પ્રકરણ 6

વિકલિતના ઉપયોગો

6.1 વિહંગાવલોકન

6.1.1 રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર

વિધેય $y = f(x)$ માટે $\frac{d}{dx}(f(x))$ એ x ની સાપેક્ષે y માં થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.

આમ, જો અંતરને 's' વડે અને સમયને 't' વડે દર્શાવીએ, તો $v = \frac{ds}{dt}$ એ સમયની સાપેક્ષે અંતરમાં થતા ફેરફારનો દર એટલે કે વેગ. આ જ રીતે $\frac{dv}{dt}$ તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ દર્શાવે છે.

6.1.2 સ્પર્શક અને અભિલંબ

વક્ર $y = f(x)$ ને બિંદુ (x_1, y_1) આગળ સ્પર્શતી રેખાને વક્રનો તે બિંદુ આગળનો સ્પર્શક કહે છે અને તેનું સમીકરણ $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1)$ છે.

વક્રના સ્પર્શબિંદુ આગળના સ્પર્શકને લંબ હોય તેવી રેખાને વક્રનો અભિલંબ કહે છે અને તેનું સમીકરણ

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1) \text{ દ્વારા મળે છે. } \left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} \neq 0\right)$$

બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો એ વક્રોના છેદબિંદુ આગળના સ્પર્શકો વચ્ચનો ખૂણો છે.

6.1.3 આસન્ન મૂલ્ય

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, પરથી આપણે કહી શકીએ કે $f'(x)$ લગભગ $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ની બરાબર છે.

આથી, f નું આસન્ન મૂલ્ય $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x$ દ્વારા મળે.

6.1.4 વધતાં/ઘટતાં વિધેયો

(a, b) પરના સતત વિધેય f માટે,

(i) જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ અથવા $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a, b)$ હોય, તો f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(ii) જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ અથવા $f'(x) < 0$; $\forall x \in (a, b)$ હોય, તો f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

6.1.5 પ્રમેય : ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય છે.

(i) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, $f'(x) > 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં વધતું વિધેય છે.

(ii) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, $f'(x) < 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં ઘટતું વિધેય છે.

(iii) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, $f'(x) = 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં અચળ વિધેય છે.

6.1.6 મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો

વાસ્તવિક વિધેય f માટે સ્થાનીય મહત્તમ/સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો :

વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલ સંખ્યા c છે.

(i) જો કોઈ $h > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall x \in (c - h, c + h)$, $f(c) \geq f(x)$ થાય તો, f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય. $f(c)$ ને f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. અહીં, $(c - h, c + h) \subset D_f$

(ii) જો કોઈ $h > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall\ x \in (c - h, c + h)$, $f(c) \leq f(x)$ થાય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય. $f(c)$ ને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે. અહીં, $(c - h, c + h) \subset D_f$

$[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(c)$ હોય, તો f ને $x = c$, $c \in [a, b]$, આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ (અથવા નિરપેક્ષ મહત્તમ) મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય.

આ જ રીતે, $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq f(d)$ હોય, તો f ને $x = d$, $d \in [a, b]$, આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ (અથવા નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ) મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય.

6.1.7 f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (f નું નિર્ણાયક બિંદુ)

વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલી કોઈ સંખ્યા c આગળ $f'(c) = 0$ અથવા વિધેય f વિકલનીય ન હોય, તો c ને f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (નિર્ણાયક બિંદુ) કહે છે.

સ્થાનીય મહત્તમ અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા x ની કિંમતો) શોધવા માટેના કાર્યનિયમો :

(a) પ્રથમ વિકલિત કસોટી :

(i) c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં જેમ x વધે તેમ જો $f'(x)$ તેની નિશાની ધનમાંથી ઋણમાં બદલે, તો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં જેમ x વધે તેમ જો $f'(x)$ તેની નિશાની ઋણમાંથી ધનમાં બદલે, તો f ને c આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં x વધે પરંતુ જો $f'(x)$ તેની નિશાની ન બદલે, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આવા બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે.

જો $h > 0$ માટે કોઈક અંતરાલ $(c - h, c + h) \subset D_f$ મળે કે જેથી $\forall x \in (c - h, c)$, $f'(x) > 0$ તથા $\forall x \in (c, c + h)$, $f'(x) < 0$ તો f એ $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ છે. તે જ રીતે, $\forall x \in (c - h, c)$, $f'(x) < 0$ તથા $\forall x \in (c, c + h)$, $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(b) દ્વિતીય વિકલિત કસોટી : ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in I$. ધારો કે, $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે.

(i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ હોય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ હોય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = f'(c) = 0$ હોય, તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે. આવા સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું.

6.1.8 સંવૃત અંતરાલમાં વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ અને/અથવા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યો નક્કી કરવા માટેના કાર્યનિયમો :

સોપાન 1 : વિધેય f નાં તમામ નિર્ણાયક બિંદુઓ (નિર્ણાયક સંખ્યાઓ) આપેલ અંતરાલમાં શોધવાં.

સોપાન 2 : આ તમામ બિંદુઓએ તથા અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ વિધેય f ની કિંમતો શોધવી.

સોપાન 3 : સોપાન 2 માં, વિધેય f ની મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધી કાઢો. આ મહત્તમ કિંમત એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ કિંમત એ વિધેય fનું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય હશે.

6.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : વક્ર $y = 5x - 2x^3$ માટે, જો x પ્રતિસેકન્ડ 2 એકમના દરે વધે, તો $x = 3$ હોય ત્યારે વક્રના ઢાળમાં કેટલી ઝડપથી ફેરફાર થાય તે શોધો.

