सततता तथा अवकलनीयता

Ex 6.1

प्रश्न 1. निम्न फलनों की सातत्यता का परीक्षण कीजिए-

$$f(x) = \begin{cases} x\left\{1+\frac{1}{3}\sin(\log x^2)\right\}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}, \ x = 0 \text{ पर}$$

हल : (a)

दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} x\left\{1+\frac{1}{3}\sin(\log x^2)\right\}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}, \ x = 0 \text{ पर}$$

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$\begin{aligned} f(0-0) &= \lim_{h \to 0} f(0-h) \\ &= \lim_{h \to 0} f(-h) \\ &= \lim_{h \to 0} -h\left\{1+\frac{1}{3}\sin[\log(-h)^2]\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

दायीं सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$\begin{aligned} f(0+0) &= \lim_{h \to 0} f(0+h) \\ &= \lim_{h \to 0} f(h) \\ &= \lim_{h \to 0} h\left\{1+\frac{1}{3}\sin(\log h^2)\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

तथा $x = 0$ के लिए,

$f(0) = 0$

$\therefore f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$

अतः दिया हुआ फलन $x = 0$ पर सतत है।

(b)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}; & x\neq 0\\ 0; & x=0\end{cases},\ x=0 \text{ पर}$$

दिया गया फलन

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\ x=0 \text{ पर}$$

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{0-h}}}{0-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{-h}}}{-h}$$

= कोई अस्तित्व नहीं है

दायीं सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{0+h}}}{0+h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{h}}}{h}$$

= कोई अस्तित्व नहीं है।

∵ बायीं सीमा तथा दार्थी सीमा का कोई अस्तित्व नहीं है।

अत: दिया हुआ फलन x = 0 पर असतत है।

(c)

$$f(x)=\begin{cases}1+x; & x\leq 3\\ 7-x; & x>3\end{cases},\ x=3 \text{ पर}$$

दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \le 3 \\ 7-x, & x > 3 \end{cases}, \ x = 3 \text{ पर}$$

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$\begin{aligned} f(3-0) &= \lim_{h \to 0} f(3-h) \\ &= \lim_{h \to 0} 1 + (3-h) \\ &= 1 + (3-0) \\ &= 4 \end{aligned}$$

दायीं सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$\begin{aligned} f(3+0) &= \lim_{h \to 0} f(3+h) \\ &= \lim_{h \to 0} 7 - (3+h) \\ &= 7 - (3+0) \\ &= 4 \end{aligned}$$

तथा x = 3 के लिए।

$f(3) = 1 + x \Rightarrow 1 + 3 = 4$

$\therefore f(3-0) = (3+0) = f(3) = 4$

अतः दिया गया फलन x = 3 पर सतत है।

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x; & \text{यदि } \frac{-\pi}{2} < x \le 0 \\ \tan x; & \text{यदि } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \ x = 0 \text{ पर}$$

दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{यदि } \frac{-\pi}{2} < x \le 0 \\ \tan x, & \text{यदि } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \ x = 0 \text{ पर}$$

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$\begin{aligned} f(0-0) &= \lim_{h \to 0} f(0-h) \\ &= \lim_{h \to 0} \sin(0-h) \\ &= \lim_{h \to 0} \sin(-h) \\ &= \lim_{h \to 0} (-\sin h) \\ & \qquad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta] \\ &= 0 \end{aligned}$$

दायीं सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$f(0+0) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$
$$= \lim_{h \to 0} \tan(0+h)$$
$$= \lim_{h \to 0} \tan h$$
$$= 0$$

तथा x = 0 के लिए,

f(0) = sin 0 = 0

∴ f(0 − 0) = f(0 + 0) = f(0) = 0

अत: दिया हुआ फलन x = 0 पर सतत है।

(e)

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq a \\ 0; & x = a \end{cases}, \; x = a \text{ पर}$$

दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}, \; x = a \text{ पर}$$

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$f(a-0) = \lim_{h \to 0} f(a-h)$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{1}{a-h}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{1}{a-0}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{1}{a}\right)$$

दायीं सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$f(a+0) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{1}{a+h}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{1}{a+0}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{1}{a}\right)$$

तथा x = a के लिए,

f(a) = 0 (प्रश्नानुसार)

$\therefore f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$

अतः दिया हुआ फलन x = a पर असतत है।

(f)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)} \cdot \operatorname{cosec}(x-a); & x \neq a \\ 0; & x = a \end{cases}, \ x = a \text{ पर}$$

दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)} \cdot \operatorname{cosec}(x-a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}, \ x = a \text{ पर}$$

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$f(a-0) = \lim_{h \to 0} f(a-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(a-h-a)} \cdot \operatorname{cosec}(a-h-a)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{-h} \cdot \operatorname{cosec}(-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{cosec} h}{-h}$$

$$[\because \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{cosec} h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin h . h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} . \lim_{h \to 0} \frac{h}{\sin h}$$

$$\Rightarrow \quad = \infty \times 1 = \infty$$

दायीं सीमा (Right hand right) के लिए,

$$f(a+0) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{a+h-a} \cdot \operatorname{cosec}(a+h-a)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \operatorname{cosec}(h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{cosec} h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin h \cdot h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{h}{\sin h}$$

$$= \infty \times 1 = \infty$$

तथा x = a के लिए,

f(a) = 0 (प्रश्नानुसार)

∴ f(a − 0) = f(a + 0) ≠ f(a)

अतः दिया हुआ फलन x = a पर असतत है।

(g)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} - a; & x < a \\ 0; & x = a, \ x = a \text{ पर} \\ a - \dfrac{a^3}{x^2}; & x > a \end{cases}$$

दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} - a; & x < a \\ 0; & x = a, \ x = a \text{ पर} \\ a - \dfrac{a^3}{x^2}; & x > a \end{cases}$$

बायी सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$f(a-0) = \lim_{h \to 0} f(a-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(a-h)^2}{a} - a\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{a^2 + h^2 - 2ah}{a} - a\right]$$

$$= \left(\frac{a^2}{a} - a\right)$$

$$= a - a$$

$$= 0$$

दार्यी सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$f(a+0) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[a - \frac{a^3}{(a+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[a - \frac{a^3}{a^2 + h^2 + 2ah}\right]$$

$$= \left(a - \frac{a^3}{a^2}\right)$$

$$= a - a$$

$$= 0$$

तथा $x = a$ के लिए,

$f(a) = 0$.

