



Chapter 11

त्रिकोणमितीय समीकरण एवं असमिकाएँ, त्रिभुजों के गुण, ऊँचाई एवं दूरी

त्रिकोणमितीय समीकरण एवं असमिकाएँ

प्रस्तावना (Introduction)

ऐसे समीकरण को जिनमें एक या एक से अधिक अज्ञात कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का समावेश हो, त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं

अर्थात् $\sin x + \cos 2x = 1$; $(1 - \tan \theta)(1 + \sin 2\theta) = 1 + \tan \theta$;

$|\sec(\theta + \frac{\pi}{4})| = 2$ इत्यादि।

त्रिकोणमितीय समीकरण, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं से भिन्न होता है। एक सर्वसमिका अज्ञात कोण के प्रत्येक मान के लिए सन्तुष्ट होती है जैसे $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए सत्य है, जबकि त्रिकोणमितीय समीकरण अज्ञात कोण के कुछ विशेष मानों द्वारा सन्तुष्ट होता है।

(1) **त्रिकोणमितीय समीकरण के मूल** : अज्ञात कोण (एक चर राशि) का वह मान जो दिए गये त्रिकोणमितीय समीकरण को सन्तुष्ट करे, समीकरण का मूल कहलाता है। उदाहरणार्थ, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ का मूल $\theta = 60^\circ$ या $\theta = 300^\circ$ है, क्योंकि ये दोनों मान समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

(2) **त्रिकोणमितीय समीकरणों के हल** : अज्ञात कोणों के वह मान जो त्रिकोणमितीय समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं, त्रिकोणमितीय समीकरण के हल कहलाते हैं। चूँकि सभी त्रिकोणमितीय फलन या अनुपात आवर्ती होते हैं, अतः सामान्यतः किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के एक से अधिक या अनन्त हल होते हैं। यह हल मुख्यतः तीन प्रकार के होते हैं,

(i) **विशिष्ट हल (Particular solution)** : अज्ञात कोण का विशेष मान, जो समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

(ii) **मुख्य हल (Principal solution)** : अज्ञात कोण का न्यूनतम आंशिक मान, जो समीकरण को सन्तुष्ट करता है। (आंशिक रूप से न्यूनतम विशेष हल)

(iii) **व्यापक हल (General solution)** : अज्ञात कोण के सभी मानों का समुच्चय जो समीकरण को सन्तुष्ट करता है। व्यापक हल में सभी विशिष्ट हल तथा मुख्य हल सम्मिलित होते हैं।

मानक त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल

(General solution of standard and trigonometrical equation)

त्रिकोणमितीय समीकरण	व्यापक हल
$\sin \theta = 0$	$\theta = n\pi$
$\cos \theta = 0$	$\theta = n\pi + (\pi/2)$
$\tan \theta = 0$	$\theta = n\pi$
$\sin \theta = 1$	$\theta = 2n\pi + (\pi/2)$
$\cos \theta = 1$	$\theta = 2n\pi$
$\sin \theta = \sin \alpha$	$\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$
$\cos \theta = \cos \alpha$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha$
$\tan \theta = \tan \alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
$\sin^2 \theta = \sin^2 \alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
$\tan^2 \theta = \tan^2 \alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
$\cos^2 \theta = \cos^2 \alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
$\sin \theta = \sin \alpha$ *	$\theta = 2n\pi + \alpha$
$\cos \theta = \cos \alpha$ *	$\theta = 2n\pi + \alpha$
$\sin \theta = \sin \alpha$ *	$\theta = 2n\pi + \alpha$
$\tan \theta = \tan \alpha$ *	$\theta = 2n\pi + \alpha$
$\tan \theta = \tan \alpha$ *	$\theta = 2n\pi + \alpha$
$\cos \theta = \cos \alpha$ *	$\theta = 2n\pi + \alpha$

समीकरण $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ (जहाँ $a, b, c \in R$ तथा $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$) का व्यापक हल (General solution of the form $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ where $a, b, c \in R$ and $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$)

$a \cos \theta + b \sin \theta = c$ में $a = r \cos \alpha$ तथा $b = r \sin \alpha$ रखने पर,

जहाँ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ तब $r(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = c$

$$\Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta, \text{ (माना)} \quad \dots(i)$$

$$\Rightarrow \theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha, \left(\text{जहाँ } \tan \alpha = \frac{b}{a} \right)$$

व्यापक हल है।

वैकल्पिक : $a = r \sin \alpha$ तथा $b = r \cos \alpha$ रखने पर ,

$$\text{जहाँ } r = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sin(\theta + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \gamma \quad (\text{माना})$$

$$\Rightarrow \theta + \alpha = n\pi + (-1)^n \gamma \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \gamma - \alpha,$$

$$\text{जहाँ } \tan \alpha = \frac{b}{a}, \text{ व्यापक हल है।}$$

$$\text{इस प्रकार } (-\sqrt{a^2 + b^2}) \leq a \cos \theta + b \sin \theta \leq (\sqrt{a^2 + b^2})$$

$$a \cos x + b \sin x = c \text{ का व्यापक हल}$$

$$x = 2n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \text{ है।}$$

त्रिकोणमितीय समीकरण का मुख्य मान ज्ञात करने की विधि (Method for finding principal value)

माना समीकरण $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ को सन्तुष्ट करने वाला θ का मुख्य

मान ज्ञात करना है।

चूँकि $\sin \theta$ ऋणात्मक है। अतः θ , तृतीय या चतुर्थ चतुर्थांश (quadrant) में होगा। तृतीय या चतुर्थ चतुर्थांश (quadrant) में दो दिशाओं से जा सकते हैं। यदि हम वामावर्त दिशा लेते हैं, तो कोण का आंकिक मान π से अधिक होगा तथा यदि हम दक्षिणावर्त दिशा लेते हैं, तो कोण का आंकिक मान π से कम होगा। मुख्य मान के लिए, आंकिक रूप से न्यूनतम कोण लेते हैं। अतः मुख्य मान के लिए,

(i) यदि कोण प्रथम या द्वितीय चतुर्थांश (Quadrant) में हो, तब हम वामावर्त दिशा लेते हैं तथा यदि कोण तीसरा या चतुर्थ चतुर्थांश में हो, तब हम दक्षिणावर्त दिशा चुनते हैं।

(ii) मुख्य मान का आंकिक मान कभी भी π से अधिक नहीं होना चाहिए।

(iii) मुख्य मान सदैव प्रथम वृत्त में स्थित होना चाहिए (अर्थात् प्रथम घूर्णन में)। समीकरण $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ के लिए θ का मान $-\frac{\pi}{6}$ या $-\frac{5\pi}{6}$

होगा। चूँकि $-\frac{\pi}{6}$ आंकिक रूप से न्यूनतम मान है, अतः समीकरण

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ का मुख्य मान } -\frac{\pi}{6} \text{ होगा।}$$

उपरोक्त विवेचना के अनुसार, मुख्य मान ज्ञात करने की विधि का सारांश निम्नानुसार है:

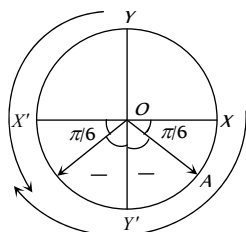
(i) सर्वप्रथम त्रिकोणमितीय वृत्त की रचना करते हैं तथा उस चतुर्थांश को चिन्हित करते हैं, जिसमें कोण स्थित है।

(ii) प्रथम या द्वितीय चतुर्थांश (quadrant) के लिए वामावर्त दिशा चुनते हैं तथा तृतीय या चतुर्थ चतुर्थांश के लिए दक्षिणावर्त दिशा चुनते हैं।

(iii) प्रथम घूर्णन में कोण का मान ज्ञात करते हैं।

(iv) कोण का न्यूनतम आंकिक मान चुनते हैं, जो कि कोण का मुख्य मान होता है।

(v) यदि दो कोणों के धनात्मक तथा ऋणात्मक मानों के आंकिक मान समान हों, तब परिपाटी के अनुसार कोण का धनात्मक मान मुख्य मान होता है।



त्रिकोणमितीय समीकरण को हल करते समय ध्यान रखने योग्य बिन्दु (Important points to be taken in case of while solving trigonometrical equations)

(1) दिए गए समीकरण की सत्यता की जाँच करते हैं। उदाहरणतः, $2 \sin \theta - \cos \theta = 4$, θ के किसी भी मान के लिए सत्य नहीं है, क्योंकि $(2 \sin \theta - \cos \theta)$ का मान कभी भी $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ से अधिक नहीं हो सकता है। अतः इस समीकरण का कोई हल नहीं है।

(2) समीकरण, जिसमें $\sec \theta$ या $\tan \theta$ हो, का हल कभी भी $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ नहीं हो सकता है।

इसी प्रकार, समीकरण जिसमें $\operatorname{cosec} \theta$ या $\cot \theta$ हो, का हल $\theta = n\pi$ नहीं हो सकता है क्योंकि संगत फलन, θ के इन मानों पर अपरिभाषित है।

(3) जब किसी समीकरण को वर्ग करके हल करते हैं, तब वर्ग करने के पश्चात् प्राप्त मूलों की जाँच कर लेना चाहिए कि यह मूल समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं या नहीं।

उदाहरणार्थ : माना $x = 3$, वर्ग करने पर $x^2 = 9$; $\therefore x = 3$ तथा $x = -3$ किन्तु $x = -3$, मूल समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है।

(4) बाँये पक्ष तथा दाँये पक्ष के उन उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को समाप्त नहीं करना चाहिए, जिसमें अज्ञात कोण शामिल हों क्योंकि ऐसा करने से कुछ हल प्राप्त नहीं होते हैं उदाहरणार्थ, यदि समीकरण $\sin \theta (2 \cos \theta - 1) = \sin \theta \cos^2 \theta$ में दोनों पक्षों से $\sin \theta$ समाप्त करते हैं, तब $\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow (\cos \theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi$ किन्तु $\theta = n\pi$ भी दिए गए समीकरण का एक हल है, जो $\sin \theta = 0$ के लिए प्राप्त होता है। अतः अभीष्ट तथा सम्पूर्ण हल $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ है।

(5) x का कोई भी मान जिसके लिए R.H.S. तथा L.H.S. समान हो, समीकरण का मूल होगा, किन्तु x के किसी मान के लिए $\infty = \infty$ होने पर वह समीकरण का हल नहीं होगा, क्योंकि यह अपरिभाषित रूप है।

अतः $\tan x$ तथा $\sec x$ में समीकरण होने पर $\cos x \neq 0$ तथा $\cot x$ तथा $\operatorname{cosec} x$ में समीकरण होने पर $\sin x \neq 0$ ।

चरघाताकी फलन सदैव धनात्मक होते हैं तथा $\log_a x$ परिभाषित होगा, यदि $x > 0$ तथा $a > 0, a \neq 1$. $\sqrt{f(x)}$ = सदैव धनात्मक न कि धनात्मक व ऋणात्मक दोनों, अर्थात् $\sqrt{(\tan^2 x)} = \tan x$ न कि $\pm \tan x$ ।

(6) θ के किसी भी मान के लिए हल करते समय समीकरण के हर में उपस्थित पद शून्य नहीं होना चाहिए।

(7) दिए गए समीकरण को कभी-कभी कुछ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हल करते हैं। **उदाहरणार्थ:** $\cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = 1$ सत्य होगा, यदि $\cot^2 \theta = 0$ तथा $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1$ अतः हल $\theta = (2n+1)\pi/2$ है।

(8) यदि $xy = xz$ तब $x(y-z) = 0 \Rightarrow$ या तो $x = 0$ या $y = z$ अथवा दोनों। किन्तु $\frac{y}{x} = \frac{z}{x} \Rightarrow$ केवल $y = z$ न कि $x = 0$, क्योंकि $x = 0$ लेने पर $\infty = \infty$ हो जाता है। इसी प्रकार यदि $ay = az$, तब $y = z$ तभी होगा, जबकि $a, (a \neq 0)$ एक अचर है।

इसी प्रकार, $x+y = x+z \Rightarrow y = z$ तथा $x-y = x-z \Rightarrow y = z$ यहाँ $x = 0$ नहीं लेते हैं, क्योंकि x एक योगात्मक गुणनखंड (additive factor) है, न कि गुणात्मक गुणनखंड (multiplicative factor) है।

(9) विद्यार्थियों को यह जाँच कर लेना चाहिए, कि सभी मूल समीकरण को सन्तुष्ट करें तथा दिए गए समीकरण के चरों के प्रान्त (domain) में स्थित हों।

आवर्ती फलन (Periodic functions)

फलन $f(x)$ को आवर्ती फलन कहते हैं यदि फलन का प्रत्येक मान एक निश्चित अन्तराल के पश्चात् स्वयं को दोहराता है, अर्थात् एक न्यूनतम धनात्मक वास्तविक संख्या T ऐसी विद्यमान है जिसके लिये $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \text{प्रान्त (domain)}$ । स्पष्ट है कि यदि T , फलन $f(x)$ का आवर्तनांक है तो $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \dots$

उदाहरणार्थ: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ आवर्ती फलन हैं, जिनके आवर्तनांक क्रमशः 2π , 2π तथा π हैं।

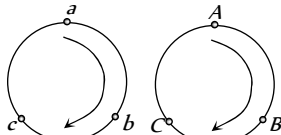
आवर्ती फलन तथा उनके आवर्तनांक

फलन	आवर्तनांक
$\sin^n x$, $\cos^n x$, $\sec^n x$, $\operatorname{cosec}^n x$	$\begin{cases} \pi; \text{ यदि } n \text{ सम है} \\ 2\pi; \text{ यदि } n \text{ विषम या भिन्न है} \end{cases}$
$\tan^n x$, $\cot^n x$	π , यदि n सम या विषम है
$\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$ $\sec(ax+b)$, $\operatorname{cosec}(ax+b)$	$2\pi/a$
$\tan(ax+b)$, $\cot(ax+b)$	π/a
$ \sin x $, $ \cos x $, $ \tan x $, $ \cot x $, $ \sec x $, $ \operatorname{cosec} x $	π
$ \sin(ax+b) $, $ \cos(ax+b) $, $ \sec(ax+b) $, $ \operatorname{cosec}(ax+b) $ $ \tan(ax+b) $, $ \cot(ax+b) $	π/a
$x - [x]$	1
बीजगणितीय फलन, अर्थात् $\sqrt{x}$, x^2 , $x^3 + 5$, ... इत्यादि	आवर्तनांक का अस्तित्व नहीं है

त्रिभुजों के गुण एवं त्रिभुजों के हल**त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सम्बन्ध
(Relation between sides and angles)**

एक त्रिभुज में तीन कोण तथा तीन भुजाएँ अर्थात् छह अवयव होते हैं। किसी $\triangle ABC$ के तीन कोणों को A , B , C तथा इनके सामने वाली भुजाओं को क्रमशः a , b , c से प्रदर्शित किया जाता है। किसी $\triangle ABC$ के लिए कुछ सम्बन्ध निम्नलिखित हैं

- $A + B + C = 180^\circ$ (या π)
- $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$
- $|a - b| < c$, $|b - c| < a$, $|c - a| < b$

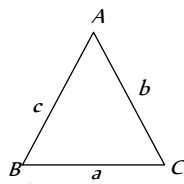
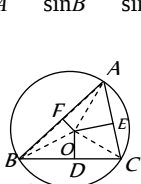


सामान्यतः त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सम्बन्ध चक्रीय होते हैं। जैसे $a + b > c$ का दूसरा सम्बन्ध a को b से, b को c से तथा c को a से पुनर्स्थापित कर प्राप्त किया जा सकता है।

Sine का नियम (ज्या नियम) : त्रिभुज की भुजाएँ उसके सम्मुख कोणों की ज्या (sine) के समानुपाती होती हैं।

$$\text{अर्थात् } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k, \text{ (माना)}$$

s



व्यापक रूप में, यदि R , $\triangle ABC$ के परिवृत्त की त्रिज्या है, तब

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

कोज्या नियम (The law of cosines or cosine rule)

यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं BC , CA तथा AB की लम्बाईयों क्रमशः a , b तथा c हों, तब कोज्या नियम से,

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$(2) \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$(3) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

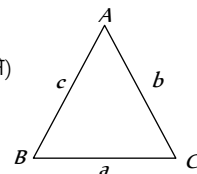
$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \tan A = \frac{abc}{R(b^2 + c^2 - a^2)},$$

$$\tan B = \frac{abc}{R(c^2 + a^2 - b^2)}, \tan C = \frac{abc}{R(a^2 + b^2 - c^2)}$$

जहाँ R , त्रिभुज ABC के परिवृत्त की त्रिज्या है।

प्रक्षेप सूत्र (Projection formulae)

$$\begin{aligned} &\text{किसी } \triangle ABC \text{ में, } b \cos C + c \cos B \\ &= k \sin B \cos C + k \sin C \cos B, \text{ (ज्या नियम से)} \\ &= k[\sin(B+C)] = k \sin(\pi - A) \\ &= k \sin A = a \end{aligned}$$



इसी प्रकार, sine नियम से अन्य प्रक्षेप सूत्र भी ज्ञात कर सकते हैं।

$$(i) \quad a = b \cos C + c \cos B \quad (ii) \quad b = c \cos A + a \cos C$$

$$(iii) \quad c = a \cos B + b \cos A$$

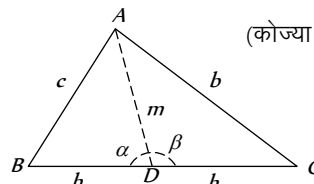
अर्थात् त्रिभुज की कोई एक भुजा, शेष दो भुजाओं के प्रक्षेपों के योग के बराबर होती है।

माध्यिका की प्रमेय (अपोलोनियस प्रमेय)**(Theorem of the medians (Apollonius theorem))**

किसी त्रिभुज में दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के आधे के वर्ग तथा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका के वर्ग के योग के बराबर होता है।

$$\text{किसी त्रिभुज } ABC \text{ के लिए, } b^2 + c^2 = 2(h^2 + m^2) = 2\left\{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\},$$

(कोज्या नियम के उपयोग से)



समकोण त्रिभुज में कर्ण का मध्य बिन्दु तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है, अतः $DA = DB = DC$.

$$\therefore b^2 + c^2 = a^2, \text{ जो कि पायथागोरस प्रमेय है।}$$

यह प्रमेय ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्नों को हल करने में अत्यन्त उपयोगी है।

नेपियर की अनुरूपता प्रमेय, स्पर्शज्या का नियम :**(Napier's analogy (Law of tangents))**

$$\text{किसी त्रिभुज } ABC \text{ के लिए, (1) } \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \cot \frac{C}{2}$$

$$(2) \quad \tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \left(\frac{b-c}{b+c}\right) \cot \frac{A}{2}$$

$$(3) \quad \tan\left(\frac{C-A}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{c+a}\right) \cot \frac{B}{2}$$

Mollweide's सूत्र : किसी $\triangle ABC$ के लिए,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} \quad \text{तथा} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}.$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of triangle)

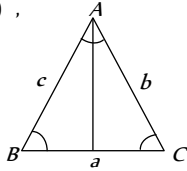
माना किसी त्रिभुज ABC के तीन कोण A, B, C हैं तथा इन कोणों की सम्मुख भुजायें क्रमशः a, b, c हैं।

(1) जब दो भुजायें तथा उनके मध्य कोण दिया गया हो : किसी त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल निम्न सूत्रों द्वारा दिया जाता है,

$$\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C, \text{ अर्थात्}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (\text{दो भुजाओं का गुणनफल}) \times (\text{दोनों भुजाओं के मध्य कोण का sine})$$

(2) जब तीनों भुजायें दी गई हों: त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,



$$\text{जहाँ त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप } s = \frac{a+b+c}{2}$$

(3) जब तीनों भुजायें तथा परित्रिज्या दी गई हो : त्रिभुज का क्षेत्रफल, $\Delta = \frac{abc}{4R}$, जहाँ R त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या है।

(4) जब दो कोण तथा एक भुजा दी गई हो :

$$\Delta = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)} = \frac{1}{2}b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin(A+C)} = \frac{1}{2}c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)}.$$

अर्द्ध कोण सूत्र (Half angle formulae)

यदि ΔABC का परिमाप $2s$ अर्थात् $2s = a+b+c$ है, तब

(1) $\sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}$ के लिए सूत्र :

$$(i) \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad (ii) \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ca}}$$

$$(iii) \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

(2) $\cos \frac{A}{2}, \cos \frac{B}{2}, \cos \frac{C}{2}$ के लिए सूत्र :

$$(i) \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad (ii) \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$(iii) \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

(3) $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ के लिए सूत्र

:

$$(i) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad (ii) \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$(iii) \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

त्रिभुज से सम्बद्ध वृत्त (Circle connected with triangle)

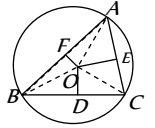
(1) त्रिभुज का परिवृत्त एवं परित्रिज्या

(i) परिवृत्त : किसी त्रिभुज के कोणीय बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त, त्रिभुज का परिवृत्त कहलाता है। परिवृत्त का केन्द्र त्रिभुज का परिकेन्द्र कहलाता है, जो कि त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है। इस वृत्त की त्रिज्या त्रिभुज की परित्रिज्या कहलाती है और इसे R से प्रदर्शित करते हैं। परिकेन्द्र त्रिभुज की भुजा पर, अंदर या बाहर स्थित हो सकता है। समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र, समकोण के सामने की भुजा के मध्य बिन्दु पर स्थित होता है।

(ii) परित्रिज्या : ΔABC की परित्रिज्या के लिए निम्न सूत्र है

$$(a) \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = R$$

$$(b) R = \frac{abc}{4\Delta}, [\Delta = \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}]$$



(2) अन्तःवृत्त तथा अन्तःत्रिज्या

(i) त्रिभुज का अन्तःवृत्त : त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करके जाने वाला तथा त्रिभुज के अंदर स्थित वृत्त अन्तः वृत्त कहलाता है। वृत्त का केन्द्र त्रिभुज के अन्तःकोणों के समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है।

अन्तःवृत्त की त्रिज्या को r से प्रदर्शित करते हैं और इसका मान वृत्त के केन्द्र से त्रिभुज की किसी भी भुजा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई के बराबर होता है।

(ii) अन्तःत्रिज्या: त्रिभुज ABC के अन्तःवृत्त की त्रिज्या के लिए निम्न सूत्र हैं

$$(a) r = \frac{\Delta}{s}$$

$$(b) r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$(c) r = (s-a) \tan \frac{A}{2},$$

$$r = (s-b) \tan \frac{B}{2}, r = (s-c) \tan \frac{C}{2}$$

$$(d) r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, r = \frac{b \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}}, r = \frac{c \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$(e) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

(3) त्रिभुज का बहिर्वृत्त एवं बहिर्त्रिज्यायें

(i) बहिर्वृत्त: वह वृत्त जो किसी त्रिभुज ABC की एक भुजा BC को बाहर से स्पर्श करे तथा शेष दो भुजाओं AB और AC के बड़े हुए भागों को स्पर्श करे, कोण A के सामने का बहिर्वृत्त कहलाता है। इसकी त्रिज्या को r_1 से निरूपित करते हैं। इसी प्रकार से कोण B तथा C के सामने के बहिर्वृत्तों की त्रिज्याओं को क्रमशः r_2 तथा r_3 से निरूपित करते हैं।

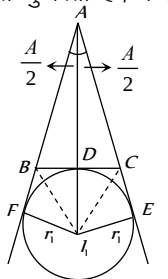
बहिर्वृत्तों के केन्द्र को बहिर्केन्द्र कहते हैं। कोण A के सामने के बहिर्वृत्त का केन्द्र, कोण B तथा कोण C के बाह्य समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है। कोण A का आन्तरिक समद्विभाजक भी इसी बिन्दु से गुजरता है। केन्द्र को सामान्यतः I से निरूपित करते हैं।

(ii) बहिर्वृत्त की त्रिज्यायें : ΔABC में,

$$(a) r_1 = \frac{\Delta}{s-a}, r_2 = \frac{\Delta}{s-b}, r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$$

$$(b) r_1 = s \tan \frac{A}{2}, r_2 = s \tan \frac{B}{2},$$

$$r_3 = s \tan \frac{C}{2}$$



$$(c) \quad r_1 = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, r_2 = \frac{b \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}, r_3 = \frac{c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$(d) \quad r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R \quad (e) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$$

$$(f) \quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2}$$

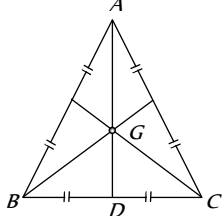
$$(g) \quad \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2Rr} \quad (h) \quad r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = s^2$$

$$(i) \quad \Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 4Rr \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(j) \quad r_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; r_2 = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(k) \quad r_3 = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

(4) **केन्द्रक (G) :** त्रिभुज की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु केन्द्रक कहलाता है। केन्द्रक, प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है तथा सदैव त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है।



(5) **त्रिभुज का लम्बकेन्द्र :** त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर डाले गए लम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु त्रिभुज का लम्बकेन्द्र कहलाता है।

पाद त्रिभुज (Pedal triangle)

माना त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C से सम्मुख भुजाओं BC, CA तथा AB पर डाले गए लम्ब क्रमशः AD, BE, तथा CF हैं, जो बिन्दु O पर मिलते हैं, तब बिन्दु O ΔABC का लम्बकेन्द्र कहलाता है तथा ΔDEF , ΔABC का पाद त्रिभुज कहलाता है।

त्रिभुज का लम्बकेन्द्र उसके पाद त्रिभुज का अंतःकेन्द्र कहलाता है।

यदि O लम्बकेन्द्र तथा $\Delta DEF, \Delta ABC$ का पाद त्रिभुज है, जहाँ शीर्षों A, B, C से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्ब क्रमशः AD, BE तथा CF हैं। तब,

$$(i) \quad OA = 2R \cos A, OB = 2R \cos B \quad \text{तथा} \quad OC = 2R \cos C$$

$$(ii) \quad OD = 2R \cos B \cos C, OE = 2R \cos C \cos A$$

$$\text{तथा} \quad OF = 2R \cos A \cos B$$

(i) **पाद त्रिभुज की भुजायें तथा कोण :** पाद त्रिभुज DEF के कोण हैं;

$$180^\circ - 2A, 180^\circ - 2B, 180^\circ - 2C \quad \text{तथा}$$

पाद त्रिभुज की भुजायें हैं :

$$EF = a \cos A \quad \text{या} \quad R \sin 2A;$$

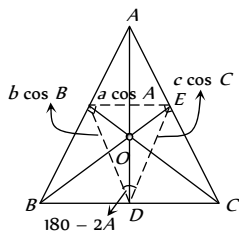
$$FD = b \cos B \quad \text{या} \quad R \sin 2B;$$

$$DE = c \cos C \quad \text{या} \quad R \sin 2C$$

यदि ΔABC अधिककोण त्रिभुज है,

तब कोण $2A, 2B, 2C - 180^\circ$ तथा

भुजायें $a \cos A, b \cos B, -c \cos C$ होंगी।



(2) **पाद त्रिभुज का क्षेत्रफल, परित्रिज्या तथा अन्तःत्रिज्या :** पाद त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (भुजाओं का गुणनफल) $\times$ (दोनों भुजाओं के मध्य कोण का

$$\sin) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

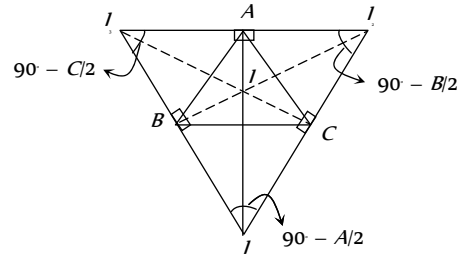
$$\text{पाद त्रिभुज की परित्रिज्या} = \frac{EF}{2 \sin \angle FDE} = \frac{R \sin 2A}{2 \sin(180^\circ - 2A)} = \frac{R}{2}.$$

$$\text{पाद त्रिभुज की अन्तःत्रिज्या} = \frac{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का अर्द्ध परिमाप}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{2R \sin A \sin B \sin C} = 2R \cos A \cos B \cos C.$$

बहिर्केन्द्रीय त्रिभुज (Ex-central triangle)

माना ABC एक त्रिभुज है तथा I अंतःवृत्त का केन्द्र है। I_1, I_2 तथा I_3 बहिर्वृत्तों के केन्द्र हैं, जो क्रमशः A, B तथा C के सामने के केन्द्र हैं। तब $I_1 I_2 I_3$ को ΔABC का बहिर्केन्द्रीय त्रिभुज कहते हैं। इस प्रकार बहिर्केन्द्रीय त्रिभुज $I_1 I_2 I_3$ का पाद त्रिभुज (pedal triangle), ΔABC है।



बहिर्केन्द्रीय त्रिभुज $I_1 I_2 I_3$ के कोण हैं, $90^\circ - \frac{A}{2}, 90^\circ - \frac{B}{2}, 90^\circ - \frac{C}{2}$ तथा भुजायें हैं, $I_1 I_3 = 4R \cos \frac{B}{2}; I_1 I_2 = 4R \cos \frac{C}{2}; I_2 I_3 = 4R \cos \frac{A}{2}.$

बहिर्केन्द्रीय त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा परित्रिज्या

बहिर्केन्द्रीय त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (दोनों भुजाओं का गुणनफल) $\times$ (दोनों भुजाओं के मध्य कोण का sine)

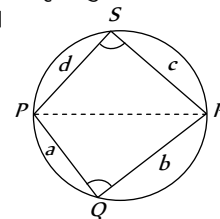
$$\Delta = \frac{1}{2} \left(4R \cos \frac{B}{2} \right) \cdot \left(4R \cos \frac{C}{2} \right) \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right)$$

$$\Delta = 8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{परित्रिज्या} = \frac{I_2 I_3}{2 \sin \angle I_2 I_1 I_3} = \frac{4R \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right)} = 2R.$$

चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic quadrilateral)

एक चतुर्भुज PQRS चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है, यदि इसके चारों शीर्षों P, Q, R तथा S से होकर एक वृत्त गुजरता हो अर्थात् चक्रीय चतुर्भुज के शीर्ष वृत्त पर स्थित होते हैं।



माना एक चक्रीय चतुर्भुज इस प्रकार है, कि $PQ = a$, $QR = b$, $RS = c$ तथा $SP = d$, तब $\angle Q + \angle S = 180^\circ$ तथा $\angle A + \angle C = 180^\circ$.
माना $2s = a + b + c + d$

$$\text{तब, चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin Q$$

$$\text{चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \text{ जहाँ}$$

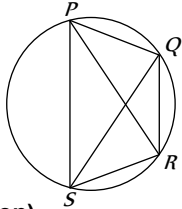
$$2s = a + b + c + d \text{ तथा } \cos Q = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

(1) **चक्रीय चतुर्भुज की परित्रिज्या** : माना $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, तब चतुर्भुज $PQRS$ का परिवृत्त तथा ΔPQR का परिवृत्त एक ही होगा।

अतः चक्रीय चतुर्भुज $PQRS$ की परित्रिज्या = R तथा

$$R = \frac{1}{4\Delta} \sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

(2) **टॉलमीज प्रमेय**: चक्रीय चतुर्भुज $PQRS$ में विकर्णों का गुणनफल विपरीत भुजाओं की लम्बाइयों के गुणनफल के योगफल के बराबर होता है अर्थात् टॉलमीज प्रमेय के अनुसार चक्रीय चतुर्भुज $PQRS$ में, $PR \cdot QS = PQ \cdot RS + RQ \cdot PS$.



समबहुभुज (Regular polygon)

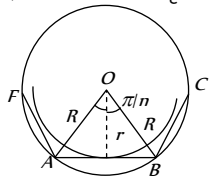
समबहुभुज की सभी भुजाएँ एवं सभी कोण समान होते हैं।

(1) n भुजाओं के समबहुभुज का प्रत्येक आन्तरिक कोण $\left(\frac{2n-4}{n}\right) \times 90^\circ = \left[\frac{2n-4}{n}\right] \times \frac{\pi}{2}$ रेडियन होता है।

(2) किसी समबहुभुज के समस्त शीर्षों से गुजरने वाला वृत्त परिवृत्त कहलाता है।

यदि n भुजाओं के समबहुभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है, तब परिवृत्त की त्रिज्या सूत्र $R = \frac{a}{2} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ से प्राप्त होती है।

(3) यदि कोई वृत्त किसी समबहुभुज के भीतर इस प्रकार बना है, कि इसकी सभी भुजाओं को स्पर्श करता है, अन्तःवृत्त कहलाता है। यदि n भुजाओं के समबहुभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है, तब अन्तःवृत्त की त्रिज्या सूत्र $r = \frac{a}{2} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ से ज्ञात होती है।



(4) समबहुभुज का क्षेत्रफल $\Delta = n \times \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{4} na^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right), \text{ (भुजाओं के पदों में)}$$

$$= nr^2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \text{ (अन्तःत्रिज्या के पदों में)}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \text{ (परित्रिज्या के पदों में)}$$

त्रिभुजों का हल (Solutions of triangles)

त्रिभुजों का हल ज्ञात करते समय विभिन्न स्थितियों में विभिन्न सूत्रों का प्रयोग करते हैं। सूत्र का उपयोग करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए, कि प्रश्न को आसानी से हल कर सकें।

(1) समकोण त्रिभुज का हल (2) सामान्य त्रिभुज का हल

(i) **समकोण त्रिभुज का हल**

(i) जब दो भुजाएँ दी गई हों : माना त्रिभुज का $\angle C$ समकोण है तब हम दी गई तालिका के अनुसार शेष पदों को ज्ञात कर सकते हैं।

दिया है	ज्ञात करना है
a, b	$\tan A = \frac{a}{b}, B = 90^\circ - A, c = \frac{a}{\sin A}$
a, c	$\sin A = \frac{a}{c}, b = c \cos A, B = 90^\circ - A$

(ii) जब एक भुजा तथा एक न्यूनकोण दिया गया हो : इस स्थिति में हम दी गई तालिका के अनुसार शेष पदों को ज्ञात कर सकते हैं।

दिया है	ज्ञात करना है
a, A	$B = 90^\circ - A, b = a \cot A, c = \frac{a}{\sin A}$
c, A	$B = 90^\circ - A, a = c \sin A, b = c \cos A$

(2) सामान्य त्रिभुज का हल

(i) जब तीन भुजाएँ a, b तथा c दी गई हों : इस स्थिति में, निम्न सूत्रों के उपयोग से शेष पदों को ज्ञात कर सकते हैं,
 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$

जहाँ $2s = a + b + c =$ त्रिभुज का परिमाप

$$\sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\Delta}{ac}, \quad \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\Delta}{s(s-a)}, \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{\Delta}{s(s-b)}, \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{\Delta}{s(s-c)}.$$

(ii) जब दो भुजाएँ a, b एवं उनके मध्य कोण C दिया गया हो : इस स्थिति में निम्न सूत्रों का उपयोग करते हैं, $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C;$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}; \quad \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \quad \text{एवं} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

(iii) जब एक भुजा a तथा दो कोण A तथा B दिए गये हों : इस स्थिति में निम्न सूत्रों का उपयोग करते हैं

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \text{ तथा } c = \frac{a \sin C}{\sin A} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

(iv) जब दो भुजाएँ a, b तथा एक भुजा के सम्मुख कोण A दिया गया हो : इस स्थिति में निम्न सूत्रों का उपयोग करते हैं

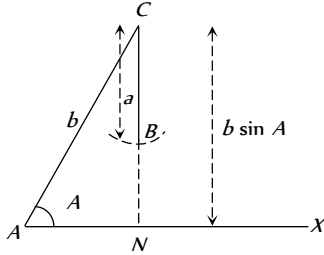
$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A \quad \dots(i)$$

$$C = 180^\circ - (A + B), c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

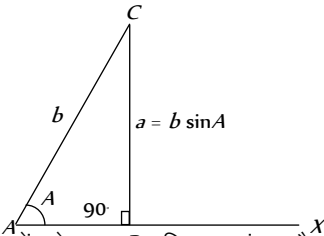
विशेष स्थितियाँ

Case I : जब कोण A न्यूनकोण हो

(i) यदि $a < b \sin A$, तब कोई त्रिभुज संभव नहीं है। जब $a < b \sin A$, तब (i) से $\sin B > 1$, जो कि संभव नहीं है।



(ii) यदि $a = b \sin A$, तब केवल एक त्रिभुज संभव है, जो कि B पर समकोण है। जब $a = b \sin A$, तब ज्या (sine) नियम से $\sin B = 1$, $\therefore \angle B = 90^\circ$. चित्र से, यह स्पष्ट है कि $CB = a = b \sin A$.