ઉકેલ : વક્રનો ઢાળ $= \frac{dy}{dx} = 5 - 6x^2$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -12x \cdot \frac{dx}{dt}$$

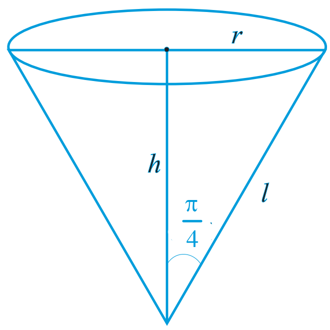
$$= -12 \cdot (3) \cdot (2)$$

$$= -72 \text{ એકમ/સેકન્ડ}$$

આમ, જ્યારે x પ્રતિસેકન્ડ 2 એકમના દરે વધે તો વક્રનો ઢાળ પ્રતિસેકન્ડ 72 એકમના દરે ઘટે છે.

ઉદાહરણ 2 : શંકુ આકારની ગરણીની નીચેના છિદ્રમાંથી સતત પાણી ટપકી રહ્યું છે અને તેના વક્ર સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં 2 સેમી^{2}/સેકન્ડનો ઘટાડો થાય છે. શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી હોય, ત્યારે પાણીથી બનતા શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો. અર્ધશિરઃકોણનું માપ $\frac{\pi}{4}$ છે.

ઉકેલ : જો શંકુના વક્ર સપાટીના ક્ષેત્રફળને s વડે દર્શાવીએ, તો $\frac{ds}{dt} = -2$ સેમી^{2}/સેકન્ડ



આકૃતિ 6.1

હવે, $s = \pi r l = \pi l \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot l = \frac{\pi}{\sqrt{2}} l^2$

આથી, $\frac{ds}{dt} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} l \cdot \frac{dl}{dt} = \sqrt{2}\pi l \cdot \frac{dl}{dt}$

હવે, જ્યારે $l = 4$ સેમી હોય, ત્યારે

$$\frac{dl}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{2}\pi \cdot 4} \cdot 2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{-\sqrt{2}}{4\pi} \text{ સેમી/સેકન્ડ}$$

પરિવર્તનનો દર $-\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$ સેમી/સેકન્ડ છે, એટલે કે, તિર્યક ઊંચાઈ ઘટવાનો દર $\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$ સેમી/સેકન્ડ છે.

ઉદાહરણ 3 : વક્રો $y^2 = x$ અને $x^2 = y$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણો $y^2 = x$ અને $x^2 = y$ ને ઉકેલતાં, $x^4 = x$ અથવા $x^4 - x = 0$ મળે.

$\therefore \quad x\,(x^3 - 1) = 0$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = 1$

આથી, $y = 0, \quad y = 1$

એટલે કે, વક્રોનાં છેદબિંદુઓ (0, 0) અને (1, 1) છે.

વળી, $y^2 = x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

અને $x^2 = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$.

$\therefore$ બિંદુ (0, 0) આગળ, વક્ર $y^2 = x$ નો સ્પર્શક y-અક્ષને સમાંતર છે અને વક્ર $x^2 = y$ નો સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= \frac{\pi}{2}$

બિંદુ (1, 1) આગળ, વક્ર $y^2 = x$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{1}{2}$ અને વક્ર $x^2 = y$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $= 2$.

$\therefore \quad tan\,\theta = \left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+1}\right| = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

નોંધ : બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો θ શોધવા માટે, સૂત્ર $tan\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ નો ઉપયોગ કરીશું.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $f(x) = tan\,x - 4x$ એ $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = tan\,x - 4x \Rightarrow f'(x) = sec^2 x - 4$

હવે જ્યારે, $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$, sec યુગ્મ વિધેય હોવાથી $0 < x < \frac{\pi}{3}$ લઈ શકીએ.

આથી, $1 < sec\,x < 2$

આથી, $1 < sec^2 x < 4$. આથી $-3 < (sec^2 x - 4) < 0$

આમ, $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\,'(x) < 0$

આથી, f એ $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 5 : વિધેય $y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$ કયા અંતરાલમાં વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $y = x^4 - \frac{4x^3}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2\,(x - 1)$

હવે, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0$ અથવા $x = 1$.

વળી, $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ અને f એ $(-\infty, 0]$ અને $[0, 1]$ માં સતત છે. વળી, $f'(x) > 0, \forall x > 1$ આથી, વિધેય f એ $(-\infty, 1]$ માં ઘટતું અને $[1, \infty)$ માં વધતું વિધેય છે.

નોંધ : અહીં, વિધેય f એ $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ માં ચુસ્ત ઘટતું અને $(1, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$ ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.

ઉકેલ : $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

$f'(x) = 12x^2 - 36x + 27 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 3(2x - 3)^2 \geq 0$ (f' ચિહ્ન ના બદલે.)

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (નિર્ણાયક સંખ્યા)

વળી, $f'(x) > 0, \forall x < \frac{3}{2}$ અને $f'(x) > 0, \forall x > \frac{3}{2}$

આથી, $x = \frac{3}{2}$ એ નતિબિંદુ છે એટલે કે f ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.

માત્ર, $x = \frac{3}{2}$ નિર્ણાયક સંખ્યા છે અને વિધેય f ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.

નોંધ : f એ વધતું વિધેય છે. મહત્તમ કે ન્યૂનતમનો પ્રશ્ન જ નથી.

ઉદાહરણ 7 : વિકલના ઉપયોગથી, $\sqrt{0.082}$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $f(x) = \sqrt{x}$

હવે, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$ માં $x = 0.09$ અને $\Delta x = -0.008$ લેતાં,

આપણને $f(0.09 - 0.008) = f(0.09) + (-0.008) f'(0.09)$ મળે.

$$\therefore \sqrt{0.082} = \sqrt{0.09} - 0.008 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{0.09}}\right) = 0.3 - \frac{0.008}{0.6} = 0.3 - 0.0133 = 0.2867.$$

ઉદાહરણ 8 : વક્રો $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ અને $xy = c^2$ લંબચ્છેદી બને તે માટેની શરત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વક્રો (x_1, y_1) બિંદુએ છેદે છે. આથી,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$\therefore$ છેદબિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $(m_1) = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

વળી, $xy = c^2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_2 = \frac{-y_1}{x_1}$.