$\therefore f(a-0) = f(a+0) = f(a) = 0$

अतः दिया हुआ एलन $x = a$ पर सतत है।

प्रश्न 2. फलन $f(x) = x - [x]$ की $x = 3$ पर सततता का परीक्षण कीजिए।

हल : दिया गया फलन, $f(x) = x - [x]$, $x = 3$ पर

बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$f(3-0) = \lim_{h \to 0} f(3-h)$

$= \lim_{h \to 0} (3-h) - [3-h]$

$= 3 - 2$

$= 1$

[क्योंकि 3 के पहले महत्तम पूर्णांक 2 है।]

दाय सीमा (Right hand limit) के लिए,

$f(3 + 0) = \lim_{h \to 0} f(3 + h)$
$= \lim_{h \to 0} (3 + h) - [3 + h]$
$= 3 - 3$
$= 0$
$\therefore (3 - 0) \neq f(3 + 0)$
अतः दिया हुआ फलन x = 3 पर असतत है।

प्रश्न 3. यदि निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}; & x \neq 2 \\ \lambda; & x = 2 \end{cases}$$

बिन्दु x = 2 पर सतत है, तब λ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,

$$f(2 - 0) = \lim_{h \to 0} f(2 - h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-h)^3 + (2-h)^2 - 16(2-h) + 20}{(2-h-2)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 - h^3 - 12h + 6h^2 + 4 + h^2 - 4h - 32 + 16h + 20}{(-h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{7h^2 - h^3}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2(7-h)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} (7 - h)$$

$$= 7$$

दायीं सीमा (Right hand limit) के लिए,

$$f(2 + 0) = \lim_{h \to 0} f(2 + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 + (2+h)^2 - 16(2+h) + 20}{(2+h-2)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + h^3 + 12h + 6h^2 + 4 + h^2 + 4h - 32 - 16h + 20}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{7h^2 + h^3}{h^2}$$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2(7+h)}{h^2}$
$= \lim_{h \to 0} (7+h)$
$= 7$
तथा $x = 2$ के लिए,
$f(2) = \lambda$ (प्रश्नानुसार)

∴ फलन x = 2 पर सतत है, तब
$f(2 - 0) = f(2 + 0) = f(2)$
तब $7 = 7 = \lambda$.
अतः $\lambda = 7$.

प्रश्न 4. निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} -x^2; & -1 \le x < 0 \\ 4x - 3; & 0 < x \le 1 \\ 5x^2 - 4x; & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

के अन्तराल [-1,2] में सततता का परीक्षण कीजिए।

हल : हम यहाँ पर फलन की सततता की जाँच बिन्दु x = 0 पर कारेंगे तथा $0 \in [-1, 2]$.
x = 0 पर फलन की सततता का परीक्षण,
बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,
$f(0 - 0) = \lim_{h\to0} f(0 - h)$
$= \lim_{h\to0} (0 - h)^2$
$= \lim_{h\to0} h^2$
$= 0$
दायीं समा (Right hand limit) के लिए,
$f(0 + 0) = \lim_{h\to0} f(0 + h)$
$= \lim_{h\to0} 4(0 + h) - 3$
$= \lim_{h\to0} 4h - 3$
$= 0 - 3$
$= -3$
$\therefore f(0 - 0) \ne f(0 + 0)$
बार्थी सीमाके ≠ दार्थी सीमा
अतः फलन x = 0 पर असतत है तथा $x \in [-1, 2]$
x = 1 पर फलन की सततता का परीक्षण
बायीं सीमा (Left hand limit) के लिए,
$f(1 - h) = \lim_{h\to0} 4(1 - h) - 3$

$= \lim_{h\to0} 4 - 3 - 4h$
$= 4 - 3 - 0 = 1$
दाय सीमा (Right hadn limit) के लिए,
$(1 + h) = \lim_{h\to0} 5(1 + h)^2 - 4(1 + h)$
$= \lim_{h\to0} 5(1 + h^2 + 2h) - (4 + 4h)$
$= \lim_{h\to0} 5h^2 + 10h + 5 - 4 - 4h$
$= 5 \times 0 + 10 \times 0 + 1 - 4 (0)$
$= 1$
x = 1 पर फलन का मान ।
$f(1) = 4 \times 1 - 3 = 1$
$\because \lim_{h\to0} f(1 - h) = f(1) = \lim_{h\to0} f(1 + h)$
∴ फलन x = 2 पर सततता है।
अत: दिया हुआ फलन अन्तराल [-1, 2] में असतत है।

Ex 6.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय है
(i) तत्समक फलन f(x) = x
(ii) अचर फलन f(x) = c, जहाँ c अचर है।
(iii) $f(x) = e^x$
(iv) f(x) = sinx.

हल : (i) दिया है कि f(x) = x, तत्समक फलन है।
जहाँ x ∈ R (R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय)
माना a कोई स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, तब
x = a पर f(x) को बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(a-0) = \lim_{h\to0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$
$$= \lim_{h\to0} \frac{a-h-a}{-h}$$
$$= \lim_{h\to0} \frac{-h}{-h}$$
$$= \lim_{h\to0} (1)$$
$$= 1$$

पुन: x = a पर f(x) का दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(a+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (1)$$
$$= 1$$
$$\therefore \quad f'(a-0) = f'(a+0)$$
अतः तत्समक फलन f(x) = x, x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय

इति सिद्धम्।

(ii) दिया है कि अचर फलन f(x) = c, जहाँ c अचर है। फलन f(x) का प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है।

माना a कोई स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, तब

x = a पर f(x) का बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(a-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 0$$
$$= 0$$
पुन: x = a पर f(x) का दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(a+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 0$$
$$= 0$$
$$\therefore \quad f'(a-0) = f'(a+0)$$
अतः अचर फलन (x) = c, x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय

इति सिद्धम्।

(iii) दिया गया फलन f(x) = e^x जहाँ $x \in R$

माना a कोई स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, तब

x = a पर f(x) का बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(a-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{a-h} - e^a}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^a(e^{-h} - 1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^a\left[1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \ldots\infty - 1\right]}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^a \cdot (-h)\left[1 - \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} - \ldots\infty\right]}{-h}$$

$$= e^a$$

पुनः x = a पर f(x) का दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(a+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^a(e^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^a\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\infty - 1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^a \cdot h\left[1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\infty\right]}{h}$$

$$= e^a$$

$$\therefore \quad f'(a-0) = f'(0+0)$$

अतः अचर फलन (x) = e^x, x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय

इति सिद्धम्।

(iv) दिया गया फलन f(x) = sin x, जहाँ $x \in R$

माना a कोई स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, तब

x = a पर f(x) का बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(a-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a-h) - \sin a}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{a-h+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-h-a}{2}\right)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{\left(\frac{-h}{2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{\left(\frac{-h}{2}\right)}$$

$$= \cos a \times 1$$

$$= \cos a$$

पुनः x = a पर f(x) का दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(a+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

= cos a × 1
= cos a
$\therefore$ f′ (a − 0) = f′ (a + 0)
अतः फलन f(x) = sin x, x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि फलन f(x) = | x | बिन्दु x = 0 पर अवकलनीय नहीं है।
हल : x = 0 पर अवकलनीयता के लिए,
बायाँ पक्ष का अवकलज (Left hand derivative)
L.H.D.

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h| - |0|}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{|-h| - 0}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

तथा दाएँ पक्ष का अवकलज (Right hand derivative)
R.H.D.

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 1$$
$$= 1$$
$$\therefore \quad f'(0-0) \neq f'(0+0)$$

अतः फलन f(x), x = 0 पर अवकलनीय नहीं है। इति सिद्धम्।

प्रश्न 3. फलन f(x) = |x − 1| + |x|, का बिन्दुओं x = 0, 1 पर अवकलनीयता को परीक्षण कीजिए।

हल : हम दिए गए फलन को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x<0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & x \ge 1 \end{cases}$$

x = 0 पर अवकलनीयता के लिए,

बाएँ पक्ष का अवकलन (Left hand derivative)

L H.D.

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2(0-h)-1}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h-1}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (-2)$$
$$= -2$$

दाएँ पक्ष का अवकलज (Right hand derivative)

R.H.D.

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (0)$$
$$= 0$$

$$\therefore \quad f'(0-0) \neq f'(0+0)$$

अतः फलन f(x), x = 0 पर अवकलनीय नहीं है।

अब x = 1 पर अवकलनीयता के लिए,

बाएँ पक्ष का अवकलज (Left hand derivative)

$$\text{L.H.D. } f'(1-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-\{2(1)-1\}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0$$

$$= 0$$

तथा दाएँ पथ का अवकलज (Right hand derivative)

$$\text{R.H.D. } f'(1+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{2(1+h)-1\}-\{2(1)-1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+2h-1)-(2-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2$$

$$= 2$$

$$\therefore \quad f'(1-0) = f'(1+0)$$

अतः फलन f(x), x = 1 पर अवकलनीय नहीं है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. फलन f(x) = |x − 1| + |x − 2| के अन्तराल [0, 2] में अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल : दिए गए फलन को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2x-3, & x \ge 2 \end{cases}$$

यहाँ फलन की अवकलनीयता की जाँच बिन्दु x = 1 पर करेंगे। क्योंकि $1 \in [0, 2]$

x = 1 पर अवकलनीयता के लिए।

बाएँ पक्ष का अवकलज (Left hand derivative)

L.H.D.

$$f'(1-0) = \lim_{h \to 0} \frac{d(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - 2(1-h) - 1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - 2 + 2h - 1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2)$$

$$= -2$$

दाएँ पक्ष का अवकलज (Right hand derivative)

R.H.D.

$$f'(1+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (0)$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad f'(1-0) \neq f'(1+0)$$

फलन f(x), x = 1 पर अवकलनीय नहीं है तथा x = [0, 2]

अत: दिया हुआ फलन अन्तराल [0, 2] में अवकलनीय नहीं है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1} x; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

की बिन्दु पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल : x = 0 पर अवकलनीयता के लिए,

बाएँ पक्ष का अवकलज (Left hand derivative)

$$\text{L.H.D. } f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)\tan^{-1}(0-h) - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-h)\tan^{-1}(-h)}{(-h)}$$

$$= \tan^{-1}(-h)$$

$$= 0$$

दाएँ पक्ष का अवकलज (Right hand derivative)

$$\text{R.H.D. } f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)\tan^{-1}(0+h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \tan^{-1}(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \tan^{-1}(h)$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad f'(0-0) = f'(0+0)$$

अतः x = 0 पर फलन अवकलनीय है।

प्रश्न 6. फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{2}; & x \leq 0 \\ \dfrac{x-2x^2}{2}; & x > 0 \end{cases}$$

की बिन्दु x = 0 पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल : x = 0 पर अवकलनीयता के लिए,

बाएँ पक्ष का अवकलज (Left hand derivative)

L.H.D.

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{\frac{1-\cos(0-h)}{2}\right\} - \left\{\frac{1-\cos 0}{2}\right\}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{\frac{1-\cos(-h)}{2}\right\} - \left\{\frac{1-1}{2}\right\}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{\frac{1-\cos h}{2}\right\} - 0}{-h}$$

$[\because \quad \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{-2h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{-2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{-h}{4}\right)$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

दाएँ पक्ष का अवकलज (Right hand derivative)
R.H.D.

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{\frac{(0+h)-2(0+h)^2}{2}\right\} - \left\{\frac{1-\cos 0}{2}\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{\frac{h-2h^2}{2}\right\} - \left\{\frac{1-1}{2}\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h(1-2h)}{2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(1-2h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2h}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; f'(0-0) \neq f'(0+0)$$

अतः x = 0 पर फलन अवकलनीय है।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^m \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) बिन्दु x = 0 पर सतत है यदि m > 0

(b) बिन्दु x = 0 पर अवकलनीय है यदि m > 1

हल : (a) x = 0 पर सततता

(i) x = 0 पर फलन का मान f(0) = 0

(ii) x = 0 पर f(x) की बार्थी सीमा

$$f(0-0) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (0-h)^m . \cos\left(\frac{1}{0-h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h)^m . \cos\left(\frac{1}{-h}\right)$$

$$= (-1)^m \lim_{h \to 0} h^m \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$$