इस प्रकार, इस स्थिति में केवल एक त्रिभुज संभव है, जो कि B पर समकोण है।

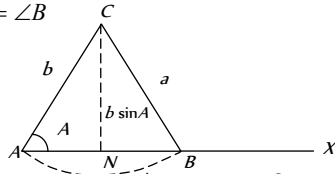
(iii) $a > b \sin A$, तब तीन संभावनायें निर्मित होती हैं।

(a) $a = b$ इस स्थिति में ज्या (sine) नियम से,

$$\sin B = \sin A ; \therefore B = A \text{ या } B = 180^\circ - A$$

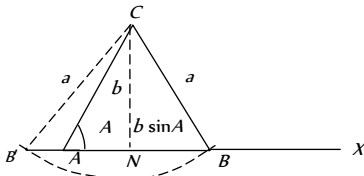
किंतु $B = 180^\circ - A \Rightarrow A + B = 180^\circ$, जो कि त्रिभुज में संभव नहीं है।

$\therefore$ इस स्थिति में, $\angle A = \angle B$



अतः यदि $b = a > b \sin A$, तब केवल एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC संभव है, जहाँ $\angle A = \angle B$ है।

(b) यदि $a > b$ तब चित्र से, माना $AC = b, \angle CAX = A$, $a > b$ तथा $a > b \sin A$

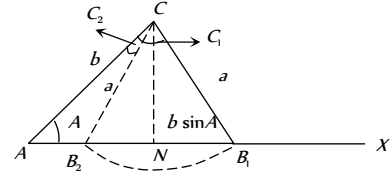


अब यदि C को केंद्र लेकर a त्रिज्या का चाप खींचते हैं, जो रेखा AX को एक बिन्दु B पर काटता है, तब केवल $\triangle ABC$ की रचना कर सकते हैं। यह चाप AX को बिन्दु B' पर भी काटता है अतः $\triangle AB'C$ भी प्राप्त होता है किन्तु यह त्रिभुज अग्राह्य है (क्योंकि इस त्रिभुज में $\angle CAB'$ अधिक कोण है।)

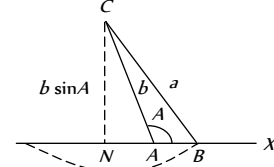
अतः यदि $a > b$ तथा $a > b \sin A$, तब केवल एक त्रिभुज संभव है।

(c) $b > a$, (अर्थात् $b > a > b \sin A$)

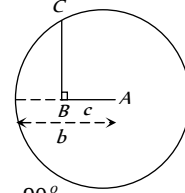
चित्र में, माना $AC = b, \angle CAX = A$. अब यदि C को केंद्र मानकर a त्रिज्या का चाप खींचते हैं, तब यह AX को दो बिन्दुओं B_1 तथा B_2 पर काटता है अतः यदि $b > a \sin A$, तब दो त्रिभुज संभव हैं।



Case II : जब A एक अधिक कोण है : इस स्थिति में त्रिभुज संभव है, यदि $a > b$.



Case III: $b > c$ तथा $B = 90^\circ$. पुनः A को केंद्र लेकर b त्रिज्या का वृत्त खींचते हैं जो कि रेखा को केवल एक बिंदु पर काटता है, अतः केवल एक त्रिभुज संभव है।



Case IV: $b \leq c$ तथा $B = 90^\circ$

A को केंद्र लेकर खींचा गया b त्रिज्या का वृत्त, रेखा को किसी बिंदु पर नहीं काटता है, अतः कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

वैकल्पिक विधि : कोज्या (cosine) सूत्र से, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\Rightarrow a^2 - (2c \cos B)a + (c^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow a = c \cos B \pm \sqrt{(c \cos B)^2 - (c^2 - b^2)}$$

$$\Rightarrow a = c \cos B \pm \sqrt{b^2 - (c \sin B)^2}$$

इस समीकरण से निम्न स्थितियाँ प्राप्त होती हैं,

(i) यदि $b < c \sin B$, तब कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

(ii) माना $b = c \sin B$, तब पुनः दो संभावनायें बनती हैं,

(a) B एक अधिक कोण है $\Rightarrow \cos B$ ऋणात्मक है, अतः किसी त्रिभुज का अस्तित्व नहीं है।

(b) B एक न्यूनकोण है $\Rightarrow \cos B$ धनात्मक है, अतः यहाँ केवल एक त्रिभुज संभव है।

(iii) माना $b > c \sin B$ तब निम्न स्थितियाँ निर्मित होती हैं,

(a) B एक न्यूनकोण है $\Rightarrow \cos B$ धनात्मक है। इस स्थिति में a के दो

मान प्राप्त होंगे यदि और केवल यदि $c \cos B > \sqrt{b^2 - (c \sin B)^2}$ या $c > b$ अर्थात् दो त्रिभुज संभव हैं। यदि $c < b$, तब केवल एक त्रिभुज संभव है।

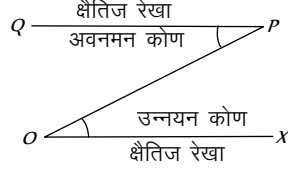
(b) B एक अधिककोण है $\Rightarrow \cos B$ ऋणात्मक है। इस स्थिति में त्रिभुज संभव है, यदि $\sqrt{b^2 - (c \sin B)^2} > |c \cos B| \Rightarrow b > c$. अतः इस स्थिति में केवल एक त्रिभुज संभव है। यदि $b < c$, तब कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

ऊँचाई एवं दूरी

ऊँचाई एवं दूरी से संबन्धित कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

(Some terminology related to heights and distances)

(i) **उन्नयन कोण एवं अवनमन कोण** : माना O और P दो ऐसे बिन्दु हैं कि बिन्दु P , बिन्दु O से ऊँचाई पर है। OX और PQ क्रमशः O और P से दो क्षैतिज रेखायें हैं। यदि एक दर्शक (या आँख) O पर है और P पर कोई वस्तु है, तो $\angle XOP$ को O से P का उन्नयन कोण कहते हैं। इस कोण को O से P की कोणीय ऊँचाई भी कहते हैं।



यदि एक दर्शक (या आँख) P पर है और O पर कोई वस्तु है, तो $\angle QPO$ को P से O का अवनमन कोण कहते हैं।

(2) ऊँचाई व दूरी के प्रश्नों को हल करने की विधि

(i) सर्वप्रथम प्रश्न के अनुरूप एक स्वच्छ चित्र बनाइयें, जो सभी कोणों तथा दूरियों को अधिक से अधिक दर्शा सके।

(ii) सदैव ध्यान रखें कि यदि एक रेखा, तल के लम्बवत् है, तब यह इस तल में उपस्थित प्रत्येक रेखा के लम्बवत् होगी।

(iii) ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्नों को हल करते समय समकोण त्रिभुज में एक न्यूनकोण तथा एक भुजा ज्ञात होने पर शेष भुजायें ज्ञात करने के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के सूत्रों का उपयोग करते हैं।

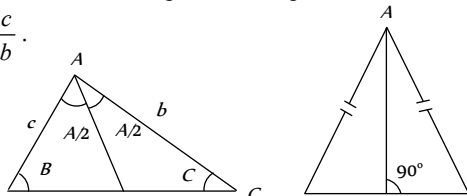
(iv) समकोण त्रिभुज के अतिरिक्त किसी भी त्रिभुज के लिए ज्या (sine) नियम का उपयोग कर सकते हैं।

अर्थात् सूत्र, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, या cosine सूत्र अर्थात्

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ इत्यादि।}$$

(v) समरूप त्रिभुजों के गुणों का उपयोग कर किसी विशेष भुजा की माप ज्ञात कर सकते हैं।

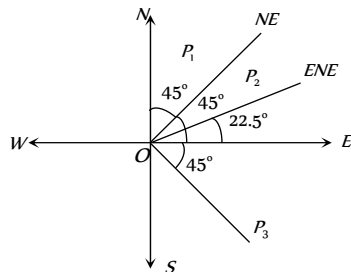
(3) **त्रिभुजों के ज्यामितीय गुण** : (i) किसी त्रिभुज में कोण का आन्तरिक समद्विभाजक उस कोण की सम्मुख भुजा को, कोण की संलग्न भुजाओं के अनुपात अर्थात् शेष दो भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है, अर्थात् $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$.



(ii) समद्विबाहु त्रिभुज में माध्यिका आधार के लम्बवत् होती है, अर्थात् $AD \perp BC$.

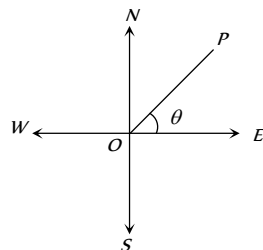
(iii) समरूप त्रिभुज में संगत भुजायें समानुपाती होती हैं।

(iv) त्रिभुज के बहिष्कोण का मान सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है।



(4) **उत्तर-पूर्व**: उत्तर-पूर्व अर्थात् उत्तर तथा पूर्व से समान रूप से झुकाव, दक्षिण-पूर्व अर्थात् दक्षिण तथा पूर्व से समान रूप से झुकाव होता है। ENE अर्थात् पूर्व तथा उत्तर-पूर्व से समान रूप से झुकाव होता है।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम



(5) **बियरिंग (Bearing)** : चित्र में, यदि दर्शक एवं वस्तु अर्थात् O तथा P समान तल पर हो तब बियरिंग परिभाषित है। चार मानक दिशाओं से बियरिंग मापते हैं।

रेखा OP एवं कोई एक मानक दिशा (पूर्व, पश्चिम, उत्तर, दक्षिण) के बीच कोण मापते हैं।

इस प्रकार $\angle POE = \theta$, O के सापेक्ष बिन्दु P का बियरिंग कहलाता है, जो कि पूर्व से उत्तर की ओर मापा जाता है।

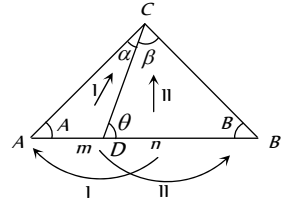
(6) $m-n$ cot प्रमेय:

$$(m+n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta$$

$$= n \cot A - m \cot B, (\theta \text{ दाँयी ओर है}).$$

यदि θ बाँयी ओर हो, तब दाँयी ओर का कोण $\pi - \theta$ तथा $\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$ होगा। इस स्थिति में $m-n$ प्रमेय है;

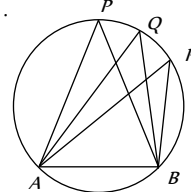
$$-(m+n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta = n \cot A - m \cot B, (\theta \text{ बाँयी ओर है}).$$



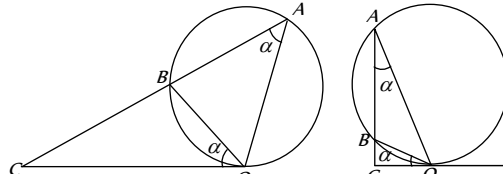
वृत्त से सम्बन्धित महत्वपूर्ण गुण

(Some properties related to circle)

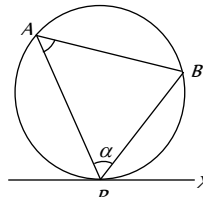
(1) वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण समान होते हैं, अर्थात् $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB$.



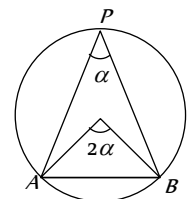
(2) वृत्त के एकान्तर खण्डों में बने कोण समान होते हैं।

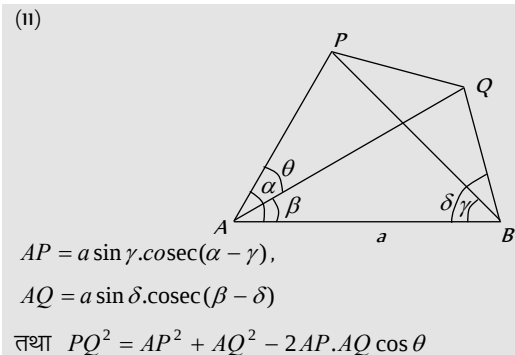
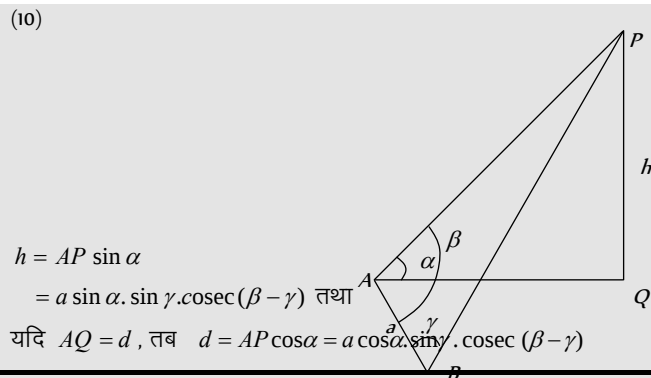
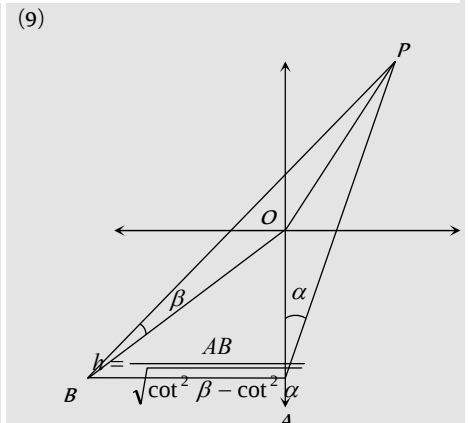
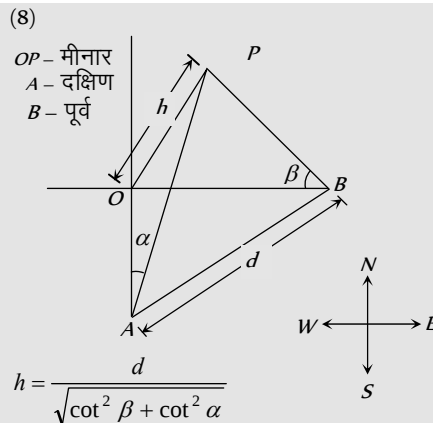
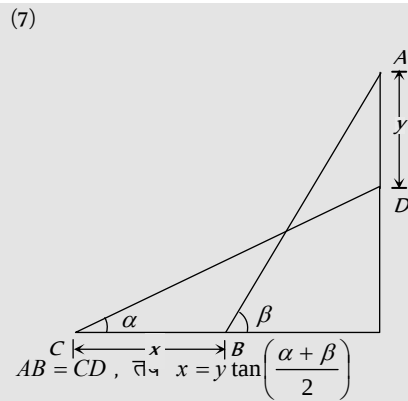
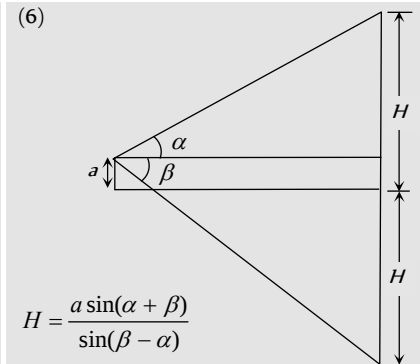
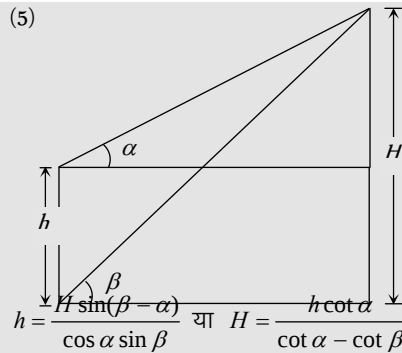
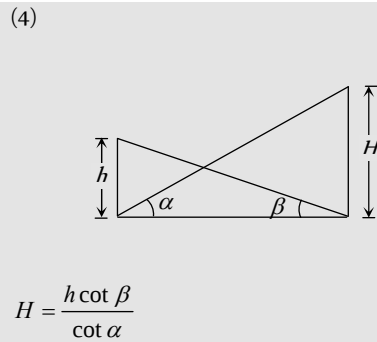
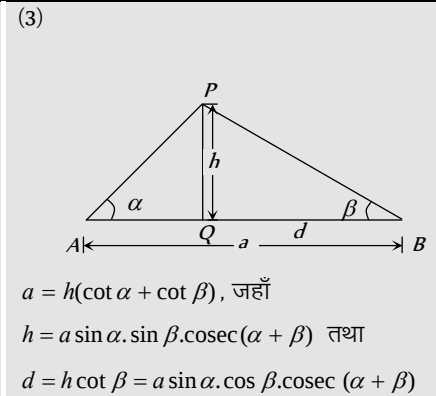
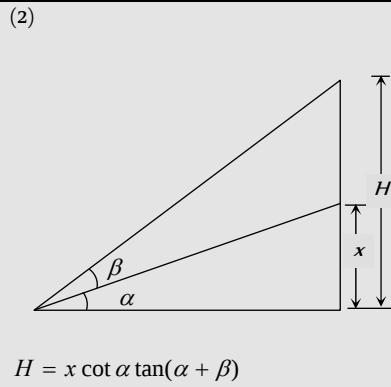
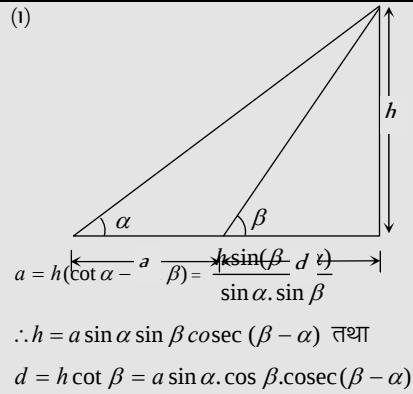


(3) यदि दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा किसी बिन्दु P पर महत्तम कोण α बनाती है, तब वृत्त, सरल रेखा XX' को बिन्दु P पर स्पर्श करता है।



(4) वृत्त की किसी जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण, इसी जीवा द्वारा वृत्त की परिधि के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।





T Tips & Tricks

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{s-c}{s} \Rightarrow \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} = \frac{s}{s-c}$$

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} = \frac{c}{s} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} = \frac{a-b}{s} (s-c)$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} = \frac{c}{s-c} \cot \frac{C}{2}$$

किसी त्रिभुज के परिकेन्द्र, केन्द्रक तथा लम्बकेन्द्र समरेखीय होते हैं।

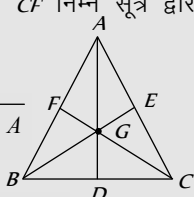
किसी समकोण त्रिभुज में लम्बकेन्द्र त्रिभुज के उस शीर्ष पर होता है, जहाँ समकोण बनता है।

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण का मध्यबिन्दु, त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है।

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण का मध्य बिन्दु, त्रिभुज का परिकेन्द्र होता है।

किसी $\triangle ABC$ की माध्यिकाएँ AD , BE तथा CF निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं; $AD = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$,

$$= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$$



$$BE = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca \cos B}$$

$$CF = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos C}$$

किसी $\triangle ABC$ के परिकेन्द्र O तथा केन्द्रक G के मध्य दूरी ज्ञात करने के लिए

$$OG = \frac{1}{3} OH = \frac{1}{3} R \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}, \text{ जहाँ } H, \triangle ABC \text{ का लम्ब केन्द्र है।}$$

किसी $\triangle ABC$ के लम्बकेन्द्र H तथा केन्द्रक G के मध्य दूरी, $HG = \frac{2}{3} R \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}$.

किसी $\triangle ABC$ के परिकेन्द्र O तथा अन्तःकेन्द्र I के मध्य दूरी,

$$OI = R \sqrt{1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

यदि I_1 , कोण B के सामने के बहिर्वृत्त का केन्द्र है, तब

$$OI_1 = R \sqrt{1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$\text{इसी प्रकार } OI_2 = R \sqrt{1 + 8 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$OI_3 = R \sqrt{1 + 8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$\sin A + \sin B + \sin C$ अधिकतम होगा, जबकि $A = B = C$.

$\cos A + \cos B + \cos C$ अधिकतम होगा, जबकि $A = B = C$.

$\tan A + \tan B + \tan C$ अधिकतम होगा, जबकि $A = B = C$.

$\cot A + \cot B + \cot C$ अधिकतम होगा, जबकि $A = B = C$.

यदि $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$, तब त्रिभुज समबाहु होगा।

यदि $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, तब त्रिभुज समबाहु होगा।

यदि $\tan A + \tan B + \tan C = 3\sqrt{3}$, तब त्रिभुज समबाहु होगा।

यदि $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$, तब त्रिभुज समबाहु होगा।

यदि $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$, तब त्रिभुज समबाहु होगा।

किसी दिये गये त्रिभुज के पाद-त्रिभुज का परिवृत्त, दिए गये त्रिभुज की भुजाओं को तथा दिए गये त्रिभुज के शीर्षों से लम्बकेन्द्र को मिलाने वाली रेखाओं को समद्विभाजित करता है। यह वृत्त नौ बिन्दु वृत्त (Nine point circle) कहलाता है।

किसी दिये गये त्रिभुज के पाद त्रिभुज का परिकेन्द्र, त्रिभुज के लम्बकेन्द्र से परिकेन्द्र को मिलाने वाली रेखा को समद्विभाजित करता है।

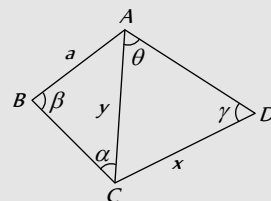
$$\Sigma(p-q) = (p-q) + (q-r) + (r-p) = 0,$$

$$\Sigma p(q-r) = p(q-r) + q(r-p) + r(p-q) = 0.$$

$$\Sigma(p+a)(q-r) = \Sigma p(q-r) + a \Sigma(q-r) = 0.$$

sine सूत्र का उपयोग करते समय निम्न बिन्दुओं का ध्यान रखना चाहिये। हमें एक भुजा a दी गयी है तथा अन्य भुजा x ज्ञात करनी है। ये दोनों विभिन्न त्रिभुजों में स्थित हैं। हम इन त्रिभुजों की एक उभयनिष्ठ भुजा चुनते हैं और एक त्रिभुज में a और y के लिये तथा दूसरे में x और y के लिए सूत्र लगाते हैं इस प्रकार y को विलुप्त करते हैं। इस प्रकार, हमें अज्ञात भुजा x का मान a के पदों में ज्ञात हो जाता है।

संलग्न चित्र में a त्रिभुज ABC की ज्ञात भुजा है तथा x त्रिभुज ACD की अज्ञात भुजा है। उभयनिष्ठ भुजा $AC = y$ (माना) है।



sine नियम से,

$$\therefore \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin \beta} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } \frac{x}{\sin \theta} = \frac{y}{\sin \gamma} \quad \dots(ii)$$

$$(ii) \text{ को } (i) \text{ से भाग देने पर, } \frac{x \sin \alpha}{a \sin \theta} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma};$$

$$\therefore x = \frac{a \sin \beta \sin \theta}{\sin \alpha \sin \gamma}.$$

Ordinary Thinking

Objective Questions

त्रिकोणमितीय समीकरणों के हल

- यदि $\sin \theta + \cos \theta = 1$, तो θ का व्यापक मान है
[MNR 1987; IIT 1981; Karnataka CET 2000, 03; DCE 2000]
(a) $2n\pi$ (b) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
- यदि $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$, तो θ का सर्वव्यापक मान है
[MNR 1973; MP PET 1984, 90]
(a) $2n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{n\pi}{2} \pm (-1)^n \frac{\pi}{6}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
- यदि $\sec^2 \theta = \frac{4}{3}$, तो θ का व्यापक मान है [MP PET 1988]
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- समीकरण $\cot \theta - \tan \theta = 2$ का व्यापक हल है
(a) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
(c) $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं
- यदि $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$, तो θ का व्यापक मान है
[MP PET 1991, 2002; UPSEAT 1999]
(a) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ (b) $(-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$
- यदि $\sin^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{4} = 0$, तो θ का व्यापक मान है
[MP PET 1984]
(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
- यदि $\sqrt{2} \sec \theta + \tan \theta = 1$, तो θ का व्यापक मान है
[MP PET 1989]
(a) $n\pi + \frac{3\pi}{4}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- यदि $2 \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$, तो θ का व्यापक मान है [MP PET 1989]
(a) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- (a) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- यदि $2 \sin \theta + \tan \theta = 0$, तो θ के व्यापक मान हैं
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
(c) $n\pi, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi, n\pi + \frac{2\pi}{3}$
- यदि $\sqrt{3} \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan 3\theta + \tan 2\theta \tan 3\theta = 1$, तो θ का व्यापक मान है
(a) $n\pi + \frac{\pi}{5}$ (b) $\left(n + \frac{1}{6}\right) \frac{\pi}{5}$
(c) $\left(2n \pm \frac{1}{6}\right) \frac{\pi}{5}$ (d) $\left(n + \frac{1}{3}\right) \frac{\pi}{5}$
- यदि $\tan 2\theta \tan \theta = 1$, तो θ का व्यापक मान है
[Roorkee 1980; Karnataka CET 1992, 93, 2003]
(a) $\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{3}$ (b) $\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$
(c) $\left(2n \pm \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं
- यदि $1 + \cot \theta = \operatorname{cosec} \theta$, तो θ का व्यापक मान है
[Roorkee 1981]
(a) $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi - \frac{\pi}{2}$
(c) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
- यदि $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = 3$, तो θ का व्यापक मान है
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- यदि $3(\sec^2 \theta + \tan^2 \theta) = 5$, तो θ का व्यापक मान है
(a) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- यदि $\cos 7\theta = \cos \theta - \sin 4\theta$, तो θ के व्यापक मान हैं
(a) $\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ (b) $\frac{n\pi}{3}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$
(c) $\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$ (d) $\frac{n\pi}{6}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$
- यदि $\frac{1 - \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{2}$, तो θ के व्यापक मान हैं
(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $\cos \theta + \sec \theta = \frac{5}{2}$, तो θ का व्यापक मान है
- (a) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
18. यदि $\cot \theta + \tan \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$, तो θ के व्यापक मान हैं [Roorkee 1971]
- (a) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
19. यदि $\tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3})\tan \theta + \sqrt{3} = 0$, तो θ के व्यापक मान हैं
- (a) $n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi - \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi - \frac{\pi}{4}, n\pi - \frac{\pi}{3}$
20. समीकरणों $\sin \theta = \sin \alpha$ तथा $\cos \theta = \cos \alpha$ को संतुष्ट करने वाला θ का सर्वव्यापक मान है [IIT 1971; Karnataka CET 1993; DCE 1999]
- (a) $2n\pi + \alpha$ (b) $2n\pi - \alpha$
(c) $n\pi + \alpha$ (d) $n\pi - \alpha$
21. यदि $4 \sin^2 \theta + 2(\sqrt{3} + 1)\cos \theta = 4 + \sqrt{3}$, तो θ के व्यापक मान हैं
- (a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi - \frac{\pi}{3}$
22. यदि $\cot \theta + \cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 2$, तो θ का व्यापक मान है
- (a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
23. यदि $\cos 2\theta + 3 \cos \theta = 0$, तो θ का व्यापक मान है
- (a) $2n\pi \pm \cos^{-1} \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ (b) $2n\pi \pm \cos^{-1} \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$
(c) $n\pi \pm \cos^{-1} \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ (d) $n\pi \pm \cos^{-1} \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$
24. यदि $\tan m\theta = \tan n\theta$, तो θ के भिन्न भिन्न मान होंगे [Pb. CET 2002]
- (a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं
25. यदि $\tan \theta - \sqrt{2} \sec \theta = \sqrt{3}$, तो θ का व्यापक मान है
- (a) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$
26. यदि $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos \alpha$, तो θ का व्यापक मान है
- (a) $2n\pi - \frac{\pi}{4} \pm \alpha$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \alpha$
(c) $n\pi - \frac{\pi}{4} \pm \alpha$ (d) $n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \alpha$
27. यदि $\tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = \tan \theta \tan 2\theta \tan 3\theta$, तो θ का व्यापक मान है
- (a) $n\pi$ (b) $\frac{n\pi}{6}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{n\pi}{2}$
28. $3 \tan(A - 15^\circ) = \tan(A + 15^\circ)$ का हल है
- (a) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{2}$
29. समीकरण $\tan \theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2$ को संतुष्ट करने वाला θ का व्यापक मान है [MNR 1974]
- (a) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$
30. यदि $\cos 2\theta = (\sqrt{2} + 1)\left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, तो θ का व्यापक मान है [Roorkee 1977]
- (a) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं
31. त्रिकोणमितीय समीकरण $\tan \theta = \cot \alpha$ का व्यापक हल है [MP PET 1994]
- (a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$ (b) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha$
(c) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha$ (d) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha$
32. समीकरण $\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta = \frac{4}{3}$ का व्यापक हल है [Roorkee 1994]
- (a) $\frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n \sin^{-1}(3/4)]$ (b) $n\pi + (-1)^n \sin^{-1}(3/4)$
(c) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \sin^{-1}(3/4)$ (d) इनमें से कोई नहीं
33. यदि $\cos p\theta = \cos q\theta, p \neq q$, तो [MP PET 1995]
- (a) $\theta = 2n\pi$ (b) $\theta = \frac{2n\pi}{p \pm q}$
(c) $\theta = \frac{n\pi}{p + q}$ (d) इनमें से कोई नहीं
34. समीकरण $4 \cos^2 x + 6 \sin^2 x = 5$ का व्यापक हल है [AI CBSE 1983]
- (a) $x = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (b) $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $x = n\pi \pm \frac{3\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

35. यदि $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(x + \alpha) \sin(x - \alpha)$, तब $x =$

- (a) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

36. यदि $\sin\left(\frac{\pi}{4} \cot \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \tan \theta\right)$, तब $\theta =$ [Pb. CET 1988]

- (a) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

37. समीकरण $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ को सन्तुष्ट करने वाला θ का व्यापक मान है [Roorkee 1993]

- (a) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$
(c) $n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{6}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$

38. समीकरण $(\sqrt{3} - 1) \sin \theta + (\sqrt{3} + 1) \cos \theta = 2$ का व्यापक हल है [Roorkee 1992]

- (a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ (b) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

39. $\tan 3x = 1$ का व्यापक हल है [Karnataka CET 1991]

- (a) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$
(c) $n\pi$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

40. $\sin^2 \theta \sec \theta + \sqrt{3} \tan \theta = 0$ का व्यापक हल है

- (a) $\theta = n\pi + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3}, \theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
(b) $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
(c) $\theta = n\pi + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$
(d) $\theta = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

41. समीकरण $\tan^2 \theta + \sec 2\theta = 1$ को सन्तुष्ट करने वाला θ का व्यापक हल है [IIT 1996]

- (a) $m\pi, n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $m\pi, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $m\pi, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं
(जहाँ m व n पूर्णांक हैं)

42. समीकरण $\cos 2\theta = \sin \alpha$ द्वारा प्राप्त θ का व्यापक मान है [MP PET 1996]

- (a) $2\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
(c) $\theta = \frac{n\pi + (-1)^n \alpha}{2}$ (d) $\theta = n\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

43. यदि $\sin 6\theta + \sin 4\theta + \sin 2\theta = 0$, तो $\theta =$

[MP PET 1999; Pb. CET 2000]

- (a) $\frac{n\pi}{4}$ या $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{n\pi}{4}$ या $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{n\pi}{4}$ या $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

44. यदि $\sin^2 \theta + \sin \theta = 2$, तो θ का व्यापक मान होगा

[AMU 1996, 99]

- (a) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

45. $\tan 5\theta = \cot 2\theta$ का व्यापक हल होगा, (जहाँ $n \in \mathbb{Z}$)

[Karnataka CET 2000; Pb. CET 2001]

- (a) $\theta = \frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$ (b) $\theta = \frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{5}$
(c) $\theta = \frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{2}$ (d) $\theta = \frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{3}$

46. समीकरण $3 \sin^2 x + 10 \cos x - 6 = 0$ का व्यापक हल होगा

[UPSEAT 2001]

- (a) $x = n\pi \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $x = 2n\pi \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$
(c) $x = n\pi \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ (d) $x = 2n\pi \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$

47. यदि $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$, तब θ का व्यापक मान होगा

[UPSEAT 2003]

- (a) $\theta = 2m\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (b) $\theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $\theta = m\pi \pm (-1)^m \frac{2\pi}{3}$ (d) $\theta = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{3}$

48. $2\sqrt{3} \cos \theta = \tan \theta$ का व्यापक मान होगा

[MP PET 2003]

- (a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$

49. यदि $\begin{vmatrix} \cos(A+B) & -\sin(A+B) & \cos 2B \\ \sin A & \cos A & \sin B \\ -\cos A & \sin A & \cos B \end{vmatrix} = 0$, तब $B =$

[EAMCET 2003]

- (a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $n\pi$
(c) $(2n+1)\pi$ (d) $2n\pi$

50. यदि $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ व θ एक न्यूनकोण है, तो $\sin \theta$ का मान है

[EAMCET 1980]

- (a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (b) $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$
(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

51. यदि $4 \sin^4 x + \cos^4 x = 1$, तब $x =$

[Roorkee 1989]

- (a) $n\pi$ (b) $n\pi \pm \sin^{-1} \frac{2}{5}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. यदि $\cos 3x + \sin\left(2x - \frac{7\pi}{6}\right) = -2$, तब $x =$ (जहाँ $k \in \mathbb{Z}$)

- (a) $\frac{\pi}{3}(6k+1)$ (b) $\frac{\pi}{3}(6k-1)$
(c) $\frac{\pi}{3}(2k+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. समीकरण $\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 0$ का व्यापक हल होगा

[AMU 2002]

- (a) $\theta = n\pi$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$
(c) $\theta = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4}$ (d) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

54. x के मानों का वह समुच्चय जिसके लिए $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$ है

[MP PET 1992; MNR 1993; UPSEAT 2002]

- (a) ϕ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\left\{n\pi + \frac{\pi}{4} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ (d) $\left\{2n\pi + \frac{\pi}{4} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$

55. यदि $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$, तब

[UPSEAT 2001]

- (a) $\theta = (6n+1)\pi/18, \forall n \in \mathbb{I}$ (b) $\theta = (6n+1)\pi/9, \forall n \in \mathbb{I}$
(c) $\theta = (3n+1)\pi/9, \forall n \in \mathbb{I}$ (d) इनमें से कोई नहीं

56. समीकरण $1 - \cos \theta = \sin \theta \cdot \sin \frac{\theta}{2}$ के मूल हैं [Orissa JEE 2004]

- (a) $k\pi, k \in \mathbb{I}$ (b) $2k\pi, k \in \mathbb{I}$
(c) $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{I}$ (d) इनमें से कोई नहीं

57. यदि $\frac{\tan 3\theta - 1}{\tan 3\theta + 1} = \sqrt{3}$, तो θ का व्यापक मान है

[MP PET 2004; Orissa JEE 2004]

- (a) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{n\pi}{3} + \frac{7\pi}{36}$
(c) $n\pi + \frac{7\pi}{12}$ (d) $n\pi + \frac{\pi}{12}$

58. यदि $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0, 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, तो $x =$

[MP PET 1986]

- (a) $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ (b) $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$
(c) $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ$ (d) $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

59. समीकरण $\sin x + \cos x = 2$ के हल होंगे

[EAMCET 1986; MP PET 1998; Pb. CET 1993]

- (a) एक हल (b) दो हल
(c) अनन्त हल (d) कोई हल नहीं

60. समीकरण $2\sin^2 \theta = 4 + 3\cos \theta$ के अंतराल $[0, 2\pi]$ में हलों की संख्या निम्न है [MP PET 1989]

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

61. समीकरण $\sin x \cos x = 2$ के हल होंगे

- (a) एक हल (b) दो हल
(c) अनन्त हल (d) कोई हल नहीं

62. समीकरण $\tan \theta + \sec \theta = \sqrt{3}$, जहाँ $0 < \theta < 2\pi$ के हलों की संख्या है

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

63. यदि $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$, तो शून्य के अतिरिक्त अंतराल $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ में x का मान होगा [MNR 1985]

- (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{12}$
(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

64. समीकरण $\cos x - x + \frac{1}{2} = 0$ का एक मूल किस अन्तराल में स्थित है [Kurukshetra CEE 1996]

- (a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (b) $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
(c) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (d) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

65. यदि $\sec x \cos 5x + 1 = 0$, जहाँ $0 < x < 2\pi$, तो $x =$

[Roorkee 1978; IIT 1963]

- (a) $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{5}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

66. समीकरण $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + \alpha = 0$, α के निम्न मान के लिए हल योग्य है

- (a) $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ (b) $-3 \leq \alpha \leq 1$
(c) $-\frac{3}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ (d) $-1 \leq \alpha \leq 1$

67. यदि $|k| = 5$ तथा $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, तब $3\cos \theta + 4\sin \theta = k$ के विभिन्न हलों की संख्या होगी

- (a) शून्य (b) दो
(c) एक (d) अनन्त

68. अन्तराल $[0, 5\pi]$ में x के मानों की संख्या जो समीकरण $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$ को संतुष्ट करे, है

[IIT 1998; MP PET 2000; Pb. CET 2003]

- (a) 0 (b) 5
(c) 6 (d) 10

69. समीकरण $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 4$ के हल होंगे [EAMCET 2001]

- (a) केवल एक हल (b) दो हल
(c) अनन्त हल (d) कोई हल नहीं

70. समीकरण $3\cos x + 4\sin x = 6$ रखता है

[Orissa JEE 2002]