વક્રો લંબચ્છેદી બને તે માટે, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1$ અથવા $a^2 - b^2 = 0$.

(**નોંધ :** આનો અર્થ $a = b$ એટલે કે, $x^2 - y^2 = a^2$ લંબાતિવલય છે. અત્રે વક્રો છેદે છે તે સ્વીકારી લીધું છે.)

ઉદાહરણ 9 : વિધેય $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 8x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 105$; x ની કઈ કિંમતો આગળ સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે તે શોધો.

ઉકેલ : $f'(x) = -3x^3 - 24x^2 - 45x$

$= -3x(x^2 + 8x + 15)$

$= -3x(x + 5)(x + 3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -5$ અથવા $x = -3$ અથવા $x = 0$

$f''(x) = -9x^2 - 48x - 45$

$= -3(3x^2 + 16x + 15)$

$f''(0) = -45 < 0$. આથી, f એ $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે.

$f''(-3) = 18 > 0$. આથી, f એ $x = -3$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે.

$f''(-5) = -30 < 0$. આથી, f એ $x = -5$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે, $x+\frac{1}{x}$ નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય તેના સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કરતાં નાનું છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $y = x+\frac{1}{x}$. આથી $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$,

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$. આથી, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 2 > 0$ અને $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-1} = -2 < 0$.

આથી, y એ $x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે અને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય -2 છે. તેમ જ y એ $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય 2 છે. આથી, સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય (-2) એ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય 2 કરતાં ઓછું છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 11 : શિરોલંબ અક્ષ ધરાવતા શંકુ આકારના વાસણમાંથી 1 સેમી^{3}/સેકન્ડના સ્થિત દરે પાણી ટપકી રહ્યું છે. જ્યારે વાસણમાં પાણીની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે તિર્યક ઊંચાઈના ઘટવાનો દર શોધો. શંકુ આકારના વાસણના અર્ધ શિરઃકોણનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે.

ઉકેલ : $\frac{dV}{dt} = -1$ સેમી^{3}/સેકન્ડ આપેલ છે, જ્યાં V એ શંકુ આકારના વાસણમાં રહેલ પાણીનું ઘનફળ છે.

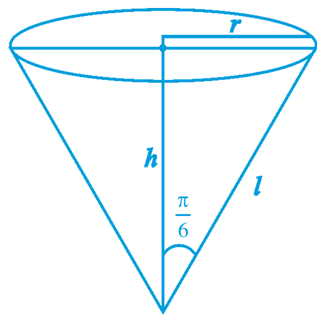
આકૃતિ 6.2 પરથી, $l = 4$ સેમી, $h = l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ અને $r = l\sin\frac{\pi}{6} = \frac{l}{2}$.

આથી, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{l^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}l^3$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}l^2\frac{dl}{dt}$$

આથી, $-1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}16\cdot\frac{dl}{dt}$

$\therefore \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ સેમી/સે.



આકૃતિ 6.2

આથી, તિર્યક ઊંચાઈના ઘટવાનો દર $= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ સેમી/સે.

ઉદાહરણ 12 : વક્ર $y = \cos(x + y)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$ ના રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર હોય તેવા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $y = \cos(x + y)$. આથી $\frac{dy}{dx} = -\sin(x + y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right]$ ...(i)

અથવા $\frac{dy}{dx} = -\frac{sin(x+y)}{1+sin(x+y)}$

વળી, સ્પર્શક એ રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર છે. આથી, સ્પર્શકનો ઢાળ $= -\frac{1}{2}$

આથી, $-\frac{sin(x+y)}{1+sin(x+y)} = -\frac{1}{2}$ પરથી $sin\,(x + y) = 1$ ....(ii)

વળી, $cos(x + y) = y$ અને $sin\,(x + y) = 1 \Rightarrow cos^2\,(x + y) + sin^2\,(x + y) = y^2 + 1$

$\Rightarrow 1 = y^2 + 1$ અથવા $y = 0$.

આથી, $cos\,x = 0$. ($cos\,(x + y) = y$)

$\therefore \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2...$

આમ, $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$ પરંતુ, $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{-3\pi}{2}$ સમીકરણ (ii)નું સમાધાન કરે છે.

($\because$ $sin\,x = 1, y = 0$)

આથી, બિંદુઓ $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ મળે.

આથી, બિંદુ $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $2x + 4y - \pi = 0$ અને

બિંદુ $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ અથવા $2x + 4y + 3\pi = 0$ છે.

ઉદાહરણ 13 : વક્રો $y^2 = 4ax$ અને $x^2 = 4by$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : $y^2 = 4ax$ ...(i)

$x^2 = 4by$ ...(ii)

સમીકરણો (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$$\left(\frac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax.$$ આથી $x^4 = 64\ ab^2\,x$

$\therefore \quad x\,(x^3 - 64ab^2) = 0$. આથી $x = 0$, $x = 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

આથી, છેદબિંદુઓ $(0, 0)$ અને $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ થાય.

હવે, $y^2 = 4ax \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$ અને $x^2 = 4by \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4b} = \frac{x}{2b}$

આથી, વક્ર $y^2 = 4ax$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળનો સ્પર્શક y-અક્ષને સમાંતર છે અને વક્ર $x^2 = 4by$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળનો સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો $= \frac{\pi}{2}$

બિંદુ $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ આગળ વક્ર (i) નો ઢાળ $= \frac{2a}{4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = m_1$

બિંદુ $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ આગળ વક્ર (ii) નો ઢાળ = $\frac{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{2b} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = m_2$

આમ, $\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}\right| = \frac{3a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{2(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})}$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{2(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})}\right)$

ઉદાહરણ 14 : જેનાં પ્રચલ સમીકરણ $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ હોય તેવા વક્રના કોઈ પણ બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $4(y\cos^3\theta - x\sin^3\theta) = 3\sin 4\theta$ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : અહીં, $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$ અને $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ આપેલ છે.