(iii) x = 0 पर f(x) की दायीं सीमा

$$f(0+0) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (0+h)^m \cdot \cos\left(\frac{1}{0+h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} h^m \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

x = 0 पर फलन f(x) सतत होगा यदि (i) व (iii) अगल-अलग शून्य हों। ,

चूँकि $cos\left(\frac{1}{h}\right)$ का मान − 1 तथा 1 के मध्य परिमित राशि है।

अत: दोनों सीमाएँ शून्य होंगी यदि m > 0

अतः फलन f(x), x = 0 पर सतत है यदि m> 0

(b) x = 0 पर अवकलनीयता,

x = 0 पर बायाँ अवकलज (left hand derivative)

$$f'(0-0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-h)^m \cos\left(\frac{1}{-h}\right)-0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-h)^{m-1}.\cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$$

$$= \lim_{h\to 0} (-1)m-1.h^{m-1}.\cos\left(\frac{1}{h}\right) \quad ...(i)$$

x = 0 पर दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(0+0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^m.\cos\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{m-1}.\cos\left(\frac{1}{h}\right) \quad ...(ii)$$

दिया है कि f(x), x = 0 पर अवलनीय है, तब

f' (0 − 0) = f' (0 + 0),

जो कि समीकरण (i) व (ii) से

तभी सम्भव है जबकि m − 1 > 0 या m > 1

अतः दिया गया फलन f(x), x = 0 पर अवकलनीय है, यदि m> 1.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 8. निम्न फलन की x = 0 पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x^2}}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

हल : x = 0 पर बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{(0-h)^2}}} - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{h^2}}}}{-h}$$

$$\left[\because \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h^2}}} = 1\right]$$

$$= -\infty$$

x = 0 पर दायाँ अवकलज (Right hand derivation)

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{(0-h)^2}}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{h^2}}}}{h}$$

$$= \infty$$

$$\therefore \quad f'(0-0) \neq f'(0+0)$$

अतः फलन x = 0 पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 9. फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

की बिन्दु x = 0 पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल : x = 0 पर बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{|0-h|}{0-h} - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{-h}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

$$= \infty$$

x = 0 पर दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{|0+h|}{0+h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

$$= \infty$$

$$\therefore \quad f'(0-0) = f'(0+0)$$

यहाँ बायाँ व दायाँ अवकलज विद्यमान नहीं है।

अत: x = 0 पर दिया गया फलन अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 10. फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

बिन्दु x = $\frac{\pi}{2}$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल :

x = $\frac{\pi}{2}$ पर बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(0-0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[2+\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right]-\left[2+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-1}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h-1}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(1-\cos h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2 h/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-1+2\sin^2 h/2}{h}$$

$$= \lim_{h/2\to 0} \frac{\sin\ h/2}{h/2} \times \lim_{h\to 0} \sin\frac{h}{2}$$

$$= 1 \times 0$$

$$= 0$$

पुनः $x = \frac{\pi}{2}$ पर दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(0+0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[2+\left(\frac{\pi}{2}+h-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]-\left[2+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+h^2-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} (h)$
$= 0$
$\therefore f'(0-0) = f'(0+0)$

अतः $\therefore x = \frac{\pi}{2}$ पर दिया गया फलन अवकलनीय है।

प्रश्न 11. m तथा n के मान ज्ञात कीजिए जबकि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + m, & \text{जब } x \le 1 \\ nx + 2, & \text{जब } x > 1 \end{cases}$$

प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है।

हल : दिया है कि फलन f(x), x = 1 अवकलनीय है। हम जानते हैं। कि प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत होता है। अतः x = 1 पर फलन f(x) सतत है।

$\therefore$ बाय सीमा (Left hand limit)
$f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h)$
$= \lim_{h\to 0} (1+h)^2 + 3(1-h) + m$
$= (1-0)^2 + 3(1-0) + m$
$= 1 + 3 + m$
$= 4 + m$
अब दार्थी सीमा (Right hand limit)
$f(1+0) = \lim_{h\to 0} f(1+h)$
$= \lim_{h\to 0} n(1+h) + 2$
$= n(1+0) + 2$
$= n + 2$
$\therefore$ फलन x = 1 पर सतत है, तब
$f(1-0) = f(1+0)$
तब $4 + m = n + 2$
या $m - n = -2$
पुनः x = 1 पर f(x) अवकलनीय है।
तब x = 1 पर बायाँ अवकलज (Left hand derivative)

$$f'(1-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(1-h)^2+3(1-h)+m]-[(1)^2+3(1)+m]}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h^2-2h+3-3h+m)-(1+3+m)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2-5h+4+m-4-m}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h(5-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (5-h)$$

$$= 5-0$$

$$= 5$$

तथा x = 1 पर दायाँ अवकलज (Right hand derivative)

$$f'(1+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[n(1+h)+2]-[(1)^2+3(1)+m]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(n+nh+2)-(1+3+m)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n+nh+2-4-m}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2+nh+2-4}{h} \quad [\because m-n=-2 \text{ से}]$$

$$= n$$

$\therefore$ x = 1 पर फलन अवकलनीय है।

तब f' (1 − 0) = f' (1 + 0)

5 = n ⇒ n = 5

n का मान समीकरण (i) में रखने पर,

⇒ m − 5 = − 2

⇒ m = − 2 + 5

m = 3

अतः m = 3 तथा n = 5

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि फलन f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$. x = 3 पर संतत है तो f(3) का मान होगा :
(a) 6
(b) 3
(c) 1
(d) 0

हल :
f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$
दाँय सीमा (RHL.)

$$f(3+0) = \lim_{h \to 0} f(3+h)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h-9}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (6+h)$$
$$= 6$$

फलन x = 3 पर संतत है इसलिए
f(3) = f(3 + 0)
f(3) = 6
अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 2. यदि

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}; & x \neq 0 \\ m; & x = 0 \end{cases}$$

x = 0 पर संतत है तब m का मान होगा :
(a) 3
(b)
(c) 1
(d) 0

हल :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}; & x \neq 0 \\ m; & x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = m$$

$$f(0+0) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 3(0+h)}{0+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3\frac{\sin 3h}{3h}$$

= 3 × 1

= 3

फलन x = 0 पर संतत है इसलिए

f(0) = f(0 + 0)

m = m

अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 3. यदि

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+mx)-\log(1-nx)}{x}; & x \neq 0 \\ k; & x = 0 \end{cases}$$

बिन्दु x = 0 पर सतत है, तब k का मान होगा :

(a) 0

(b) m + n

(c) m − n

(d) m.n

हल :