- (a) सीमित हल (b) अनन्त हल
(c) एक हल (d) कोई हल नहीं

71. समीकरण $\sin x + \sin y + \sin z = -3$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2\pi$ के लिए रखता है [Orissa JEE 2003]
 (a) एक हल (b) दो हल समुच्चय
 (c) चार हल समुच्चय (d) कोई हल नहीं
72. यदि $\sin 2\theta = \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$, तो θ के सम्भव मान हैं
 (a) $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ (b) $90^\circ, 150^\circ, 60^\circ$
 (c) $90^\circ, 45^\circ, 150^\circ$ (d) $90^\circ, 30^\circ, 150^\circ$
73. यदि $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$, जहाँ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, तो $\theta =$ [IIT 1963]
 (a) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
 (c) $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं
74. यदि $\cos 6\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$, जहाँ $0 < \theta < 180^\circ$, तो $\theta =$
 (a) $30^\circ, 45^\circ$ (b) $45^\circ, 90^\circ$
 (c) $135^\circ, 150^\circ$ (d) $30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 150^\circ$
75. $\operatorname{cosec} \theta + 2 = 0$ को सन्तुष्ट करने वाला $\theta (0 < \theta < 360^\circ)$ का मान है [EAMCET 1994]
 (a) $210^\circ, 300^\circ$ (b) $240^\circ, 300^\circ$
 (c) $210^\circ, 240^\circ$ (d) $210^\circ, 330^\circ$
76. यदि $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$, $-\pi < x < \pi$, तब $x =$ [ISM Dhanbad 1989]
 (a) $\pm \frac{\pi}{6}$ (b) $\pm \frac{\pi}{4}$
 (c) $\pm \frac{3\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
77. $\sin 7\theta = \sin 4\theta - \sin \theta$ तथा $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ को सन्तुष्ट करने वाले θ के मान हैं [EAMCET 1990]
 (a) $\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{9}$
 (c) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{9}$ (d) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$
78. व्यंजक $(1 + \tan x + \tan^2 x)(1 - \cot x + \cot^2 x)$, x के निम्न मान के लिए धनात्मक मान रखता है
 (a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $0 \leq x \leq \pi$
 (c) सभी $x \in R$ के लिये (d) $x \geq 0$
79. यदि $5 \cos 2\theta + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 = 0$, $-\pi < \theta < \pi$, तब $\theta =$ [Roorkee 1984]
 (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}, \cos^{-1} \frac{3}{5}$
 (c) $\cos^{-1} \frac{3}{5}$ (d) $\frac{\pi}{3}, \pi - \cos^{-1} \frac{3}{5}$
80. यदि $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ और $0^\circ < \theta < 360^\circ$, तब θ का मान होगा [Karnataka CET 2001]
 (a) 120° तथा 300° (b) 60° तथा 120°
 (c) 120° तथा 240° (d) 60° तथा 240°
81. यदि $(2 \cos x - 1)(3 + 2 \cos x) = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$, तो $x =$ [MNR 1988; UPSEAT 2000]
 (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
 (c) $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$ (d) $\frac{5\pi}{3}$
82. यदि $0 \leq x \leq \pi$ तब $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ है, तो x का मान है [Karnataka CET 2004]
 (a) $\pi/6$ (b) $\pi/2$
 (c) $\pi/4$ (d) $3\pi/4$
83. यदि $\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$, $-\pi < \theta < 0$, तो $\theta =$ [MP PET 1992]
 (a) $-\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{4\pi}{6}$
 (c) $\frac{4\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$
84. θ का वे मान, जो 0° तथा 360° के बीच में है तथा समीकरण $\tan \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ को सन्तुष्ट करते हैं, हैं [Pb. CET 2002]
 (a) $\theta = 150^\circ$ और 300° (b) $\theta = 120^\circ$ और 300°
 (c) $\theta = 60^\circ$ और 240° (d) $\theta = 150^\circ$ और 330°
85. समीकरण $\cos^2 \theta + \sin \theta = 1$ का हल किस अन्तराल में स्थित है [UPSEAT 2004; IIT 1992]
 (a) $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$
 (c) $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (d) $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$
86. समीकरण $2 \cos(e^x) = 5^x + 5^{-x}$ के हलों की संख्या है [UPSEAT 2004; IIT 1992]
 (a) कोई हल नहीं है (b) एक हल
 (c) दो हल हैं (d) अनन्त व अनेक हल
87. समीकरणों $\tan \theta = -1$ तथा $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ को सन्तुष्ट करने वाला θ का सर्वव्यापक मान है [MNR 1982; Roorkee 1990; UPSEAT 2002; MP PET 2003]
 (a) $n\pi + \frac{7\pi}{4}$ (b) $n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{4}$
 (c) $2n\pi + \frac{7\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं
88. समीकरणों $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ तथा $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ को सन्तुष्ट करने वाला θ का सर्वव्यापक मान है [MNR 1980; MP PET 1989; DCE 1995]
 (a) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{6}$
 (c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं
89. समीकरणों $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ व $\sin 2x + \cos 2x = \tan x$, के उभयनिष्ठ मूल हैं
 (a) $x = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ (b) $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$
 (c) $x = (2n+1)\frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

90. यदि $r \sin \theta = 3, r = 4(1 + \sin \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, तब $\theta =$

[Roorkee 1974]

- (a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
(c) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}, \pi$

91. यदि $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\tan \theta = 1$, तो θ का सर्वव्यापक मान है

- (a) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

92. यदि $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो A तथा B के न्यूनतम धनात्मक मान हैं

- (a) $60^\circ, 30^\circ$ (b) $75^\circ, 15^\circ$
(c) $45^\circ, 60^\circ$ (d) $45^\circ, 45^\circ$

93. समीकरण $2\sin^2 \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 1 = 0$ को सन्तुष्ट करने वाला न्यूनतम धनात्मक कोण है

[ISM Dhanbad 1972; MP PET 1993]

- (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

94. $\cot \theta = \sin 2\theta$ (जहाँ $\theta \neq n\pi$ तथा n एक पूर्णांक है), यदि $\theta =$

[BIT Ranchi 1991; Pb. CET 1991]

- (a) 45° व 60° (b) 45° व 90°
(c) केवल 45° (d) केवल 90°

95. θ का वह मान, जो समीकरण $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2$ को सन्तुष्ट करता है, है

[MNR 1981; EAMCET 1989]

- (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$

96. यदि $\cos A \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ का मान अधिकतम है, तो A का मान है

- (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

97. यदि $\cos 40^\circ = x$ और $\cos \theta = 1 - 2x^2$ हो, तो 0° और 360° के बीच में θ के सम्भावित मान हैं

- (a) 100° तथा 260° (b) 80° तथा 280°
(c) 280° तथा 110° (d) 110° तथा 260°

98. x का वह मान, जिसके लिए $2^{\sin x} + 2^{\cos x} > 2^{1-(1/\sqrt{2})}$ अस्तित्व में है, होगा

- (a) $\frac{5\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) x के सभी मान

99. यदि $(1 + \tan \theta)(1 + \tan \phi) = 2$, तब $\theta + \phi =$

[Karnataka CET 1993]

- (a) 30° (b) 45°
(c) 60° (d) 75°

100. यदि $\tan(\pi \cos \theta) = \cot(\pi \sin \theta)$, तब $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) =$

[UPSEAT 1999]

- (a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

101. यदि $\tan(\pi \cos \theta) = \cot(\pi \sin \theta)$, तब $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ का मान होगा

[AMU 1999]

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

102. θ का वह मान, जो कि 0 एवं $\frac{\pi}{2}$ के मध्य हो तथा समीकरण

$$\begin{vmatrix} 1 + \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ \sin^2 \theta & 1 + \cos^2 \theta & 4 \sin 4\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 1 + 4 \sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$$
 को संतुष्ट करता हो, है

[IIT 1988; MNR 1992; Kurukshetra CEE 1998; DCE 1996]

- (a) $\frac{7\pi}{24}$ अथवा $\frac{11\pi}{24}$ (b) $\frac{5\pi}{24}$
(c) $\frac{\pi}{24}$ (d) इनमें से कोई नहीं

103. यदि $\cot(\alpha + \beta) = 0$, तब $\sin(\alpha + 2\beta) =$

[Kerala (Engg.) 2001]

- (a) $\sin \alpha$ (b) $\cos \alpha$
(c) $\sin \beta$ (d) $\cos 2\beta$

104. यदि n एक पूर्णांक है, तब $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ का व्यापक हल है

[J & K 2005]

- (a) $x = 2n\pi - \frac{\pi}{12}$ या $x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$
(b) $x = n\pi \pm \frac{\pi}{12}$
(c) $x = 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ या $x = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$
(d) $x = n\pi + \frac{\pi}{12}$ या $x = n\pi - \frac{7\pi}{12}$

105. किसी पूर्णांक n के लिये, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ का व्यापक हल है

[Karnataka CET 2005]

- (a) $n\pi$ (b) $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$
(c) $2n\pi$ (d) $(2n+1)\pi$

106. यदि $12 \cot^2 \theta - 31 \operatorname{cosec} \theta + 32 = 0$, तो $\sin \theta$ का मान है

[Karnataka CET 2005]

- (a) $\frac{3}{5}$ या 1 (b) $\frac{2}{3}$ या $-\frac{2}{3}$
(c) $\frac{4}{5}$ या $\frac{3}{4}$ (d) $\pm \frac{1}{2}$

आवर्ती फलन

1. $|\sin 2x|$ का आवर्तनांक है [MP PET 1989]
 - (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$
 - (c) π (d) 2π
2. $\sin \theta \cos \theta$ का आवर्तनांक है
 - (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π
 - (c) 2π (d) इनमें से कोई नहीं
3. $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta}$ का आवर्तनांक है
 - (a) 2π (b) π
 - (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$
4. $\cos(7x - 5)$ का आवर्तनांक है
 - (a) $\frac{2\pi - 5}{7}$ (b) $2\pi - 5$
 - (c) $\frac{2\pi}{7}$ (d) $\frac{\pi}{7}$
5. $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ का आवर्तनांक है [MP PET 1990]
 - (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$
 - (c) π (d) 2π
6. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{3}$ का आवर्तनांक है
 - (a) 2π (b) 4π
 - (c) 8π (d) 12π
7. $\cot 3x - \cos(4x + 3)$ का आवर्तनांक है
 - (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
 - (c) π (d) 2π
8. $|2 \sin 3\theta + 4 \cos 3\theta|$ का आवर्तनांक है
 - (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) π
 - (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$
9. समीकरण $\sin^4 x + \cos^4 x$ का आवर्तनांक होगा [RPET 1997]
 - (a) $\pi/2$ (b) π
 - (c) 2π (d) $3\pi/2$
10. फलन $f(\theta) = \sin \frac{\theta}{3} + \cos \frac{\theta}{2}$ का आवर्तनांक होगा [EAMCET 2001]
 - (a) 3π (b) 6π
 - (c) 9π (d) 12π
11. यदि फलन $f(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ का आवर्तनांक 4π हो, तो n का मान होगा [Pb. CET 2000]
 - (a) 1 (b) 4
 - (c) 8 (d) 2

12. $\sin^2 x$ का आवर्तनांक होगा [UPSEAT 2002; AIEEE 2002]
 - (a) π (b) 2π
 - (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
13. फलन $y = \sin 2x$ का आवर्तनांक होगा [Kerala (Engg.) 2002]
 - (a) 2π (b) π
 - (c) $\pi/2$ (d) 4π
14. निम्न में से किसका आवर्तनांक 2π है [Pb. CET 2004]
 - (a) $y = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin 5\pi t$
 - (b) $y = \sin \frac{\pi}{3} t + \sin \frac{\pi}{4} t$
 - (c) $y = \sin t + \cos 2t$
 - (d) इनमें से कोई नहीं
15. फलन $\sin\left(\frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$ का आवर्तनांक है [Orissa JEE 2004]
 - (a) 2π (b) 10π
 - (c) 6π (d) 12π
16. माना $f(x) = \cos px + \sin x$, तब आवर्तनांक p होना चाहिए
 - (a) परिमेय (b) अपरिमेय
 - (c) धनात्मक वास्तविक संख्या (d) इनमें से कोई नहीं
17. फलन $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ का आवर्तनांक है [EAMCET 1990]
 - (a) 4 (b) 6
 - (c) 12 (d) 24
18. फलन $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + 2 \cos \frac{\pi x}{3} - \tan \frac{\pi x}{4}$ का आवर्तनांक है [EAMCET 1992; RPET 2001]
 - (a) 6 (b) 3
 - (c) 4 (d) 12
19. फलन $|\sin \pi x|$ का आवर्तनांक है [AMU 1999]
 - (a) π^2 (b) 2π
 - (c) 2 (d) 1
20. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{n}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$ का आवर्तनांक है [Orissa JEE 2002]
 - (a) $2\pi n(n-1)$ (b) $4\pi(n-1)$
 - (c) $2\pi(n-1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सम्बन्ध, त्रिभुजों के हल

1. यदि त्रिभुज ABC में, $a = 5, b = 7$ व $\sin A = \frac{3}{4}$ है, तब इस प्रकार के कितने त्रिभुज सम्भव हैं [Roorkee 1990]
 - (a) 1 (b) 0
 - (c) 2 (d) ∞
2. यदि ΔABC में, $(s-a)(s-b) = s(s-c)$, तो कोण C है

[MP PET 1986]

- (a) 90° (b) 45°
 (c) 30° (d) 60°
3. यदि $\triangle ABC$ में, $2s = a + b + c$ तथा $(s - b)(s - c) =$

$$x \sin^2 \frac{A}{2}, \text{ तो } x =$$

[MP PET 1992]

- (a) bc (b) ca
 (c) ab (d) abc

4. यदि $\triangle ABC$ के कोण समान्तर श्रेणी में हों तो

- (a) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ (b) $b^2 = a^2 + c^2 - ac$
 (c) $a^2 = b^2 + c^2 - ac$ (d) $b^2 = a^2 + c^2$

5. किसी $\triangle ABC$ में, $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C =$

[MP PET 1985]

- (a) 0 (b) 1
 (c) $a + b + c$ (d) $2(a + b + c)$

6. $\triangle ABC$ में, $\frac{\sin B}{\sin(A + B)} =$

[MP PET 1989]

- (a) $\frac{b}{a + b}$ (b) $\frac{b}{c}$
 (c) $\frac{c}{b}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. $\triangle ABC$ में, $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} =$

[MP PET 1986]

- (a) $\frac{a^2 - b^2}{c^2}$ (b) $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$
 (c) $\frac{c^2}{a^2 - b^2}$ (d) $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$

8. $\triangle ABC$ में, यदि $b^2 + c^2 = 3a^2$, तो $\cot B + \cot C - \cot A =$

[MP PET 1991]

- (a) 1 (b) $\frac{ab}{4\Delta}$
 (c) 0 (d) $\frac{ac}{4\Delta}$

9. $\triangle ABC$ में, यदि $c^2 + a^2 - b^2 = ac$, तो $\angle B =$

[MP PET 1983, 89, 90]

- (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
 (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. $\triangle ABC$ में, $\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right)\left(a \sin^2 \frac{B}{2} + b \sin^2 \frac{A}{2}\right) =$

[Roorkee 1988]

- (a) $\cot C$ (b) $c \cot C$
 (c) $\cot \frac{C}{2}$ (d) $c \cot \frac{C}{2}$

11. $\triangle ABC$ में, यदि $\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}$ हरात्मक श्रेणी में हों, तो a, b, c होंगे

- (a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
 (c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

12. $\triangle ABC$ में, $(a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} =$

- (a) a^2 (b) b^2
 (c) c^2 (d) इनमें से कोई नहीं

13. $\triangle ABC$ में, यदि $a = 16, b = 24, c = 20$, तो $\cos \frac{B}{2} =$

[MP PET 1988]

- (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$
 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

14. यदि $\triangle ABC$ में, $\cos A + \cos C = 4 \sin^2 \frac{1}{2} B$, तो a, b, c होंगे

- (a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
 (c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

15. $\triangle ABC$ में, $1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} =$

[Roorkee 1973]

- (a) $\frac{2c}{a + b + c}$ (b) $\frac{a}{a + b + c}$
 (c) $\frac{2}{a + b + c}$ (d) $\frac{4a}{a + b + c}$

16. $\triangle ABC$ में, $b^2 \cos 2A - a^2 \cos 2B =$

- (a) $b^2 - a^2$ (b) $b^2 - c^2$
 (c) $c^2 - a^2$ (d) $a^2 + b^2 + c^2$

17. $\triangle ABC$ में, $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) =$

[ISM Dhanbad 1973]

- (a) 0 (b) $a + b + c$
 (c) $a^2 + b^2 + c^2$ (d) $2(a^2 + b^2 + c^2)$

18. $\triangle ABC$ में, यदि $\cot A, \cot B, \cot C$ समान्तर श्रेणी में हैं, तो a^2, b^2, c^2

[MP PET 1997]

- (a) हरात्मक श्रेणी में होंगे (b) गुणोत्तर श्रेणी में होंगे
 (c) समान्तर श्रेणी में होंगे (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $\triangle ABC$ में, $(a + b + c)(a - b + c) = 3ac$, तो

[AMU 1996]

- (a) $\angle B = 60^\circ$ (b) $\angle B = 30^\circ$
 (c) $\angle C = 60^\circ$ (d) $\angle A + \angle C = 90^\circ$

20. यदि $\triangle ABC$ में, $2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C) =$

- (a) 0 (b) $a + b + c$
 (c) $a^2 + b^2 + c^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. यदि $\triangle ABC$ में, $\operatorname{cosec} A (\sin B \cos C + \cos B \sin C) =$

[MP PET 1986, 1995; Pb. CET 1990, 94]

- (a) $\frac{c}{a}$ (b) $\frac{a}{c}$
 (c) 1 (d) $\frac{c}{ab}$

22. यदि $\cos^2 A + \cos^2 C = \sin^2 B$, तो $\triangle ABC$ है

[MP PET 1991]

- (a) समबाहु (b) समकोणीय
 (c) समद्विबाहु (d) इनमें से कोई नहीं

23. यदि एक त्रिभुज के कोण $1 : 2 : 7$ के अनुपात में हों, तो उसकी सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी भुजाओं का अनुपात होगा

- (a) $1 : 2$ (b) $2 : 1$
 (c) $(\sqrt{5} + 1) : (\sqrt{5} - 1)$ (d) $(\sqrt{5} - 1) : (\sqrt{5} + 1)$

24. यदि $\triangle ABC$ में, $\angle C = 60^\circ$, तो $\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} =$

[IIT 1975]

- (a) $\frac{1}{a+b+c}$ (b) $\frac{2}{a+b+c}$
- (c) $\frac{3}{a+b+c}$ (d) इनमें से कोई नहीं
25. यदि $\triangle ABC$ में, $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$, तो a, b, c होंगे
 (a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में
 (c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं
26. यदि $\triangle ABC$ में, a, b, c समान्तर श्रेणी में हों, तो $\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} =$
 [AMU 1995]
 (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
 (c) 2 (d) -1
27. यदि $\tan \frac{B-C}{2} = x \cot \frac{A}{2}$, तो $x =$ [MP PET 1992, 2002]
 (a) $\frac{c-a}{c+a}$ (b) $\frac{a-b}{a+b}$
 (c) $\frac{b-c}{b+c}$ (d) इनमें से कोई नहीं
28. यदि $\triangle ABC$ में, $a = 3, b = 4, c = 5$, तो $\sin 2B =$
 [MP PET 1983]
 (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{20}$
 (c) $\frac{24}{25}$ (d) $\frac{1}{50}$
29. यदि किसी त्रिभुज की भुजायें $2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$ के अनुपात में हों, तो त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण होगा
 [MP PET 1990]
 (a) 60° (b) 75°
 (c) 90° (d) 120°
30. किसी $\triangle ABC$ में,
 $a^3 \cos(B-C) + b^3 \cos(C-A) + c^3 \cos(A-B) =$
 [Kerala (Engg.) 2002]
 (a) abc (b) $3abc$
 (c) $a+b+c$ (d) इनमें से कोई नहीं
31. यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयाँ $7, 4\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{13}$ सेमी हों, तो सबसे छोटा कोण है
 [MNR 1985]
 (a) 15° (b) 30°
 (c) 60° (d) 45°
32. यदि एक समकोणीय त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी में हों, तो उनका अनुपात होगा
 (a) 1 : 2 : 3 (b) 2 : 3 : 4
 (c) 3 : 4 : 5 (d) 4 : 5 : 6
33. यदि $\triangle ABC$ में, $\angle C = 30^\circ$, $a = 47$ सेमी तथा $b = 94$ सेमी, तो त्रिभुज है
 [MP PET 1986]
 (a) समकोणीय (b) समकोणीय समद्विबाहु
 (c) समद्विबाहु (d) अधिककोणीय
34. $\triangle ABC$ में भुजा b किसके बराबर है [MP PET 1984, 92]
 (a) $c \cos A + a \cos C$ (b) $a \cos B + b \cos A$
 (c) $b \cos C + c \cos B$ (d) इनमें से कोई नहीं
35. यदि $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $c = 20$, तो a तथा b के मान क्रमशः हैं
 (a) 10, 10 (b) $10, 10\sqrt{3}$
 (c) $5, 5\sqrt{3}$ (d) $8, 8\sqrt{3}$
36. $\triangle ABC$ में, $c \cos(A-\alpha) + a \cos(C+\alpha) =$
 (a) $a \cos \alpha$ (b) $b \cos \alpha$
 (c) $c \cos \alpha$ (d) $2b \cos \alpha$

37. $\triangle ABC$ में, $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} =$
 (a) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ (b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$
 (c) $\frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$ (d) $a^2 + b^2 + c^2$
38. $\triangle ABC$ में, $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) =$
 (a) 0 (b) 1
 (c) $a^2 + b^2 + c^2$ (d) $2(a^2 + b^2 + c^2)$
39. $\triangle ABC$ में, $\frac{1 + \cos(A-B)\cos C}{1 + \cos(A-C)\cos B} =$
 (a) $\frac{a-b}{a-c}$ (b) $\frac{a+b}{a+c}$
 (c) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$ (d) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$
40. $\triangle ABC$ में, $\frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A} =$ [MP PET 1993; Roorkee 1973]
 (a) $\frac{b-c}{a}$ (b) $\frac{b+c}{a}$
 (c) $\frac{a}{b-c}$ (d) $\frac{a}{b+c}$
41. $\triangle ABC$ में, $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C =$
 (a) 0 (b) $a^2 + b^2 + c^2$
 (c) $2(a^2 + b^2 + c^2)$ (d) $\frac{1}{2abc}$
42. यदि $\triangle ABC$ में, $2b^2 = a^2 + c^2$, तो $\frac{\sin 3B}{\sin B} =$ [UPSEAT 1999]
 (a) $\frac{c^2 - a^2}{2ca}$ (b) $\frac{c^2 - a^2}{ca}$
 (c) $\left(\frac{c^2 - a^2}{ca}\right)^2$ (d) $\left(\frac{c^2 - a^2}{2ca}\right)^2$
43. यदि किसी त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी में हैं, तो इसके अर्द्धकोणों की कोटिज्यायें (Cotangents) होंगी
 [MP PET 1993]
 (a) हरात्मक श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
 (c) समान्तर श्रेणी में (d) कोई विशेष क्रम नहीं
44. यदि किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 1 : 2 : 3 है, तो उनकी संगत भुजाओं का अनुपात होगा
 [MP PET 1993; BIT Ranchi 1992; Pb. CET 1990]
 (a) 1 : 2 : 3 (b) $1 : \sqrt{3} : 2$
 (c) $\sqrt{2} : \sqrt{3} : 3$ (d) $1 : \sqrt{3} : 3$
45. त्रिभुज $\triangle ABC$ में, $\frac{2 \cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2 \cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$, तो कोण A का मान है
 [IIT 1993]
 (a) 45° (b) 30°
 (c) 90° (d) 60°
46. यदि $a = 9, b = 8$ व $c = x$, समीकरण $3 \cos C = 2$ को सन्तुष्ट करते हैं, तो
 [MP PET 1984]
 (a) $x = 5$ (b) $x = 6$

- (c) $x = 4$ (d) $x = 7$
47. यदि $\triangle ABC$ में $b = \sqrt{3}$, $c = 1$ व $B - C = 90^\circ$, तो $\angle A =$
[MP PET 1983]
(a) 30° (b) 45°
(c) 75° (d) 15°
48. यदि किसी त्रिभुज ABC में, $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$, तो इसकी भुजायें होगी
[MP PET 1982; AMU 2000; AIEEE 2003]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) समान्तर श्रेणी में
49. यदि किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी में हैं व $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, तो $\angle A$ का मान है
[IIT 1981; Kurukshetra CEE 1998; Pb. CET 1990]
(a) 30° (b) 60°
(c) 15° (d) 75°
50. किसी $\triangle ABC$ में, $a = 2$ सेमी, $b = 3$ सेमी व $c = 4$ सेमी, तो कोण A का मान है
[MNR 1973; MP PET 1984, 2002]
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{24}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$
51. $\cot \frac{A+B}{2} \cdot \tan \frac{A-B}{2} =$
[Roorkee 1975]
(a) $\frac{a+b}{a-b}$ (b) $\frac{a-b}{a+b}$
(c) $\frac{a}{a+b}$ (d) इनमें से कोई नहीं
52. यदि किसी त्रिभुज के कोण A, B, C समान्तर श्रेणी में हैं एवं इन कोणों के सामने वाली भुजायें a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो a^2, b^2, c^2 हैं
[MP PET 1998]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में
(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं
53. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ p, q और $\sqrt{p^2 + pq + q^2}$ हों, तब सबसे बड़ा कोण है
[Kerala (Engg.) 2005]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$
(c) $\frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{7\pi}{4}$
(e) $5\pi/3$
54. त्रिभुज ABC में, यदि $B = 3C$, तो $\sqrt{\left(\frac{b+c}{4c}\right)}$ व $\left(\frac{b-c}{2c}\right)$ के मान क्रमशः हैं
(a) $\sin C, \sin \frac{A}{2}$ (b) $\cos C, \sin \frac{A}{2}$
(c) $\sin C, \cos \frac{A}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
55. त्रिभुज ABC में, $(b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} + (a-b) \cot \frac{C}{2} =$
[WB JEE 1989]
(a) 0 (b) 1
- (c) ± 1 (d) 2
56. त्रिभुज ABC में, यदि $2a^2b^2 + 2b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4$, तो कोण B का मान है
(a) 45° या 135° (b) 135° या 120°
(c) 30° या 60° (d) इनमें से कोई नहीं
57. त्रिभुज का क्षेत्रफल $10\sqrt{3}$ वर्ग सेमी है। यदि त्रिभुज का कोण $C = 60^\circ$ व परिमाप 20 सेमी है, तो भुजा c होगी
(a) 5 (b) 7
(c) 8 (d) 10
58. त्रिभुज ABC में, यदि $A + C = 2B$, तो $\frac{a+c}{\sqrt{a^2 - ac + c^2}} =$
[UPSEAT 1999]
(a) $2 \cos \frac{A-C}{2}$ (b) $\sin \frac{A+C}{2}$
(c) $\sin \frac{A}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
59. किसी चक्रीय चतुर्भुज की दो आसन्न भुजायें 2 व 5 हैं तथा इनके बीच का कोण 60° है। यदि तीसरी भुजा 3 है, तो शेष चौथी भुजा होगी
[MNR 1994]
(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 5
60. त्रिभुज ABC में, $a = 4, b = 3$, $\angle A = 60^\circ$. तो c निम्न समीकरण का मूल है
[Roorkee 1993]
(a) $c^2 - 3c - 7 = 0$ (b) $c^2 + 3c + 7 = 0$
(c) $c^2 - 3c + 7 = 0$ (d) $c^2 + 3c - 7 = 0$
61. यदि त्रिभुज ABC में, $a = 2, b = 3, c = 5$ हो, तो $C =$
[EAMCET 1984]
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
62. यदि त्रिभुज ABC में, $A = 30^\circ, a = 7, b = 8$ तब B रखता है
(a) एक हल (b) दो हल
(c) कोई हल नहीं (d) इनमें से कोई नहीं
63. यदि $b = 3, c = 4$ और $B = \frac{\pi}{3}$ हो, तो इनसे बनने वाले त्रिभुजों की संख्या है
[Roorkee 1992]
(a) अनन्त (b) दो
(c) एक (d) कोई त्रिभुज सम्भव नहीं
64. यदि a^2, b^2, c^2 समान्तर श्रेणी में हैं, तब निम्न में से कौन सा समान्तर श्रेणी में है
[ISM Dhandbad 1989]
(a) $\sin A, \sin B, \sin C$ (b) $\tan A, \tan B, \tan C$
(c) $\cot A, \cot B, \cot C$ (d) इनमें से कोई नहीं
65. किसी त्रिभुज की भुजाएँ, तीन क्रमागत प्राकृत संख्याएँ हैं तथा इसका सबसे बड़ा कोण, सबसे छोटे कोण का दुगुना है, तब त्रिभुज की भुजाएँ हैं
(a) 1, 2, 3 (b) 2, 3, 4
(c) 3, 4, 5 (d) 4, 5, 6
66. यदि त्रिभुज ABC में, $\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$, तब भुजाओं का अनुपात है
(a) $1:1:\sqrt{2}$ (b) $1:\sqrt{2}:1$
(c) $\sqrt{2}:1:1$ (d) इनमें से कोई नहीं

67. यदि $\triangle ABC$ में, $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$ तथा भुजा $a = 2$, तब त्रिभुज का क्षेत्रफल है [IIT Screening 1993; MP PET 2000]
(a) 1 (b) 2

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

68. $\triangle ABC$ का परिमाप इसके कोणों की ज्या (sine) के समान्तर माध्य का 6 गुना है। यदि भुजा $a = 1$ है, तब कोण A है [IIT Screening 1992; DCE 1999]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

69. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर बिन्दु D, E इस प्रकार लिए गए हैं कि $BD = DE = EC$ है। यदि $\angle BAD = x$, $\angle DAE = y$ व $\angle EAC = z$ हो, तब $\frac{\sin(x+y)\sin(y+z)}{\sin x \sin z} =$

(a) 1 (b) 2
(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

70. यदि $\triangle ABC$ में, $\cos A + 2\cos B + \cos C = 2$, तब a, b, c हैं
(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में
(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं

71. यदि $\triangle ABC$ में, $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$, तब एक कोण आवश्यक रूप से होगा

(a) 90° (b) 45°
(c) 120° (d) इनमें से कोई नहीं

72. त्रिभुज ABC इस प्रकार है कि $\sin(2A + B) = \sin(C - A) = -\sin(B + 2C) = \frac{1}{2}$. यदि A, B तथा C समान्तर श्रेणी में हैं, तब A, B तथा C हैं

(a) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (b) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$
(c) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (d) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

73. यदि $\triangle ABC$ में, $AB = 2BC$, तब $\tan \frac{B}{2} : \cot \left(\frac{C-A}{2} \right)$ है

(a) 3 : 1 (b) 2 : 1
(c) 1 : 2 (d) 1 : 3

74. त्रिभुज ABC में, यदि $a = 2, B = 60^\circ$ और $C = 75^\circ$, तब $b =$ [Karnataka CET 1992]

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{6}$
(c) $\sqrt{9}$ (d) $1 + \sqrt{2}$

75. त्रिभुज ABC में, $A = 30^\circ, b = 8, a = 6$, तब $B = \sin^{-1} x$, जहाँ $x =$ [Karnataka CET 1990]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

76. $\triangle ABC$ में, $b = 2, C = 60^\circ, c = \sqrt{6}$, तब $a =$

(a) $\sqrt{3} - 1$ (b) $\sqrt{3}$
(c) $\sqrt{3} + 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. $\triangle ABC$ में, $a = 5, b = 4$ तथा $\cos(A - B) = \frac{31}{32}$, तब भुजा c है

(a) 6 (b) 7
(c) 9 (d) इनमें से कोई नहीं

78. $\triangle ABC$ में, यदि $A = 30^\circ, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$, तब $\frac{C-B}{2} =$

(a) 15° (b) 30°
(c) 45° (d) इनमें से कोई नहीं

79. $6 + \sqrt{12}, \sqrt{48}, \sqrt{24}$ भुजाओं वाले त्रिभुज का सबसे छोटा कोण है [EAMCET 1985]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. यदि त्रिभुज ABC में, $A = 30^\circ, c = 7\sqrt{3}$ तथा $C = 90^\circ$, तब $a =$

(a) $7\sqrt{3}$ (b) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{7}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. यदि किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात $2 : 3 : 7$ हो, तो भुजाओं में अनुपात है [MP PET 1996]

(a) $\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3} + 1)$ (b) $2 : \sqrt{2} : (\sqrt{3} + 1)$
(c) $\sqrt{2} : (\sqrt{3} + 1) : 2$ (d) $2 : (\sqrt{3} + 1) : \sqrt{2}$

82. किसी त्रिभुज की भुजायें 2 सेमी, $\sqrt{6}$ सेमी और $(\sqrt{3} + 1)$ सेमी हैं, तब त्रिभुज का सबसे छोटा कोण है

(a) 30° (b) 45°
(c) 60° (d) 75°

83. त्रिभुज ABC में, $\frac{\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} =$

(a) $\frac{a-b}{a+b}$ (b) $\frac{a-b}{c}$
(c) $\frac{a-b}{a+b+c}$ (d) $\frac{c}{a+b}$

84. यदि किसी त्रिभुज ABC में भुजा $a = (\sqrt{3} + 1)$ सेमी तथा $\angle B = 30^\circ, \angle C = 45^\circ$, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है [MP PET 1997]

(a) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ सेमी (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ सेमी
(c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ सेमी (d) $\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{2}}$ सेमी

85. यदि किसी समकोण त्रिभुज में विकर्ण की लम्बाई उस पर सम्मुख शीर्ष से डाले गए लम्ब की लम्बाई की चार गुनी है, तो उसका एक न्यूनकोण है [MP PET 1998, 2004; UPSEAT 2002]

(a) 15° (b) 30°
(c) 45° (d) इनमें से कोई नहीं

86. यदि $\triangle ABC$ में, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, तो $a + c\sqrt{2} =$ [MP PET 1999]
 (a) b (b) $2b$
 (c) $\sqrt{2}b$ (d) $\sqrt{3}b$
87. यदि किसी त्रिभुज की भुजायें 3, 5 और 7 हों, तो त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण होगा [IIT Screening 1994; Kerala (Engg.) 2002]
 (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$
 (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$
88. यदि किसी $\triangle ABC$ में, $\angle C = 45^\circ$. तब $(1 + \cot A)(1 + \cot B)$ का मान होगा [Kurukshetra CEE 1998]
 (a) -1 (b) 2
 (c) 3 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
89. त्रिभुज ABC की संख्या, जो $a = 3, b = 8$ तथा $\sin A = \frac{5}{13}$ से बनाया जा सके, है [Roorkee Qualifying 1998]
 (a) 0 (b) 1
 (c) 2 (d) 3
90. किसी $\triangle ABC$ में, $2ac \sin \left(\frac{A - B + C}{2} \right)$ का मान होगा [IIT Screening 2000]
 (a) $a^2 + b^2 - c^2$ (b) $c^2 + a^2 - b^2$
 (c) $b^2 - c^2 - a^2$ (d) $c^2 - a^2 - b^2$
91. किसी $\triangle ABC$ में, यदि कोण C पर समकोण हो, तो $\tan A + \tan B$ का मान होगा [Pb. CET 1990; Karnataka CET 1999; MP PET 2001]
 (a) $a + b$ (b) $\frac{a^2}{bc}$
 (c) $\frac{b^2}{ac}$ (d) $\frac{c^2}{ab}$
92. किसी $\triangle ABC$ में, यदि $A : B : C = 3 : 5 : 4$. तब $[a + b + c\sqrt{2}]$ का मान होगा [DCE 2001]
 (a) $2b$ (b) $2c$
 (c) $3b$ (d) $3a$
93. किसी $\triangle ABC$ में, $\frac{\cos C + \cos A}{c + a} + \frac{\cos B}{b} =$ [EAMCET 2001]
 (a) $\frac{1}{a}$ (b) $\frac{1}{b}$
 (c) $\frac{1}{c}$ (d) $\frac{c + a}{b}$
94. यदि किसी त्रिभुज के कोण $1 : 3 : 5$ के अनुपात में हों, तो त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण होगा [Kerala (Engg.) 2002]
 (a) $\frac{5\pi}{9}$ (b) $\frac{2\pi}{9}$
 (c) $\frac{7\pi}{9}$ (d) $\frac{11\pi}{9}$
95. किसी त्रिभुज में $AB = 2, BC = 4, CA = 3$ तथा D , BC का मध्य बिन्दु हो, तो सत्य कथन होगा [Roorkee 1995]
 (a) $\cos B = \frac{11}{6}$ (b) $\cos B = \frac{7}{8}$
 (c) $AD = 2.4$ (d) $AD^2 = 2.5$
96. यदि किसी त्रिभुज के कोणों में $4 : 1 : 1$ का अनुपात हो, तो त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा तथा परिमाप का अनुपात होगा [IIT Screening 2003]
 (a) $\sqrt{3} : (2 + \sqrt{3})$ (b) $1 : 6$
 (c) $1 : (2 + \sqrt{3})$ (d) $2 : 3$
97. यदि किसी $\triangle ABC$ में, $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ समान्तर श्रेणी में हों, तो [MP PET 2003]
 (a) $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} = 4$ (b) $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3$
 (c) $\cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = 1$ (d) $\cot \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 0$
98. $\triangle ABC$ का न्यूनतम कोण, जबकि $a = 7, b = 4\sqrt{3}$ तथा $c = \sqrt{13}$ है, होगा [MP PET 2003]
 (a) 30° (b) 15°
 (c) 45° (d) इनमें से कोई नहीं
99. किसी $\triangle ABC$ में, यदि $\frac{b + c}{11} = \frac{c + a}{12} = \frac{a + b}{13}$, तब $\cos C =$ [Karnataka CET 2003]
 (a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{5}{7}$
 (c) $\frac{17}{36}$ (d) $\frac{16}{17}$
100. किसी $\triangle ABC$ में, यदि $b = 20, c = 21$ तथा $\sin A = \frac{3}{5}$, तब $a =$ [EAMCET 2003]
 (a) 12 (b) 13
 (c) 14 (d) 15
101. माना एक त्रिभुज ABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D है। यदि त्रिभुज ADC समबाहु है, तब $a^2 : b^2 : c^2$ का मान है [Pb. CET 2004]
 (a) $1 : 4 : 3$ (b) $4 : 1 : 3$
 (c) $4 : 3 : 1$ (d) $3 : 4 : 1$
102. त्रिभुज ABC की भुजाओं का अनुपात $1 : \sqrt{3} : 2$ है, तो $A : B : C$ है [IIT Screening 2004]
 (a) $3 : 5 : 2$ (b) $1 : \sqrt{3} : 2$
 (c) $3 : 2 : 1$ (d) $1 : 2 : 3$
103. त्रिभुज ABC में, $b = \sqrt{3}$, $c = 1$ और $\angle A = 30^\circ$, तब त्रिभुज का महत्तम कोण होगा [MP PET 2004]
 (a) 135° (b) 90°
 (c) 60° (d) 120°
104. एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयाँ $\alpha - \beta, \alpha + \beta$ और $\sqrt{3\alpha^2 + \beta^2}$, ($\alpha > \beta > 0$) हैं, तो इसका सबसे बड़ा कोण है [Roorkee 1999]
 (a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$
 (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$
105. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 4, 5 और 6 सेमी हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है [UPSEAT 2004]
 (a) $\frac{15}{4}$ सेमी (b) $\frac{15}{4}\sqrt{7}$ सेमी
 (c) $\frac{4}{15}\sqrt{7}$ सेमी (d) इनमें से कोई नहीं