$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta = -3\sin\theta(1 - \cos^2\theta) = -3\sin^3\theta$

અને $\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\cos\theta(1 - \sin^2\theta) = 3\cos^3\theta$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

આથી, અભિલંબનો ઢાળ = $+\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}$

આથી, અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - (3\sin\theta - \sin^3\theta) = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}[x - (3\cos\theta - \cos^3\theta)]$$

$\Rightarrow \quad y\cos^3\theta - 3\sin\theta\cos^3\theta + \sin^3\theta\cos^3\theta = x\sin^3\theta - 3\sin^3\theta\cos\theta + \sin^3\theta\cos^3\theta$

$\Rightarrow \quad y\cos^3\theta - x\sin^3\theta = 3\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$$= \frac{3}{2}\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta$$

$$= \frac{3}{4}\sin 4\theta$$

અથવા $4(y\cos^3\theta - x\sin^3\theta) = 3\sin 4\theta$.

ઉદાહરણ 15 : $f(x) = \sec x + \log\cos^2 x$, $0 \le x \le 2\pi$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = \sec x + 2\log\cos x$

આમ, $f'(x) = \sec x\tan x - 2\tan x = \tan x(\sec x - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \tan x = 0$ અથવા $\sec x = 2$ અથવા $\cos x = \frac{1}{2}$

આથી, x ની શક્ય કિંમતો $x = 0$ અથવા $x = \pi$ અને $x = 2\pi$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ અથવા } x = \frac{5\pi}{3}$$

વળી, $f''(x) = sec^2x\ (secx - 2) + tanx\ (secx\ tanx)$

$= sec^3x + secx\ tan^2x - 2sec^2x$

$= sec\,x\ (sec^2x + tan^2x - 2secx)$. આપણે નોંધીશું કે,

$f''(\pi) = -1\ (1 + 0 + 2) = -3 < 0$. આથી, $x = \pi$ આગળ fની સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત મળે.

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\ (4 + 3 - 4) = 6 > 0$. આથી, $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ fની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\ (4 + 3 - 4) = 6 > 0$. આથી, $x = \frac{5\pi}{3}$ આગળ પણ fની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

$\therefore$ y ની $x = 0$ આગળ કિંમત $1 + 0 = 1$ = વૈશ્વિક મહત્તમ

y ની $x = \pi$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત $-1 + 0 = -1$ = વૈશ્વિક ન્યૂનતમ

y ની $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2\ (1 - \log2)$

y ની $x = \frac{5\pi}{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2\ (1 - \log2)$

y ની $x = 2\pi$ આગળ કિંમત $= 1$ = વૈશ્વિક મહત્તમ

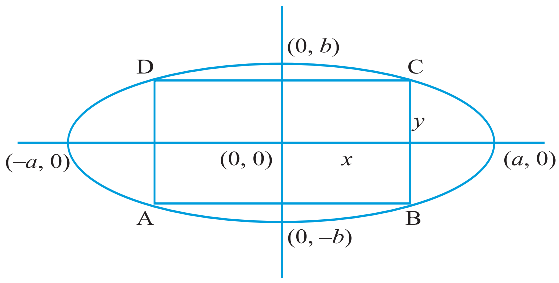
ઉદાહરણ 16 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ માં અંતર્ગત લંબચોરસનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.3 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે C (x, y) એ ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરનું બિંદુ છે. ધારો કે, જેની બાજુઓ AB $= 2x$ અને BC $= 2y$ હોય, તેવો લંબચોરસ ABCD મહત્તમ ક્ષેત્રફળ ધરાવે છે.

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ A $= 4xy$ પરથી,

$A^2 = 16x^2y^2 = s$ (કહીશું)

આથી, $s = 16x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot b^2 = \frac{16b^2}{a^2}\ (a^2x^2 - x^4)$



આકૃતિ 6.3

$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{16b^2}{a^2} \cdot [2a^2x - 4x^3]$

સ્પષ્ટ છે કે $x \neq 0$.

વળી, $\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \frac{b}{\sqrt{2}}$

હવે, $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}\ [2a^2 - 12x^2]$

આથી, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ આગળ $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2 - 6a^2] = \frac{16b^2}{a^2}(-4a^2) < 0$

આમ, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, આગળ, s મહત્તમ છે અને આથી, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ A મહત્તમ થાય.

મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $= 4 \cdot x \cdot y = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$ ચોરસ એકમ

ઉદાહરણ 17 : વિધેય $f(x) = sin2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = sin2x - x$

$\therefore \ f'(x) = 2\ cos2x - 1$

આથી, $f'(x) = 0 \Rightarrow cos2x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x = \frac{-\pi}{3}$ અથવા $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{-\pi}{6}$ અથવા $\frac{\pi}{6}$

$f''(x) = -4\ sin\ 2x$

$\therefore \ f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) > 0$. આથી $f(-\frac{\pi}{6})$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ તથા $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ અને આથી $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે છે.

$\therefore \ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sin\ (-\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, નિરપેક્ષ મહત્તમ

$\therefore \ f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$, સ્થાનીય ન્યૂનતમ

$\therefore \ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, સ્થાનીય મહત્તમ

$\therefore \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin(\pi) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{\pi}{2}$ એ નિરપેક્ષ મહત્તમ કિંમત છે જ્યારે $-\frac{\pi}{2}$ એ નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ કિંમત છે.

આથી, તફાવત $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

ઉદાહરણ 18 : a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ આવેલો છે. તેનો શિરઃકોણ 2θ છે, તો જ્યારે $\theta = \frac{\pi}{6}$ હોય, ત્યારે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC એવો મળે છે કે જેથી AB = AC.