∴ फलन x = 0 पर सतत है।

$\therefore \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+mn)-\log(1-nx)}{x} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\left[mx-\frac{m^2x^2}{2}+\frac{m^3x^3}{3}-\ldots\right]-\left[-nx-\frac{n^2x^2}{2}-\frac{n^3x^3}{3}-\ldots\right]}{x} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\left[m-\frac{m^2x}{2}+\frac{m^3x^2}{3}-\ldots+n+\frac{n^2x}{2}+\frac{n^3x^2}{3}+\ldots\right]}{x} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} m-\frac{m^2x}{2}+\frac{m^3x^2}{3}-\ldots+n+\frac{n^2x}{2}+\frac{n^3x^2}{3}+\ldots = \lambda$$

$\Rightarrow m + n = \lambda$
$\Rightarrow \lambda = m + n$
अतः विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 4. यदि

$$f(x) = \begin{cases} x+\lambda; & x<3 \\ 4; & x=3 \\ 3x-5; & x>3 \end{cases},$$

बिन्दु $x = 3$ पर सतत है तब λ का मान होगा :
(a) 4
(b) 3
(c) 2
(d) 1
हल : बाय सीमा (Left hand limit)
$f(3 - 0) = \lim_{h\to 0} f(3 - h)$
$= \lim_{h\to 0} (3 - h) + \lambda.$
$= (3 - 0) + \lambda$
$= 3 + \lambda$
$\because x = 3$ पर फलन सतत है, तब
$f(3 - 0) = f(3)$
$3 + \lambda = 4$
$\lambda = 4 - 3$
$\lambda = 1$
अतः विकल्प (d) सही है।

प्रश्न 5. यदि f(x) = cot x, x = $\frac{n\pi}{2}$पर असतत है, तब
(a) n ∈ Z
(b) n ∈ N
(c) $\frac{n}{2}$ ∈z
(d) n = 0

हल :

∵ फलन x = $\frac{n\pi}{2}$ पर असतत है, तब

$\lim_{x \to \frac{n\pi}{2}}$ cot x का अस्तित्व नहीं होगा।

$$\Rightarrow \quad \cot\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cot\left[\left(\frac{n}{2}\right)\pi\right]$$

तब $\frac{n}{2} \in z.$

अतः विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 6. फलन f(x) = x |x| के उन बिन्दुओं का समुच्चय, जिन पर वह अक्कलनीय होगा :
(a) (0, ∞)
(b) (-∞,∞)
(c) (-∞, 0)
(d) (-∞, 0) ∩ (0, ∞)

हल : दिए गए फलन को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर अवकलनीयता की जाँच करने पर,

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)^2 - f(0)^2}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{-h}$$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0}(-h) = 0$

$x = 0$ पर दायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)^2 - f(0)^2}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{-h}$$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (-h) = 0$

$x = 0$ पर दायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 - (0)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h}$$

$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} h = 0$

$\because \quad f'(0-0) = f'(0+0)$

अतः फलन x = 0 अवकलनीय है।

अतः फलन अन्तराल (- ∞, ∞) में अवकलनीय है।

अतः विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 7. निम्न फलनों में से कौन-सा x = 0 पर अवकलनीय नहीं है:
(a) x |x|
(b) tan x
(c) e^{-x}
(d) x + |x|

हल : x = 0 पर बायाँ अवकलज

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{-h+1-h)\} - (0+|0|}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h+h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{-h}$$

x = 0 पर बायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{h+|h|\}-\{0+|0|\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h+h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$$

$$= 2$$

$\therefore f'(0-0) \neq f'(0+0)$

अतः फलन (x) = x + |x|

x = 0 पर अवकलनीय नहीं है।

अतः विकल्प (d) सही है।

छात्र इसी प्रकार अन्य तीनों विकल्पों की जाँच करें।

प्रश्न 8. फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{जब } x \le 2 \\ 5-x, & \text{जब } x > 2 \end{cases}$$

के लिए f(x) का x = 2 पर बाएँ अवकलज का मान होगा

(a) -1

(b) 1

(c)-2

(d) 2

हल : x = 2 पर बायाँ अवकलज

$$f(2-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[1+(2-h)]-[1+2]}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2-h-3}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 1$$

अतः विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 9. फलन f(x) = |x| अवकलनीय नहीं है
(a) प्रत्येक पूर्णांक पर
(b) प्रत्येक परिमेय संख्या पर
(c) मूल बिन्दु पर
(d) सर्वत्र
हल :
∵ [x] महत्तम पूर्णांक फलन सभी पूर्णांकों पर असतत होता है।
तथा हम जानते हैं कि प्रत्येक असतत फलन अवकलनीय नहीं होता है :
अत: विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 10. फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x}; & \text{जब } x \neq 0 \\ 0; & \text{जब } x = 0 \end{cases},$$

बिन्दु x = 0 पर अवकलनीय है, तब x = 0 पर f(x) का दायाँ अवकलज का मान होगा-
(a) -1
(b) 1
(c) 0
(d) अपरिमित

हल : x = 0 पर दायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin h^2}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h^2}{h^2} \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= 1$$

अतः विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 11. फलन $f(x) = |\sin x| + |\cos x| + |x|, \forall x \in R$ की सततता का परीक्षण कीजिए।

हल : माना $x = c$ कोई स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, तब $x = c$ पर फलन (x) की सततता के लिए,

बार्यी सीमा (Left hand limit)

$f(c - 0) = \lim_{h\to 0} f(c - h)$
$= \lim_{h\to 0} |\sin(c - h)| + |\cos(c - h)| + |(c - h)|$
$= |\sin(c - 0)| + |\cos(c - 0)| + |(c - 0)|$
$= |\sin c| + |\cos c| + |c|$
$= \sin c + \cos c + c$

दाय सीमा (Right hand limit)

$f(c + 0) = \lim_{h\to 0} f(c + h)$
$= \lim_{h\to 0} |\sin(c + h)| + |\cos(c + h)| + |(c - h)|$
$= |\sin(c + 0)| + |\cos(c + 0)| + |c + 0|$
$= |\sin c| + |\cos c| + |c|$
$= \sin c + \cos c + c$

$x = c$ पर फलन का मान

$f(c) = |\sin c| + |\cos c| + |c|$
$= \sin c + \cos c + c$
$\therefore f(c - 0) = (c + 0) = f(c)$

अतः फलन $x = c$ पर सतत है।

अत: फलन $f(x)$, R में सर्वत्र सतत है।

प्रश्न 12. यदि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(m+1)x + \sin x}{x}; & x < 0 \\ \dfrac{1}{2}; & x = 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}; & x > 0 \end{cases}$$