106. यदि α, β, γ एक त्रिभुज के कोण हैं, तब $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ का मान है
[Orissa JEE 2004]
(a) 2 (b) -1
(c) -2 (d) 0
107. यदि $\triangle ABC$ में, $a = 6, b = 3$ और $\cos(A - B) = \frac{4}{5}$, तब क्षेत्रफल होगा
[MP PET 2004]
(a) 7 वर्ग इकाई (b) 8 वर्ग इकाई
(c) 9 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं
108. $\triangle ABC$ में, यदि $2s = a + b + c$, तो $\frac{s(s-a)}{bc} - \frac{(s-b)(s-c)}{bc} =$
(a) $\sin A$ (b) $\cos A$
(c) $\tan A$ (d) इनमें से कोई नहीं
109. $\triangle ABC$ में यदि $a = 2, b = 4$ तथा $\angle C = 60^\circ$, तो $\angle A$ तथा $\angle B$ के मान होंगे
(a) $90^\circ, 30^\circ$ (b) $60^\circ, 60^\circ$
(c) $30^\circ, 90^\circ$ (d) $60^\circ, 45^\circ$
110. $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल किसके तुल्य है
[MP PET 1984]
(a) $\frac{1}{2} ab \sin A$ (b) $\frac{1}{2} bc \sin A$
(c) $\frac{1}{2} ca \sin A$ (d) $bc \sin A$
111. $\triangle ABC$ में यदि $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$, तो त्रिभुज है
[Roorkee 1987]
(a) समकोणीय (b) समद्विबाहु
(c) समकोणीय या समद्विबाहु (d) समकोणीय समद्विबाहु
112. $\triangle ABC$ में, $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : 2 : 3$. यदि $b = 4$ सेमी हो, तो त्रिभुज की परिमिति है
[MP PET 1986]
(a) 6 सेमी (b) 24 सेमी
(c) 12 सेमी (d) 8 सेमी
113. किसी त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात $5 : 12 : 13$ है और उसका क्षेत्रफल 270 वर्ग सेमी है, तब त्रिभुज की भुजायें (सेमी में) निम्न हैं
[MP PET 1989]
(a) 5, 12, 13 (b) 10, 24, 26
(c) 15, 36, 39 (d) 20, 48, 52
114. यदि $\triangle ABC$ में, $\cos A = \frac{\sin B}{2 \sin C}$, तो त्रिभुज है
[Orissa JEE 2002, 04; MP PET 2004]
(a) समबाहु (b) समद्विबाहु
(c) समकोणीय (d) इनमें से कोई नहीं
115. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 9 सेमी है। यदि बराबर भुजाओं में से प्रत्येक 6 सेमी लम्बाई की हो, तो उनके बीच का कोण है
[MP PET 1986]
(a) 60° (b) 30°
(c) 90° (d) 45°
116. यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयाँ 6, 10 तथा 14 सेमी हो, तो त्रिभुज है
[MP PET 1982]
(a) अधिककोणीय (b) न्यूनकोणीय
(c) समकोणीय (d) समबाहु
117. किसी $\triangle ABC$ में, यदि $a \cos B = b \cos A$, तो त्रिभुज है
[MP PET 1984]
(a) समबाहु त्रिभुज (b) समद्विबाहु त्रिभुज
(c) विषमबाहु त्रिभुज (d) समकोण त्रिभुज
118. त्रिभुज ABC में, यदि $a \sin A = b \sin B$ है, तब त्रिभुज की प्रकृति होगी
[MP PET 1983]
(a) $a > b$ (b) $a < b$
(c) $a = b$ (d) $a + b = c$
119. यदि त्रिभुज ABC में, $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$, तो त्रिभुज है
[IIT 1984]
(a) समद्विबाहु (b) समबाहु
(c) समकोण (d) इनमें से कोई नहीं
120. यदि त्रिभुज ABC में, भुजायें AB तथा AC परस्पर लम्बवत् हैं तो सही समीकरण है
(a) $\tan A + \tan B = 0$ (b) $\tan B + \tan C = 0$
(c) $\tan A + 2 \tan C = 0$ (d) $\tan B \cdot \tan C = 1$
121. त्रिभुज, जिसका एक कोण 120° का है, की भुजायें समान्तर श्रेणी में हैं। यदि सबसे बड़ी भुजा की लम्बाई 7 सेमी हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है
(a) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ सेमी (b) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ सेमी
(c) $\frac{15}{4}$ सेमी (d) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ सेमी
122. यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ है, तो $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A$ का मान है
[WB JEE 1988]
(a) 3Δ (b) 2Δ
(c) 4Δ (d) -4Δ
123. किसी समकोण त्रिभुज में $AC = BC$ व D, AC का मध्य बिन्दु है, तो कोण DBC की कोटिज्या (Cotangent) होगी
(a) 2 (b) 3
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$
124. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाएँ a, b, c तथा कोण A, B, C हैं, तब $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$ का मान है
[MP PET 1994]
(a) $\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ (b) $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
(c) $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ (d) $\sqrt{\frac{(s-a)s}{(s-b)(s-c)}}$
125. किसी त्रिभुज ABC में, $a(b^2 + c^2) \cos A + b(c^2 + a^2) \cos B + c(a^2 + b^2) \cos C$ का मान है
[MP PET 1994]
(a) $3abc^2$ (b) $3a^2bc$
(c) $3abc$ (d) $3ab^2c$
126. किसी त्रिभुज ABC में AD , बिन्दु A से डाला गया लम्ब है। दिया गया है $b > c$, $\angle C = 23^\circ$ तथा $AD = \frac{abc}{b^2 - c^2}$, तो $\angle B =$
[IIT 1994]
(a) 67° (b) 44°
(c) 113° (d) इनमें से कोई नहीं
127. यदि त्रिभुज ABC में, $\angle A = 60^\circ$, $a = 5, b = 4\sqrt{3}$ तो $B =$
(a) 30° (b) 60°
(c) 90° (d) इनमें से कोई नहीं
128. यदि $\Delta = a^2 - (b - c)^2$, जहाँ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ है, तब $\tan A =$
[Pb. CET 1990; Kerala (Engg.) 2005]

- (a) $\frac{15}{16}$ (b) $\frac{8}{15}$
(c) $\frac{8}{17}$ (d) $\frac{1}{2}$
129. यदि $c^2 = a^2 + b^2$, तब $4s(s-a)(s-b)(s-c) =$ [EAMCET 1986; Pb. CET 1990]
(a) s^4 (b) b^2c^2
(c) c^2a^2 (d) a^2b^2
130. यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C से डाले गये लम्ब क्रमशः p_1, p_2, p_3 हैं तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ है, तब $p_1^{-2} + p_2^{-2} + p_3^{-2}$ का मान है
(a) $\frac{a+b+c}{\Delta}$ (b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta^2}$
(c) $\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
131. यदि ΔABC की A से होकर जाने वाली माधिका AB पर लम्ब है, तब
(a) $\tan A + \tan B = 0$ (b) $2 \tan A + \tan B = 0$
(c) $\tan A + 2 \tan B = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं
132. यदि A त्रिभुज का क्षेत्रफल है तथा $2s$ त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योगफल है, तब
(a) $A \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ (b) $A \leq \frac{s^2}{2}$
(c) $A > \frac{s^2}{\sqrt{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं
133. यदि किसी ΔABC में जो B पर समकोण है व $s-a=3$, $s-c=2$ है, तब a तथा c के मान क्रमशः हैं
(a) 2, 3 (b) 3, 4
(c) 4, 3 (d) 6, 8
134. यदि त्रिभुज ABC तथा DEF में, $AB = DE$, $AC = EF$ तथा $\angle A = 2\angle E$, तब दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होगा यदि कोण A =
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$
(c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$
135. हमें b, c तथा $\sin B$ इस प्रकार दिया गया है कि B एक न्यूनकोण है तथा $b < c \sin B$ तब [Karnataka CET 1993]
(a) कोई त्रिभुज सम्भव नहीं है (b) एक त्रिभुज सम्भव है
(c) दो त्रिभुज सम्भव हैं (d) एक समकोण त्रिभुज सम्भव है
136. त्रिभुज की भुजाएँ $3x+4y$, $4x+3y$ तथा $5x+5y$ इकाई हैं {जहाँ $x, y > 0$ }, तब त्रिभुज है [AIEEE 2002]
(a) समकोण (b) समबाहु
(c) अधिककोण (d) इनमें से कोई नहीं
137. किसी ΔABC में a, c तथा A दिए गए हैं तथा तृतीय भुजा c के दो मान b_1, b_2 इस प्रकार हैं कि $b_2 = 2b_1$, तब $\sin A =$
(a) $\sqrt{\frac{9a^2 - c^2}{8a^2}}$ (b) $\sqrt{\frac{9a^2 - c^2}{8c^2}}$
(c) $\sqrt{\frac{9a^2 + c^2}{8a^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं
138. ΔABC में, a, b तथा A दिए गए हैं तथा तीसरी भुजा c के दो मान c_1, c_2 हैं, तो भुजाओं a, b, c_1 तथा a, b, c_2 वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग है
(a) $\frac{1}{2}b^2 \sin 2A$ (b) $\frac{1}{2}a^2 \sin 2A$
(c) $b^2 \sin 2A$ (d) इनमें से कोई नहीं
139. यदि एक त्रिभुज ABC में, $2 \cos A = \sin B \operatorname{cosec} C$, तो [MP PET 1996]
(a) $a = b$ (b) $b = c$
(c) $c = a$ (d) $2a = bc$
140. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 3, 5, 7 हों, तो [MP PET 1996]
(a) इसके समस्त कोण न्यूनकोण है
(b) इसका एक कोण अधिककोण है
(c) यह समकोण त्रिभुज है
(d) इनमें से कोई नहीं
141. यदि $A+B+C = 180^\circ$, तो $\tan A + \tan B + \tan C =$
(a) $\frac{a+b+c}{abc}$
(b) 0
(c) $\tan A \tan B \tan C$
(d) $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A$
142. त्रिभुज PQR में, $\angle R = \pi/2$. यदि $\tan(P/2)$ तथा $\tan(Q/2)$ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) के मूल हैं, तो [IIT 1999; MP PET 2000; AIEEE 2005]
(a) $a+b=c$ (b) $b+c=a$
(c) $a+c=b$ (d) $b=c$
143. यदि ΔPQR में, $\sin P, \sin Q, \sin R$ समान्तर श्रेणी में हों, तो [IIT 1998]
(a) शीर्षलम्ब समान्तर श्रेणी में होंगे
(b) शीर्षलम्ब हरात्मक श्रेणी में होंगे
(c) माधिकायें गुणोत्तर श्रेणी में होंगी
(d) माधिकायें समान्तर श्रेणी में होंगी
144. किसी ΔABC में, यदि $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$, तब a^2, b^2, c^2 होंगे [Pb. CET 2001; Karnataka CET 1999]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में
(c) हरात्मक श्रेणी में (d) इनमें से कोई नहीं
145. यदि ΔABC में, a, b, c तथा कोण A दिये गये हैं तथा $c \sin A < a < c$, तब [UPSEAT 1999]
(a) $b_1 + b_2 = 2c \cos A$ (b) $b_1 + b_2 = c \cos A$
(c) $b_1 + b_2 = 3c \cos A$ (d) $b_1 + b_2 = 4c \sin A$
146. किसी ΔABC में, $a^2 \sin 2C + c^2 \sin 2A =$ [EAMCET 2001]
(a) Δ (b) 2Δ
(c) 3Δ (d) 4Δ
147. ΔABC में, $a^2 + b^2 + c^2 = ac + ab\sqrt{3}$, तब त्रिभुज है [MP PET 2004]
(a) समबाहु (b) समद्विबाहु
(c) समकोणीय (d) इनमें से कोई नहीं
148. यदि $a=1, b=2, \angle C=60^\circ$, तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है [MP PET 2004]
(a) $1/2$ (b) $\sqrt{3}$
(c) $\sqrt{3}/2$ (d) $3/2$
149. एक ΔABC में, यदि $b+c=2a$ और $\angle A=60^\circ$, तब ΔABC है [MP PET 2004]
(a) विषमबाहु (b) समबाहु
(c) समद्विबाहु (d) समकोण त्रिभुज
150. यदि ΔABC में, शीर्ष A, B, C से सममुख भुजा पर डाले गये लम्ब हरात्मक श्रेणी में हैं तो $\sin A, \sin B, \sin C$ होंगे [AIEEE 2005]
(a) समान्तर श्रेणी में (b) हरात्मक श्रेणी में
(c) गुणोत्तर श्रेणी में (d) समान्तर श्रेणी में

151. यदि त्रिभुज की भुजायें a , b और c इस प्रकार हों, कि $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$. तब भुजा c के सम्मुख कोण है

[J & K 2005]

- (a) 45° या 135° (b) 30° या 100°
(c) 50° या 100° (d) 60° या 120°

152. $\triangle ABC$ में यदि भुजाएँ $a = 3, b = 5$ और $c = 4$, तब

$\sin \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2}$ का मान है

[Karnataka CET 2005]

- (a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (d) 1

153. $\triangle ABC$ के लिये निम्न में से कौन सा सही है [IIT Screening 2005]

- (a) $(b+c)\sin \frac{B-C}{2} = 2a \cos \frac{A}{2}$
(b) $(b+c)\cos \frac{A}{2} = 2a \sin \frac{B-C}{2}$
(c) $(b-c)\cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}$
(d) $(b-c)\sin \frac{B-C}{2} = 2a \cos \frac{A}{2}$

154. यदि बिन्दुओं $A(a, b)$ और $B(c, d)$ को मिलाने वाली रेखा का अंतःखण्ड मूल बिन्दु O पर θ कोण अंतरित करता है, तब $\cos \theta$ का मान है

[IIT 1961]

- (a) $\frac{ab+cd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$ (b) $\frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$
(c) $\frac{ac-bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

155. $\triangle ABC$, एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसके लिए $\angle B = 90^\circ$. यदि AB पर एक बिन्दु D इस प्रकार है, कि $\angle DCB = 15^\circ$ और यदि $AD = 35$ सेमी, तब $CD =$

[Kerala (Engg.) 2005]

- (a) $35\sqrt{2}$ सेमी (b) $70\sqrt{2}$ सेमी
(c) $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ सेमी (d) $35\sqrt{6}$ सेमी
(e) $\frac{35\sqrt{2}}{2}$ सेमी

156. यदि एक त्रिभुज ABC में $a = 5, b = 4, A = (\pi/2) + B$, तब C है

[Kerala (Engg.) 2005]

- (a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$
(b) $\tan^{-1} \frac{1}{40}$
(c) मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है
(d) $2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$
(e) $2 \tan^{-1} \frac{1}{40}$

- (a) s^2 (b) $ab + bc + ca$
(c) Δ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $\triangle ABC$ में, $b = 6, c = 8$ तथा $\angle A = 90^\circ$, तो $R =$

- (a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 7

3. यदि त्रिभुज की भुजायें $3 : 7 : 8$ के अनुपात में हैं, तब $R : r =$

- (a) $2 : 7$ (b) $7 : 2$
(c) $3 : 7$ (d) $7 : 3$

4. यदि त्रिभुज की भुजायें 13, 14, 15 हों, तब इसके अन्तःवृत्त की त्रिज्या है

[EAMCET 1987]

- (a) $\frac{67}{8}$ (b) $\frac{65}{4}$
(c) 4 (d) 24

5. त्रिभुज की अन्तः त्रिज्या, जिसकी भुजायें 3, 5, 6 हैं, है

[EAMCET 1982]

- (a) $\sqrt{8/7}$ (b) $\sqrt{8}$
(c) $\sqrt{7}$ (d) $\sqrt{7/8}$

6. $2\sqrt{3}$ सेमी भुजा के एक समबाहु त्रिभुज की परित्रिज्या होगी

[EAMCET 1978]

- (a) 1 सेमी (b) $\sqrt{3}$ सेमी
(c) 2 सेमी (d) $2\sqrt{3}$ सेमी

7. समबाहु त्रिभुज में, अन्तःत्रिज्या व परित्रिज्या के बीच सम्बन्ध होता है

[EAMCET 1983]

- (a) $r = 4R$ (b) $r = R/2$
(c) $r = R/3$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. किसी त्रिभुज ABC में, $a \cot A + b \cot B + c \cot C =$

- (a) $r + R$ (b) $r - R$
(c) $2(r + R)$ (d) $2(r - R)$

9. यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज PQR के परिवृत्त की त्रिज्या $PQ (= PR)$ हो, तो कोण P का मान है

[IIT Screening 1992; Pb. CET 2004]

- (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

10. एक त्रिभुज ABC में, $a : b : c = 4 : 5 : 6$ है। परिवृत्त की त्रिज्या का अंतःवृत्त की त्रिज्या से अनुपात होगा

[IIT 1996]

- (a) $\frac{16}{9}$ (b) $\frac{16}{7}$
(c) $\frac{11}{7}$ (d) $\frac{7}{16}$

11. निम्न में से कौन सा कथन सत्य है

[UPSEAT 1999]

- (a) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = R \sin A \sin B \sin C$
(b) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2R \sin A \sin B \sin C$
(c) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$
(d) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 8R \sin A \sin B \sin C$

12. यदि a, b तथा c लम्बाई की भुजाओं पर शीर्षों से डाले गये लम्ब

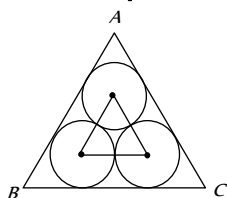
क्रमशः x, y तथा z हों, तो $\frac{bx}{c} + \frac{cy}{a} + \frac{az}{b}$ का मान होगा

[UPSEAT 1999]

त्रिभुजों से सम्बद्ध वृत्त

1. $\triangle ABC$ में, $2R^2 \sin A \sin B \sin C =$

13. यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रमशः 3, 4 तथा 5 इकाई हों, तो परित्रिज्या R का मान होगा [UPSEAT 2000]
- (a) 2.0 इकाई (b) 2.5 इकाई
(c) 3.0 इकाई (d) 3.5 इकाई
14. यदि किसी $\triangle ABC$ में, परिवृत्त की त्रिज्या R तथा क्षेत्रफल Δ हो, तो [Karnataka CET 2000]
- (a) $R = \frac{a+b+c}{\Delta}$ (b) $R = \frac{a+b+c}{4\Delta}$
(c) $R = \frac{abc}{4\Delta}$ (d) $R = \frac{abc}{\Delta}$
15. n भुजाओं वाले समबहुभुज, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है, से बनने वाले अंतःवृत्त व परिवृत्त की त्रिज्याओं का योगफल होगा [AIEEE 2003]
- (a) $a \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (b) $\frac{a}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
(c) $a \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ (d) $\frac{a}{2} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$
16. किसी $\triangle ABC$ में, $r_1 < r_2 < r_3$, तब [EAMCET 2003]
- (a) $a < b < c$ (b) $a > b > c$
(c) $b < a < c$ (d) $a < c < b$
17. त्रिभुज के अन्तःवृत्त की त्रिज्या क्या होगी, यदि त्रिभुज की भुजायें क्रमशः 18, 24 और 30 सेमी हैं [Pb. CET 2004]
- (a) 2 सेमी (b) 4 सेमी
(c) 6 सेमी (d) 9 सेमी
18. यदि त्रिभुज की भुजायें $5K, 6K, 5K$ हैं और त्रिभुज के अंतःवृत्त की त्रिज्या 6 है, तो K का मान है [Pb. CET 2004]
- (a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 7
19. $\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a+b+c} =$ [Orissa JEE 2004]
- (a) $1/r$ (b) r/R
(c) R/r (d) $1/R$
20. $\triangle ABC$ में, यदि $b = 2, B = 30^\circ$ तो त्रिभुज ABC के परिवृत्त का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) है [Karnataka CET 2004]
- (a) π (b) 2π
(c) 4π (d) 6π
21. त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या क्या होगी यदि त्रिभुज की भुजायें 13, 12 और 15 हैं [Karnataka CET 2005]
- (a) 15 (b) $13/2$
(c) $15/2$ (d) 6
22. उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा जिसमें इकाई त्रिज्या वाले तीन सिक्के चित्रानुसार समाहित हो जाते हैं [IIT Screening 2005]
- (a) $6 + 4\sqrt{3}$ वर्ग इकाई
(b) $8 + \sqrt{3}$ वर्ग इकाई
(c) $4 + \frac{7\sqrt{3}}{2}$ वर्ग इकाई
(d) $12 + 2\sqrt{3}$ वर्ग इकाई



ऊँचाई एवं दूरी

1. भूमि के एक बिन्दु पर एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ओर 20 मीटर चलने पर उन्नयन कोण 60° हो जाता हो, तो मीनार की ऊँचाई है [MNR 1975; IIT 1967]
- (a) 10 मीटर (b) $10/\sqrt{3}$ मीटर
(c) $10\sqrt{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
2. एक मीनार के पाद से d मीटर दूरी पर स्थित बिन्दु पर मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई 20 मीटर हो, तो d का मान है [MP PET 1982, 88]
- (a) $10\sqrt{3}$ मी (b) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ मी
(c) $20\sqrt{3}$ मी (d) 10 मी
3. एक मीनार के सिरे का भूमि पर त्रिभुज बनाने वाले तीन बिन्दुओं A, B, C में से प्रत्येक से उन्नयन कोण समान तथा α के बराबर है। यदि त्रिभुज ABC की परित्रिज्या R है, तब मीनार की ऊँचाई है [EAMCET 1994]
- (a) $R \sin \alpha$ (b) $R \cos \alpha$
(c) $R \cot \alpha$ (d) $R \tan \alpha$
4. किसी मीनार से दक्षिण की ओर स्थित किसी बिन्दु A पर उसके शीर्ष का उन्नयन कोण α है तथा मीनार से पूर्व की ओर स्थित बिन्दु B पर उन्नयन कोण β है। यदि $AB = d$, तो मीनार की ऊँचाई है [Roorkee 1979; Kurukshetra CEE 1998]
- (a) $\frac{d}{\sqrt{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}}$ (b) $\frac{d}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}}$
(c) $\frac{d}{\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta}}$ (d) $\frac{d}{\sqrt{\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta}}$
5. एक व्यक्ति जो नदी के किनारे खड़ा है, नदी के दूसरे किनारे पर स्थित एक वृक्ष का उन्नयन कोण 60° पाता है। जब वह किनारे से 40 मीटर पीछे हटता है, तो कोण 30° हो जाता है। नदी की चौड़ाई है [IIT 1975; AIEEE 2004]
- (a) 20 मीटर (b) 40 मीटर
(c) 30 मीटर (d) 60 मीटर
6. एक ऊर्ध्वाधर छड़ के दो भाग हैं, निचला भाग सम्पूर्ण ऊँचाई का एक-तिहाई है। छड़ के आधार से जाने वाले क्षैतिज समतल में छड़ से 20 मीटर दूर स्थित एक बिन्दु पर छड़ का ऊपरी भाग जो कोण अन्तरित करता है उसकी स्पर्शज्या $\frac{1}{2}$ है, तो छड़ की सम्भावित लम्बाई है [IIT 1964]
- (a) 20 मीटर तथा $20\sqrt{3}$ मीटर
(b) 20 मीटर तथा 60 मीटर
(c) 16 मीटर तथा 48 मीटर
(d) इनमें से कोई नहीं
7. किसी 60 मीटर ऊँची मीनार से एक घर की चोटी व तल के अवनमन कोण क्रमशः α व β हों और यदि घर की ऊँचाई $\frac{60 \sin(\beta - \alpha)}{x}$ हो, तो $x =$
- (a) $\sin \alpha \sin \beta$ (b) $\cos \alpha \cos \beta$
(c) $\sin \alpha \cos \beta$ (d) $\cos \alpha \sin \beta$
8. किसी वृक्ष के शीर्ष से एक व्यक्ति वृक्ष की ओर गतिमान कार का उन्नयन कोण 30° पाता है। 3 मिनट बाद वह कोण 60° हो जाता है, तब कितने समय बाद कार वृक्ष तक पहुँच जायेगी
- (a) 4 मिनट (b) 4.5 मिनट
(c) 1.5 मिनट (d) 2 मिनट
9. 100 मीटर ऊँचाई वाला एक मकान समाने के एक मकान की खिड़की पर समकोण अन्तरित करता है। यदि जमीन से खिड़की की ऊँचाई 64 मीटर हो, तो दोनों मकानों के बीच की दूरी है
- (a) 48 मीटर (b) 36 मीटर
(c) 54 मीटर (d) 72 मीटर

10. जब सूर्य का उन्नयन कोण 38° है तो ऊर्ध्वाधर से सूर्य की ओर 10 के कोण पर झुके एक खम्बे की छाया की लम्बाई 2.05 मीटर है। खम्बे की ऊँचाई है [Roorkee 1976]
- (a) $\frac{2.05 \sin 38^\circ}{\sin 42^\circ}$ (b) $\frac{2.05 \sin 42^\circ}{\sin 38^\circ}$
- (c) $\frac{2.05 \cos 38^\circ}{\cos 42^\circ}$ (d) इनमें से कोई नहीं
11. एक मीनार के आधार से 20 मीटर दूरी पर स्थित बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई होगी [MP PET 1984, 89]
- (a) 10 मीटर (b) 20 मीटर
- (c) 40 मीटर (d) $20\sqrt{3}$ मीटर
12. दो मीनारों के बीच की क्षैतिज दूरी 60 मीटर है तथा प्रथम मीनार के शीर्ष का दूसरी मीनार के शीर्ष से अवनमन कोण 30° है। यदि दूसरी मीनार की ऊँचाई 150 मीटर हो, तो पहली मीनार की ऊँचाई है
- (a) $150 - 60\sqrt{3}$ मीटर (b) 90 मीटर
- (c) $150 - 20\sqrt{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
13. एक 60 मीटर ऊँचे प्रकाश स्तम्भ, जिसका आधार समुद्र तल पर है, के शीर्ष से किसी नाव का अवनमन कोण 15° है। प्रकाश स्तम्भ के आधार से नाव की दूरी है [MNR 1988; IIT 1983; MP PET 1994, 2001; UPSEAT 2000]
- (a) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) 60$ मीटर (b) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) 60$ मीटर
- (c) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
14. नाव में बैठा एक व्यक्ति देखता है कि एक चट्टान के शिखर पर स्थित मीनार का उन्नयन कोण 60° है तथा चट्टान के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई 60 मीटर हो, तो चट्टान की ऊँचाई है [Roorkee 1982]
- (a) 30 मीटर (b) $60\sqrt{3}$ मीटर
- (c) $20\sqrt{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
15. एक मीनार अपने आधार की सतह में स्थित एक बिन्दु A पर α कोण अन्तरित करती है और A के ठीक 1 मीटर ऊपर स्थित एक बिन्दु पर मीनार के पाद का अवनमन कोण β है, तब मीनार की ऊँचाई है [MP PET 1990; RPET 1990]
- (a) $l \tan \beta \cot \alpha$ (b) $l \tan \alpha \cot \beta$
- (c) $l \tan \alpha \tan \beta$ (d) $l \cot \alpha \cot \beta$
16. एक मीनार के दक्षिण की ओर स्थित बिन्दु A पर मीनार का उन्नयन कोण 30° तथा पश्चिम की ओर स्थित बिन्दु B पर मीनार का उन्नयन कोण 45° है। यदि मीनार की ऊँचाई 100 मीटर हो, तो $AB =$
- (a) 150 मीटर (b) 200 मीटर
- (c) 173.2 मीटर (d) 141.4 मीटर
17. भूमि से 1 किमी ऊँचाई पर क्षैतिज तल में गतिमान किसी हवाई जहाज का उन्नयन कोण 60° देखा गया तथा 10 सेकण्ड बाद उन्नयन कोण 30° देखा गया। जहाज का एक समान वेग किमी/घण्टा में है [IIT 1965]
- (a) 240 (b) $240\sqrt{3}$
- (c) $60\sqrt{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं
18. एक झील से a मीटर ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु से किसी बादल का उन्नयन कोण α है तथा उसके प्रतिबिम्ब का अवनमन कोण β है। बादल की ऊँचाई है [Roorkee 1983; EAMCET 1983, 85]
- (a) $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$ मीटर (b) $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$ मीटर
- (c) $\frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
19. किसी मीनार के शिखर से भूमि पर स्थित किसी बिन्दु A का अवनमन कोण 30° है तो बिन्दु A से मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण होगा
- (a) 60° (b) 45°
- (c) 30° (d) इनमें से कोई नहीं
20. समान ऊँचाई के दो ऊर्ध्वाधर स्तम्भ एक दूसरे से 120 मीटर की दूरी पर स्थित हैं। उनके पादों को जोड़ने वाली रेखा पर A तथा B दो बिन्दु हैं। A से एक स्तम्भ के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है तथा B से दूसरे स्तम्भ के शिखर का उन्नयन कोण भी 45° है। यदि $AB = 30$ मीटर हो, तो प्रत्येक स्तम्भ की ऊँचाई है
- (a) 40 मीटर (b) 45 मीटर
- (c) 50 मीटर (d) 42 मीटर
21. h ऊँचाई की मीनार के पाद से $2h$ दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर मीनार तथा उसके शिखर पर स्थित एक डण्डा (pole) समान कोण अन्तरित करते हैं। तब डण्डे (pole) की ऊँचाई होनी चाहिये
- (a) $\frac{5h}{3}$ (b) $\frac{4h}{3}$
- (c) $\frac{7h}{5}$ (d) $\frac{3h}{2}$
22. एक मकान सामने वाले मकान की खिड़की पर समकोण अन्तरित करता है तथा पहले मकान के पाद से खिड़की का उन्नयन कोण 60° है। यदि दोनों मकानों के बीच की दूरी 6 मीटर हो, तो पहले मकान की ऊँचाई है [MNR 1978]
- (a) $6\sqrt{3}$ मीटर (b) $8\sqrt{3}$ मीटर
- (c) $4\sqrt{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
23. यदि किसी स्तम्भ की छाया (Shadow) उसकी ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है [MP PET 1991, 96]
- (a) 60° (b) 30°
- (c) 45° (d) 15°
24. एक सीढ़ी एक दीवार के सहारे इस प्रकार खड़ी है कि इसका शिखर मकान की छत तक पहुँच रहा है। यदि सीढ़ी क्षैतिज के साथ 60° का कोण बनाती हो और मकान की ऊँचाई $6\sqrt{3}$ मीटर हो, तो सीढ़ी की लम्बाई है
- (a) $12\sqrt{3}$ मीटर (b) 12 मीटर
- (c) $12/\sqrt{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
25. दो मीनारों के पादों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से मीनारों के शिखरों के उन्नयन कोण क्रमशः 60° तथा 30° हों, तो मीनारों की ऊँचाईयों का अनुपात है [EAMCET 1987]
- (a) 2 : 1 (b) 1 : $\sqrt{2}$
- (c) 3 : 1 (d) 1 : $\sqrt{3}$
26. भूमि पर स्थित एक बिन्दु पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण की कोटिज्या (cotangent) $3/5$ है। मीनार की ओर 32 मीटर चलने पर उन्नयन कोण की कोटिज्या (Cotangent) $2/5$ रह जाती है मीनार की ऊँचाई है

- (a) 160 मीटर (b) 120 मीटर
(c) 64 मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
27. 20 मीटर ऊँचे एक पेड़ का कुछ भाग आँधी से टूट जाता है तथा शिखर भूमि से 30° के कोण पर टकराता है। जिस बिन्दु से पेड़ टूटा था उसकी ऊँचाई है [MNR 1974]
(a) 10 मीटर (b) $(2\sqrt{3} - 3) 20$ मीटर
(c) $\frac{20}{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
28. एक पहाड़ी का आधार वृत्ताकार है आधार के एक व्यास के सिरे से पहाड़ी की चोटी के उन्नयन कोण 30° तथा 60° हैं। यदि पहाड़ी की ऊँचाई 500 मीटर हो, तो पहाड़ी के आधार का व्यास है
(a) $1000\sqrt{3}$ मीटर (b) $\frac{2000}{\sqrt{3}}$ मीटर
(c) $\frac{1000}{\sqrt{3}}$ मीटर (d) $2000\sqrt{2}$ मीटर
29. एक मकान के शिखर से एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और पाद का अवनमन कोण 30° है। यदि मकान तथा मीनार के बीच की क्षैतिज दूरी 12 मीटर हो, तो टॉवर की ऊँचाई है
(a) $48\sqrt{3}$ मीटर (b) $16\sqrt{3}$ मीटर
(c) $24\sqrt{3}$ मीटर (d) $16/\sqrt{3}$ मीटर
30. एक मनुष्य, जिसकी आँख भूमि से 1.5 मीटर की ऊँचाई पर है, एक मीनार का उन्नयन कोण 60° देखता है। यदि मीनार से मनुष्य की दूरी 10 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई है
(a) $(1.5 + 10\sqrt{3})$ मीटर (b) $10\sqrt{3}$ मीटर
(c) $\left(1.5 + \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
31. किसी मीनार के आधार से d मीटर दूर स्थित बिन्दु पर मीनार 30° का कोण अन्तरित करती है। प्रथम बिन्दु से उर्ध्वाधरतः h मीटर ऊपर की ओर स्थित दूसरे बिन्दु पर मीनार के पाद का अवनमन कोण 60° है, तो मीनार की ऊँचाई है [MP PET 1993]
(a) $\frac{h}{3}$ (b) $\frac{h}{3d}$
(c) $3h$ (d) $\frac{3h}{d}$
32. b ऊँचाई की एक मीनार आधार से ' a ' दूरी पर स्थित किसी बिन्दु O पर कोई कोण अन्तरित करती है। यदि इस मीनार के ऊपर एक खम्भा (pole) लगा दिया जाए तो यह खम्भा भी बिन्दु O पर समान कोण अन्तरित करता है, तो खम्भा (pole) की ऊँचाई है [MP PET 1993, 2004]
(a) $b\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$ (b) $b\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$
(c) $a\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$ (d) $a\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$
33. एक पेड़ हवा से टूट गया है इसका ऊपरी सिरा भूमि को, उसकी जड़ से 10 मीटर दूर स्पर्श करता है एवं भूमि से 45° का कोण अन्तरित करता है तो पेड़ की कुल ऊँचाई है [BIT Ranchi 1992]
(a) 15 मीटर (b) 20 मीटर
(c) $10(1 + \sqrt{2})$ मीटर (d) $10\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ मीटर
34. 30 मीटर ऊँची मीनार की चोटी से एक जहाज का अवनमन कोण 60° है तो मीनार के आधार से जहाज की दूरी है [MP PET 1988; Pb. CET 2003]
(a) 30 मीटर (b) $30\sqrt{3}$ मीटर
- (c) $10\sqrt{3}$ मीटर (d) 10 मीटर
35. किसी झील से 2500 मीटर ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु से एक बादल का उन्नयन कोण 15° है एवं झील में इसके परावर्तन का अवनमन कोण 45° है, तो झील की सतह से बादल की ऊँचाई है [IIT 1976]
(a) $2500\sqrt{3}$ मीटर (b) 2500 मीटर
(c) $500\sqrt{3}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
36. एक हवाई जहाज, जो सीधी क्षैतिज सड़क के उर्ध्वाधरतः है, से दो मील के पथरों जो विपरीत दिशाओं में हैं, के अवनमन कोण क्रमशः α व β हैं, तो सड़क से हवाई जहाज की ऊँचाई मील में (in mile) है [MNR 1986; UPSEAT 1999]
(a) $\frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$ (b) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \cdot \tan \beta}$
(c) $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha \cdot \tan \beta}$ (d) $\frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$
37. एक गुब्बारे का सड़क पर स्थित तीन बिन्दुओं A, B व C से परीक्षण किया जाता है। B पर उन्नयन कोण A का दुगुना एवं C पर उन्नयन कोण A का तीन गुना है। यदि A व B के बीच की दूरी 200 मीटर तथा B व C के बीच की दूरी 100 मीटर है, तो गुब्बारे की सड़क से ऊँचाई है [Roorkee 1989]
(a) 50 मीटर (b) $50\sqrt{3}$ मीटर
(c) $50\sqrt{2}$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
38. एक ऊर्ध्वाधर खम्भे (100 मीटर से अधिक ऊँचा) के दो भाग हैं, जिसमें निचला भाग पूरे भाग का एक तिहाई है। यदि खम्भे के आधार से 40 फुट दूर क्षैतिज समतल में स्थिर किसी बिन्दु पर खम्भे का ऊपरी भाग $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ का कोण अन्तरित करे, तो खम्भे की ऊँचाई है [AMU 1981]
(a) 100 फुट (b) 120 फुट
(c) 150 फुट (d) इनमें से कोई नहीं
39. एक 20 मीटर ऊँचा झण्डा, एक मकान के शिखर पर लगा है एवं मकान के आधार से 70 मीटर दूर स्थित एक बिन्दु पर, यह $\tan^{-1} \frac{1}{6}$ का कोण अन्तरित करता है तो मकान की ऊँचाई है
(a) 30 मीटर (b) 60 मीटर
(c) 50 मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
40. एक गुब्बारा 4 मी/मि. की दर से नीचे आ रहा है एवं जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से इसका उन्नयन कोण 45° है, जो 10 मिनट बाद 30° रह जाता है, तो गुब्बारे की प्रेक्षक से ऊँचाई होगी
(a) $20\sqrt{3}$ मीटर (b) $20(3 + \sqrt{3})$ मीटर
(c) $10(3 + \sqrt{3})$ मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
41. नदी के किनारे पर खड़ा हुआ एक मनुष्य देखता है कि सम्मुख खड़ी किसी मीनार का उन्नयन कोण 45° का है। नीचे दिए गए कथनों में कौन सा सही है [MP PET 1994]
(a) नदी की चौड़ाई मीनार की ऊँचाई की दुगुनी है
(b) नदी की चौड़ाई तथा मीनार की ऊँचाई बराबर है
(c) नदी की चौड़ाई मीनार की ऊँचाई की आधी है
(d) इनमें से कोई कथन सही नहीं है
42. AB एक ऊर्ध्वाधर खम्भा है जो पृथ्वी सतह A पर खड़ा है। पृथ्वी सतह पर एक अन्य बिन्दु P इस प्रकार है कि $AP = 3 AB$ । यदि AB का मध्य बिन्दु C हो एवं CB, P पर β कोण अन्तरित करता हो, तो $\tan \beta$ का मान है [Bihar CEE 1994]