AD = AO + OD = $a + a\ cos2\theta$ અને BC = 2BD = $2a\ sin2\theta$ (આકૃતિ 6.4 જુઓ.)

આથી, ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2} BC \cdot AD$

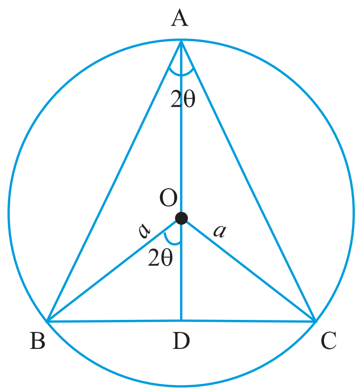
$= \frac{1}{2} 2a\ sin2\theta \cdot (a + a\ cos2\theta)$

$= a^2 sin2\theta\ (1 + cos2\theta)$

$\therefore \ \Delta = a^2 sin2\theta + \frac{1}{2} a^2\ sin4\theta$

આથી, $\frac{d\Delta}{d\theta} = 2a^2 cos2\theta + 2a^2 cos4\theta$

$= 2a^2(cos2\theta + cos4\theta)$



આકૃતિ 6.4

$\frac{d\Delta}{d\theta} = 0 \Rightarrow cos2\theta = -cos4\theta = cos\ (\pi - 4\theta)$

આથી, $2\theta = \pi - 4\theta$. આથી, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\frac{d^2\Delta}{d\theta^2} = 2a^2\ (-2sin2\theta - 4sin4\theta) < 0$ $\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right)$

આથી, જ્યારે $\theta = \frac{\pi}{6}$ હોય, ત્યારે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 19 થી 23 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 19 : વક્ર $3y = 6x - 5x^3$ પરના કોઈ બિંદુ આગળ દોરેલ અભિલંબ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતો હોય, તો $x =$ ....

(A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે, વક્ર $3y = 6x - 5x^3$ પરનું બિંદુ (x_1, y_1) છે. આ બિંદુ આગળ દોરેલ અભિલંબ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 2 - 5x_1^2$.

વળી, બિંદુ (x_1, y_1) આગળ દોરેલ અભિલંબ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{y_1}{x_1}$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{-x_1}{y_1}$

આથી, $2 - 5x_1^2 = \frac{-x_1}{y_1} = \frac{-3}{6 - 5x_1^2}$.

વળી, $x_1 = 1$ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આથી, સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 20 : બે વક્રો $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ અને $3x^2y - y^3 = 2$

(A) એકબીજાને સ્પર્શે છે. (B) એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે.

(C) એકબીજાને $\frac{\pi}{3}$ ખૂણે છેદે છે. (D) એકબીજાને $\frac{\pi}{4}$ ખૂણે છેદે છે.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે બે વક્રો છેદે છે કે નહિ તે નક્કી કરીએ.

$\therefore\ x^3 - 3xy^2 + 3x^2y - y^3 = 0$

$\therefore\ (x^3 - y^3) + 3xy\ (x - y) = 0$

$\therefore\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 3xy\ (x - y) = 0$

$\therefore\ (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) = 0$

$\therefore\ x = y$ અથવા $x^2 + 4xy + y^2 = 0$

હવે, $x = y$ લેતાં, $y^3 - 3y^3 + 2 = 0$ તેથી, $2 - 2y^3 = 0$ એટલે કે $(1 - y^3) = 0$

$\therefore\ y = 1$ મળે. આથી, છેદબિંદુ (1, 1) મળે.

$x^2 + 4xy + y^2 = 0$ અશક્ય છે.

હવે, પ્રથમ વક્રના સમીકરણ પરથી, $3x^2 - 3y^2 - 6xy\frac{dy}{dx} = 0$ મળે.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = m_1$ તથા બીજા વક્રના સમીકરણ પરથી,

$$6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} = m_2$$

વળી, $m_1 \cdot m_2 = -1$. આથી, વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

નોંધ : ઉત્તર સાચો છે પણ અભિગમ સાચો નથી.

ખરેખર તો (1, 1) આગળ પ્રથમ વક્ર માટે,

$$3 - 3 - 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore \quad m_1 = 0$

$\therefore$ સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર છે, તે $y = 1$ છે.

(1, 1) આગળ બીજા વક્ર માટે સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર છે.

તે $x = 1$ છે.

$\therefore$ તેમની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો છે.

$m_1m_2 = -1$ શક્ય નથી.

$m_1 = 0$ છે. m_2નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 21 : $x = e^t\, cost$ તથા $y = e^t\, sint$ સમીકરણવાળા વક્રનો સ્પર્શક $t = \frac{\pi}{4}$ હોય, ત્યારે x-અક્ષ સાથે .... માપનો ખૂણો બનાવે.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\frac{dx}{dt} = -\, e^t\, sint + e^t cost,\ \frac{dy}{dt} = e^t cost + e^t sint$

આથી, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{cos\,t + sin\,t}{cos\,t - sin\,t} \rightarrow \infty$. આથી, વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 22 : વક્ર $y = sin\ x$ ને (0, 0) આગળ દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x - y = 0$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = cosx$. આથી, અભિલંબનો ઢાળ $= \left(\frac{-1}{cos\ x}\right)_{x=0} = -1$

આથી, અભિલંબનું સમીકરણ $y - 0 = -1(x - 0)$ અથવા $x + y = 0$ મળે.

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 23 : વક્ર $y^2 = x$ પરના .... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક x-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે.

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (C) (4, 2) (D) (1, 1)

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}$. આથી $x = \frac{1}{4}$

સાચો જવાબ (B) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 24 થી 29 વાળા પ્રશ્નોમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 24 : વક્ર $y = x^2 + ax + 25$ એ x-અક્ષને સ્પર્શે તે માટે 'a' ની કિંમતો .... હોઈ શકે.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + a = 0$ એટલે કે, $x = -\frac{a}{2}$.

ધારો કે સ્પર્શબિંદુ $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ છે.

