+16i^2x^2-24ix}{9-16i^2x^2}$

$\therefore \alpha - i\beta = \dfrac{9-16x^2-24ix}{9+16x^2}$

$\therefore \alpha - i\beta = \dfrac{9-16x^2}{9+16x^2} - \dfrac{i24x}{9+16x^2}$ ....(i)

$\therefore \alpha + i\beta = \dfrac{9-16x^2}{9+16x^2} + \dfrac{i24x}{9+16x^2}$ ....(ii)

આમ, $(\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta) = \left(\dfrac{9-16x^2}{9+16x^2}\right)^2 - \left(\dfrac{i24x}{9+16x^2}\right)^2$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{81 + 256x^4 - 288x^2 + 576x^2}{(9+16x^2)^2}$

$= \dfrac{81 + 256x^4 + 288x^2}{(9+16x^2)^2}$

$= \dfrac{(9+16x^2)^2}{(9+16x^2)^2} = 1$

7. સંકર સંખ્યા z_1 અને z_2 માટે નીચેના પૈકી .... વિકલ્પ સત્ય છે.

(A) $|z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$ (B) $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1)\cdot(z_2)$

(C) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (D) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

જવાબ **(A) $|z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$**

➡ ધારો કે, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$\therefore |z_1| = r_1$

અને $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore |z_2| = r_2$

હવે $z_1z_2 = r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]$

$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$\therefore |z_1z_2| = r_1r_2$

$\therefore |z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$ (પરિણામ (i) અને (ii) પરથી)

8. સંકર સંખ્યા (2 – i) વડે દર્શાવાતા બિંદુને ઉગમબિંદુ સાપેક્ષ $\frac{\pi}{2}$ ના ખૂણે ઘડીયાળના કાંટાની દિશામાં પરાવર્તિત કરવામાં આવે છે. તો સંકર સંખ્યાની નવી સ્થિતિ .... થાય.

(A) $1 + 2i$ (B) $-1 - 2i$ (C) $2 + i$ (D) $-1 + 2i$

જવાબ **(B) $-1 - 2i$**

➡ $z = 2 - i$ આપેલ છે.

આ સંકર સંખ્યાનું પરિભ્રમણ $\frac{\pi}{2}$ ખૂણે ઘડીયાળના કાંટાની દિશામાં થાય છે.

$\therefore$ નવી સ્થિતિ $= ze^{-\frac{i\pi}{2}} = (2-i)e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$= (2-i)\left[\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)\right]$

$= (2-i)(0-i)$

$= -2i + i^2$

$= -1 - 2i$

9.

જો $x, y \in R$ માટે $x + iy$ કોઈ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા હોય, તો ....

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x \neq 0$ (D) $y \neq 0$

જવાબ **(D) $y \neq 0$**

➡ અહીં $x, y \in R$

જો $x + iy$ કોઈ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંકર સંખ્યા હોય તો અને તો જ $y \neq 0$ થાય.

10. જો $a + ib = c + id$ હોય તો,

(A) $a^2 + c^2 = 0$ (B) $b^2 + c^2 = 0$ (C) $b^2 + d^2 = 0$ (D) $a^2 + b^2 = c^2 + d$

જવાબ **(D) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$**

➡ અહીં $a + ib = c + id$

$\therefore |a + ib| = |c + id|$

$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$

હવે બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

11. સંકર સંખ્યા z એ $\left|\dfrac{i+z}{i-z}\right| = 1$ નું સમાધાન કરતું હોય, તો z નું સ્થાન ....

(A) $x^2 + y^2 = 1$ વર્તુળ પર હોય. (B) x -અક્ષ પર હોય.

(C) y -અક્ષ પર હોય. (D) રેખા $x + y = 1$ પર હોય.

જવાબ **(B) x- અક્ષ પર હોય.**

➡ અહીં $\left|\dfrac{i+z}{i-z}\right| = 1$

ધારો કે $z = x + iy$

$\therefore \left|\dfrac{x + i(y+1)}{-x - i(y-1)}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2} = 1$

$\therefore x^2 + (y + 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2$

$\therefore 4y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore z$ નું સ્થાન x -અક્ષ (અર્થાત્ વાસ્તવિક અક્ષ) પર છે.

12. z એ કોઈ સંકર સંખ્યા હોય તો નીચેની પૈકી .... સત્ય છે.

(A) $|z^2| > |z|$ (B) $|z^2| = |z|^2$ (C) $|z^2| < |z|^2$ (D) $|z^2| \geq |z|^2$

જવાબ **(B) $|z^2| = |z|^2$**

➡ ધારો કે $z = x + iy$ એ કોઈ સંકર સંખ્યા છે.