- (a) $\frac{18}{19}$ (b) $\frac{3}{19}$
(c) $\frac{1}{6}$ (d) इनमें से कोई नहीं
43. दो सीधी सड़कें एक दूसरे को 60° के कोण पर काटती हैं। एक सड़क पर एक बस जो कि सड़कों के कटान बिन्दु से 2 किमी दूर है तथा दूसरी सड़क पर एक कार जो कि कटान बिन्दु से 3 किमी दूर है, तो कार व बस के बीच में सीधी दूरी है [BIT Ranchi 1993]
(a) 1 किमी (b) $\sqrt{2}$ किमी
(c) 4 किमी (d) $\sqrt{7}$ किमी
44. यदि किसी मीनार के ऊपर 6 मीटर ऊँचाई का झण्डा समतल पर $2\sqrt{3}$ मीटर की छाया निर्मित करता है, तो सूर्य का उन्नयन कोण है [EAMCET 1990]
(a) 60° (b) 80°
(c) 75° (d) इनमें से कोई नहीं
45. भूमि पर एक बिन्दु A पर तथा A से 100 मीटर ऊर्ध्वाधर बिन्दु B पर एक चट्टान के उन्नयन कोण क्रमशः α तथा β हैं, तब चट्टान की ऊँचाई है [EAMCET 1986]
(a) $\frac{100 \cot \alpha}{\cot \alpha - \cot \beta}$ (b) $\frac{100 \cot \beta}{\cot \alpha - \cot \beta}$
(c) $\frac{100 \cot \beta}{\cot \beta - \cot \alpha}$ (d) $\frac{100 \cot \beta}{\cot \beta + \cot \alpha}$
46. एक 25 मीटर ऊँची इमारत के ऊपर 5 मीटर ऊँचा झंडा लगा है। 30 मीटर की ऊँचाई पर स्थित एक प्रेक्षक पर झंडा तथा इमारत समान कोण अन्तरित करते हैं। झंडे के शीर्ष से प्रेक्षक की दूरी है [EAMCET 1993]
(a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (b) $5\sqrt{\frac{3}{2}}$
(c) $5\sqrt{\frac{2}{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं
47. आँधी में टूटे हुये एक वृक्ष का ऊपरी सिरा जमीन से 30° का कोण बनाता है और वह बिन्दु जहाँ वृक्ष की चोटी जमीन को छूती है, वृक्ष के जड़ से 10 मीटर दूर है तो वृक्ष की पहले कितनी ऊँचाई थी
(a) 8.66 मी (b) 15 मी
(c) 17.32 मी (d) 25.98 मी
48. एक मीनार के आधार से 70 मीटर दूरी पर स्थित एक बिन्दु का उसके शिखर से अवनमन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई है [MP PET 1997]
(a) 70 मीटर (b) $70\sqrt{2}$ मीटर
(c) $\frac{70}{\sqrt{2}}$ मीटर (d) 35 मीटर
49. किसी मीनार CD के ठीक दक्षिण स्थित बिन्दु A पर चोटी D का उन्नयन कोण 60° है। A के ठीक पश्चिम स्थित बिन्दु B से उन्नयन कोण 30° है। यदि AB = 3 किलोमीटर, तो मीनार की ऊँचाई है [MP PET 1998]
(a) $2\sqrt{3}$ किमी (b) $2\sqrt{6}$ किमी
(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ किमी (d) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ किमी
50. एक व्यक्ति, $15(\sqrt{3} + 1)$ मीटर लम्बी मीनार पर खड़े होकर एक कार को, जो उसकी तरफ आ रही है, देखता है। यदि 3 सेकण्ड में कार का अवनमन कोण 30° से 45° हो जाता हो तो कार की चाल होगी [Karnataka CET 1998]
(a) 36 किमी/घंटा (b) 72 किमी/घंटा
(c) 18 किमी/घंटा (d) 30 किमी/घंटा
51. दो व्यक्ति एक मीनार की विपरीत दिशाओं में स्थित हैं तथा उनके द्वारा बनने वाले मीनार के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 30° हैं। यदि मीनार की ऊँचाई 40 मीटर हो तो व्यक्तियों के बीच की दूरी होगी [Karnataka CET 1998]
(a) 40 मीटर (b) $40\sqrt{3}$ मीटर
(c) 68.280 मीटर (d) 109.28 मीटर
52. किसी मीनार के शीर्ष (A) से, एक मकान, जिसकी ऊँचाई a है, के शीर्ष (B) तथा तल (D) से बनाये गये उन्नयन कोण क्रमशः 30° तथा 45° हैं। यदि मीनार एवं मकान के आधार एक ही तल में स्थित हों, तो मीनार की ऊँचाई होगी [Karnataka CET 2000]
(a) $a\sqrt{3}$ (b) $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$
(c) $\frac{a(3 + \sqrt{3})}{2}$ (d) $a(\sqrt{3} - 1)$
53. 5 मीटर लम्बाई की एक सीढ़ी किसी ऊर्ध्वाधर दीवार से किसी कोण पर झुकी है। सीढ़ी का पाद, दीवार से 3 मीटर की दूरी पर है। यदि सीढ़ी के पाद को दीवार से 1 मीटर दूर खींचते हैं तो सीढ़ी का शिखर निम्न लम्बाई से नीचे खिसक जायेगा [AMU 2000]
(a) 1 मीटर (b) 7 मीटर
(c) 2 मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
54. खम्बे के शीर्ष का भूमि तल पर स्थित किसी बिन्दु A पर उन्नयन कोण 15° है। खम्बे की ओर 40 मीटर चलने पर यह 30° हो जाता है, तो खम्बे की ऊँचाई होगी [MP PET 2001]
(a) 40 मीटर (b) 20 मीटर
(c) $20\sqrt{3}$ मीटर (d) $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ मीटर
55. एक पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण, एक भवन के शिखर तथा पाद से क्रमशः p तथा q देखे गये तब पहाड़ी की ऊँचाई होगी, जबकि भवन की ऊँचाई h है [UPSEAT 2001; EAMCET 1989]
(a) $\frac{h \cot q}{\cot q - \cot p}$ (b) $\frac{h \cot p}{\cot p - \cot q}$
(c) $\frac{h \tan p}{\tan p - \tan q}$ (d) इनमें से कोई नहीं
56. समतल मैदान पर स्थित एक मीनार की छाया उसकी ऊँचाई से 60 मीटर अधिक होती है। जब सूर्य का उन्नतांश 30° से 45° हो जाता है तो मीनार की ऊँचाई होगी [EAMCET 2001]
(a) 60 मी. (b) 30 मी.
(c) $60\sqrt{3}$ मी. (d) $30(\sqrt{3} + 1)$ मी.
57. मीनार के पाद से 500 मीटर की दूरी पर स्थित किसी बिन्दु का मीनार के शीर्ष पर उन्नयन कोण 30° हो, तो मीनार की ऊँचाई होगी [Kerala (Engg.) 2002]
(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{500}{\sqrt{3}}$
(c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{500}$
58. एक व्यक्ति पूर्व में स्थित किसी मंदिर के उच्चतम बिन्दु का उन्नयन कोण 60° पाता है। उत्तर की ओर 240 मीटर चलने पर उन्नयन कोण 30° रह जाता है, तो मंदिर की ऊँचाई होगी [MP PET 2003]
(a) $60\sqrt{6}$ मी. (b) 60 मी.

59. 80 मीटर ऊँचे एक स्तम्भ पर 20 मीटर ऊँचा एक झंडा लगा है स्तम्भ के आधार से 50 मीटर की दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर झण्डा α कोण अंतरित करता है, तो $\tan \alpha$ का मान होगा

[MP PET 2003]

- (a) $\frac{2}{11}$ (b) $\frac{2}{21}$
(c) $\frac{21}{2}$ (d) $\frac{21}{4}$
60. एक मीनार अपने आधार पर स्थित तीन समरेखीय बिन्दुओं A, B और C पर क्रमशः $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ कोण अंतरित करती है, तब $\frac{AB}{BC} =$

[EAMCET 2003]

- (a) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$ (b) $1 + 2 \cos 2\alpha$
(c) $2 + \cos 3\alpha$ (d) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$
61. दो खम्भे जो समान ऊँचाई के हैं, सड़क के दोनों किनारों पर खड़े हैं तथा उनके बीच की दूरी 60 मीटर है। दोनों खम्भों के बीच एक बिन्दु जो सड़क पर है उससे खम्भे के अवनमन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं। खम्भे की ऊँचाई है

[UPSEAT 2004]

- (a) $15\sqrt{3}$ मी (b) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ मी
(c) 15 मी (d) 20 मी
62. एक सीढ़ी क्षैतिज से α कोण बनाती हुई दीवार के सहारे खड़ी है। सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से दूर x सेमी खींचा जाता है तब सीढ़ी का ऊपरी सिरा दीवार के साथ y सेमी नीचे खिसक जाता है तथा सीढ़ी क्षैतिज के साथ कोण β बनाती है। सत्य सम्बन्ध है

[IIT 1985]

- (a) $x = y \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$ (b) $y = x \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$
(c) $x = y \tan(\alpha + \beta)$ (d) $y = x \tan(\alpha + \beta)$
63. जब सूर्य का उन्नयन कोण 30° से 60° का हो जाता है तब एक मीनार की छाया 60 मीटर कम हो जाती है। भूमि से मीनार की ऊँचाई लगभग होगी

[Kerala (Engg.) 2005]

- (a) 62 मीटर (b) 301 मीटर
(c) 101 मीटर (d) 75 मीटर
(e) 52 मीटर
64. $ABCD$ एक आयताकार खेत है। एक लैम्प पोस्ट शीर्ष ' A ' पर खड़ा है जिसकी ऊँचाई 12 मीटर है। यदि लैम्प पोस्ट के अवनमन कोण क्रमशः बिन्दु B से 60° और बिन्दु C से 45° है। तब खेत का क्षेत्रफल है

[Kerala (Engg.) 2005]

- (a) $48\sqrt{2}$ वर्ग मीटर (b) $48\sqrt{3}$ वर्ग मीटर
(c) 48 वर्ग मीटर (d) $12\sqrt{2}$ वर्ग मीटर
(e) $12\sqrt{3}$ वर्ग मीटर

1. $\sin x - 3 \sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3 \cos 2x + \cos 3x$ का व्यापक हल है [IIT 1989]

- (a) $n\pi + \frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
(c) $(-1)^n \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (d) $2n\pi + \cos^{-1} \frac{3}{2}$

2. यदि $5 \cos^2 \theta + 7 \sin^2 \theta - 6 = 0$, तो θ का व्यापक मान है

- (a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $\cos \theta + \cos 7\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta = 0$, तब $\theta =$

[Dhanbad Engg. 1972]

- (a) $\frac{n\pi}{4}$ (b) $\frac{n\pi}{2}$
(c) $\frac{n\pi}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ व $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, तो θ का मुख्य मान होगा [MP PET 1983, 84]

- (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$
(c) $\frac{7\pi}{6}$ (d) $-\frac{\pi}{6}$

5. $a \cos x + b \sin x = c$ का व्यापक हल है, जहाँ a, b, c नियतांक हैं

- (a) $x = n\pi + \cos^{-1} \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$
(b) $x = 2n\pi - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$
(c) $x = 2n\pi - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \pm \cos^{-1} \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$
(d) $x = 2n\pi + \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \pm \cos^{-1} \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

6. यदि $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$, तो θ का व्यापक मान है [IIT 1963]

- (a) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{10}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{2}$ या $\frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin 3x$, तब $x =$ [EAMCET 1989]

- (a) $\frac{n\pi}{3}$ (b) $n\pi + \frac{\pi}{3}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $\tan(\cot x) = \cot(\tan x)$, तो $\sin 2x =$

[MP PET 1999; Pb. CET 2001]

- (a) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{4}{(2n+1)\pi}$

- (c) $4\pi(2n+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं
9. समीकरण $(5 + 4 \cos \theta)(2 \cos \theta + 1) = 0$ का अंतराल $[0, 2\pi]$ में व्यापक हल होगा [EAMCET 2003]
- (a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi\right\}$
- (c) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ (d) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
10. यदि $1 + \sin x + \sin^2 x + \dots \infty$ तक $= 4 + 2\sqrt{3}$, $0 < x < \pi$, तो [DCE 2001]
- (a) $x = \frac{\pi}{6}$ (b) $x = \frac{\pi}{3}$
- (c) $x = \frac{\pi}{3}$ या $\frac{\pi}{6}$ (d) $x = \frac{\pi}{3}$ या $\frac{2\pi}{3}$
11. यदि समीकरण $\cos p\theta + \cos q\theta = 0$, $p > 0$, $q > 0$ के लिए हल समान्तर श्रेणी में हों, तो अंकिक रूप से न्यूनतम सार्वान्तर होगा [Kerala (Engg.) 2001]
- (a) $\frac{\pi}{p+q}$ (b) $\frac{2\pi}{p+q}$
- (c) $\frac{\pi}{2(p+q)}$ (d) $\frac{1}{p+q}$
12. समीकरण $a \sin x + b \cos x = c$, जहाँ $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, के हलों की संख्या है [DCE 1998]
- (a) 1 (b) 2
- (c) अनन्त (d) इनमें से कोई नहीं
13. (x, y) के कितने युग्म समीकरणों $\sin x + \sin y = \sin(x+y)$ तथा $|x| + |y| = 1$ को संतुष्ट करते हैं
- (a) 2 (b) 4
- (c) 6 (d) ∞
14. यदि त्रिभुज ABC की भुजाएँ a, b, c हैं तब निम्नलिखित में से कौन सी असमिका असत्य है [Kurukshetra CEE 1996]
- (a) $8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$
- (b) $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$
- (c) $6abc \leq bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)$
- (d) $abc \leq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
15. ΔABC में, $a(b \cos C - c \cos B) =$ [EAMCET 1981]
- (a) $a^2 - b^2$ (b) $b^2 - c^2$
- (c) $c^2 - a^2$ (d) $a^2 + b^2 + c^2$
16. एक मीनार AB का बिन्दु A भूमि पर है। C , AB का मध्य बिन्दु है तथा भाग CB भूमि पर स्थित बिन्दु P पर कोण α बनाता है। यदि $AP = n AB$, तो सत्य सम्बन्ध है [MNR 1989; IIT 1980]
- (a) $n = (n^2 + 1) \tan \alpha$ (b) $n = (2n^2 - 1) \tan \alpha$
- (c) $n^2 = (2n^2 + 1) \tan \alpha$ (d) $n = (2n^2 + 1) \tan \alpha$
17. ΔABC में, $\frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2} =$
- (a) s (b) $\frac{s}{abc}$
- (c) $\frac{s^2}{abc}$ (d) $\frac{s^3}{abc}$
18. ΔABC में, यदि $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}}$, तो [MP PET 1990]
- (a) $a^2 + b^2 = c^2$ (b) $b^2 + c^2 = a^2$
- (c) $c^2 + a^2 = b^2$ (d) $b - c = c - a$
19. त्रिभुज ABC में, $\tan \frac{A}{2} = \frac{5}{6}$ व $\tan \frac{C}{2} = \frac{2}{5}$, तो [EAMCET 1994]
- (a) a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं
- (b) $\cos A, \cos B, \cos C$ समान्तर श्रेणी में हैं
- (c) $\sin A, \sin B, \sin C$ समान्तर श्रेणी में हैं
- (d) (a) व (c) दोनों
20. किसी ΔABC में, यदि $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \sin B$, तब कोण C का मान होगा [AMU 1999]
- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
- (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$
21. यदि त्रिभुज के आधार के दो कोण $\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ व $\left(112\frac{1}{2}\right)^\circ$ हैं, तो त्रिभुज की ऊँचाई का उसके आधार की लम्बाई के साथ अनुपात है [MP PET 1993; Pb CET 2002]
- (a) 1 : 2 (b) 2 : 1
- (c) 2 : 3 (d) 1 : 1
22. यदि α, β समीकरण $a \cos x + b \sin x = c$, को संतुष्ट करने वाले x के भिन्न मान हैं, तब $\tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$ [EAMCET 1986; Orissa JEE 2003]
- (a) $a + b$ (b) $a - b$
- (c) $\frac{b}{a}$ (d) $\frac{a}{b}$
23. ΔABC में, यदि $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$, तो त्रिभुज है [Karnataka 1991; Pb. CET 1989]
- (a) समकोणीय (b) अधिककोणीय
- (c) समबाहु (d) समद्विबाहु
24. यदि त्रिभुज ABC का लम्ब AD , आधार BC को इस प्रकार बाँटता है कि BD, CD व AD क्रमशः 2, 3 व 6 के अनुपात में हैं, तो कोण A का मान है [MP PET 1993]
- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
- (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$
25. किसी त्रिभुज की दो बड़ी भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 10 सेमी तथा 9 सेमी हैं। यदि त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी में हों, तब तीसरी भुजा की लम्बाई सेमी में हो सकती है [MP PET 1990, 2001; IIT 1987; DCE 2001]
- (a) केवल $5 - \sqrt{6}$

- (b) केवल $5 + \sqrt{6}$
 (c) $5 - \sqrt{6}$ या $5 + \sqrt{6}$
 (d) न तो $5 - \sqrt{6}$ न ही $5 + \sqrt{6}$
26. किसी $\triangle ABC$ में, यदि $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, तब $a + c\sqrt{2} =$ [IIT 1988]
 (a) 0 (b) 1
 (c) b (d) $2b$
27. $\triangle ABC$ में, यदि $\sin A : \sin C = \sin(A - B) : \sin(B - C)$, तो
 (a) a, b, c समान्तर श्रेणी में होंगे
 (b) a^2, b^2, c^2 समान्तर श्रेणी में होंगे
 (c) a^2, b^2, c^2 गुणोत्तर श्रेणी में होंगे
 (d) इनमें से कोई नहीं
28. यदि $\triangle ABC$ में, $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$, तब $\cos A + \cos B + \cos C$ का मान है
 (a) $\frac{69}{48}$ (b) $\frac{96}{48}$
 (c) $\frac{48}{69}$ (d) इनमें से कोई नहीं
29. किसी $\triangle ABC$ में, यदि $a = 2x$, $b = 2y$ तथा $\angle C = 120^\circ$, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है [MP PET 1986, 2002]
 (a) xy (b) $xy\sqrt{3}$
 (c) $3xy$ (d) $2xy$
30. यदि $\triangle$ की भुजायें $(x^2 + x + 1), (2x + 1)$ तथा $(x^2 - 1)$ हों, तो सबसे बड़ा कोण है [EAMCET 1987; Kerala (Engg.) 2001]
 (a) 105° (b) 120°
 (c) 135° (d) इनमें से कोई नहीं
31. $\triangle ABC$ में, यदि $3a = b + c$, तो $\cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ का मान होगा [Pb. CET 2003; Roorkee 1986; MP PET 1990, 97, 98, 2003; EAMCET 2003; Orissa JEE 2005]
 (a) 1 (b) 2
 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}$
32. यदि $\triangle ABC$ में $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, तो त्रिभुज है
 (a) समकोणीय
 (b) समबाहु
 (c) न्यूनकोणीय
 (d) अधिककोणीय
33. किसी $\triangle ABC$ में, $\angle C = \frac{\pi}{2}$. यदि r तथा R किसी त्रिभुज की क्रमशः अंतः त्रिज्या एवं परित्रिज्या हों, तो $2(r + R)$ का मान होगा [IIT Screening 2000; AIEEE 2005]
 (a) $a + b$ (b) $b + c$
 (c) $c + a$ (d) $a + b + c$
34. एक मीनार एक क्षैतिज तल पर स्थित है। एक रेखा पर स्थित दो बिन्दु मीनार के आधार से a व b दूरी पर हैं। इन दो बिन्दुओं तथा मीनार के शीर्ष को मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण θ है तथा इन बिन्दुओं से मीनार के शीर्ष के उन्नयन कोण α तथा $(90^\circ - \alpha)$ हैं तो मीनार की ऊँचाई होगी [UPSEAT 1999]
 (a) $\frac{a+b}{a-b}$ (b) $\frac{a-b}{a+b}$
 (c) $\sqrt{ab}$ (d) $(ab)^{1/3}$
35. $AB = AC = 100$ मीटर का एक त्रिभुजाकार बगीचा ABC है। BC के मध्य बिन्दु पर एक घंटाघर (Clock tower) खड़ा है। बिन्दु A व B पर इस घंटाघर के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः $\cot^{-1} 3.2$ व $\operatorname{cosec}^{-1} 2.6$ हैं, तो घंटाघर की ऊँचाई है [EAMCET 1992]
 (a) 50 मीटर (b) 25 मीटर
 (c) 40 मीटर (d) इनमें से कोई नहीं
36. h ऊँचाई वाले एक खम्बे के पाद से एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण α है तथा खम्बा मीनार के शीर्ष पर कोण β अन्तरित करता है। मीनार की ऊँचाई है [Roorkee 1988]
 (a) $\frac{h \tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha - \beta) - \tan \alpha}$ (b) $\frac{h \cot(\alpha - \beta)}{\cot(\alpha - \beta) - \cot \alpha}$
 (c) $\frac{\cot(\alpha - \beta)}{\cot(\alpha - \beta) - \cot \alpha}$ (d) इनमें से कोई नहीं
37. एक व्यक्ति किसी भवन का अवनमन कोण 30° देखता है। व्यक्ति भवन की ओर $25(\sqrt{3} - 1)$ मी./घंटा की रफ्तार से जा रहा है तथा 2 घण्टे पश्चात् वह उन्नयन कोण 45° पाता है, तो भवन की ऊँचाई होगी (मीटर में) [UPSEAT 2003]
 (a) 100 (b) 50
 (c) $50(\sqrt{3} + 1)$ (d) $50(\sqrt{3} - 1)$
38. 100 मीटर ऊँची मीनार के शीर्ष पर स्थित एक मनुष्य मीनार की ओर आ रही एक कार का अवनमन कोण 30° पाता है। कुछ समय पश्चात् यह 60° हो जाता है तो इस समय अन्तराल में कार द्वारा चली गई दूरी होगी [IIT Screening 2001]
 (a) $100\sqrt{3}$ (b) $\frac{200\sqrt{3}}{3}$
 (c) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ (d) $200\sqrt{3}$
39. किसी चिमनी के शिखर व आधार से किसी दूसरी चिमनी जो उसी तल पर खड़ी है एवं उसकी ऊँचाई 150 मीटर है, पर अवनमन कोण क्रमशः θ व ϕ हैं। तब चिमनियों के शिखरों के बीच की दूरी है, (जबकि $\tan \theta = \frac{4}{3}$ व $\tan \phi = \frac{5}{2}$) [Pb.CET 2004; IIT 1965]
 (a) $\frac{150}{\sqrt{3}}$ मीटर (b) $100\sqrt{3}$ मीटर
 (c) 150 मीटर (d) 100 मीटर
40. $n \in \mathbb{Z}$ के किस मान के लिए फलन $f(x) = \frac{\sin nx}{\sin(x/n)}$ का आवर्तनांक 4π होगा
 (a) 2 (b) 3
 (c) 4 (d) 5

Answers

त्रिकोणमितीय समीकरणों के हल

1	b	2	c	3	b	4	b	5	d
6	b	7	c	8	c	9	b	10	b
11	a	12	c	13	d	14	c	15	c
16	a	17	d	18	c	19	a	20	a
21	a	22	d	23	a	24	a	25	d
26	b	27	b	28	a	29	b	30	b
31	a	32	a	33	b	34	b	35	b
36	a	37	d	38	a	39	b	40	b
41	b	42	d	43	a	44	c	45	a
46	b	47	a,b	48	c	49	a	50	a
51	a	52	a	53	b	54	a	55	c
56	b	57	b	58	a	59	d	60	a
61	d	62	c	63	c	64	a	65	c
66	c	67	b	68	c	69	d	70	d
71	a	72	d	73	b	74	d	75	d
76	b	77	a	78	c	79	d	80	c
81	b	82	a	83	b	84	d	85	d
86	a	87	c	88	d	89	b	90	b
91	b	92	a	93	a	94	b	95	a
96	a	97	a	98	a	99	b	100	a
101	c	102	a	103	a	104	c	105	b
106	c								

आवर्ती फलन

1	b	2	b	3	c	4	c	5	d
6	d	7	c	8	d	9	a	10	d
11	d	12	a	13	b	14	c	15	d
16	a	17	a	18	d	19	d	20	c

त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सम्बन्ध, त्रिभुजों के हल

1	b	2	a	3	a	4	b	5	c
6	b	7	a	8	c	9	c	10	d
11	c	12	c	13	a	14	a	15	a
16	a	17	a	18	c	19	a	20	c
21	c	22	b	23	c	24	c	25	d
26	b	27	c	28	c	29	b	30	b
31	b	32	c	33	d	34	a	35	b
36	b	37	b	38	a	39	d	40	b
41	a	42	d	43	c	44	b	45	c
46	d	47	a	48	a	49	d	50	c
51	b	52	a	53	b	54	b	55	a
56	a	57	b	58	a	59	a	60	a

61	d	62	b	63	d	64	c	65	d
66	a	67	d	68	a	69	c	70	a
71	c	72	b	73	d	74	b	75	c
76	c	77	a	78	b	79	c	80	b
81	a	82	b	83	b	84	b	85	a
86	b	87	c	88	b	89	a	90	b
91	d	92	c	93	b	94	a	95	d
96	a	97	b	98	a	99	b	100	b
101	b	102	d	103	d	104	c	105	b
106	a	107	c	108	b	109	c	110	b
111	c	112	c	113	c	114	b	115	b
116	a	117	b	118	c	119	b	120	d
121	b	122	c	123	a	124	b	125	c
126	c	127	d	128	b	129	d	130	b
131	c	132	a	133	b	134	c	135	a
136	c	137	b	138	a	139	c	140	b
141	c	142	a	143	b	144	a	145	a
146	d	147	c	148	c	149	b	150	d
151	a	152	a	153	c	154	b	155	a
156	d								

त्रिभुजों से सम्बन्ध वृत्त

1	c	2	c	3	b	4	c	5	a
6	c	7	b	8	c	9	d	10	b
11	c	12	a	13	b	14	c	15	b
16	a	17	c	18	a	19	b	20	c
21	b	22	a						

ऊँचाई एवं दूरी

1	c	2	c	3	d	4	c	5	a
6	b	7	d	8	c	9	a	10	a
11	b	12	c	13	b	14	a	15	b
16	b	17	b	18	b	19	c	20	b
21	a	22	b	23	b	24	b	25	c
26	a	27	c	28	b	29	b	30	a
31	a	32	b	33	c	34	c	35	a
36	d	37	d	38	b	39	c	40	b
41	b	42	b	43	d	44	a	45	c
46	b	47	c	48	a	49	d	50	a
51	d	52	c	53	a	54	b	55	b
56	d	57	b	58	a	59	b	60	b
61	a	62	a	63	e	64	a		

Critical Thinking Questions

1	b	2	b	3	c	4	b	5	d
6	c	7	a	8	b	9	c	10	d
11	b	12	d	13	c	14	d	15	b
16	d	17	c	18	a	19	d	20	b
21	a	22	c	23	c	24	c	25	c
26	d	27	b	28	a	29	b	30	b
31	b	32	a	33	a	34	c	35	b
36	b	37	b	38	b	39	d	40	a

AS Answers and Solutions

त्रिकोणमितीय समीकरणों के हल

1. (b) $\sin \theta + \cos \theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ से भाग देने पर,
 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$
 $\Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$
2. (c) $\sin^2 \theta = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
3. (b) $\cos^2 \theta = \frac{3}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
4. (b) हल करने पर, $\cos 2\theta = \sin 2\theta$
 $\Rightarrow \tan 2\theta = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
5. (d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ से भाग देने पर;
 $\Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
 $\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$
6. (b) $1 - \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{4} = 0$
 $\Rightarrow \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - \frac{5}{4} = 0$
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = -1 \pm \frac{3}{2}$
 $\therefore |\cos \theta| \leq 1, \therefore \cos \theta = -1 - \frac{3}{2}$ संभव नहीं है।
 $\Rightarrow \cos \theta = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
7. (c) $\sqrt{2} \sec \theta + \tan \theta = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$
 $\Rightarrow \sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{2}$
 $\sqrt{2}$ से दोनों पक्षों में भाग देने पर,
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta = -1$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta = 1 \Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(0)$
 $\Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm 0 \Rightarrow \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$
8. (c) $2 \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow 2 \tan^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$
 $\Rightarrow \tan^2 \theta = 1 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

9. (b) $2 \sin \theta + \tan \theta = 0; \sin \theta \left(2 + \frac{1}{\cos \theta}\right) = 0$
 अर्थात्, $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
 या $\frac{1}{\cos \theta} = -2 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \left(\frac{2\pi}{3}\right)$
10. (b) $\sqrt{3} \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan 3\theta + \tan 2\theta \tan 3\theta = 1$
 $\Rightarrow \frac{\tan 2\theta + \tan 3\theta}{1 - \tan 2\theta \tan 3\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan 5\theta = \tan \frac{\pi}{6}$
 $\Rightarrow 5\theta = n\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \left(n + \frac{1}{6}\right) \frac{\pi}{5}$
11. (a) $\tan 2\theta = \cot \theta \Rightarrow \tan 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
 $\Rightarrow 2\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
12. (c) $\frac{1}{\sin \theta} = 1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = 1$
 $\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
 $\therefore \theta = 2n\pi$ या $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$
 किन्तु $\theta = 2n\pi$ संभव नहीं है।
13. (d) $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = 3 \Rightarrow \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \theta)}{1 + (2 \cos^2 \theta - 1)} = 3$
 $\Rightarrow \tan^2 \theta = 3 \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
14. (c) $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{5}{3}$, जबकि $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$
 $\Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{1}{3} = \tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
15. (c) $\sin 4\theta = \cos \theta - \cos 7\theta \Rightarrow \sin 4\theta = 2 \sin(4\theta) \sin(3\theta)$
 $\Rightarrow \sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = n\pi$ या $\sin 3\theta = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
 $\Rightarrow 3\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$
16. (a) $\frac{1 - \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 $\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
17. (d) $\cos^2 \theta - \frac{5}{2} \cos \theta + 1 = 0$
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{(5/2) \pm \sqrt{(25/4) - 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{4}$
 (+) चिन्ह की उपेक्षा करने पर,
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$18. \quad (c) \quad \cot \theta + \tan \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta \Rightarrow \frac{2}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ या } \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \text{ या } \theta = n\pi.$$

$$19. \quad (a) \quad \tan^2 \theta - \tan \theta - \sqrt{3} \tan \theta + \sqrt{3} = 0 \\ \Rightarrow \tan \theta (\tan \theta - 1) - \sqrt{3} (\tan \theta - 1) = 0 \\ \Rightarrow (\tan \theta - \sqrt{3}) (\tan \theta - 1) = 0 \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

$$20. \quad (a) \quad \text{यह स्पष्ट है।}$$

$$21. \quad (a) \quad 4 - 4 \cos^2 \theta + 2(\sqrt{3} + 1) \cos \theta = 4 + \sqrt{3} \\ \Rightarrow 4 \cos^2 \theta - 2(\sqrt{3} + 1) \cos \theta + \sqrt{3} = 0 \\ \Rightarrow \cos \theta = \frac{2(\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3} + 1)^2 - 16\sqrt{3}}}{8} \\ \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ या } \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ या } 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$22. \quad (d) \quad \cot \theta + \cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 2 \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right) + \theta\right\}}{\sin\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right) + \theta\right\}} = 2 \\ \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right) = 2 \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \\ \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

$$23. \quad (a) \quad 2 \cos^2 \theta - 1 + 3 \cos \theta = 0 \\ \cos \theta = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \\ \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \cos^{-1}\left(\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}\right), (\text{धनात्मक चिन्ह लेने पर}).$$

$$24. \quad (a) \quad \tan m\theta = \tan n\theta \Rightarrow m\theta = p\pi + n\theta \Rightarrow \theta = \frac{p\pi}{(m-n)} \\ \text{अतः } \theta \text{ के विभिन्न मान स.श्रे. में हैं जिसका सार्वअन्तर } \frac{\pi}{m-n} \text{ है।}$$

$$25. \quad (d) \quad \tan \theta - \sqrt{2} \sec \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{2} \\ \Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}.$$

$$26. \quad (b) \quad \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos \alpha \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \\ \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \alpha.$$

$$27. \quad (b) \quad \tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = \tan \theta \tan 2\theta \tan 3\theta \\ \tan 6\theta = \frac{\tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta - \tan \theta \tan 2\theta \tan 3\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta \tan 3\theta} \\ = 0, (\text{दिये गये प्रतिबंधानुसार}) \\ \Rightarrow 6\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{6}.$$

ट्रिक: इस तरह के प्रश्नों में, θ का व्यापक मान $\frac{n\pi}{1+2+3}$ द्वारा दिया जाता है। अतः θ का

$$\text{व्यापक मान } \frac{n\pi}{1+2+3} = \frac{n\pi}{6}.$$

$$28. \quad (a) \quad \frac{3 \sin(A - 15^\circ)}{\cos(A - 15^\circ)} = \frac{\sin(A + 15^\circ)}{\cos(A + 15^\circ)} \\ \Rightarrow 3 \sin(A - 15^\circ) \cos(A + 15^\circ) = \cos(A - 15^\circ) \sin(A + 15^\circ) \\ \Rightarrow 2 \sin(A - 15^\circ) \cos(A + 15^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2A - \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow 2A = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow A = n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

$$29. \quad (b) \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2 \Rightarrow \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

$$30. \quad (b) \quad 2 \cos^2 \theta - (\sqrt{2} + 1) \cos \theta - 1 + \frac{(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} = 0 \\ \Rightarrow \cos \theta = \frac{(\sqrt{2} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}}}{4} \\ \Rightarrow \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