આથી, $\frac{a^2}{4} + a\left(-\frac{a}{2}\right) + 25 = 0 \Rightarrow a = \pm 10$ (x-અક્ષ પર $y = 0$)

આથી, a ની કિંમતો ± 10 હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 25 : જો $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 2x + 1}$, હોય, તો $f(x)$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

ઉકેલ : f મહત્તમ બને, તે માટે, $4x^2 + 2x + 1$ ન્યૂનતમ બને તે જરૂરી છે. એટલે કે,

$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ બને. આથી, $x = -\frac{1}{4}$ માટે $4x^2 + 2x + 1$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{3}{4}$ મળે.

આથી, f ની મહત્તમ કિંમત $= \frac{4}{3}$.

ઉદાહરણ 26 : ધારો કે, વિધેય f ના પ્રદેશના અંતરાલની અંદર $x = c$ આગળ દ્વિતીય વિકલિત એવું મળે કે જેથી, $f'(c) = 0$ અને $f''(c) > 0$ હોય, તો c એ .... છે.

ઉકેલ : સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતી સંખ્યા

ઉદાહરણ 27 : જો $f(x) = sinx$, $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ હોય, તો f ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

ઉકેલ : -1

ઉદાહરણ 28 : $sinx + cosx$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

ઉકેલ : $\sqrt{2}$ $\quad (a = 1, b = 1, r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2})$

ઉદાહરણ 29 : જ્યારે ગોલકની ત્રિજ્યા 2 સેમી હોય, ત્યારે ગોલકના ઘનફળનો તેના પૃષ્ઠફળને સાપેક્ષ થતો વૃદ્ધિદર .... છે.

ઉકેલ : 1 સેમી^{3}/સેમી^{2}

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$, $S = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 8\pi r \Rightarrow \frac{dV}{dS} = \frac{r}{2} = 1$, કારણ કે $r = 2$.

સ્વાધ્યાય 6.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. મીઠાનો એક ગોલીય ટુકડો પાણીમાં એવી રીતે ઓગળે છે કે જેથી તેના ઘનફળમાં થતા ઘટાડાનો દર એ કોઈ પણ ક્ષણે તેના પૃષ્ઠફળના પ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે તે ગોલીય ટુકડાની ત્રિજ્યા અચળ દરે ઘટી રહી છે.

2. જો કોઈ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ અચળ દરે સતત વધી રહ્યું હોય, તો સાબિત કરો કે વર્તુળની પરિમિતિ તેની ત્રિજ્યાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે.

3. એક પતંગ 151.5 મીટરની ઊંચાઈએ ઊડે છે. જો પતંગનો સમક્ષિતિજ વેગ 10 મી/સેકન્ડ હોય, તો જ્યારે પતંગ ચગાવી રહેલ છોકરાથી પતંગ 250 મીટર દૂર હોય, ત્યારે દોરી છોડવાનો દર શોધો. છોકરાની ઊંચાઈ 1.5 મીટર છે.

4. એકબીજા સાથે 45° ના ખૂણો રચતા બે રસ્તાઓના સંગમ બિંદુથી બે માણસો A અને B વેગ v સાથે મુસાફરી શરૂ કરે છે. જો તેઓ ભિન્ન રસ્તાઓ દ્વારા મુસાફરી પૂરી કરે, તો તેઓ જે જગ્યાએથી છૂટા પડ્યા હોય, તે જગ્યા આગળનો દર શોધો.

5. જે ઝડપે *sine* વધે તેની બમણી ઝડપે ખૂણો θ વધતો હોય, તો θ નું મૂલ્ય શોધો. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

6. $(1.999)^5$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

7. ધાતુના એક પોલા ગોલીય છીપ (દરિયાકિનારે મળતી વસ્તુ)ની આંતરિક અને બાહ્ય ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 3 સેમી અને 3.0005 સેમી હોય, તો તે ધાતુનું આસન્ન ઘનફળ શોધો.

8. 2 મી ઊંચો એક માણસ $1\frac{2}{3}$ મી/સે ના દરથી શેરીના દિવા તરફ જઈ રહ્યો છે. જમીનથી શેરીના દિવાની ઊંચાઈ $5\frac{1}{3}$ મીટર છે. તેના પડછાયાની લંબાઈ કેટલી ઝડપથી બદલાઈ રહી છે ? જ્યારે તે શેરીના દિવાના આધારથી $3\frac{1}{3}$ મીટર દૂર હોય, ત્યારે તેના પડછાયાની લંબાઈમાં કેટલી ઝડપથી ફેરફાર થાય તે શોધો.

9. એક સ્વિમિંગ પુલને સફાઈ માટે ખાલી કરવામાં આવે છે. L એ સ્વિમિંગ પુલમાં રહેલ પાણીનો આંક (લિટરમાં) દર્શાવે છે. t સેકન્ડ પછી પુલમાં રહેલ પાણી ખાલી કરવાનું બંધ કરવામાં આવે છે. વળી, $L = 200\ (10 - t)^2$ છે. 5 સેકન્ડ પછી કેટલી ઝડપથી પાણી બહાર નીકળી રહ્યું છે ? પ્રથમ 5 સેકન્ડ દરમિયાન પાણીના બહાર નીકળવાના પ્રવાહનો સરેરાશ દર શું હશે ?

10. એક સમઘનનું ઘનફળ અચળ દરે વધી રહ્યું છે. સાબિત કરો કે તેના પૃષ્ઠફળમાં થતો વધારો એ તેની બાજુની લંબાઈના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

11. જો બે ચોરસની બાજુઓ x અને y માટે $y = x - x^2$ હોય, તો બીજા ચોરસના ક્ષેત્રફળમાં પ્રથમ ચોરસના ક્ષેત્રફળને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.

12. વક્રો $2x = y^2$ અને $2xy = k$ લંબચ્છેદી બને તે માટેની શરત શોધો.