बिन्दु $x = 0$ पर सतत है, तब m का मान ज्ञात कीजिए।

हल : x = 0 बार्यीं सीमा

$$f(0-0) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin (m+1)(0-h) + \sin (0-h)}{(0-h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin (m+1)h + \sin h}{h}$$

$$= \frac{(m+1)h + h}{h} \qquad \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= m + 2$$

तथा $x = 0$ पर फलन का मान

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$\because$ फलन $x = 0$ पर सतत है, तब

$$f(0-0) = f(0)$$

$$m + 2 = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

प्रश्न 13. m तथा n के मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्न फलन सतत हो-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n; & 0 \le x < 2 \\ 4x - 1; & 2 \le x \le 4 \\ mx^2 + 17n; & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

हल : x = 2 पर सततता के लिए।

बार्यी सीमा (Left hand limit)

$f(2-0) = \lim_{h \to 0} f(2-h)$

$= \lim_{h \to 0} [(2-h)^2 + m(2-h) + n]$

$= (2-0)^2 + m(2-0) + n$

$= 4 + 2m + n$

दाय सीमा (Right hand limit)

$f(2+0) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$

$= \lim_{h \to 0} [4(2+h) - 1]$

$= 4(2+0) - 1$

$= 8 - 1$

$= 7$

x = 2 पर फलन का मान,

$f(2) = 4 \times 2 - 1 = 8 - 1 = 7$

दिया है, x = 2 पर फलन सतत है, तब

$f(2 - 0) = f(2 + 0) = f(2)$
$4 + 2m + n = 7 = 7$
$4 + 2m + n = 7$
$2m + n = 7 - 4$
$2m + n = 3$

अब x = 4 पर सतता के लिए,

बायीं सीमा (Left hand limit)

$f(4 - 0) = \lim_{h \to 0} f(4 - h)$
$= \lim_{h \to 0} [4(4 - h) - 1]$
$= 4(4 - (0) - 1.$
$= 16 - 1$
$= 15$

दायीं सीमा (Right hand limit)

$f(4 + 0) = \lim_{h \to 0} f(4 + a)$
$= \lim_{h \to 0} [m(4 + h)^2 + 17n]$
$= m(4 + 0)^2 + 17n$
$= 16 + 17n$

x = 4 पर फलन का मान

$f(4) = 4 \times 4 - 1 = 16 - 1 = 15$

दिया है, x = 4 पर फलन सतत है

$f(4 - 0) = f(4 + 0) = f(4)$
$15 = 16m + 17n = 15$
$\Rightarrow 16m + 17n = 15$

समीकरण (i) से $n = 3 - 2m$ समीकरण (ii) में रखने पर,

$16m + 17(3 - 2m) = 15$
$16m + 51 - 34m = 15$
$- 18m = 15 - 51$
$- 18m = - 36$
$m = 2$

m का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$2 \times 2 + n = 3$
$n = 3 - 4$

अतः $m = 2, n = - 1.$

प्रश्न 14. फलन

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{\sin x}; & x\neq 0\\ 1; & x=0\end{cases}$$

के लिए बिन्दु. x = 0 पर सततता का परीक्षण कीजिए।

हल : x = 0 पर सततता के लिए

बार्यी सीमा (Left hand limit)

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0}f(0-h)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\tan(0-h)}{\sin(0-h)}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\tan(-h)}{\sin(-h)}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{-\tan h}{-\sin h}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}(\sec h)$$
$$=1$$

दार्थी सीमा (Right hand limit)

$$f(0+0)=\lim_{h\to 0}f(0+h)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\tan(0+h)}{\sin(0+h)}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\tan h}{\sin h}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}(\sec h)$$
$$=1$$

x = 0 पर फलन का मान,

f(0) = 1

∴ f(0 − 0) = f(0 + 0) = f(0) = 1

अत: फलन f(x), x = 0 पर सतत है।

प्रश्न 15. फलन

$$f(x)=\begin{cases}|x-3|; & x\geq 1\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{13}{4}; & x<1\end{cases}$$

के लिए बिन्दु x = 1 तथा 3 पर सततता का परीक्षण कीजिए।

हल : x = 1 पर सातत्यता की जाँच

बार्यी सीमा (Left hand limit)

$$f(1-0) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{(1-h)^2}{4} - \frac{3(1-h)}{2} + \frac{13}{4}\right]$$
$$= \frac{(1-0)^2}{4} - \frac{3(1-0)}{2} + \frac{13}{4}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{13}{4} = \frac{1-6+13}{4} = \frac{8}{4}$$
$$= 2$$

दार्यीं सीमा (Right hand limit)

$f(1 - 0) = \lim_{h\to0} f(1 - h)$
$= \lim_{h\to0} | 1 + h - 3 |$
$= | 1 + 0 - 3 |$
$= | - 2 |$
$= 2$

x = 1 पर फलन का मान

$f(1) = | 1 - 3 |$
$= | - 2 |$
$= 2$
$\therefore f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1) = 2$

अतः फलन f(x), x = 1 पर सतत है।

x = 3 पर सातत्यता की जाँच

बाय सीमा (Left hand limit)

$f(3 - 0) = \lim_{h\to0} f(3 - a)$
$= \lim_{h\to0} - \{(3 - h) - 3\}$
$= \lim_{h\to0} (3 - 3 + h)$
$= 0$

दार्यीं सीमा (Right hand limit)

$f(3 + 0) = \lim_{h\to0} f(3 + h)$
$= \lim_{h\to0} (3 + h - 3)$
$= 0$
$f(3) = 3 - 3 = 0$
$\therefore f(3 - 0) = f(3 + 0) = f(0) = 0$

अतः फलन f(x), x = 3 पर सतत है।

प्रश्न 16. यदि

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x}, & x<0\\ c, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx\sqrt{x}}, & x>0\end{cases},$$

बिन्दु x = 0 पर सतत है, तब a, b तथा c के मान ज्ञात कीजिए।

हल : x = 0 पर दिया गया फलन सतत है, तब

बायीं सीमा (Left hand limit)

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0}f(0-h)$$
$$=\lim_{h\to 0}f(-h)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+1)(-h)+\sin(-h)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+1)h+\sin h}{h}$$
$$=(a+1)+1$$
$$=a+2$$

दायीं सीमा (Right hand limit)

$$f(0+0)=\lim_{h\to 0}f(0+h)$$
$$=\lim_{h\to 0}f(h)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+bh^2}-\sqrt{h}}{bh\sqrt{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+bh)^{1/2}-1}{bh}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+\frac{bh}{2}+\ldots 1}{bh}\text{ (द्विपद प्रमेय से)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$x=0$ पर फलन का मान

$$f(0)=c$$

∵ फलन सतत है, तब

$$f(0-0)=f'(0+0)=f(0)$$

$$a+2=\frac{1}{2}=c$$

$\Rightarrow$ $$a+2=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2}-1$$

$\Rightarrow$ $$a=\frac{-3}{2} \text{ तथा } c=\frac{1}{2}$$

$\because$ दार्यी सीमा में b विलुप्त हो रहा है; अत:

$$b \in R$$

अत: $a=\frac{-3}{2}, c=\frac{1}{2}$ तथा $b \in R$.