ट्रिक : चूँकि $\theta = \frac{\pi}{4}$ समीकरण को संतुष्ट करता है अतः

इसका व्यापक मान $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ होना चाहिए।

$$31. \quad (a) \quad \tan \theta = \cot \alpha \Rightarrow \tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

$$32. \quad (a) \quad 3(\sin \theta - \cos \theta) = 4 \sin \theta \cos \theta \\ \Rightarrow 3(\sin \theta - \cos \theta) = 2 \sin 2\theta \\ \text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, } 9(1 - S) = 4S^2, \\ \text{जहाँ } S = \sin 2\theta \text{ या } 4S^2 + 9S - 9 = 0.$$

$$\therefore (S + 3)(4S - 3) = 0 \text{ या } S = \frac{3}{4}, \text{ चूँकि } S \neq -3$$

$$\text{या } \sin 2\theta = \frac{3}{4} = \sin \alpha$$

$$\therefore 2\theta = n\pi + (-1)^n \alpha \text{ या } \theta = \frac{1}{2} \left[n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \right].$$

$$33. \quad (b) \quad \cos p\theta = \cos q\theta \Rightarrow p\theta = 2n\pi \pm q\theta \Rightarrow \theta = \frac{2n\pi}{p \pm q}.$$

$$34. \quad (b) \quad 4 + 2 \sin^2 x = 5 \\ \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$35. \quad (b) \quad 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha (\sin^2 x - \sin^2 \alpha)$$

$$\therefore \sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

36. (a) ज्ञात है कि, $\frac{\pi}{4} \cot \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \tan \theta \Rightarrow \tan \theta + \cot \theta = 2$
 $\Rightarrow \sin 2\theta = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$.
37. (d) $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0 \Rightarrow (2 \sin \theta + 1)(\sin \theta - 2) = 0$
 $\Rightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2}$, ($\because \sin \theta \neq 2$) $\Rightarrow \sin \theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
 $\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}$
 $\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$, $\left\{ \because -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \text{ के तुल्य है} \right\}$
38. (a) माना $\sqrt{3} + 1 = r \cos \alpha$ तथा $\sqrt{3} - 1 = r \sin \alpha$.
 तब $r = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = 2\sqrt{2}$
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1 - (1/\sqrt{3})}{1 + (1/\sqrt{3})} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$
 दिये गये समीकरण को लिखा जा सकता है
 $2\sqrt{2} \cos(\theta - \alpha) = 2 \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$
 $\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{12} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$.
39. (b) $\tan 3x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{4}$
 $\Rightarrow 3x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$.
40. (b) दिये गये समीकरण को लिखा जा सकता है
 $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \sqrt{3} \tan \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta \sin \theta + \sqrt{3} \tan \theta = 0$
 $\tan \theta (\sin \theta + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.
41. (b) $\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ का प्रयोग करने पर,
 हम दिये गये समीकरण को $\tan^2 \theta + \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 1$ लिख सकते हैं।
 $\Rightarrow \tan^2 \theta (1 - \tan^2 \theta) + 1 + \tan^2 \theta = 1 - \tan^2 \theta$
 $\Rightarrow 3 \tan^2 \theta - \tan^4 \theta = 0 \Rightarrow \tan^2 \theta (3 - \tan^2 \theta) = 0$
 $\Rightarrow \tan \theta = 0$ या $\tan \theta = \pm \sqrt{3}$
 $\tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = m\pi$, जहाँ m एक पूर्णांक है और
 $\tan \theta = \pm \sqrt{3} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ n एक पूर्णांक है। अतः $\theta = m\pi, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ m व n पूर्णांक हैं।
42. (d) $\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
 $\Rightarrow \theta = n\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.
43. (a) $\sin 6\theta + \sin 4\theta + \sin 2\theta = 0$
 $\Rightarrow 2 \sin 4\theta \cos 2\theta + \sin 4\theta = 0$
 $\Rightarrow \sin 4\theta (2 \cos 2\theta + 1) = 0$
 $\Rightarrow 2 \cos 2\theta = -1 \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 तथा $\sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = n\pi \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}$
 $\theta = \frac{n\pi}{4}$ या $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.
44. (c) $\sin^2 \theta + \sin \theta - 2 = 0 \Rightarrow (\sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$
 $\Rightarrow \sin \theta \neq -2$, $\therefore \sin \theta = 1 = \sin \pi/2$
 $\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$.
45. (a) $\tan 5\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \Rightarrow 5\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2\theta$
 $\Rightarrow 7\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$.
46. (b) $3 \sin^2 x + 10 \cos x - 6 = 0$
 $3(1 - \cos^2 x) + 10 \cos x - 6 = 0$
 हल करने पर, $(\cos x - 3)(3 \cos x - 1) = 0$
 या तो $\cos x = 3$, (जोकि संभव नहीं है) या $\cos x = \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow x = 2n\pi \pm \cos^{-1}(1/3)$.
47. (a,b) $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$
 $\Rightarrow (\cos \theta + \cos 3\theta) + \cos 2\theta = 0$
 $\Rightarrow 2 \cos 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta = 0$
 $\Rightarrow \cos 2\theta (2 \cos \theta + 1) = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{4}$
 या $\cos \theta = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2m\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.
48. (c) $2\sqrt{3} \cos^2 \theta = \sin \theta \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin^2 \theta + \sin \theta - 2\sqrt{3} = 0$
 $\Rightarrow \sin \theta = \frac{-1 \pm 7}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{-8}{4\sqrt{3}}$, (असंभव)
 तथा $\sin \theta = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$.
49. (a) सारणिक का प्रसार करने पर,
 $\cos^2(A+B) + \sin^2(A+B) + \cos 2B = 0$
 $1 + \cos 2B = 0$ या $\cos 2B = \cos \pi$
 या $2B = 2n\pi + \pi$ या $B = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
50. (a) $\sin 2\theta = \cos 3\theta \Rightarrow 3\theta = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$
 $\Rightarrow \theta = \frac{2n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ या $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$.
 चूँकि θ न्यूनकोण है $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
51. (a) दिये गये समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है,
 $4 \sin^4 x = 1 - \cos^4 x = (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)$
 $\Rightarrow \sin^2 x [4 \sin^2 x - 1 - (1 - \sin^2 x)] = 0$
 $\Rightarrow \sin^2 x [5 \sin^2 x - 2] = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ या $\sin x = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$
 अतः $x = n\pi$ अभीष्ट हल है।

52. (a) हमें ज्ञात है कि, $\cos 3x + \sin\left(2x - \frac{7\pi}{6}\right) = -2$

$$\Rightarrow 1 + \cos 3x + 1 + \sin\left(2x - \frac{7\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \cos 3x) + 1 - \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \frac{3x}{2} + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \text{ तथा } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \text{ तथा } x - \frac{\pi}{3} = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

अतः $\cos \frac{3x}{2} = 0$ और $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ का व्यापक हल

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(6k+1) \text{ है, जहाँ } k \in \mathbb{Z}.$$

53. (b) सारणिक हल करने के पश्चात्, $2\cos \theta = 0$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

54. (a) $\tan(3x - 2x) = \tan x = 1 \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

चूँकि यह मान दिये गये समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।
अतः विकल्प (a) सही हल है।

55. (c) दिया गया सम्बन्ध है,

$$\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan \theta \tan 2\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 3\theta = \tan(\pi/3)$$

$$\Rightarrow 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = (3n+1)\frac{\pi}{9}.$$

56. (b) हमें ज्ञात है कि, $1 - \cos \theta = \sin \theta \cdot \sin \frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - \cos \frac{\theta}{2}\right] = 0 \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = 0 \text{ या } 2\sin^2 \frac{\theta}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = 0 \text{ या } \sin \frac{\theta}{4} = 0 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = k\pi \text{ या } \frac{\theta}{4} = k\pi.$$

$$\therefore \theta = 2k\pi \text{ या } \theta = 4k\pi, k \in \mathbb{I}.$$

57. (b) $\frac{\tan 3\theta - 1}{\tan 3\theta + 1} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3\theta - \tan(\pi/4)}{1 + \tan 3\theta \cdot \tan(\pi/4)} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\left(3\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 3\theta - (\pi/4) = n\pi + (\pi/3)$$

$$\Rightarrow 3\theta = n\pi + \frac{7\pi}{12} \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{7\pi}{36}.$$

58. (a) $2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ या } \sin x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \text{ अर्थात् } 30^\circ, 150^\circ, 90^\circ.$$

59. (d) चूँकि $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ एक साथ, एक ही कोण के लिये अधिकतम नहीं हो सकते। अतः हल संभव नहीं है।
वैकल्पिक: चूँकि $(\sin x + \cos x)$ का अधिकतम मान $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ है।
अतः 'x' का कोई भी मान $\sin x + \cos x = 2$ को संतुष्ट नहीं करता है।

60. (a) $2 - 2\cos^2 \theta = 4 + 3\cos \theta \Rightarrow 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta + 2 = 0$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{4},$$

जो कि काल्पनिक है। अतः हल संभव नहीं है।

61. (d) $\sin x \cos x = 2$ या $\sin 2x = 4$, जो कि असंभव है।

62. (c) $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{3}$ (i)

हमें यह भी ज्ञात है कि, $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ (ii)

$$\Rightarrow \sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
(iii)

समीकरण (i) व (iii) से,

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore 0 < \theta < 2\pi \text{ के लिए हल } \frac{\pi}{6} \text{ तथा } \frac{7\pi}{6} \text{ हैं,}$$

अतः दो हल हैं।

63. (c) $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$

$$\Rightarrow -\sin 3x = \sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \sin 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

या $\cos 2x = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = n\pi \pm \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ अतः } x = \frac{\pi}{3}.$$

ट्रिक : विकल्पों से जाँच करें।

64. (a) $f(x) = \cos x - x + \frac{1}{2}, f(0) = \frac{3}{2} > 0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\pi}{2} < 0, \left(\because \pi = \frac{22}{7}\right)$$

$\therefore$ एक मूल अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में विद्यमान है।

65. (c) $\sec x \cos 5x = -1 \Rightarrow \cos 5x = -\cos x$

$$\Rightarrow 5x = 2n\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\pi}{6} \text{ या } \frac{(2n-1)\pi}{4}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

66. (c) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + \alpha = 0$

$$\Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x - 2\sin 2x - 2 - 2\alpha = 0$$

माना $\sin 2x = y$, तब समीकरण

$$y^2 - 2y - 2(1+\alpha) = 0 \text{ होगा,}$$

जहाँ $-1 \leq y \leq 1$, ($\because -1 \leq \sin 2x \leq 1$)

वास्तविक मूल के लिये, विवक्तिकर $\geq 0 \Rightarrow 3 + 2\alpha \geq 0$

$$\Rightarrow \alpha \geq -\frac{3}{2}$$

$$-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - \sqrt{3 + 2\alpha} \leq 1$$

$$\Rightarrow 3 + 2\alpha \leq 4 \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{2} \therefore -\frac{3}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

67. (b) $3 \cos \theta + 4 \sin \theta = 5 \left[\frac{3}{5} \cos \theta + \frac{4}{5} \sin \theta \right] = 5 \cos(\theta - \alpha)$

जहाँ $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. अब $3 \cos \theta + 4 \sin \theta = k$

$$\therefore 5 \cos(\theta - \alpha) = k \Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \theta - \alpha = 0^\circ, 180^\circ \Rightarrow \theta = \alpha, 180^\circ + \alpha.$$

68. (c) $3 \sin^2 x - 7 \sin x + 2 = 0$

$$\Rightarrow 3 \sin^2 x - 6 \sin x - \sin x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3 \sin(\sin x - 2) - (\sin x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (3 \sin x - 1)(\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \text{ या } 2$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}, (\because \sin x \neq 2)$$

माना $\sin^{-1} \frac{1}{3} = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $[0, 5\pi]$ में हल हैं, तब

$[0, 5\pi]$ में हल $\alpha, \pi - \alpha, 2\pi + \alpha, 3\pi - \alpha, 4\pi + \alpha, 5\pi - \alpha$ हैं।

$\therefore$ अतः अभीष्ट हलों की संख्या = 6.

69. (d) दिया गया समीकरण $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 4$,

$a \sin x + b \cos x = c$ के रूप का है, जहाँ

$$a = \sqrt{3}, b = 1, c = 4$$

यहाँ $a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4 < c^2$, अतः दिये गये समीकरण का कोई हल नहीं है।

70. (d) $3 \cos x + 4 \sin x = 6$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos(x - \theta) = \frac{6}{5},$$

$$\left[\text{जहाँ } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) \right]$$

अतः समीकरण का कोई हल नहीं है।

71. (a) दिया गया है, $\sin x + \sin y + \sin z = -3$, यह केवल तभी

संतुष्ट होता है जब $x = y = z = \frac{3\pi}{2}$, $x, y, z \in [0, 2\pi]$.

72. (d) $\sin 2\theta = \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right)$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \Rightarrow \theta \pm 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{अर्थात्, } 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{तथा } -\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = - \left(2n\pi - \frac{\pi}{2} \right)$$

अतः θ के मान 0 और π के बीच $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

अर्थात् $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ हैं।

73. (b) $2 - 2 \cos^2 \theta = 3 \cos \theta$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

(-) चिन्ह की उपेक्षा करने पर,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

अतः θ के मान 0 तथा 2π के बीच $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ हैं।

74. (d) $\cos 6\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 3\theta + 2 \cos 3\theta \cdot \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cos 3\theta \cos 2\theta \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow 3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}; 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ और } \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 45^\circ, 135^\circ.$$

75. (d) $\operatorname{cosec} \theta + 2 = 0$

$$\Rightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 210^\circ \text{ या } 330^\circ.$$

76. (b) ज्ञात है, $1 - \cos 2x + 1 - \cos^2 2x = 2$

$$\text{या } \cos 2x(\cos 2x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos 2x = 0, -1, \therefore 2x = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \text{ या } (2n+1)\pi$$

$$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4} \text{ या } (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$n = -2, -1, 0, 1, 2$ रखने पर,

$$\therefore x = \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ और } \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

$$\therefore -\pi \leq x \leq \pi, \therefore \text{केवल } x = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{4} \text{ अभीष्ट हल हैं।}$$

77. (a) $\sin 7\theta + \sin \theta - \sin 4\theta = 0$

$$\Rightarrow 2 \sin 4\theta \cos 3\theta - \sin 4\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin 4\theta(2 \cos 3\theta - 1) = 0 \Rightarrow \sin 4\theta = 0, \cos 3\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{अब } \sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{तथा } \cos 3\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{9}.$$

78. (c) व्यंजक = $\frac{(1 + \tan x + \tan^2 x)(1 + \tan^2 x - \tan x)}{\tan^2 x}$

$$= \frac{(1 + \tan^2 x)^2 - \tan^2 x}{\tan^2 x}$$

स्पष्टतः, $1 + \tan^2 x \geq \tan^2 x$, $\forall x$. अतः x के सभी मानों के लिये यह धनात्मक है।

79. (d) $5 \cos 2\theta + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 = 0$

$$\Rightarrow 5(2 \cos^2 \theta - 1) + (1 + \cos \theta) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10 \cos^2 \theta + \cos \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (5 \cos \theta + 3)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \pi - \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right).$$

80. (c) दिया गया है, कि $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ और $0^\circ < \theta < 360^\circ$.

हम जानते हैं कि $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ तथा $\cos(180^\circ - 60^\circ)$
 $= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ या $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

इसी तरह $\cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

या $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$. अतः $\theta = 120^\circ$ तथा 240° .

81. (b) $(2 \cos x - 1)(3 + 2 \cos x) = 0$

तब $\cos x = \frac{1}{2}$ चूँकि $\cos x \neq \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; \left\{ \begin{array}{l} n=0 \text{ के लिए, } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \\ n=1 \text{ के लिए, } x = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right\}$

82. (a) ज्ञात है, $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

विकल्पों का निरीक्षण करने के बाद $x = \frac{\pi}{6}$ रखने पर,

$(81)^{\sin^2 \pi/6} + (81)^{\cos^2 \pi/6} = 30$

$\Rightarrow (81)^{1/4} + (81)^{3/4} = 30 \Rightarrow 30 = 30$

अतः विकल्प (a) सही है।

83. (b) $\tan \theta = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

$-\pi < \theta < 0$ के लिये, $n = -1$ रखने पर,

$\theta = -\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3}$ या $\frac{-4\pi}{6}$.

84. (d) हमें ज्ञात है कि, $\tan \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ या $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta, 0^\circ$ और 360° के बीच विद्यमान है,

$\therefore \theta = 150^\circ$ तथा 330° .

85. (d) हमें ज्ञात है कि, $\cos^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 1 - \sin^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^2 \theta - \sin \theta - 2 = 0 \Rightarrow (\sin \theta + 1)(\sin \theta - 2) = 0$

$\sin \theta = 2$ जो कि संभव नहीं है और $\sin \theta = -1$.

अतः, दी गयी समीकरण का हल अंतराल $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ में विद्यमान है।

86. (a) ज्ञात है, $\frac{5^x + 5^{-x}}{2} \geq 1$, (स.श्रे. $\geq$ गु.श्रे.)

किन्तु $\cos(e^x) \leq 1$, अतः कोई हल विद्यमान नहीं है।

87. (c) $\tan \theta = -1 = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

अतः व्यापक हल $2n\pi + \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2n\pi + \frac{7\pi}{4}$ है।

88. (d) $\sin \theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \theta = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

अतः θ का व्यापक मान $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$ है।

89. (b) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ (i)

और $\sin 2x + \cos 2x = \tan x$ (ii)

समीकरण (i) को हल करने पर, $\sin^2 2x = 2 \cos^2 x$

$\Rightarrow 2 \cos^2 x \cos 2x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ या $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ उभयनिष्ठ मूल $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ हैं।

समीकरण (ii) को हल करने पर, $\frac{2 \tan x + 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \tan x$

$\Rightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Rightarrow (\tan^2 x - 1)(\tan x + 1) = 0 \Rightarrow x = m\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

ट्रिक : $n=0$ के लिए, विकल्प (a) से $\theta = -\frac{\pi}{2}$ प्राप्त होता

है जोकि समीकरण (i) को संतुष्ट करता है, किन्तु (ii) को

सन्तुष्ट नहीं करता है। विकल्प (b) से $\theta = \frac{\pi}{4}$ प्राप्त होता है,

जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है।

90. (b) r का विलोपन करने पर, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ तथा $-\frac{3}{2}$

$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{2}$ अग्राह्य है।

अतः $\theta = \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

91. (b) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ व्यापक मान $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ या $(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$ है।

92. (a) $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A+B = \frac{\pi}{2}$ तथा $A-B = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}$.

93. (a) $2 - 2 \cos^2 \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2 \cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+24}}{4} = \frac{\sqrt{3}(1 \pm 3)}{4} = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$.

94. (b) $\cot \theta = \sin 2\theta, (\theta \neq n\pi) \Rightarrow 2 \sin^2 \theta \cos \theta = \cos \theta$

$\Rightarrow \cos \theta = 0$ या $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ या $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ$ तथा 45° .

95. (a) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

96. (a) $\cos A \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6} \right]$
किन्तु, $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ का महत्तम मान $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$ पर प्राप्त होता है।

97. (a) यहाँ, $\cos \theta = 1 - 2 \cos^2 40^\circ = -(2 \cos^2 40^\circ - 1)$
 $= -\cos(2 \times 40^\circ) = -\cos 80^\circ$
 $= \cos(180^\circ + 80^\circ) = \cos(180^\circ - 80^\circ)$
अतः $\cos 260^\circ$ व $\cos 100^\circ$, अर्थात् $\theta = 100^\circ$ तथा 260° .

98. (a) चूँकि स.श्रे. $\geq$ गु.श्रे.
 $\Rightarrow \frac{1}{2}(2^{\sin x} + 2^{\cos x}) \geq \sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}$
 $\Rightarrow 2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2 \cdot 2^{\frac{\sin x + \cos x}{2}}$
 $\Rightarrow 2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 + \frac{\sin x + \cos x}{2}}$
और हम जानते हैं कि, $\sin x + \cos x \geq -\sqrt{2}$
 $\therefore 2^{\sin x} + 2^{\cos x} > 2^{1 - (1/\sqrt{2})}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ के लिये।

99. (b) $(1 + \tan \theta)(1 + \tan \phi) = 2 \Rightarrow \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi} = 1$
 $\Rightarrow \tan(\theta + \phi) = 1 \Rightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

100. (a) $\tan(\pi \cos \theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin \theta\right)$
 $\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

101. (c) $\tan(\pi \cos \theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin \theta\right)$
 $\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

102. (a) दिये गये सारणिक को परिवर्तित करने पर,
($R_1 \rightarrow R_1 - R_3$ तथा $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ द्वारा)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 1 + 4 \sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$$

 $\Rightarrow 1 + 4 \sin 4\theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 0$,
(R_1 के संगत प्रसार करने पर)
 $\Rightarrow 4 \sin 4\theta = -2 \Rightarrow \sin 4\theta = -\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow 4\theta = \frac{7\pi}{6}$ या $\frac{11\pi}{6}$, ($0 < 4\theta < 2\pi$)
 $\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 4\theta < 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}$.

103. (a) दिया गया है, $\cot(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 0$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}$
 $\therefore \sin(\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta - \alpha) = \sin[(2n+1)\pi - \alpha]$
 $= \sin(2n\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

104. (c) दिया गया समीकरण है, $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

इस समीकरण को $\sqrt{2}$ से भाग देने पर,
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{2}$
 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos \frac{\pi}{3}$. अतः $\frac{\pi}{4} + x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{12}$
या $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$.

105. (b) $\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$
 $\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \pi \Rightarrow 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ या $2n\pi - \frac{5\pi}{4}$.

106. (c) $12 \cot^2 \theta - 31 \operatorname{cosec} \theta + 32 = 0$
 $12(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) - 31 \operatorname{cosec} \theta + 32 = 0$
 $12 \operatorname{cosec}^2 \theta - 31 \operatorname{cosec} \theta + 20 = 0$
 $12 \operatorname{cosec}^2 \theta - 16 \operatorname{cosec} \theta - 15 \operatorname{cosec} \theta + 20 = 0$
 $(4 \operatorname{cosec} \theta - 5)(3 \operatorname{cosec} \theta - 4) = 0$
 $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{4}, \frac{4}{3}; \therefore \sin \theta = \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$.

आवर्ती फलन

1. (b) $\sin 2x$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ तथा $|\sin 2x|$ का आवर्तनांक $= \frac{\pi}{2}$.

2. (b) चूँकि $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, अतः आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2} = \pi$.

3. (c) $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta} = \frac{2 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
अतः आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{3}$.

4. (c) यह स्पष्ट है।

5. (d) $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$, अतः आवर्तनांक $= 2\pi$.

6. (d) $\sin \frac{x}{2}$ का आवर्तनांक 4π है तथा $\cos \frac{x}{3}$ का आवर्तनांक 6π है। अतः व्यंजक का आवर्तनांक 12π (L.C.M.) है।

7. (c) $\cot 3x$ का आवर्तनांक $\frac{\pi}{3}$ और $\cos(4x+3)$ का आवर्तनांक $\frac{\pi}{2}$ है। अतः व्यंजक का आवर्तनांक $= \pi$ (L.C.M.)

8. (d) $2 \sin 3\theta$ का आवर्तनांक $\frac{2\pi}{3}$ और $4 \cos 3\theta$ का आवर्तनांक $\frac{2\pi}{3}$ है, अतः व्यंजक का आवर्तनांक $\frac{\pi}{3}$ है।

9. (a) माना $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{2} = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(2 \sin^2 2x) = 1 - \left(\frac{1 - \cos 4x}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

अतः फलन का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

10. (d) $\sin(\theta/3)$ का आवर्तनांक $= 6\pi$, $\cos(\theta/2)$ का आवर्तनांक $= 4\pi$
 6π और 4π का L.C.M. $= 12\pi$.

11. (d) $\sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{x}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}(2n\pi + x)\right)$

$\Rightarrow$ फलन $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ का आवर्तनांक $2n\pi$ है

$\Rightarrow 2n\pi = 4\pi \Rightarrow n = 2$.

12. (a) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow$ आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2} = \pi$.

13. (b) $\therefore \sin(ax + b)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{|a|}$
 $\therefore \sin 2x$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2} = \pi$.

14. (c) विकल्प (a) में फलन का आवर्तनांक 2 है।
 विकल्प (b) में फलन का आवर्तनांक 24 है।
 विकल्प (c) में फलन का आवर्तनांक 2π है।

15. (d) $\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$
 $\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$

3π और $\frac{4\pi}{3}$ का L.C.M. $= 12\pi$. अतः आवर्तनांक 12π है।

16. (a) माना $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक λ है,
 तब $\sin(x + \lambda) + \cos p(x + \lambda) = \sin x + \cos px$, $\forall x \in R$.
 $x = 0$ रखने पर और λ को $-\lambda$ से प्रतिस्थापित करने पर,
 $\sin \lambda + \cos p\lambda = 1$ तथा $-\sin \lambda + \cos p\lambda = 1$. इन्हें हल
 करने पर, $\sin \lambda = 0$ अतः $\lambda = n\pi$ तथा $\cos p\lambda = 1$, अतः
 $p\lambda = 2m\pi$.

चूँकि $\lambda \neq 0$, m व n अशून्य पूर्णांक हैं। अतः $p = \frac{2m\pi}{\lambda}$,
 जो कि परिमेय है।

17. (a) $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$

$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$

$\therefore \sin \frac{\pi x}{2} + \cos \frac{\pi x}{2}$ का आवर्तनांक $= (4, 4)$ का L.C.M. $= 4$.

18. (d) $\sin \frac{\pi x}{2}$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$

$\cos \frac{\pi x}{3}$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$

$\tan \frac{\pi x}{4}$ का आवर्तनांक $= \frac{\pi}{\pi/4} = 4$

$\therefore f(x)$ का आवर्तनांक $= (4, 6, 4)$ का L.C.M. $= 12$.

19. (d) $|\sin \pi x|$ का आवर्तनांक $= \frac{\pi}{\pi} = 1$.

20. (c) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{n}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi x}{n-1}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{n-1}\right)} = 2(n-1)$

$\cos\left(\frac{\pi x}{n}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2n$

अतः $f(x)$ का आवर्तनांक, $2n$ और $2(n-1)$ का L.C.M.
 अर्थात्, $2n(n-1)$ है।

त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सम्बन्ध, त्रिभुजों के हल

1. (b) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{3}{4 \times 5} = \frac{\sin B}{7} \Rightarrow \sin B = \frac{21}{20}$,
 जो कि संभव नहीं है।

2. (a) $\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, (दिये गये तथ्यों से)
 अतः $C = 90^\circ$.

3. (a) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$
 $\Rightarrow bc \sin^2 \frac{A}{2} = (s-b)(s-c)$
 अतः $x = bc$.

4. (b) A, B, C समान्तर श्रेणी में हैं, तब कोण $B = 60^\circ$
 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{चूँकि } A+B+C = 180^\circ \text{ और} \\ A+C = 2B \Rightarrow B = 60^\circ \end{array} \right\}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$
 $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac$.

5. (c) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$
 प्रक्षेप सूत्र द्वारा प्रसार करने और पदों को संग्रहित करने पर,
 $a = b \cos C + c \cos B$ इत्यादि।

6. (b) $\frac{\sin B}{\sin(A+B)} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$.

7. (a) $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\sin C}$
 $= \frac{a}{c} \cos B - \frac{b}{c} \cos A$

किन्तु $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $\Rightarrow \frac{a}{c} \cos B - \frac{b}{c} \cos A = \frac{1}{2c^2} (a^2 + c^2 - b^2 - b^2 - c^2 + a^2)$
 $= \frac{a^2 - b^2}{c^2}$.

$$\begin{aligned}
 8. \quad (c) \quad \cot B + \cot C - \cot A &= \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} - \cot A \\
 &= \frac{\sin C \cos B + \cos C \sin B}{\sin B \sin C} - \cot A = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} - \frac{\cos A}{\sin A} \\
 &= \frac{\sin^2 A - \sin B \sin C \cos A}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{a^2 - bc \cos A}{k(abc)} \\
 \therefore \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k, \text{ (माना)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{और } \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - bc \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}}{(abc)k} \\
 &= \frac{(a^2 - a^2)}{abc k} = 0, \left\{ \therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{3a^2 - a^2}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

$$9. \quad (c) \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2}, \text{ अर्थात् } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad (d) \quad &\left\{ \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right\} \left\{ a \sin^2 \frac{B}{2} + b \sin^2 \frac{A}{2} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \right\} \left\{ a \sin^2 \frac{B}{2} + b \sin^2 \frac{A}{2} \right\} \\
 &= \left\{ \cos \frac{C}{2} \right\} \left\{ a \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + b \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \left\{ a \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}} + b \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}} \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \left\{ \sqrt{\frac{(s-a)}{(s-b)}} ab + \sqrt{\frac{(s-b)}{(s-a)}} ab \right\} \\
 &= \sqrt{s(s-c)} \left\{ \frac{s-a+s-b}{\sqrt{(s-a)(s-b)}} \right\} = \sqrt{s(s-c)} \left\{ \frac{2s-a-b}{\sqrt{(s-a)(s-b)}} \right\} \\
 &= c \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} = c \cot \frac{C}{2}.
 \end{aligned}$$

ट्रिक : इस तरह के अप्रतिबंधित प्रश्नों को $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $c=2$ और $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $C=90^\circ$ के निर्धारित मान रखकर निरीक्षण किया जाता है। अतः व्यंजक का मान 2 है जो कि विकल्प (d) द्वारा प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned}
 11. \quad (c) \quad &\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \text{ स.श्रे. में हैं} \\
 \Rightarrow &\frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \\
 \Rightarrow &\frac{ab}{(s-a)(s-b)} - \frac{ac}{(s-a)(s-c)} \\
 &= \frac{ac}{(s-a)(s-c)} - \frac{bc}{(s-b)(s-c)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{s-a} \right) \left(\frac{b(s-c) - c(s-b)}{(s-b)(s-c)} \right) = \left(\frac{c}{s-c} \right) \left(\frac{a(s-b) - b(s-a)}{(s-a)(s-b)} \right)$$

$$\Rightarrow abs - abc - acs + abc = acs - abc - bcs + abc$$

$$\Rightarrow ab - ac = ac - bc \Rightarrow ab + bc = 2ac$$

या $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{2}{b}$, अर्थात् a, b, c हरात्मक श्रेणी में हैं।

नोट : विद्यार्थी इसे तथ्य की तरह याद रखें।

$$\begin{aligned}
 12. \quad (c) \quad &(a^2 + b^2 - 2ab) \cos^2 \frac{C}{2} + (a^2 + b^2 + 2ab) \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= a^2 + b^2 + 2ab \left(\sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} \right) \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = c^2.
 \end{aligned}$$

$$13. \quad (a) \quad 2s = a + b + c; \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{30 \times 6}{320}} = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad (a) \quad &\cos A + \cos C = 4 \sin^2 \frac{1}{2} B \\
 \Rightarrow &2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin^2 \frac{B}{2} \\
 \Rightarrow &\cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin^2 \frac{B}{2} \\
 \Rightarrow &\cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \sin \frac{B}{2} \\
 \Rightarrow &\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \\
 \Rightarrow &\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\
 &\frac{\sqrt{(s-a)(s-c)}}{ac} + \frac{s-b}{b} \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}} = 2 \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\
 \Rightarrow &\frac{s}{b} + \frac{s-b}{b} = 2 \Rightarrow a+c=2b \Rightarrow a, b, c \text{ समान्तर श्रेणी में हैं।}
 \end{aligned}$$

$$15. \quad (a) \quad 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \\
 &= \left[\frac{(s-a)(s-b)bc \cdot ac}{ab \cdot s(s-a)s(s-b)} \right]^{1/2} = \frac{c}{s} = \frac{2c}{a+b+c}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad (a) \quad &b^2 \cos 2A - a^2 \cos 2B = b^2(1 - 2 \sin^2 A) - a^2(1 - 2 \sin^2 B) \\
 &= b^2 - a^2 - 2(b^2 \sin^2 A - a^2 \sin^2 B) = b^2 - a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad (a) \quad &a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) \\
 &= k \{ \Sigma \sin A \sin(B-C) \} = k \{ \Sigma \sin(B+C) \sin(B-C) \} \\
 &= k \left\{ \Sigma \frac{1}{2} (\cos 2C - \cos 2B) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

नोट : विद्यार्थी यहाँ ध्यान दें कि वह व्यंजक जो कि ऋणात्मक चिह्न के साथ चक्रीय गुणांक रखता है उसका मान अधिकांशतः शून्य होता है।

18. (c) $\cot A, \cot B$ तथा $\cot C$ स.श्रे. में हैं

$$\Rightarrow \cot A + \cot C = 2 \cot B \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{2 \cos B}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc(ka)} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab(kc)} = 2 \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac(kb)}$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = 2b^2. \text{ अतः } a^2, b^2, c^2 \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

नोट : विद्यार्थी इसे तथ्य की तरह याद रखें।

19. (a) $(a+c)^2 - b^2 = 3ac \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$

$$\text{किन्तु } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}.$$

20. (c) $\cos A, \cos B$ तथा $\cos C$ के मान रखने पर हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है अर्थात्, $a^2 + b^2 + c^2$.

21. (c) $\left(\frac{b}{a} \cos C + \frac{c}{a} \cos B\right) = 1$; (प्रक्षेप नियम द्वारा).