13. સાબિત કરો કે વક્રો $xy = 4$ અને $x^2 + y^2 = 8$ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

14. વક્ર $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ પરના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો અક્ષો સાથે સમાન ઢળેલા હોય, તે બિંદુના યામ શોધો.

15. વક્રો $y = 4 - x^2$ અને $y = x^2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

16. સાબિત કરો કે, વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ બિંદુ (1, 2) આગળ પરસ્પર એકબીજાને સ્પર્શે છે.

17. વક્ર $3x^2 - y^2 = 8$ ને રેખા $x + 3y = 4$ ને સમાંતર અભિલંબના સમીકરણ મેળવો.

18. વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ પરના કયાં બિંદુઓ આગળ સ્પર્શકો y-અક્ષને સમાંતર હોય ?

19. વક્ર $y = b \cdot e^{\frac{-x}{a}}$ એ y-અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે, તે બિંદુ આગળ રેખા $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$ વક્રને સ્પર્શે છે તેમ સાબિત કરો.

20. સાબિત કરો કે, $f(x) = 2x + cot^{-1}x + \log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ એ **R** માં વધતું વિધેય છે.

21. સાબિત કરો કે, $a \geq 1$ માટે, $f(x) = \sqrt{3}\, sinx - cosx - 2ax + b$ એ **R** માં ઘટતું વિધેય છે.

22. $f(x) = tan^{-1}(sinx + cosx)$ એ $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં વધતું વિધેય છે, તેમ સાબિત કરો.

23. વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ નો ઢાળ કયા બિંદુએ મહત્તમ હોય ? મહત્તમ ઢાળ પણ શોધો.

24. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = sinx + \sqrt{3}\, cosx$ એ $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

25. જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં, બાજુ તથા કર્ણની લંબાઈના માપનો સરવાળો અચળ હોય, તો સાબિત કરો કે જ્યારે તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય, ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

26. વિધેય $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ એ x ની જે કિંમતો આગળ સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો ધરાવે તે કિંમતો તથા નતિબિંદુ શોધો. વળી, તેને સંગત સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો પણ શોધો.

27. કોઈ એક શહેરમાં એક ટેલિફોન કંપની 500 ગ્રાહકોની યાદી બનાવે છે અને પ્રત્યેક ગ્રાહક પાસેથી વાર્ષિક ₹ 300/- નિયત ચાર્જ વસૂલે છે. કંપની વાર્ષિક લવાજમમાં વધારો કરવાની દરખાસ્ત મૂકે અને ધારણા બાંધે કે પ્રત્યેક ₹ 1/- ના વધારાથી એક ગ્રાહક સેવા લેવાનું બંધ કરી દે, તો કંપની મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે કેટલો વધારો કરશે ?

28. જો રેખા $x\, cos\alpha + y\, sin\alpha = p$ વક્ર $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ને સ્પર્શે તો, સાબિત કરો કે,

$a^2\, cos^2\alpha + b^2\, sin^2\alpha = p^2$.

29. આપેલ પૂંઠાના જથ્થામાંથી ચોરસ આધારવાળી એક ખુલ્લી પેટી બનાવવાની છે. જો તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ c^2 હોય, તો સાબિત કરો કે, તેનું મહત્તમ ઘનફળ $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ ઘન એકમ છે.

30. 36 સેમીની પરિમિતિ ધરાવતા લંબચોરસને તે એક બાજુની આસપાસ ફરે તે રીતે બહારથી વાળવામાં આવે કે જેથી તેનું ઘનફળ શક્ય હોય તેટલું મહત્તમ થાય તો તે લંબચોરસનાં પરિમાણ નક્કી કરો. તેનું મહત્તમ ઘનફળ પણ શોધો.

31. જો સમઘન અને ગોલકનાં પૃષ્ઠફળનો સરવાળો અચળ હોય, તો જ્યારે તેમનાં ઘનફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય ત્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ અને ગોલકના વ્યાસનો ગુણોત્તર શું હોય તે શોધો.

32. કોઈ એક વર્તુળનો વ્યાસ AB છે તથા C એ વર્તુળ પરનું બિંદુ છે, તો સાબિત કરો કે જ્યારે ΔABC સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ હોય, ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

33. ચોરસ આધારવાળી અને શિરોલંબ બાજુઓ ધરાવતી ધાતુની એક પેટીનું ઘનફળ 1024 સેમી^{3} છે. આ પેટીનાં મથાળા અને તળિયા માટે વપરાયેલ સામગ્રીની કિંમત ₹ 5/સેમી^{2} તથા બાજુઓ માટે વપરાયેલ સામગ્રીની કિંમત ₹ 2.50/સેમી^{2} હોય, તો આ પેટી બનાવવા માટેનો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

34. x, $2x$ અને $\frac{x}{3}$ માપની બાજુઓ ધરાવતા લંબ સમાંતર ફલક અને ગોલકનાં પૃષ્ઠફળનો સરવાળો અચળ આપેલ છે. જો x એ ગોલકની ત્રિજ્યા કરતાં ત્રણ ગણો હોય, તો તેમનાં ઘનફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે તેમ સાબિત કરો. વળી, તેમનાં ઘનફળના સરવાળાની ન્યૂનતમ કિંમત પણ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 35 થી 39 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

35. એક સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ 2 સેમી/સેકન્ડના દરથી વધે છે. જ્યારે બાજુનું માપ 10 સેમી હોય, ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારાનો દર .... હોય.

(A) 10 સેમી^{2}/સેકન્ડ (B) $\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ (C) $10\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ (D) $\frac{10}{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ

36. એક 5 મીટર લાંબી નિસરણી દીવાલે ટેકવી છે. જો નિસરણીનો ઉપલો છેડો 10 સેમી/સેકન્ડના દરે નીચેની તરફ સરકે, જ્યારે નિસરણીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 2 મીટર દૂર હોય, ત્યારે નિસરણી તથા ભોંયતળિયાની વચ્ચે બનતા ખૂણાનો ઘટવાનો દર .... હોય.