प्रश्न 17. फलन f(x) = $\frac{|3x-4|}{3x-4}$ के लिए $x=\frac{4}{3}$ पर सततता की जाँच कीजिए।

हल :

$x=\frac{4}{3}$ पर सतता के लिए

बार्यी सीमा (Left hand limit)

$$f\left(\frac{4}{3}-0\right)=\lim_{h \to 0} f\left(\frac{4}{3}-h\right)$$

$$=\lim_{h \to 0}\left[\frac{\left|3\left(\frac{4}{3}-h\right)-4\right|}{3\left(\frac{4}{3}-h\right)-4}\right]$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{|4-3h-4|}{4-3h-4}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{|-3h|}{-3h}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{3h}{-3h}$$

$$=-1$$

दार्यी सीमा (Right hand limit)

$$f\left(\frac{4}{3}+0\right)=\lim_{h \to 0} f\left(\frac{4}{3}+h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\left| 3\left(\frac{4}{3}+h\right)-4 \right|}{3\left(\frac{4}{3}+h\right)-4} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|4+3h-4|}{4+3h-4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|3h|}{3h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{3h}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{4}{3}-0\right) \neq f\left(\frac{4}{3}+0\right)$$

अत: फलन $x = \frac{4}{3}$ पर असतत है।

प्रश्न 18. अन्तराल [-1,2] के फलन f(x) = |x| + |x − 1| के सतत होने की जाँच कीजिए।

हल : दिया गया फलन f(x) = | x | + | x − 1 |

दिए गए फलन को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{यदि } x<0 \\ 1, & \text{यदि } 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & \text{यदि } x \ge 1 \end{cases}$$

यहाँ केवल x = 0 तथा 1 पर सततता का परीक्षण करेंगे।

x = 0 पर सततता का परीक्षण

यहाँ f(0) = 1

बायीं सीमा (Left hand limit)

$f(0 - 0) = \lim_{h\to0} f(0 - h)$

$= \lim_{h\to0} 1 - 2(0 - h)$

= 1

दायीं सीमा (Right hand limit)

$f(0 + 0) = \lim_{h\to0} f(0 + h)$

= 1

f(0) = f(0 − c) = f(0 + 0)

अतः x = 0 पर फलन f(x) सतत है।

अब x = 1 पर सततता का परीक्षण

यहाँ f(1) = 2 x 1 − 1 = 1

बायीं सीमा (1 − 0) = $\lim_{h\to 0} f(1 - h)$
= $\lim_{h\to 0} 1$
दायीं सीमा f(1 + 0) = $\lim_{h\to 0} f(1 + h)$
= $\lim_{h\to 0} 2(1 + h) - 1$
= 2(1 + 0) − 1
= 2 − 1
= 1
∴ f(1) = (1 − 0) = f(1 + 0)
अतः x = 1 पर फलन f(x) सतत है।
∴ फलन x = 0 तथा 1 पर सतत है।
अतः फलन f(x), अन्तराल [-1, 2] में सतत है।

प्रश्न 19. यदि फलन

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x},$$

बिन्दु x = 0 पर सतत है, तब f(0) का मान ज्ञात कीजिए।
हल :
∵ फलन x = 0 पर सतत है।

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/3}}{x} = f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{2}x+\ldots\right)-\left(1+\frac{1}{3}x+\ldots\right)}{x} = f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x+\ldots x \text{ की उच्च घातों के पद}}{x} = f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{x\left[\frac{1}{6}+\ldots x \text{ की उच्च घातों के पद}\right]}{x} = f(0)$$

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{6} = f(0)$

अत: $\qquad x = \frac{1}{6}\cdot$

प्रश्न 20. फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

का x = 0 पर सततता का परीक्षण कीजिए।

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

बायीं सीमा $= f(0-0)$

$$= \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h}-1}{e^{-1/h}+1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{e^{1/h}}-1}{\frac{1}{e^{1/h}}+1}$$

$$= \frac{0-1}{0+1} = -1 \qquad \left[\because \lim_{h \to 0} \frac{1}{e^{1/h}} = 0\right]$$

दायीं सीमा $= f(0+0)$

$$= \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{1/h}-1}{e^{1/h}+1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-\frac{1}{e^{1/h}}}{1+\frac{1}{e^{1/h}}}$$

$$\left[\because \lim_{h \to 0} \frac{1}{e^{1/h}} = 0\right]$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$f(0-0) \neq f(0+0)$

अर्थात् फलन की सीमा का x = 0 पर अस्तित्व नहीं है।
अतः फलन x = 0 पर सतत नहीं है।

प्रश्न 21. फलन f(x) = sin x, x के किन मानों के लिए अवकलनीय है।

हल : दिया गया फलन, (x) = sinx
f का प्रान्त R है अर्थात् डोमेन (f) = R
जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।
माना $a \in R$ कोई स्वेच्छ वास्तविक संख्या है,
तब x = a पर बायाँ अवकलज

$$f'(a-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a-h)-\sin a}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{a-h+a}{2}\right).\sin\left(\frac{a-h-a}{2}\right)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(a-\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos(a-0) \times 1$$
$$= \cos a$$

तथा $x = a$ पर दायाँ अवकलज

$$f'(a+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right).\sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{a+h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos(a+0) \times 1$$

$$= \cos a$$

$$\therefore \quad f'(a-0) = f'(a+0)$$

अत: sin x, a ∈ R में अवकलनीय है।

∵ a समुच्चय R का एक स्वेच्छ अवयव है।

∴ sin x, x ∈ R में अवकलनीय है।

प्रश्न 22. फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

की x ∈ R के लिए अवकलनीयता की जाँच कीजिए तथा f' (0) का मान ज्ञात कीजिए।

हल : x = 0 पर बायाँ अवकलज

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)^2 \sin(0-h) - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 \sin h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin h$$

$$= 0$$

x = 0 पर दायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 \sin(0+h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin h$$

$$= 0$$

$$\because \quad f'(0-0) = f'(0+0)$$

अतः फलन x = 0 पर अवकलनीय है।

$\therefore x \in R$, तब फलन प्रत्येक $x \in R$ के लिए अवकलनीय है तथा $f'(0) = 0$.