22. (b) यह स्पष्ट है।

ट्रिक : स्पष्टतः यह समबाहु त्रिभुज नहीं है क्योंकि $A=B=C=60^\circ$ दिये गये प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता है।

किन्तु $B=90^\circ$ तब $\sin^2 B = 1$ तथा

$$\cos^2 A + \cos^2 C = \cos^2 A + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

अतः यह समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः यह समकोण त्रिभुज है, परन्तु आवश्यक नहीं है कि समद्विबाहु हो।

23. (c) $x + 2x + 7x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$

अतः कोण $18^\circ, 36^\circ, 126^\circ$ हैं।

महत्तम भुजा $\propto \sin(126^\circ)$

न्यूनतम भुजा $\propto \sin(18^\circ)$ तथा अनुपात $= \frac{\sin 126^\circ}{\sin(18^\circ)} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

24. (c) $\cos C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$

$$\Rightarrow b^2 + bc + a^2 + ac = ab + ac + bc + c^2$$

$$\Rightarrow b(b+c) + a(a+c) = (a+c)(b+c)$$

दोनों पक्षों को $(a+c)(b+c)$ से भाग देने व 2 जोड़ने पर,

$$1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3 \Rightarrow \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

25. (d) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)(s-b)}{s(s-a)s(s-c)}} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{s-b}{s} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2s - 2b - s = 0 \Rightarrow a + c - 3b = 0.$$

26. (b) $\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{ac(s-b)(s-c)(s-b)(s-a)}{(s-a)(s-c)bc \times ab}} = \frac{s-b}{b}$

किन्तु a, b तथा c स.श्रे. में हैं $\Rightarrow 2b = a + c$

$$\text{अतः } \frac{s-b}{b} = \frac{\frac{3b}{2} - b}{b} = \frac{1}{2}.$$

27. (c) $\tan \frac{B-C}{2} = x \cot \frac{A}{2} \Rightarrow x = \frac{b-c}{b+c}.$

28. (c) $\cos B = \frac{9+25-16}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{18}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin B = \frac{4}{5}$

$$\therefore \sin 2B = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

29. (b) $\cos \theta = \frac{4+6-(\sqrt{3}+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \theta = 75^\circ.$

30. (b) $a^3 \cos(B-C) + b^3 \cos(C-A) + c^3 \cos(A-B)$
 $= k^3 \sin^3 A \cos(B-C) + k^3 \sin^3 B \cos(C-A)$
 $+ k^3 \sin^3 C \cos(A-B)$
 $= \frac{1}{2} k^3 [\sin^2 A (\sin 2B + \sin 2C) + \sin^2 B (\sin 2C + \sin 2A)$
 $+ \sin^2 C (\sin 2A + \sin 2B)]$

$$= k^3 [\sin A \sin B (\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$

 $+ \sin B \sin C (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$
 $+ \sin C \sin A (\sin C \cos A + \cos C \sin A)]$
 $= k^3 [\sin A \sin B \sin C + \sin B \sin C \sin A + \sin C \sin A \sin B]$
 $= 3k^3 \sin A \sin B \sin C = 3abc.$

31. (b) $\cos \theta = \frac{49+16 \cdot 3-13}{2 \cdot 7 \cdot 4 \sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ.$

32. (c) माना भुजायें $a-d, a, a+d$ हैं और चूँकि यह समकोण त्रिभुज है
 $\therefore (a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$
 $\Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$
 $\Rightarrow a = 4d \Rightarrow d = \frac{a}{4}.$

अतः भुजायें $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$ हैं, अर्थात् अनुपात $3:4:5$ में हैं।

33. (d) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
 $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(47)^2 + (94)^2 - c^2}{2 \times 47 \times 94} \Rightarrow c = 58.24$

$\angle B = 124^\circ$, अतः अधिककोण त्रिभुज है।

34. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

35. (b) $\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, c = 20,$

$$\text{तब } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = 10 \text{ तथा } b = \frac{c \sin B}{\sin C} = 10\sqrt{3}.$$

ट्रिक : कोण $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ हैं। अतः भुजायें $1:\sqrt{3}:2$ होनी चाहिये। अतः $a = 10, b = 10\sqrt{3}.$

36. (b) $c \cos(A-\alpha) + a \cos(C+\alpha) = c(\cos A \cos \alpha + \sin A \sin \alpha)$
 $+ a(\cos C \cos \alpha - \sin C \sin \alpha)$
 $= \cos \alpha (c \cos A + a \cos C) + c \sin A \sin \alpha - a \sin C \sin \alpha$
 $\Rightarrow b \cos \alpha + kac \sin \alpha - kac \sin \alpha = b \cos \alpha.$

37. (b) $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$38. (a) \Sigma a^2 (\cos^2 B - \cos^2 C) = \Sigma a^2 (\sin^2 C - \sin^2 B)$$

$$= k^2 \Sigma a^2 (c^2 - b^2) = 0$$

$$39. (d) \frac{1 + \cos C \cos(A - B)}{1 + \cos(A - C) \cos B} = \frac{1 - \cos(A + B) \cos(A - B)}{1 - \cos(A - C) \cos(A + C)}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos^2 A + \sin^2 B}{1 - \cos^2 A + \sin^2 C} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 C} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$$

$$40. (b) \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{b+c}{a}$$

$$41. (a) (b^2 - c^2) \cot A = (b^2 - c^2) \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc \cdot ka}$$

$$\text{अतः L.H.S.} = \frac{1}{2k \cdot abc}$$

$$[(b^4 - c^4) + (c^4 - a^4) + (a^4 - b^4) - \{a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2)\}] = 0$$

$$42. (d) \frac{\sin 3B}{\sin B} = \frac{3 \sin B - 4 \sin^3 B}{\sin B} = 3 - 4 \sin^2 B$$

$$= 3 - 4 + 4 \cos^2 B = -1 + \frac{4(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4(ac)^2}$$

$$= -1 + \frac{\left(\frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2}{(ac)^2} = -1 + \frac{(a^2 + c^2)^2}{4(ac)^2}$$

$$= \frac{(a^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2}{4(ac)^2} = \left(\frac{c^2 - a^2}{2ac}\right)^2$$

$$43. (c) \text{ माना } \cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2} \text{ तथा } \cot \frac{C}{2} \text{ स.श्रे. में हैं}$$

$$\text{तब, } 2 \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} + \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$\text{R.H.S.} = \sqrt{\frac{s}{(s-b)}} \left(\sqrt{\frac{(s-c)}{(s-a)}} + \sqrt{\frac{(s-a)}{(s-c)}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{s}{s-b}} \left(\frac{s-c+s-a}{\sqrt{(s-a)(s-c)}} \right) = \sqrt{\frac{s}{s-b}} \left(\frac{2s-a-c}{\sqrt{(s-a)(s-c)}} \right)$$

$$= 2 \sqrt{\frac{s}{(s-b)}} \sqrt{\frac{(s-b)^2}{(s-a)(s-c)}}$$

$$\{\because a+c=2b, a+b+c=2s \text{ अर्थात्, } 2(s-b)=2s-a-c\}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} = \text{L.H.S.}$$

नोट : विधार्थी इसे तथ्य मानकर याद रखें।

$$44. (b) \text{ कोण } x + 2x + 3x = 180^\circ \text{ या } 30^\circ, 60^\circ \text{ तथा } 90^\circ \text{ हैं अतः भुजायें}$$

$$\sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ \text{ के अनुपात में हैं।}$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

नोट : चूँकि यह एक तथ्य है, जिसका कई प्रश्नों में प्रयोग किया जाता है।

$$45. (c) \frac{2 \cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2 \cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$$

$$\Rightarrow \frac{2(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}$$

$$= \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$$

$$\Rightarrow \frac{3b^2 + c^2 + a^2}{2abc} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \Rightarrow \frac{3b}{2ac} + \frac{c}{2ab} + \frac{a}{2bc} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ अतः } \angle A = 90^\circ$$

$$46. (d) \cos C = \frac{2}{3} = \frac{81 + 64 - x^2}{2 \cdot 9 \cdot 8} \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

$$47. (a) \tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cot \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = 15^\circ \Rightarrow A = 30^\circ$$

$$48. (a) a \frac{s(s-c)}{ab} + c \frac{s(s-a)}{bc} = \frac{3b}{2}$$

$$\Rightarrow 2s(s-c+s-a) = 3b^2 \Rightarrow 2s(b) = 3b^2 \Rightarrow 2s = 3b$$

$$\Rightarrow a+b+c = 3b \Rightarrow a+c = 2b \Rightarrow a, b, c \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

$$49. (d) \text{ चूँकि कोण स.श्रे. में हैं, अतः } B = 60^\circ$$

$$\text{तथा } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow C = 45^\circ, \text{ अतः } A = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

$$50. (c) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ का प्रयोग करने पर।}$$

$$51. (b) \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b} \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{A+B}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$52. (a) \text{ चूँकि } A, B \text{ व } C \text{ स.श्रे. में हैं, अतः } B = 60^\circ \text{ और } b^2 = ac$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2b^2}, (\because b^2 = ac)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$$

$$53. (b) \text{ महत्तम भुजा } \sqrt{p^2 + pq + q^2} \text{ है। यदि महत्तम कोण } \theta \text{ है,}$$

$$\text{तब } \cos \theta = \frac{p^2 + q^2 - p^2 - pq - q^2}{2pq} = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$54. (b) \sqrt{\frac{b+c}{4c}} = \sqrt{\frac{\sin 3C + \sin C}{4 \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \sin 2C \cos C}{4 \sin C}} = \cos C$$

$$\frac{b-c}{2c} = \frac{\sin 3C - \sin C}{2 \sin C} = \frac{2 \cos 2C \sin C}{2 \sin C} = \cos 2C = \sin \frac{A}{2}$$

$$55. (a) (b-c) \cot \frac{A}{2} = k(\sin B - \sin C) \cot \frac{A}{2}$$

$$= 2k \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2} \cot \frac{A}{2}$$

$$= 2k \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= 2k \sin \left(\frac{B-C}{2} \right) \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = 2k \left(\sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \right)$$

$$\text{अतः L.H.S.} = \sum 2k \left(\sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \right) = 0.$$

$$56. (a) 2a^2b^2 + 2b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4$$

$$\text{साथ ही, } (a^2 - b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2)$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 2c^2a^2 \Rightarrow \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ca} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos B$$

$$\Rightarrow B = 45^\circ \text{ या } 135^\circ.$$

$$57. (b) \Delta = 10\sqrt{3}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C \Rightarrow ab = 20\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 40 \quad \dots(i)$$

$$a+b+c=20 \text{ या } a+b=(20-c)$$

$$\text{अब, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = ab + 2ab = 3ab$$

$$\Rightarrow (20-c)^2 - c^2 = 3(40) \Rightarrow -40c + 400 = 120 \Rightarrow c = 7.$$

$$58. (a) A+C=2B \Rightarrow B=60^\circ, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\therefore B=60^\circ \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac$$

$$\text{अतः } \frac{a+c}{\sqrt{a^2 - ac + c^2}} = \frac{a+c}{b} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$$

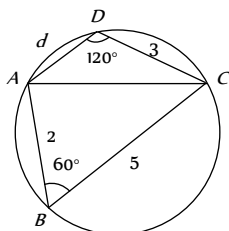
$$= \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A+C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin 30^\circ} = 2 \cos \frac{A-C}{2}$$

$$59. (a) \text{ माना चतुर्थ भुजा की लंबाई 'd' है।}$$

$$\text{हमें ज्ञात है, कि } AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ = AC^2$$

$$= CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cos 120^\circ, \text{ (कोज्या सूत्र से)}$$



$$\text{या } 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 9 + d^2 + 3d$$

$$\Rightarrow d^2 + 3d - 10 = 0 \Rightarrow d = -5 \text{ या } d = 2; \therefore d = 2.$$

$$60. (a) \cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{9 + c^2 - 16}{2 \cdot 3c} \Rightarrow c^2 - 3c - 7 = 0.$$

$$61. (d) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -1$$

$$\Rightarrow \angle C = 180^\circ, \text{ जो कि त्रिभुज के लिए संभव नहीं है।}$$

$$62. (b) \text{ यहाँ } b \sin A = 8 \sin 30^\circ = 4, a = 7$$

$$\text{अतः } b > a > b \sin A$$

$$\text{अतः त्रिभुज के दो हल हैं।}$$

$$63. (d) \text{ यहाँ } c \sin B = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} > b (= 3)$$

$$\text{अतः } b < c \sin B.$$

$$\text{अतः कोई त्रिभुज संभव नहीं है, अर्थात् त्रिभुजों के निर्धारण की संख्या शून्य है।}$$

$$64. (c) \sin^2 B - \sin^2 A = \sin^2 C - \sin^2 B$$

$$\therefore \sin(B+A) \sin(B-A) = \sin(C+B) \sin(C-B)$$

$$\text{या } \sin C (\sin B \cos A - \cos B \sin A)$$

$$= \sin A (\sin C \cos B - \cos C \sin B)$$

$$\sin A \sin B \sin C \text{ से भाग देने पर,}$$

$$\cot A - \cot B = \cot B - \cot C$$

$$\text{अतः } \cot A, \cot B, \cot C \text{ समांतर श्रेणी में हैं।}$$

$$65. (d) \text{ माना } \triangle ABC \text{ की भुजायें } a=n, b=n+1, c=n+2 \text{ हैं जहाँ } n \text{ एक प्राकृत संख्या है। चूँकि } C=2A, \text{ अतः } C \text{ महत्तम व } A \text{ न्यूनतम कोण है।}$$

$$\therefore \sin C = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\therefore kc = 2ka \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ या } bc^2 = a(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$a, b, c, \text{ का मान प्रतिस्थापित करने पर,}$$

$$(n+1)(n+2)^2 = n[(n+1)^2 + (n+2)^2 - n^2]$$

$$\text{या } (n+1)(n+2)^2 = n(n^2 + 6n + 5) = n(n+1)(n+5)$$

$$\therefore n \neq -1, \text{ अतः हम } n+1 \text{ को निरस्त कर सकते हैं।}$$

$$\text{इस प्रकार, } (n+2)^2 = n(n+5)$$

$$\text{या } n^2 + 4n + 4 = n^2 + 5n, \text{ जिससे } n=4 \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\text{अतः भुजायें 4, 5 व 6 हैं।}$$

$$66. (a) \text{ दिये गये संबंध द्वारा, } \sin C = \frac{1 - \cos A \cos B}{\sin A \sin B} \leq 1 \quad \dots(i)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) \geq 1; \therefore \cos \theta \neq 1$$

$$\dots(ii)$$

$$\therefore A-B=0 \text{ या } A=B$$

$$\text{अतः (i) द्वारा, } \sin C = \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} = 1$$

$$\therefore C=90^\circ \Rightarrow A+B=90^\circ \text{ या } A=B=45^\circ \text{ \{ (ii) द्वारा \}}$$

$$\text{अतः } a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C = 1:1:\sqrt{2}.$$

$$67. (d) \frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c} \Rightarrow \frac{\cos A}{k \sin A} = \frac{\cos B}{k \sin B} = \frac{\cos C}{k \sin C}$$

$$\Rightarrow \cot A = \cot B = \cot C \Rightarrow A=B=C=60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ समबाहु है।

$$\therefore \Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3}.$$

68. (a) हमें ज्ञात है कि $a + b + c = \frac{6(\sin A + \sin B + \sin C)}{3}$

$$\Rightarrow k(\sin A + \sin B + \sin C) = 2(\sin A + \sin B + \sin C),$$

$$\text{जहाँ } k = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow k = 2, (\because \sin A + \sin B + \sin C \neq 0)$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}, (\because a = 1)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{6}.$$

69. (c) $\triangle ADC$ से, $\frac{\sin(y+z)}{DC} = \frac{\sin C}{AD}$

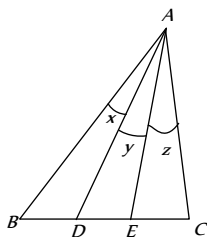
$$\triangle ABD \text{ से, } \frac{\sin x}{BD} = \frac{\sin B}{AD}$$

$$\triangle AEC \text{ से, } \frac{\sin z}{EC} = \frac{\sin C}{AE}$$

$$\triangle ABE \text{ से, } \frac{\sin(x+y)}{BE} = \frac{\sin B}{AE}$$

$$\therefore \frac{\sin(x+y)\sin(y+z)}{\sin x \sin z}$$

$$= \frac{BE}{AE} \times \frac{DC}{AD} \times \frac{AD}{BD} \times \frac{AE}{EC} = \frac{2BD \times 2EC}{BD \times EC} = 4.$$



70. (a) $\cos A + 2 \cos B + \cos C = 2$

$$\Rightarrow \cos A + \cos C = 2(1 - \cos B)$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 4 \sin \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin C = 2 \sin B \Rightarrow a + c = 2b$$

$$\Rightarrow a, b, c \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

71. (c) $\because \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$

$$\Rightarrow 4 \sin \frac{3A}{2} \sin \frac{3B}{2} \sin \frac{3C}{2} = 0$$

$$\text{या तो } \frac{3A}{2} = 180^\circ \text{ या } \frac{3B}{2} = 180^\circ \text{ या } \frac{3C}{2} = 180^\circ$$

$$\text{या तो } A = 120^\circ \text{ या } B = 120^\circ \text{ या } C = 120^\circ.$$

72. (b) $\because A, B, C$ स.श्रे. में हैं, अतः $B = 60^\circ$

$$[\because A + B + C = 180 \text{ तथा } A + C = 2B]$$

$$\text{अब } \sin(2A + B) = \frac{1}{2}, (\text{दिया गया है})$$

$$\Rightarrow 2A + B = 30^\circ \text{ या } 150^\circ$$

किन्तु चूँकि $B = 60^\circ, 2A + B \neq 30^\circ$.

$$\therefore 2A + B = 150^\circ \Rightarrow A = 45^\circ$$

$$\text{अतः } A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ.$$

73. (d) हमें ज्ञात है कि, $\frac{\tan \left(\frac{B}{2} \right)}{\cot \left(\frac{C-A}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \left(\frac{C-A}{2} \right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \left(\frac{C-A}{2} \right)}$

$$= \frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A} = \frac{kc - ka}{kc + ka} = \frac{c - a}{c + a} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}, \{ \because c = 2a \}.$$

74. (b) $B = 60^\circ, C = 75^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$

$$\text{अब } \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \Rightarrow b = \sqrt{6}.$$

75. (c) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{6} = \frac{2}{3}.$

76. (c) हमें ज्ञात है कि, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin C}{c}$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B = 45^\circ,$$

$$(\because B \neq 135^\circ)$$

$$\therefore A = 180^\circ - (B + C) = 75^\circ$$

$$\text{अब, } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{2 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{3} + 1.$$

77. (a) हमें ज्ञात है कि, $\tan \left(\frac{A-B}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(A-B)}{1 + \cos(A-B)}}$

$$= \sqrt{\frac{1 - (31/32)}{1 + (31/32)}} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow \tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{अब } \cos C = \frac{1 - \tan^2(C/2)}{1 + \tan^2(C/2)} \Rightarrow \cos C = \frac{1 - (7/9)}{1 + (7/9)} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 + 16 - 40 \times \frac{1}{8} = 36 \Rightarrow c = 6.$$

78. (b) हमें ज्ञात है कि, $\tan \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{A}{2}$

$$\therefore \tan \left(\frac{C-B}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1 - 2}{\sqrt{3} + 1 + 2} \cot 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{C-B}{2} = 30^\circ.$$

79. (c) माना $A = 6 + \sqrt{12}, b = \sqrt{48}, c = \sqrt{24}$. स्पष्टतः c न्यूनतम भुजा है, अतः न्यूनतम कोण C है

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}.$$

80. (b) चूँकि $C = 90^\circ$

$$\text{अतः } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{7\sqrt{3} \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

68. (a) हमें ज्ञात है कि $a + b + c = \frac{6(\sin A + \sin B + \sin C)}{3}$

$$\Rightarrow k(\sin A + \sin B + \sin C) = 2(\sin A + \sin B + \sin C),$$

$$\text{जहाँ } k = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow k = 2, (\because \sin A + \sin B + \sin C \neq 0)$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}, (\because a = 1)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{6}.$$

69. (c) $\triangle ADC$ से, $\frac{\sin(y+z)}{DC} = \frac{\sin C}{AD}$

$$\triangle ABD \text{ से, } \frac{\sin x}{BD} = \frac{\sin B}{AD}$$

$$\triangle AEC \text{ से, } \frac{\sin z}{EC} = \frac{\sin C}{AE}$$

$$\triangle ABE \text{ से, } \frac{\sin(x+y)}{BE} = \frac{\sin B}{AE}$$

$$\therefore \frac{\sin(x+y)\sin(y+z)}{\sin x \sin z}$$

$$= \frac{BE}{AE} \times \frac{DC}{AD} \times \frac{AD}{BD} \times \frac{AE}{EC} = \frac{2BD \times 2EC}{BD \times EC} = 4.$$

70. (a) $\cos A + 2 \cos B + \cos C = 2$

$$\Rightarrow \cos A + \cos C = 2(1 - \cos B)$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 4 \sin \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \left(2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin C = 2 \sin B \Rightarrow a + c = 2b$$

$$\Rightarrow a, b, c \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

71. (c) $\because \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$

$$\Rightarrow 4 \sin \frac{3A}{2} \sin \frac{3B}{2} \sin \frac{3C}{2} = 0$$

$$\text{या तो } \frac{3A}{2} = 180^\circ \text{ या } \frac{3B}{2} = 180^\circ \text{ या } \frac{3C}{2} = 180^\circ$$

$$\text{या तो } A = 120^\circ \text{ या } B = 120^\circ \text{ या } C = 120^\circ.$$

72. (b) $\because A, B, C$ स.श्रे. में हैं, अतः $B = 60^\circ$

$$[\because A + B + C = 180 \text{ तथा } A + C = 2B]$$

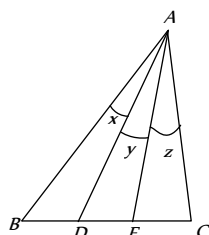
$$\text{अब } \sin(2A + B) = \frac{1}{2}, (\text{दिया गया है})$$

$$\Rightarrow 2A + B = 30^\circ \text{ या } 150^\circ$$

$$\text{किन्तु चूँकि } B = 60^\circ, 2A + B \neq 30^\circ.$$

$$\therefore 2A + B = 150^\circ \Rightarrow A = 45^\circ$$

$$\text{अतः } A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ.$$



73. (d) हमें ज्ञात है कि, $\frac{\tan \left(\frac{B}{2} \right)}{\cot \left(\frac{C-A}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \left(\frac{C-A}{2} \right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \left(\frac{C-A}{2} \right)}$

$$= \frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A} = \frac{kc - ka}{kc + ka} = \frac{c - a}{c + a} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}, \{ \because c = 2a \}.$$

74. (b) $B = 60^\circ, C = 75^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$
अब $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \Rightarrow b = \sqrt{6}.$

75. (c) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{6} = \frac{2}{3}.$

76. (c) हमें ज्ञात है कि, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin C}{c}$
 $\Rightarrow \sin B = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B = 45^\circ,$
 $(\because B \neq 135^\circ)$

$$\therefore A = 180^\circ - (B + C) = 75^\circ$$

$$\text{अब, } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{2 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{3} + 1.$$

77. (a) हमें ज्ञात है कि, $\tan \left(\frac{A-B}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(A-B)}{1 + \cos(A-B)}}$

$$= \sqrt{\frac{1 - (31/32)}{1 + (31/32)}} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow \tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{अब } \cos C = \frac{1 - \tan^2(C/2)}{1 + \tan^2(C/2)} \Rightarrow \cos C = \frac{1 - (7/9)}{1 + (7/9)} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 + 16 - 40 \times \frac{1}{8} = 36 \Rightarrow c = 6.$$

78. (b) हमें ज्ञात है कि, $\tan \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{A}{2}$

$$\therefore \tan \left(\frac{C-B}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1 - 2}{\sqrt{3} + 1 + 2} \cot 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{C-B}{2} = 30^\circ.$$

79. (c) माना $A = 6 + \sqrt{12}, b = \sqrt{48}, c = \sqrt{24}$. स्पष्टतः c न्यूनतम भुजा है, अतः न्यूनतम कोण C है

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}.$$

80. (b) चूँकि $C = 90^\circ$

$$\text{अतः } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{7\sqrt{3} \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

81. (a) स्पष्टतः कोण $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ हैं।

$$\therefore a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3} + 1).$$

82. (b) $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$

$$\therefore \cos A = \frac{6 + 3 + 1 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} \Rightarrow A = 45^\circ.$$

83. (b)
$$\frac{\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} - \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} + \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}}$$

$$= \frac{(s-b)\sqrt{s(s-c)} - (s-a)\sqrt{s(s-c)}}{(s-b)\sqrt{s(s-c)} + (s-a)\sqrt{s(s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s(s-c)}(s-b-s+a)}{\sqrt{s(s-c)}(s-b+s-a)} = \frac{a-b}{c}.$$

84. (b)
$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin(B+C)} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{3}+1)^2 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

85. (a) यदि समकोण त्रिभुज के विपरीत शीर्ष से डाले गये लम्ब की लम्बाई x है, तब विकर्ण AB की लम्बाई $= y_1 + y_2$ (i)

$$\Delta OCB \text{ से, } y_2 = x \cot \theta$$

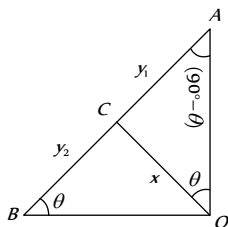
$$\Delta OCA \text{ से, } y_1 = x \tan \theta$$

समीकरण (i) में मान रखने पर,

$$AB = x(\tan \theta + \cot \theta)$$

$\therefore$ कर्ण की लम्बाई $= 4$ (लम्ब की लम्बाई)

$$\therefore x(\tan \theta + \cot \theta) = 4x \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 4$$



$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = 30^\circ \text{ या } \theta = 15^\circ.$$

ट्रिक :
$$\frac{(\text{कर्ण की लम्बाई})}{(\text{विपरीत शीर्ष से कर्ण पर डाले गये लम्ब की लम्बाई})} = \frac{2}{\sin 2\theta}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{2}{\sin 2\theta} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ.$$

86. (b) $A = 45^\circ, C = 60^\circ, A + B + C = \pi \Rightarrow B = 75^\circ$

$$\Rightarrow a + c\sqrt{2} = k \sin A + k \sin C(\sqrt{2})$$

$$= k \sin 45^\circ + \sqrt{2}k \sin 60^\circ$$

$$= 2k \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right) = 2k \sin 75^\circ = 2k \sin B$$

$$\therefore a + c\sqrt{2} = 2b.$$

87. (c) माना त्रिभुज की भुजायें a, b, c क्रमशः 3, 5 और 7 हैं।

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9 + 25 - 49}{2 \times 3 \times 5} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$$\angle C = \frac{2\pi}{3} \text{ (महत्तम कोण)।}$$

88. (b) दिया गया है, $\angle C = 45^\circ$

$$\therefore A + B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\therefore \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\Rightarrow \cot(135^\circ) = -1 = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B = 1 - \cot A \cot B$$

$$\Rightarrow 1 + \cot A + \cot B + \cot A \cot B = 2$$

$$\Rightarrow (1 + \cot A)(1 + \cot B) = 2.$$

89. (a) ज्या (sine) सूत्र का प्रयोग करने पर, $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$ या

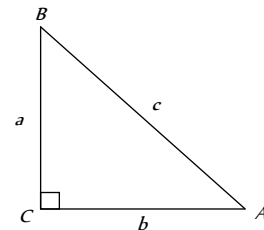
$$\frac{\sin B}{8} = \frac{5/13}{3} \text{ या } \sin B = \frac{40}{39} > 1, \text{ जोकि संभव नहीं है।}$$

अतः दिये गये प्रतिबंधानुसार कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

90. (b) $2ac \sin \frac{A-B+C}{2} = 2ac \sin \frac{\pi-2B}{2} = 2ac \cos B$

$$= 2ac \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c^2 + a^2 - b^2.$$

91. (d) दिया गया है, कि समकोण त्रिभुज ABC का कोण C समकोण है।



माना भुजाओं BC, CA और AB की लम्बाईयाँ क्रमशः a, b तथा c हैं। पाइथागोरस प्रमेय से हमें ज्ञात है कि $c^2 = a^2 + b^2$ तथा

$$\tan A = \frac{a}{b}.$$

इसी प्रकार, $\tan B = \frac{b}{a}.$

$$\therefore \tan A + \tan B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{c^2}{ab}.$$

92. (c) $\therefore A : B : C = 3 : 5 : 4$

$$\Rightarrow A + B + C = 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ, B = 75^\circ, C = 60^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} = K, \text{ (माना)}$$

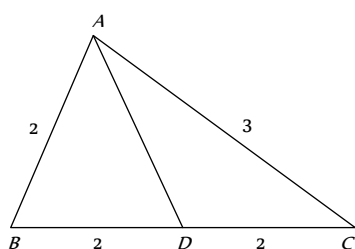
$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}K, b = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}K, c = \frac{\sqrt{3}}{2}K$$

$$\therefore a + b + c\sqrt{2} = 3b.$$

$$\begin{aligned}
 93. \quad (b) \quad & \frac{\cos C + \cos A}{c+a} + \frac{\cos B}{b} \\
 &= \frac{(b \cos C + c \cos B) + (b \cos A + a \cos B)}{b(c+a)} \\
 &= \frac{a+c}{b(c+a)}, \text{ (प्रक्षेप सूत्र द्वारा)} \\
 &= \frac{1}{b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 94. \quad (a) \quad & \text{माना } x + 3x + 5x = 180^\circ \Rightarrow 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \\
 & \therefore \text{महत्तम कोण} = \frac{5\pi}{9}.
 \end{aligned}$$

$$95. \quad (d) \quad \cos B = \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 4} = \frac{11}{16}$$



$$\therefore \frac{11}{16} = \frac{2^2 + 2^2 - AD^2}{2 \times 2 \times 2} \Rightarrow AD^2 = 2.5.$$

$$\begin{aligned}
 96. \quad (a) \quad & 4x + x + x = 180^\circ \Rightarrow 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \\
 & \frac{\sin 120^\circ}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{b} = \frac{\sin 30^\circ}{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a : (a+b+c) &= (\sin 120^\circ) : (\sin 120^\circ + \sin 30^\circ + \sin 30^\circ) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3} : (\sqrt{3}+2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 97. \quad (b) \quad & \text{ट्रिक : } A = B = C = 60^\circ \text{ रखने पर, } \cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2} \text{ तथा} \\
 & \cot \frac{C}{2} \text{ स.श्रे. में हैं जिसका सार्वअन्तर शून्य है।}
 \end{aligned}$$

स्पष्टतः विकल्प (b) सही है।

$$\begin{aligned}
 98. \quad (a) \quad & \text{न्यूनतम कोण, न्यूनतम भुजा के सामने होता है} \\
 \therefore \cos C &= \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 48 - 13}{2 \times 7 \times 4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Rightarrow \angle C &= 30^\circ.
 \end{aligned}$$

$$99. \quad (b) \quad \frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \lambda, \text{ (माना)}$$

$$\therefore b+c = 11\lambda$$

....(i)

$$c+a = 12\lambda$$

....(ii)

$$\text{तथा } a+b = 13\lambda$$

....(iii)

$$(i) + (ii) + (iii) \text{ से, } 2(a+b+c) = 36\lambda,$$

$$\therefore a+b+c = 18\lambda$$

....(iv)

$$(iv) - (i) \Rightarrow a = 7\lambda$$

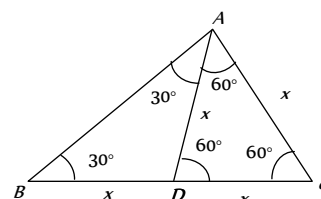
$$(iv) - (ii) \Rightarrow b = 6\lambda$$

$$(iv) - (iii) \Rightarrow c = 5\lambda$$

$$\begin{aligned}
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(7\lambda)^2 + (6\lambda)^2 - (5\lambda)^2}{2 \times (7\lambda) \times (6\lambda)} \\
 &= \frac{49\lambda^2 + 36\lambda^2 - 25\lambda^2}{84\lambda^2} = \frac{60\lambda^2}{84\lambda^2} = \frac{5}{7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 100. \quad (b) \quad & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\
 \Rightarrow a^2 &= (20)^2 + (21)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 21 \cdot \frac{4}{5} = 169 \Rightarrow a = 13.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 101. \quad (b) \quad & \cos 120^\circ = \frac{x^2 + x^2 - AB^2}{2x^2} \\
 \Rightarrow \frac{2x^2 - AB^2}{2x^2} &= \frac{-1}{2} \Rightarrow 4x^2 - 2AB^2 = -2x^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 3x^2 &= AB^2 \Rightarrow AB = x\sqrt{3} \\
 \Rightarrow a^2 : b^2 : c^2 &= (2x)^2 : x^2 : (x\sqrt{3})^2 \\
 &= 4x^2 : x^2 : 3x^2 = 4 : 1 : 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 102. \quad (d) \quad & \text{हमें ज्ञात है कि } a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2 \\
 \text{अर्थात् } a &= \lambda, b = \sqrt{3}\lambda, c = 2\lambda
 \end{aligned}$$

$$\cos A = \frac{3\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^2}{2(\sqrt{3}\lambda)(2\lambda)} = \frac{6\lambda^2}{4\sqrt{3}\lambda^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ$$

$$\text{इसी तरह } \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^\circ, \cos C = 0 \Rightarrow C = 90^\circ.$$

$$\text{अतः } A : B : C = 1 : 2 : 3.$$

$$103. \quad (d) \quad \text{हमें ज्ञात है कि } b = \sqrt{3}, c = 1, \angle A = 30^\circ$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1}$$

$$\therefore a = 1, b = \sqrt{3}, c = 1.$$

b महत्तम भुजा है। अतः महत्तम कोण B दिया जा सकता है।

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1+1-3}{2 \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore B = 120^\circ.$$

$$104. \quad (c) \quad \text{माना } a = \alpha - \beta, b = \alpha + \beta, c = \sqrt{3\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 3\alpha^2 - \beta^2}{2(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$\Rightarrow \cos C = -\frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \angle C = \frac{2\pi}{3}, \text{ (महत्तम कोण).}$$

105. (b) हमें ज्ञात है कि, $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 6\text{ cm}$

$$\text{अर्ध-परिमाप (s)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+5+6}{2} = \frac{15}{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 4 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 6 \right)} = \frac{15}{4} \sqrt{7} \text{ सेमी.}$$

106. (a) हमें ज्ञात है कि,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= 3 - [\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma] - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= 3 - \left[\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} \right]$$

$$- 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= 3 - \frac{1}{2} [3 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma] - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= 3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \frac{1}{2} \cos 2\gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [-2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta)] - \frac{1}{2} [2 \cos^2 \gamma - 1]$$

$$- 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= \frac{3}{2} + \cos \gamma \cos(\alpha - \beta) - \cos^2 \gamma + \frac{1}{2} - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= 2.$$

107. (c) हमें ज्ञात है कि, $a = 6, b = 3, \cos(A - B) = \frac{4}{5}$

$$\text{माना } t = \tan\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\cos(A - B) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{A - B}{2}\right) = \frac{1}{3}. \text{ तब, } \tan\left(\frac{A - B}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{6 - 3}{6 + 3} \cot \frac{C}{2} \Rightarrow C = 90^\circ$$

$$\text{अतः } \Delta = \frac{1}{2} (6)(3) \sin 90^\circ = 9 \text{ वर्ग इकाई.}$$

108. (b) $\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = \cos \frac{2A}{2} = \cos A.$

109. (c) दिया गया है कि, $C = 60^\circ, a = 2, b = 4$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ या } ab = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow 8 = 4 + 16 - c^2 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{और } \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}.$$

110. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

$$\text{111. (c) } \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A - B)}{\sin C} = \frac{\sin(A - B) \sin(A + B)}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \sin(A - B) \left[\frac{1}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B} \right] = 0$$

या तो $\sin(A - B) = 0 \Rightarrow A = B$ अर्थात् समद्विबाहु या $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ या $a^2 + b^2 = c^2$ अर्थात् समकोण त्रिभुज है।

112. (c) $b = 4$ सेमी $\Rightarrow a = 1 \times 2, c = 3 \times 2$

$$\text{अतः परिमाप} = 2 + 4 + 6 = 12 \text{ सेमी.}$$

113. (c) माना भुजायें $5x, 12x, 13x$ हैं।

स्पष्टतः त्रिभुज समकोण है।

$$\text{अतः } \Delta = \frac{1}{2} (12x)(5x) \Rightarrow 30x^2 = 270 \Rightarrow x = 3$$

अतः भुजायें 15, 36, 39 हैं।

$$\text{114. (b) } \cos A = \frac{\sin B}{2 \sin C} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{2c}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow c^2 = a^2.$$

$$\text{115. (b) } \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow 9 = \frac{1}{2} \cdot 36 \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

$$\text{116. (a) } \cos \theta = \frac{36 + 100 - (14)^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} \Rightarrow \theta = 120^\circ.$$

$$\text{117. (b) } \sin A \cos B - \cos A \sin B = 0$$

$$\Rightarrow \sin(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \text{ अर्थात् समद्विबाहु त्रिभुज है।}$$

$$\text{118. (c) } a^2 = b^2 \Rightarrow a = b.$$

$$\text{119. (b) } \text{दिये गये संबंध में } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ रखने पर,}$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$$

$$\Rightarrow (b - c)^2 (b + c - a) + (c - a)^2 (c + a - b)$$

$$+ (a - b)^2 (a + b - c) = 0 \quad \dots(i)$$

त्रिभुज में, $b + c - a > 0$ इत्यादि। अतः समीकरण (i) संतुष्ट होगा यदि प्रत्येक गुणांक शून्य इस प्रकार हों कि $a = b = c$.

$$\text{120. (d) } \tan A = \tan(\pi - B - C); \quad \infty = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$$

$$\Rightarrow 1 - \tan B \tan C = 0 \Rightarrow \tan B \tan C = 1.$$

121. (b) दिया गया है कि, $2b = a + c$ और $c = 7$ सेमी.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{a^2 + \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4} - c^2}{2a \cdot \frac{(a+c)}{2}}$$

हल करने पर तथा c का मान रखने पर हमें $a = 3$ और

$b = 5$ प्राप्त होता है। अतः क्षेत्रफल $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ सेमी है।

$$122. (c) \Delta = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow \frac{1}{2}k^2 \sin B \sin C \sin A = \Delta$$

$$\begin{aligned} a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A &= 2(a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A) \\ &= 2k^2(\sin^2 A \sin B \cos B + \sin^2 B \sin A \cos A) \\ &= 2k^2(\sin A \sin B)(\sin C) = 2k^2(\sin A \sin B \sin C) = 4\Delta. \end{aligned}$$

$$123. (a) \tan \alpha = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \alpha = 2.$$

124. (b) यह स्पष्ट है।

$$\begin{aligned} 125. (c) ab^2 \cos A + ba^2 \cos B + ac^2 \cos A + ca^2 \cos C \\ + bc^2 \cos B + b^2c \cos C \\ = ab(b \cos A + a \cos B) + ac(c \cos A + a \cos C) \\ + bc(c \cos B + b \cos C) \\ = abc + abc + abc = 3abc. \end{aligned}$$

$$126. (c) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 - (b^2 - c^2)}{2ac}$$

$$\text{अब, } AD = \frac{abc}{b^2 - c^2}; \therefore \cos B = \frac{a^2 - \frac{abc}{AD}}{2ac}$$

$$\text{साथ ही, } AD = b \sin 23^\circ; \therefore \cos B = \frac{a - \frac{c}{\sin 23^\circ}}{2c}$$

$$\text{ज्या (Sine) सूत्र द्वारा, } \frac{a}{c} = \frac{\sin(B + 23^\circ)}{\sin 23^\circ}$$

$$\therefore \cos B = \left(\frac{\sin(B + 23^\circ)}{\sin 23^\circ} - \frac{1}{\sin 23^\circ} \right) \div 2$$

$$\Rightarrow \sin(23^\circ - B) = -1 = \sin(-90^\circ)$$

$$\therefore 23^\circ - B = -90^\circ \text{ या } B = 113^\circ.$$

$$127. (d) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{(b \sin A)}{a} = \frac{(4\sqrt{3} \sin 60^\circ)}{5} = \frac{6}{5} > 1,$$

जोकि असंगत है।

$$128. (b) \Delta = 2bc - (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\Delta = 2bc(1 - \cos A) = 2bc \cdot 2 \sin^2 \frac{A}{2} \quad \dots(i)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}(bc)2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$\Delta = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \quad \dots(ii)$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{4} = t, \quad \{(i) \text{ और } (ii) \text{ के द्वारा}\}$$

$$\tan A = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{8}{15}.$$

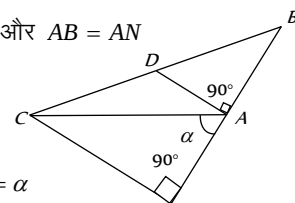
$$129. (d) \Delta \text{ समकोण है, } \angle C = 90^\circ; \therefore 4\Delta^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right)^2 = a^2b^2.$$

$$130. (b) \text{ हमें ज्ञात है कि } \frac{1}{2}ap_1 = \Delta, \frac{1}{2}bp_2 = \Delta, \frac{1}{2}cp_3 = \Delta$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{2\Delta}{a}, p_2 = \frac{2\Delta}{b}, p_3 = \frac{2\Delta}{c}$$

$$\therefore \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta^2}.$$

131. (c) हमें ज्ञात है कि $BD = DC$ और $\angle DAB = 90^\circ$. BA के अतिरिक्त भाग पर से लम्ब CN डाला। तब $\triangle BCN$ में,
 $DA = \frac{1}{2}CN$ और $AB = AN$