(A) $\frac{1}{10}$ રેડિયન/સેકન્ડ (B) $\frac{1}{20}$ રેડિયન/સેકન્ડ (C) 20 રેડિયન/સેકન્ડ (D) 10 રેડિયન/સેકન્ડ

37. વક્ર $y = x^{\frac{1}{5}}$ ને બિંદુ (0, 0) આગળ ....

(A) શિરોલંબ સ્પર્શક (y-અક્ષને સમાંતર) હોય.

(B) સમક્ષિતિજ સ્પર્શક (x-અક્ષને સમાંતર) હોય.

(C) તિર્યક સ્પર્શક હોય.

(D) સ્પર્શક ન મળે.

38. વક્ર $3x^2 - y^2 = 8$ ના રેખા $x + 3y = 8$ ને સમાંતર અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $3x - y = 8$ (B) $3x + y + 8 = 0$

(C) $x + 3y \pm 8 = 0$ (D) $x + 3y = 0$

39. જો વક્ર $ay + x^2 = 7$ અને $x^3 = y$ બિંદુ (1, 1) આગળ કાટખૂણે છેદે, તો a ની કિંમત .... હોય.

(A) 1 (B) 0 (C) –6 (D) 0.6

40. જો $y = x^4 - 10$ હોય તથા x માં 2 માંથી 1.99 જેટલો ફેરફાર થતો હોય, તો y માં થતો ફેરફાર .... હોય.

(A) 0.32 (B) .032 (C) 5.68 (D) 5.968

41. વક્ર $y (1 + x^2) = 2 - x$, x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુ આગળ વક્રને દોરેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + 5y = 2$ (B) $x - 5y = 2$

(C) $5x - y = 2$ (D) $5x + y = 2$

42. વક્ર $y = x^3 - 12x + 18$ ને .... બિંદુઓ આગળ x-અક્ષને સમાંતર સ્પર્શકો છે.

(A) $(2, -2), (-2, -34)$ (B) $(2, 34), (-2, 0)$

(C) $(0, 34), (-2, 0)$ (D) $(2, 2), (-2, 34)$

43. વક્ર $y = e^{2x}$ નો બિંદુ $(0, 1)$ આગળનો સ્પર્શક x-અક્ષને .... બિંદુમાં છેદે.

(A) $(0, 1)$ (B) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (C) $(2, 0)$ (D) $(0, 2)$

44. $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ પ્રચલ સમીકરણ ધરાવતા વક્રનો બિંદુ $(2, -1)$ આગળનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-6}{7}$ (D) -6

45. બે વક્રો $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ અને $3x^2y - y^3 - 2 = 0$ .... માપના ખૂણે છેદે છે.

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

46. વિધેય $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$ એ .... પર ઘટતું વિધેય છે.

(A) $[-1, \infty)$ (B) $[-2, -1]$ (C) $(-\infty, -2]$ (D) $[-1, 1]$

47. ધારો કે, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + cosx$, વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે f ....

(A) ને $x = \pi$ આગળ ન્યૂનતમ કિંમત છે. (B) ને $x = 0$ આગળ મહત્તમ કિંમત છે.

(C) ઘટતું વિધેય છે. (D) વધતું વિધેય છે.

48. .... કિંમતો માટે $y = x(x-3)^2$ ઘટતું વિધેય છે.

(A) $1 < x < 3$ (B) $x < 0$ (C) $x > 0$ (D) $0 < x < \frac{3}{2}$

49. વિધેય $f(x) = 4\,sin^3x - 6\,sin^2x + 12\,sinx + 100$ એ ....

(A) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(C) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

50. નીચેનામાંથી કયું વિધેય $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ઘટે છે ?

(A) $sin2x$ (B) $tanx$ (C) $cosx$ (D) $cos\,3x$

51. વિધેય $f(x) = tan\,x - x$

(A) હંમેશાં વધે. (B) હંમેશાં ઘટે.

(C) ક્યારેય વધે નહિ. (D) ક્યારેક વધે અને ક્યારેક ઘટે.

52. જો $x \in R$ હોય, તો $x^2 - 8x + 17$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

53. બહુપદી $x^3 - 18x^2 + 96x$; $x \in [0, 9]$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) 126 (B) 0 (C) 135 (D) 160

54. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ ને ....

(A) x ની બે કિંમતો આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય.

(B) x ની બે કિંમતો આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

(C) x ની એક કિંમત આગળ મહત્તમ અને એક કિંમત આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

(D) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો ન હોય.

55. $\sin x \cdot \cos x$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

56. $f(x) = 2 \sin 3x + 3 \cos 3x$ એ $x = \frac{5\pi}{6}$ આગળ ....

(A) મહત્તમ હોય. (B) ન્યૂનતમ હોય.

(C) શૂન્ય હોય. (D) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ ન હોય.

57. વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ નો મહત્તમ ઢાળ .... છે.

(A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 32

58. $f(x) = x^x$ ને .... આગળ આત્યંતિક બિંદુ હોય,

(A) $x = e$ (B) $x = \frac{1}{e}$ (C) $x = 1$ (D) $x = \sqrt{e}$

59. $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

(A) e (B) e^e (C) $e^{\frac{1}{e}}$ (D) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

નીચેના ક્રમાંક 60 થી 64 વાળાં વિધાનોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

60. વક્રો $y = 4x^2 + 2x - 8$ અને $y = x^3 - x + 13$ .... બિંદુ આગળ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

61. વક્ર $y = \tan x$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળ દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

62. વિધેય $f(x) = \sin x - ax + b$ એ a ની .... કિંમત માટે, **R** પર વધતું વિધેય છે.

63. વિધેય $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$, $x > 0$ એ .... અંતરાલમાં ઘટતું વિધેય છે.

64. વિધેય $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ $(a > 0, b > 0, x > 0)$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.