प्रश्न 23. फलन

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x-a}\right); & x \neq a \\ 0; & x = a \end{cases}$$

बिन्दु x = a पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल : x = a पर बायाँ अवकलज = L.H.D.

$$f'(a-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a-h-a)^2 . \sin\left(\dfrac{1}{a-h-a}\right) - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 . \sin\left(\dfrac{1}{-h}\right)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$= 0$$

x = a पर दायाँ अवकलज = R.H.D.

$$f'(a+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h-a)^2 . \sin\left(\dfrac{1}{a+h-a}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 . \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad f'(a-0) = f'(a+0)$$

अतः फलन x = a पर अवकलनीय है।

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & x \geq 1 \\ 1 - x; & x < 1 \end{cases}$$

बिन्दु x = 1 पर अवकलनीय नहीं है।

हल : x = 1 पर बायाँ अवकलज (L.H.D.)

$$f'(1-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{1-(1-h)\} - \{(1)^2 - 1\}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-1+h)-(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h}$$

$$= -1$$

x = 1 पर दायाँ अवकलज (R.H.D.)

$$f'(1+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{(1+h)^2 - 1\} - \{(1)^2 - 1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h^2+2h-1)-(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h+2)$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$

$$\therefore \quad f'(1-0) \neq f'(1+0)$$

अतः फलन x = 1 पर अवकलनीय है।

प्रश्न 25. फलन

$$f(x) = \begin{cases} -x; & x \geq 0 \\ x; & x < 0 \end{cases}$$

की बिन्दु x = 0 अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

हल : x = 0 पर बायाँ अवकलज (L.H.D.)

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h) - (-0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (1)$$

$$= 1$$

x = 0 पर दायाँ अवकलज (R.H.D.)

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(0+h) - (-0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-1)$$

$$= -1$$

$\therefore \quad f'(0-0) \neq f'(0+0)$

अतः फलन x = 0 पर अवकलनीय है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log_e \cos x}{\log_e (1+x^2)}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

बिन्दु x = 0 पर अवकलनीय है।

हल : x = 0 पर बायाँ अवकलज

$$f'(0-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(0-h) \log_e \cos(0-h)}{\log_e \{1+(0-h)^2\}} - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h \log_e \cos(-h)}{\log_e (1+h^2)}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e \cos h}{\log_e (1+h^2)}$$

$$= 0$$

x = 0 पर बायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(0+h) \log_e \cos(0+h)}{\log_e \{1+(0+h)^2\}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \log_e \cos h}{\log_e (1+h^2)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e \cos h}{\log_e (1+h^2)}$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad f'(0-0) = f'(0+0)$$

अत: फलन x = 0 पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 27. फलन f(x) = | x – 2 | + 2| x – 3 | की अन्तराल [1, 3] में अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

हल : दिए गए फलन को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$f(x) = \begin{cases} 8 - 3x, & \text{यदि } x < 2 \\ 4 - x, & \text{यदि } 2 \le x < 3 \\ 3x - 8, & \text{यदि } x \ge 3 \end{cases}$$

यहाँ x = 2 पर अवकलनीय की जाँच करेंगे; क्योंकि

$2 \in [1, 3]$
x = 2 पर बाय सीमा (Left hand limit)

$$f'(2-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{8 - 3(2-h)\} - \{4-2\}}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 - 6 + 3h - 2}{-4}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (-3)$$
$$= -3$$

x = 2 पर दायीं सीमा (Right hand limit)

$$f'(2+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{4 - (2-h)\} - \{4-2\}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 2 + h - 2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (1)$$
$$= 1$$

$$\therefore \quad f'(2-0) \neq f'(2+0)$$

अत: फलन x = 2 पर अवकलनीय नहीं है। स्पष्ट है कि फलन अन्तराल [1, 3] में अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 28. यदि फलन (x) = x^3, x = 2 पर अवकलनीय है, तब f'(2) ज्ञात कीजिए।

हल : x = 2 पर बायीं सीमा (Left hand limit)

$$f'(2-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-h)^3 - (2)^3}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 - h^3 - 12h + 6h^2 - 8}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h(h^2 + 12 - 6h)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h^2 + 12 - 6h)$$

$$= (0)^2 + 12 - 6(0)$$

$$= 12$$

x = 2 पर दायीं सीमा (Right hand limit)

$$f'(2+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - (2)^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + h^3 + 12h + 6h^2 - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h^2 + 12 + 6h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h^2 + 12 + 6h)$$

$$= (0)^2 + 12 + 6(0)$$

$$= 12$$

$$\therefore \quad f'(2-0) = f'(2+0) = 12$$

अतः फलन x = 2 पर अवकलनीय है।

तथा f' (2) = 12.

प्रश्न 29. सिद्ध कीजिए कि महत्तम मान फलन f(x) = [x], बिन्दु x = 2 पर अवकलनीय नहीं है।

हल : x = 2 पर बाय सीमा (Left hand limit)

$$f'(2-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2-h] - [2]}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$
$$= \infty$$

x = 2 पर दार्थी सीमा (Right hand limit)

$$f'(2+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2+h] - [2]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$
$$= 0$$

$$\therefore \quad f'(2-0) \neq f'(2+0)$$

अत: x = 2 पर फलन अवकलनीय नहीं है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 30. फलन

$$f(x) = \begin{cases} x - 1; \ x < 2, \\ 2x - 3; \ x \geq 2 \end{cases},$$

तब f' (2 – 0) ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f'(2-0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{(2-h)-1\} - \{2 \times (2) - 3\}}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-h-1) - (4-3)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-h-1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{-h}{-h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} (1)$$

$$= 1$$

अत: $f'(2-0) = 1$