$|z| = |x + iy|$ અને $|z|^2 = |x + iy|^2$

$\therefore |z|^2 = x^2 + y^2$ ....(i)

અને $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + i^2xy$

$z^2 = x^2 - y^2 + i^2xy$

$\therefore |z^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2}$

$\therefore |z^2| = \sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2}$

$\therefore |z^2| = \sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)^2}$

$\therefore |z^2| = x^2 + y^2$ ....(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$|z|^2 = |z^2|$

13. જો $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ હોય, તો નીચેના પૈકી .... સત્ય હોય.

(A) $z_2 = \bar{z}_1$ (B) $z_2 = \frac{1}{z_1}$ (C) $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ (D) $|z_1| = |z_2|$

જવાબ **(C) $\arg(z_1) = \arg(z_2)$**

➡ અહીં $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$\therefore |r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)| = |r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)| + |r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)|$

$\therefore |(r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta) + i\,(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)| = r_1 r_2$

$\therefore \sqrt{r_1^2\cos^2\theta_1 + r_2^2\cos^2\theta_2 + 2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + r_1^2\sin^2\theta_1 + r_2^2\sin^2\theta_1}$

$\sqrt{+\ 2r_1r_2\ \sin\theta_1\sin\theta_2} = r_1 + r_2$

$\therefore \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2[\cos(\theta_1 - \theta_2)]} = r_1 + r_2$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$

$\therefore 2r_1r_2[1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)] = 0$

$\therefore 1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

$\therefore \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

$\therefore \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos 0°$

$\therefore \theta_1 - \theta_2 = 0°$

$\therefore \theta_1 = \theta_2$

$\therefore \arg(z_1) = \arg(z_2)$

14. **જો સંકર સંખ્યા $\frac{1 + i\cos\theta}{1 - 2i\cos\theta}$ શુદ્ધ વાસ્તવિક હોય, તો θ = ...**

(A) $n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in Z$ (B) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4},\ n \in Z$ (C) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2},\ n \in Z$ (D) આ પૈકી એકપણ નહીં.

જવાબ **(C) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in Z$**

➡ આપેલ સંકર સંખ્યા $= \frac{1 + i\cos\theta}{1 - 2i\cos\theta}$

$= \frac{(1 + i\cos\theta)(1 + 2i\cos\theta)}{(1 - 2i\cos\theta)(1 + 2i\cos\theta)}$

$= \frac{1 + i\cos\theta + 2i\cos\theta + 2i^2\cos^2\theta}{1 - 4i^2\cos^2\theta}$

$= \frac{1 + 3i\cos\theta - 2\cos^2\theta}{1 + 4\cos^2\theta}$

θ ના વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે, $\frac{3\cos\theta}{1 + 4\cos^2\theta} = 0$

$\therefore 3\cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = \cos\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2},\ n \in Z$

15. **જો $x < 0$ હોય, તો $\arg(x)$ = ...**

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) આ પૈકી એકપણ નહીં.

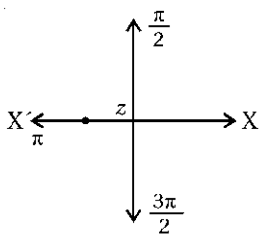
જવાબ **(C) π**

➡ ધારો કે $z = x + 0i$ અને $x < 0$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (0^2)} = 1$

અહીં બિંદુ $(x, 0)$ એ સંકર સંખ્યા $z = x + 0i$ થાય જે વાસ્તવિક અક્ષની ઋણ દિશા છે.

$\therefore$ z નો મુખ્ય કોણાંક $= \pi$



16. જો $f(z) = \dfrac{7 - z}{1 - z^2}$, જ્યાં $z = 1 + 2i$ હોય, તો $|f(z)| = \dots\dots\dots$

(A) $\dfrac{|z|}{2}$ (B) $|z|$ (C) $2|z|$ (D) આ પૈકી એકપણ નહીં.

જવાબ (A) $\dfrac{|z|}{2}$

➡ ધારો કે, $z = 1 + 2i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ ....(i)

હવે $f(z) = \dfrac{7 - z}{1 - z^2} = \dfrac{7 - 1 - 2i}{1 - (1 + 2i)^2}$

$= \dfrac{6 - 2i}{1 - 1 - 4i^2 - 4i} = \dfrac{6 - 2i}{4 - 4i}$

$= \dfrac{(3 - i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)}$

$= \dfrac{6 - 2i + 6i - 2i^2}{4 - 4i^2} = \dfrac{6 + 4i + 2}{4 + 4i}$

$= \dfrac{8 + 4i}{8} = 1 + \dfrac{1}{2}i$

$f(z) = 1 + \dfrac{1}{2}i$

$|f(z)| = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{4+1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{|z|}{2}$ ($\because$ પરિણામ (i) પરથી)