माना $\angle CAN = \alpha$

$$\therefore \tan A = \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha = -\frac{CN}{NA} = -2 \frac{AD}{AB} = -2 \tan B$$

$$\Rightarrow \tan A + 2 \tan B = 0.$$

132. (a) हमें ज्ञात है कि,

$$2s = a + b + c, A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$\therefore$ समान्तर श्रेणी $\geq$ गुणोत्तर श्रेणी

$$\Rightarrow \frac{s-a+s-b+s-c}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{3s-2s}{3} \geq \frac{(A^2)^{1/3}}{s^{1/3}} \Rightarrow \frac{s}{27} \geq \frac{A^2}{s} \Rightarrow A \leq \frac{s^2}{3(\sqrt{3})}.$$

$$133. (b) s-a=3 \Rightarrow b+c-a=6 \quad \dots(i)$$

$$s-c=2 \Rightarrow a+b-c=4 \quad \dots(ii)$$

इन दो समीकरणों को जोड़ने पर हमें $b = 5$ प्राप्त होता है।
चूँकि B समकोण है,

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 25 \quad \dots(iii)$$

हल करने पर हमें $a = 3, c = 4$ प्राप्त होता है।

134. (c) दिया गया है कि $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \triangle DEF$ का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(AB)(AC) \sin A = \frac{1}{2}(DE)(EF) \sin E$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin E \Rightarrow \sin 2E = \sin E \Rightarrow 2E = \pi - E$$

$$\Rightarrow E = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A = 2E = \frac{2\pi}{3}.$$

$$135. (a) \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{b} \sin B > 1$$

($\because b < c \sin B$), जोकि संभव नहीं है।

अतः कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

$$136. (c) \text{ माना } a = 3x + 4y, b = 4x + 3y \text{ और } c = 5x + 5y$$

स्पष्टतः c महत्तम भुजा है, अतः महत्तम कोण C निम्न प्रकार दिया जा सकता है।

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-2xy}{2(12x^2 + 25xy + 12y^2)} < 0$$

$\Rightarrow C$ अधिक कोण है।

ट्रिक : $x = 1, y = 1$ रखकर निरीक्षण करते हैं।

$$137. (b) \text{ हमें ज्ञात है कि } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow b^2 - 2bc \cos A + (c^2 - a^2) = 0$$

यह दिया गया है कि इस समीकरण के मूल b_1 और b_2 हैं।

अतः $b_1 + b_2 = 2c \cos A$ और $b_1 b_2 = c^2 - a^2$

$$\Rightarrow 3b_1 = 2c \cos A, 2b_1^2 = c^2 - a^2, (\because \text{दिया है } b_2 = 2b_1)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{2c}{3} \cos A\right)^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow 8c^2(1 - \sin^2 A) = 9c^2 - 9a^2$$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{\frac{9a^2 - c^2}{8c^2}}$$

138. (a) हमें ज्ञात है कि, $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow c^2 - 2bc \cos A + (b^2 - a^2) = 0$$

यह दिया गया है कि c_1 और c_2 इस समीकरण के मूल हैं। अतः

$$c_1 + c_2 = 2b \cos A \text{ और } c_1 c_2 = b^2 - a^2$$

$$\Rightarrow k(\sin C_1 + \sin C_2) = 2k \sin B \cos A$$

$$\Rightarrow \sin C_1 + \sin C_2 = 2 \sin B \cos A$$

$$\Rightarrow \text{दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग}$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C_1 + \frac{1}{2} ab \sin C_2 = \frac{1}{2} ab(\sin C_1 + \sin C_2)$$

$$= \frac{1}{2} ab(2 \sin B \cos A) = ab \sin B \cos A$$

$$= b(a \sin B) \cos A = b(b \sin A) \cos A = \frac{1}{2} b^2 \sin 2A$$

139. (c) $2 \cos A = \frac{\sin B}{\sin C} \Rightarrow \frac{2(c^2 + b^2 - a^2)}{2bc} = \frac{b}{c}$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 \Rightarrow c = a$$

140. (b) $\cos C = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} \Rightarrow C = 120^\circ$

141. (c) यह प्रतिबंधित सर्वसमिका है।

142. (a) दिया गया है $\tan \frac{P}{2} + \tan \frac{Q}{2} = -\frac{b}{a}$ और $\tan \frac{P}{2} \tan \frac{Q}{2} = \frac{c}{a}$

$$\text{या } \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{b}{a}, \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{b}{a} \dots (i)$$

$$\text{इसी प्रकार, } \frac{\tan \frac{\alpha}{2} \left(1 - \tan \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{a} \dots (ii)$$

$$\text{समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर, } \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow -b + c = a \Rightarrow c = a + b$$

143. (b) $\sin P, \sin Q, \sin R$ स.श्रे. में हैं।

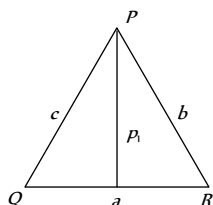
$$\Rightarrow a, b, c \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

$$\therefore \frac{\sin P}{a} = \frac{\sin Q}{b} = \frac{\sin R}{c} = \lambda$$

माना p_1, p_2, p_3 क्रमशः P, Q, R से डाले गये लम्ब हैं

$$p_1 = c \sin Q = \lambda bc,$$

$$p_2 = a \sin R = \lambda ac,$$



$$p_3 = b \sin P = \lambda ab$$

चूँकि a, b, c स.श्रे. में हैं,

$$\text{अतः } \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ ह.श्रे. में होंगे।}$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{a}, \frac{abc}{b}, \frac{abc}{c} \text{ ह.श्रे. में हैं } \Rightarrow bc, ac, ab \text{ ह.श्रे. में हैं।}$$

$$\Rightarrow \lambda bc, \lambda ac, \lambda ab \text{ ह.श्रे. में हैं } \Rightarrow p_1, p_2, p_3 \text{ ह.श्रे. में हैं।}$$

144. (a) $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin B \cos C - \cos B \sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a \cos B - b \cos A}{b \cos C - c \cos B}, \text{ (ज्या (sine) सूत्र द्वारा)}$$

$$\Rightarrow ab \cos C - ac \cos B = ac \cos B - bc \cos A$$

$$\Rightarrow ab \cos C + bc \cos A = 2ac \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{1}$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2, b^2, c^2 \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

145. (a) कोज्या (cosine) सूत्र द्वारा, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

या $b^2 - (2c \cos A)b + (c^2 - a^2) = 0$, जोकि b में द्विघातीय है।

$$\therefore c \sin A < a < c$$

$\therefore$ दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। किन्तु यह तभी संभव है जब तीसरी भुजा के दो मान प्राप्त होते हैं। स्पष्टतः भुजा b के दो मान b_1 और b_2 होंगे। माना ये मान उपरोक्त समीकरण के मूल हैं,

$$\therefore \text{मूलों का योगफल} = b_1 + b_2 = 2c \cos A$$

146. (d) $a^2 \sin 2C + c^2 \sin 2A = a^2(2 \sin C \cos C) + c^2(2 \sin A \cos A)$

$$= 2a^2 \left(\frac{2\Delta}{ab} \cos C \right) + 2c^2 \left(\frac{2\Delta}{bc} \cos A \right)$$

$$(\because \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A, \therefore \sin C = \frac{2\Delta}{ab}, \sin A = \frac{2\Delta}{bc})$$

$$= 4\Delta \left\{ \frac{a \cos C + c \cos A}{b} \right\} = 4\Delta \left(\frac{b}{b} \right) = 4\Delta$$

147. (c) हमें ज्ञात है कि, $a^2 + b^2 + c^2 - ac - ab\sqrt{3} = 0$

$$\frac{a^2}{4} - ac + c^2 + \frac{3a^2}{4} + b^2 - ab\sqrt{3} = 0$$

$$\left[\frac{a}{2} - c \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}a}{2} - b \right]^2 = 0$$

$$\text{अर्थात् } a = 2c \text{ और } 2b = \sqrt{3}a \text{ अर्थात्, } b^2 + c^2 = a^2$$

अतः त्रिभुज समकोण है।

148. (c) हमें ज्ञात है कि, $a = 1, b = 2, \angle C = 60^\circ$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} (1)(2) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

149. (b) हमें ज्ञात है कि, $b + c = 2a$ (i)

$$\cos 60^\circ = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4a^2 - 2bc - a^2}{2bc} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{2bc} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3a^2}{2bc} \Rightarrow bc = a^2 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से, $b = c = a$ अर्थात् त्रिभुज समबाहु है।

150. (d) $\frac{2\Delta}{a}, \frac{2\Delta}{b}, \frac{2\Delta}{c}$ ह.श्रे. में हैं।

$$\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ ह.श्रे. में हैं} \Rightarrow a, b, c \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

$$\Rightarrow \sin A, \sin B, \sin C \text{ स.श्रे. में हैं।}$$

151. (a) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 = 2a^2b^2$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (\sqrt{2}ab)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}ab$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pm \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos C = \cos 45^\circ \text{ या } \cos 135^\circ \Rightarrow C = 45^\circ \text{ या } 135^\circ.$$

152. (a) $a = 3, b = 5, c = 4, s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} = \sqrt{\frac{2.3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

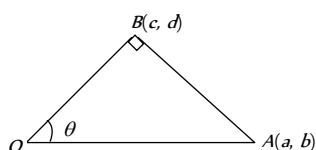
$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} = \sqrt{\frac{6.1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sin \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

153. (c) $\frac{b-c}{a} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$

$$\Rightarrow (b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}.$$

154. (b) यहाँ $(AB)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$
 $(OA)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2 = a^2 + b^2$ और $(OB)^2 = c^2 + d^2$



$$\text{अब त्रिभुज } AOB \text{ में, } \cos \theta = \frac{(OA)^2 + (OB)^2 - (AB)^2}{2OA \cdot OB}$$

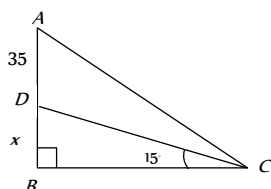
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \{(a-c)^2 + (b-d)^2\}}{2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$$

$$= \frac{ac + bd}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}.$$

155. (a) $\angle DCB = 15^\circ$

$$\angle CAB = 45^\circ \text{ और } \angle CDB = 75^\circ$$

माना $BD = x$ और $AD = 35$ सेमी



$$\tan \angle CAB = \frac{CB}{AB} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{CB}{35+x}$$

$$\therefore \tan 75^\circ = \frac{CB}{DB} = \frac{CB}{x} \Rightarrow CB = x \tan 75^\circ$$

$$\text{इस प्रकार, } CB = (35+x) \tan 45^\circ = x \tan 75^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{35 \tan 45^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 45^\circ} = \frac{35}{\tan 75^\circ - 1}$$

$$\text{किन्तु, } \cos 75^\circ = \frac{x}{CD}$$

$$CD = \frac{x}{\cos 75^\circ} = \frac{1}{\cos 75^\circ} \times \frac{35}{\tan 75^\circ - 1} = \frac{35}{\sin 75^\circ - \cos 75^\circ}$$

$$= \frac{35}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{35}{\frac{2}{2\sqrt{2}}} = 35\sqrt{2} \text{ सेमी.}$$

156. (d) $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \frac{5}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right)} = \frac{4}{\sin B}$

$$\frac{5}{\cos B} = \frac{4}{\sin B}, \therefore \tan B = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \tan\left(\frac{\pi}{2} + B\right) = -\cot B = \frac{-5}{4}$$

$$\tan C = \tan(\pi - (A+B)) = -\tan(A+B), [A+B+C = \pi]$$

$$= -\frac{(\tan A + \tan B)}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\frac{\left(-\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right)}{1 + 1} = \frac{9}{40}$$

$$C = \tan^{-1}\left(\frac{\left(2, \frac{1}{9}\right)}{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2}\right); \therefore C = 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right).$$

त्रिभुजों से सम्बद्ध वृत्त

1. (c) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R} \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$ इत्यादि

$$\text{अतः } 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{abc}{4R} = \Delta.$$

2. (c) $\cos A = 0 \Rightarrow 36 + 64 - a^2 = 0 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{5}{1}.$

3. (b) माना $a = 3k, b = 7k, c = 8k$

$$\therefore s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 9k$$

$$\text{तब } \frac{R}{r} = \frac{abc}{4\Delta} \cdot \frac{s}{\Delta} = \frac{abc \cdot s}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{3k \cdot 7k \cdot 8k}{4 \cdot 6k \cdot 2k \cdot k} = \frac{7}{2}$$

अर्थात्, $R : r = 7 : 2$.

4. (c) $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 21$

$$\Delta = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} = 84; \therefore r = \frac{\Delta}{s} = 4.$$

5. (a) $r = \frac{\Delta}{s} = \sqrt{\frac{8}{7}}$.

6. (c) $a = b = c = 2\sqrt{3}$

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \right) = 3\sqrt{3} \text{ वर्ग सेमी} \therefore R = \frac{abc}{4\Delta} = 2 \text{ सेमी}$$

7. (b) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow r = 4R \sin^3 30^\circ, \{ \because A = B = C = 60^\circ \}$$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{2}.$$

8. (c) $a \cot A + b \cot B + c \cot C$

$$= 2R(\sin A \cot A + \sin B \cot B + \sin C \cot C)$$

$$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$= 2R \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 2R \left(1 + \frac{r}{R} \right) = 2(R + r).$$

9. (d) ΔPQR में, परिवृत्त की त्रिज्या $PQ = PR$ है।

$$\therefore PQ = PR = \frac{PQ}{2 \sin R} = \frac{QR}{2 \sin P} = \frac{PR}{2 \sin Q}$$

$$\Rightarrow \sin R = \sin Q = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle R = \angle Q = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \angle P = \pi - \angle R - \angle Q = \frac{2\pi}{3}.$$

10. (b) हमें ज्ञात है कि, $R = \frac{abc}{4\Delta}$ और $r = \frac{\Delta}{s}$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{abc}{4\Delta} \cdot \frac{s}{\Delta} = \frac{abc}{4(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{चूँकि } a : b : c = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k, \text{ (माना)}$$

$$\text{अतः } \frac{R}{r} = \frac{(4k)(5k)(6k)}{4 \left(\frac{15k}{2} - 4k \right) \left(\frac{15k}{2} - 5k \right) \left(\frac{15k}{2} - 6k \right)} = \frac{16}{7}.$$

11. (c) $\because a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$

$$\therefore a \cos A + b \cos B + c \cos C$$

$$= R[(2 \sin A \cos A) + (2 \sin B \cos B) + (2 \sin C \cos C)]$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

12. (a) माना त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ है, तब प्रश्नानुसार

$$\Delta = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$$

$$\therefore \frac{bx}{c} + \frac{cy}{a} + \frac{az}{b} = \frac{b}{c} \left(\frac{2\Delta}{a} \right) + \frac{c}{a} \left(\frac{2\Delta}{b} \right) + \frac{a}{b} \left(\frac{2\Delta}{c} \right)$$

$$= \frac{2\Delta(b^2 + c^2 + a^2)}{abc} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} \cdot \frac{abc}{4R} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}.$$

13. (b) भुजायें 3, 4 व 5 हैं चूँकि $3^2 + 4^2 = 5^2$
अतः त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

$$\text{अतः } R = \frac{5}{2} = 2.5.$$

14. (c) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $(\Delta) = \frac{bc}{2} \sin A$

$$\text{ज्या (sine) सूत्र द्वारा, } a = 2R \sin A \text{ या } \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R} \text{ या } R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

15. (b) $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{a}{2r}$ तथा $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{a}{2R}$

$$\Rightarrow r + R = \frac{a}{2} \left[\cot \frac{\pi}{n} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \right] = \frac{a}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

16. (a) ΔABC में, $r_1 < r_2 < r_3$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2} > \frac{1}{r_3} \Rightarrow \frac{s-a}{\Delta} > \frac{s-b}{\Delta} > \frac{s-c}{\Delta}$$

$$\Rightarrow s-a > s-b > s-c \Rightarrow -a > -b > -c \Rightarrow a < b < c.$$

17. (c) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\Delta}{s}$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} \Rightarrow s = 36$$

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Delta = \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}$$

$$\Delta = \sqrt{36 \times 18 \times 12 \times 6} = 216$$

$$\text{अतः अंतःवृत्त की त्रिज्या} = \frac{216}{36} = 6 \text{ सेमी}$$

18. (a) $a = 5k, b = 6k$ तथा $c = 5k$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5k+6k+5k}{2} = 8k$$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r = \sqrt{\frac{8k(8k-5k)(8k-6k)(8k-5k)}{8k}}$$

$$r = \frac{3k}{2} \Rightarrow k = \frac{2r}{3} = \frac{2 \times 6}{3} = 4.$$

19. (b) $\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a+b+c}$

$$= \frac{k[\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C]}{k(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C}{2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin C \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \}}{\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) + \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \right\}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin C (2 \sin A \sin B)}{\cos \frac{C}{2} \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \right] \\
 &= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{R}, \left[\because r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right].
 \end{aligned}$$

20. (c) परिवृत्त की त्रिज्या (R) = $\frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$

$$R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = 2$$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi R^2 = 4\pi$.

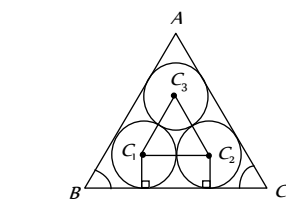
21. (b) $R = \frac{abc}{4\Delta}$, जहाँ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$a = 13, b = 12, c = 5, s = \frac{30}{2} = 15$$

$$\Delta = \sqrt{15(2)(3)(10)} = 3 \times 2 \times 5 = 30$$

$$\therefore R = \frac{13 \times 12 \times 5}{4 \times 30} = \frac{13}{2}.$$

22. (a) $\triangle ABC_1M$ में, $BM = (C_1M) \cdot \cot 30^\circ$



$$\Rightarrow BM = \sqrt{3}^M$$

$$\Rightarrow \text{इसी तरह } CN = \sqrt{3} \text{ और } MN = C_1C_2 = 1 + 1 = 2$$

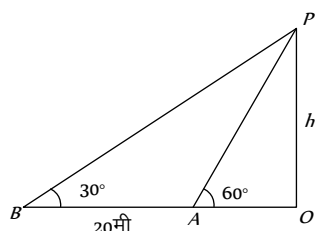
$$\text{अतः भुजा } BC = \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 = 2(1 + \sqrt{3})$$

$\Rightarrow$ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} [2(1 + \sqrt{3})]^2 = 6 + 4\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई.}$$

ऊँचाई एवं दूरी

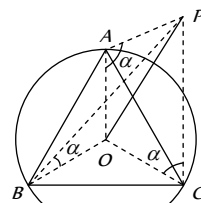
1. (c) $OA = h \cot 60^\circ, OB = h \cot 30^\circ$,
 $OB - OA = 20 = h(\cot 30^\circ - \cot 60^\circ)$



$$\Rightarrow h = \frac{20}{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

2. (c) $20 \cot 30^\circ = d \Rightarrow d = 20\sqrt{3}.$

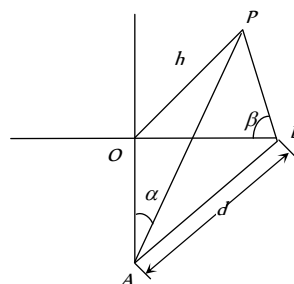
3. (d) चूँकि मीनार त्रिभुज के शीर्षों से समान कोण बनाती है अतः मीनार का पाद (foot) परिकेन्द्र पर होगा।



$\triangle OAP$ से हमें ज्ञात है कि, $\tan \alpha = \frac{OP}{OA}$

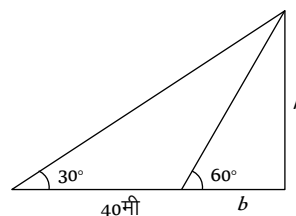
$$\Rightarrow OP = OA \tan \alpha \Rightarrow OP = R \tan \alpha.$$

4. (c) $OB = h \cot \beta, OA = h \cot \alpha$



$$h^2 = \frac{d^2}{\cot^2 \beta + \cot^2 \alpha} \Rightarrow h = \frac{d}{\sqrt{\cot^2 \beta + \cot^2 \alpha}}.$$

5. (a) $b = h \cot 60^\circ, b + 40 = h \cot 30^\circ$



$$\Rightarrow \frac{b}{b + 40} = \frac{\cot 60^\circ}{\cot 30^\circ} \Rightarrow b = 20 \text{ मी.}$$

6. (b) $\frac{H}{3} \cot \alpha = d$ तथा $H \cot \beta = d$

$$\text{या } \frac{H}{3d} = \tan \alpha \text{ तथा } \frac{H}{d} = \tan \beta$$

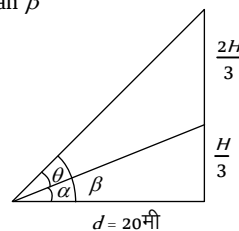
$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} = \frac{\frac{H}{d} - \frac{H}{3d}}{1 + \frac{H^2}{3d^2}}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{H^2}{3d^2} = \frac{4H}{3d}$$

$$\Rightarrow H^2 - 4dH + 3d^2 = 0$$

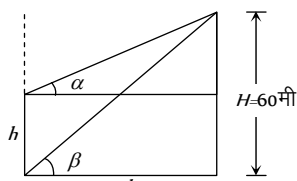
$$\Rightarrow H^2 - 80H + 3(400) = 0$$

$$\Rightarrow H = 20 \text{ या } 60 \text{ मी}$$



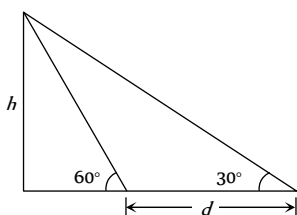
7. (d) $H = d \tan \beta$ और $H - h = d \tan \alpha$

$$\Rightarrow \frac{60}{60-h} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \Rightarrow -h = \frac{60 \tan \alpha - 60 \tan \beta}{\tan \beta}$$



$$\Rightarrow h = \frac{60 \sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \Rightarrow x = \cos \alpha \sin \beta.$$

8. (c) $d = h \cot 30^\circ - h \cot 60^\circ$ तथा समय = 3 मिनट



$$\therefore \text{चाल} = \frac{h(\cot 30^\circ - \cot 60^\circ)}{3} \text{ प्रति मिनट}$$

तब $h \cot 60^\circ$ दूरी तय करने में लगा समय

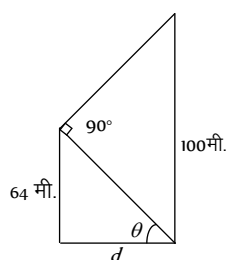
$$= \frac{h \cot 60^\circ \times 3}{h(\cot 30^\circ - \cot 60^\circ)} = 1.5 \text{ मिनट.}$$

9. (a) $64 \cot \theta = d$

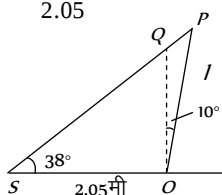
साथ ही $(100 - 64) \tan \theta = d$

या $(64)(36) = d^2$,

$\therefore d = 8 \times 6 = 48$ मी.



10. (a) $\frac{\sin 38^\circ}{l} = \frac{\sin(SPO)}{2.05}$

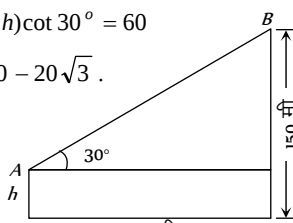


$$= \frac{\sin(180^\circ - 38^\circ - 90^\circ - 10^\circ)}{2.05} \Rightarrow l = \frac{2.05 \sin 38^\circ}{\sin 42^\circ}.$$

11. (b) $\tan 45^\circ = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 20$ मी.

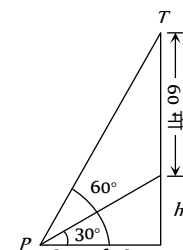
12. (c) $(150 - h) \cot 30^\circ = 60$

$h = 150 - 20\sqrt{3}.$

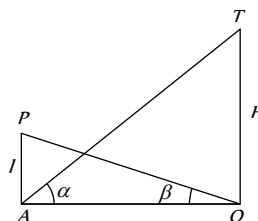


13. (b) अभीष्ट दूरी = $60 \cot 15^\circ = 60 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right).$

14. (a) $(60 + h) \cot 60^\circ = h \cot 30^\circ \Rightarrow h = 30$ मी



15. (b) चित्र से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $H = l \tan \alpha \cot \beta.$

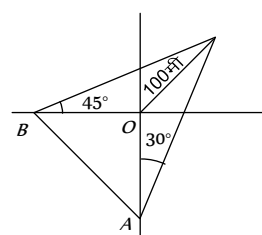


16. (b) $OB = 100 \cot 45^\circ$

$OA = 100 \cot 30^\circ$

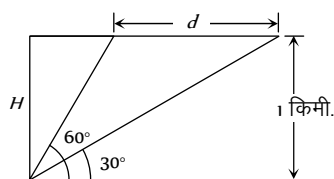
$AB = \sqrt{(OA^2 + OB^2)}$

$= 200$ मीटर



17. (b) $d = H \cot 30^\circ - H \cot 60^\circ;$

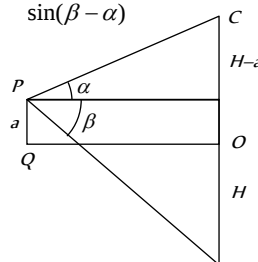
दूरी तय करने में लिया गया समय = 10 सेकण्ड



$$\text{चाल} = \frac{\cot 30^\circ - \cot 60^\circ}{10} \times 60 \times 60 = 240\sqrt{3}.$$

18. (b) $(H + a) \cot \beta = (H - a) \cot \alpha$

$H = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$

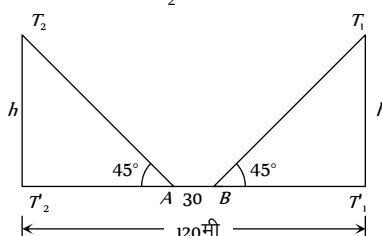


$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

और $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$ का प्रयोग करने पर।

19. (c) यह आधारभूत संकल्पना है।

20. (b) $\tan 45^\circ = 1 = \frac{h}{T_2' A} \Rightarrow T_2' A = h$

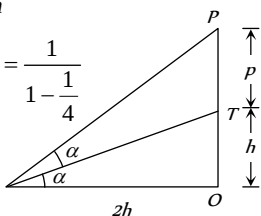


अतः, $120 = h + 30 + h \Rightarrow h = 45$ मी

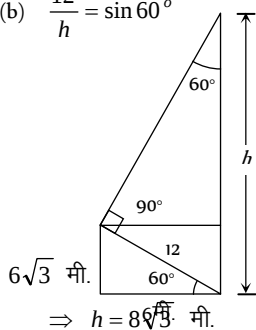
21. (a) $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ तथा $\tan 2\alpha = \frac{p+h}{2h}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \frac{p+h}{2h} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{p+h}{2h} = \frac{4}{3} \Rightarrow p = \frac{5h}{3}$$



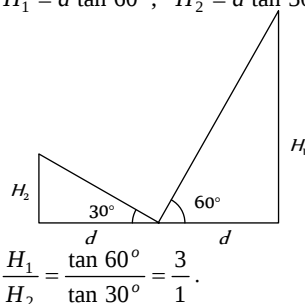
22. (b) $\frac{12}{h} = \sin 60^\circ$



23. (b) $\tan \alpha = \frac{h}{\sqrt{3}h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

24. (b) सीढ़ी की लंबाई $= \frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 12$ मी.

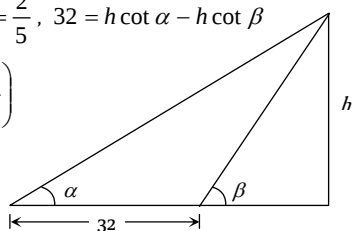
25. (c) $H_1 = d \tan 60^\circ$, $H_2 = d \tan 30^\circ$



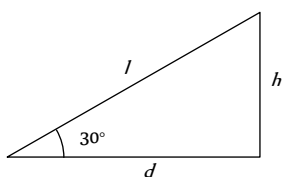
26. (a) $\cot \alpha = \frac{3}{5}$, $\cot \beta = \frac{2}{5}$, $32 = h \cot \alpha - h \cot \beta$

$$h = \left(\frac{32}{\cot \alpha - \cot \beta} \right)$$

$$= \frac{32}{1/5} = 160 \text{ मी}$$



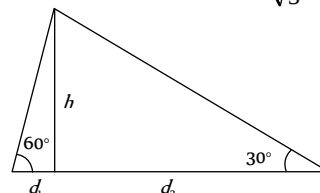
27. (c) $H = 20 = l + h$, $l = \frac{d}{\cos 30^\circ}$, $h = d \tan 30^\circ$



$$\therefore d = \frac{20}{(\sec 30^\circ + \tan 30^\circ)} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

अतः $h = d \tan 30^\circ = \frac{20}{3}$ मी.

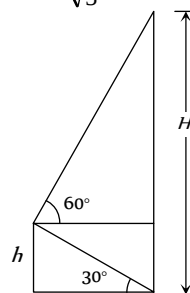
28. (b) $d_2 = h \cot 30^\circ = 500\sqrt{3}$, $d_1 = \frac{500}{\sqrt{3}}$



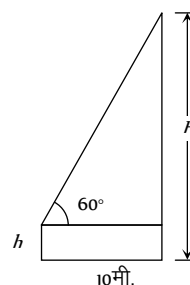
आधार का व्यास $= D = 500\sqrt{3} + \frac{500}{3}\sqrt{3} = \frac{2000}{\sqrt{3}}$ मी.

29. (b) $h = 12 \tan 30^\circ = \frac{12}{\sqrt{3}}$ तथा $H = 12 \tan 60^\circ + \frac{12}{\sqrt{3}}$

$$= 12\sqrt{3} + \frac{12}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3} \text{ मी}$$



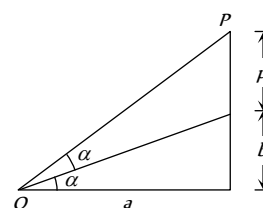
30. (a) $H = (10 \tan 60^\circ + 1.5) = (10\sqrt{3} + 1.5)$ मी.



31. (a) ट्रिक : $H = l \tan \alpha \cdot \tan \beta$ से,

मीनार की ऊँचाई $= h \tan 30^\circ \cot 60^\circ$ या $\frac{h}{3}$.

32. (b) $\tan \alpha = \frac{b}{a}$, $\tan 2\alpha = \frac{2(b/a)}{1 - (b/a)^2} = \frac{p+b}{a}$



$$\Rightarrow \frac{2ba}{a^2 - b^2} = \frac{p+b}{a} \Rightarrow \frac{2ba^2 - a^2b + b^3}{a^2 - b^2} = p$$

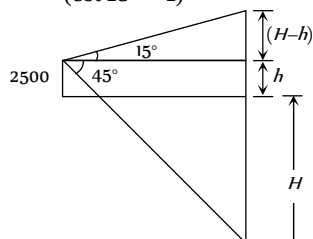
$$\Rightarrow p = \frac{b(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)}.$$

33. (c) स्पष्टतः, पेड़ की लंबाई = $10 + 10\sqrt{2} = 10(1 + \sqrt{2})$ मी.

34. (c) $\tan 60^\circ = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 10\sqrt{3}$ मी.

35. (a) $(H - h) \cot 15^\circ = (H + h) \cot 45^\circ$

$$\text{या } H = \frac{h(\cot 15^\circ + 1)}{(\cot 15^\circ - 1)}$$



$\therefore h = 2500$ तथा $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ रखने पर,

$$H = 2500\sqrt{3}.$$

36. (d) $d_1 = h \cot \alpha$ तथा $d_2 = h \cot \beta$

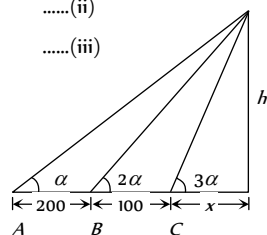
$$d_1 + d_2 = 1 \text{ मील} = h(\cot \alpha + \cot \beta)$$

$$\Rightarrow h = \frac{1 \text{ मील}}{(\cot \alpha + \cot \beta)} = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

37. (d) $x = h \cot 3\alpha$ (i)

$$(x + 100) = h \cot 2\alpha$$
(ii)

$$(x + 300) = h \cot \alpha$$
(iii)



(i) और (ii) से, $-100 = h(\cot 3\alpha - \cot 2\alpha)$,

(ii) और (iii) से, $-200 = h(\cot 2\alpha - \cot \alpha)$,

$$100 = h \left(\frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha \sin 2\alpha} \right) \text{ और } 200 = h \left(\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha \sin \alpha} \right)$$

$$\text{या } \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{200}{100} \Rightarrow \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 2$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha - 2 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 4 \sin^3 \alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$$

$$\text{या } \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{अतः } h = 200 \sin \frac{\pi}{3} = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}, \{ \text{(ii) से} \}.$$

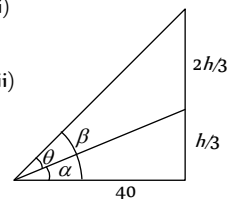
38. (b) स्पष्टतः, चित्रानुसार

$$\tan \alpha = \frac{h/3}{40} = \frac{h}{120} \quad \dots(i)$$

$$\tan \beta = \frac{h}{40} = \frac{3h}{120} \quad \dots(ii)$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{3h}{120} - \frac{h}{120}}{1 + \frac{3h^2}{14400}} \Rightarrow h = 120, 40$$



किन्तु $h = 40$ को प्रश्नानुसार नहीं लिया जा सकता अतः $h = 120$ फुट.

39. (c) $\tan \alpha = \tan(\phi - \theta)$

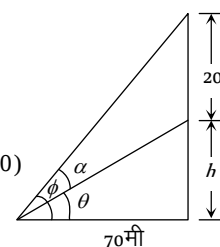
$$\tan \alpha = \frac{1}{6} = \frac{\frac{20+h}{70} - \frac{h}{70}}{1 + \frac{(20+h)h}{(70)^2}}$$

$$\Rightarrow (70)^2 + 20h + h^2 = (6)(70)(20)$$

$$\Rightarrow h^2 + 20h + 70(70 - 120) = 0$$

$$\Rightarrow h^2 + 20h - (50)(70) = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + (4)(50)(70)}}{2} = 50 \text{ मी.}$$

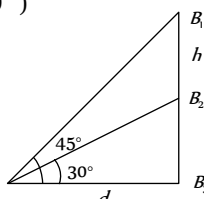


40. (b) $B_1 B_2 = h = (d \tan 45^\circ - d \tan 30^\circ)$

लिया गया समय = 10 मिनट

$$\text{दर} = 4 = \frac{d}{10} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \right)$$

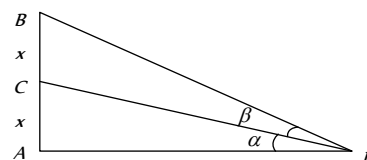
$$\Rightarrow d = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 20(3 + \sqrt{3}) \text{ मी.}$$



41. (b) $\tan 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h.$

42. (b) माना $AC = x = CB, AP = 3AB = 6x$. माना $\angle CPA = \alpha$

$$\text{अब, } \triangle ACP \text{ में, } \tan \alpha = \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$$



$$\triangle ABP \text{ में, } \tan(\alpha + \beta) = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

$$\text{अब } \tan \beta = \tan\{(\alpha + \beta) - \alpha\} = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha}$$

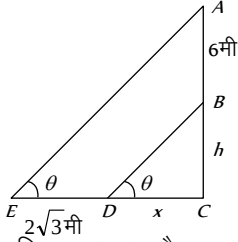
$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \times \frac{18}{19} = \frac{3}{19}.$$

43. (d) माना कि दो सड़कें A पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि बस व कार क्रमशः B व C सड़क पर हैं तब $c = AB = 2$ किमी, $b = AC = 3$ किमी
दोनों गाड़ियों के बीच दूरी = $BC = a$ किमी

$$\cos A = \cos 60^\circ = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

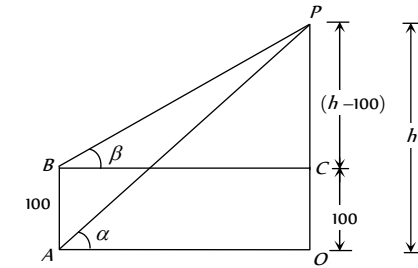
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3^2 + 2^2 - a^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} \Rightarrow a = \sqrt{7} \text{ किमी.}$$

44. (a) प्रश्नानुसार, $\tan \theta = \frac{h}{x} = \frac{h+6}{x+2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 60^\circ$



[$\therefore$ त्रिभुज AEC और BDC समरूप हैं]

45. (c) यदि $OP = h$, तो $CP = h - 100$
OA और BC के मानों को रखने पर,

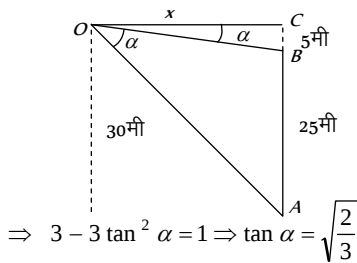


$$h \cot \alpha = (h - 100) \cot \beta$$

$$\therefore h = \frac{100 \cot \beta}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

46. (b) हमें ज्ञात है कि $\tan \alpha = \frac{5}{x}$ और $\tan 2\alpha = \frac{30}{x}$

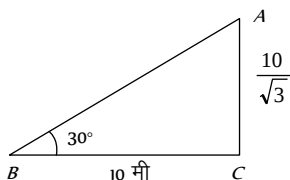
$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{30}{5 \cot \alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = 6 \tan \alpha$$



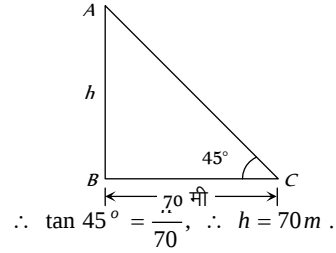
$$\Rightarrow 3 - 3 \tan^2 \alpha = 1 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore x = 5 \cot \alpha = 5 \sqrt{\frac{3}{2}}$$

47. (c) पेड़ की लम्बाई
 $= AB + AC = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} = 17.32$ मी.



48. (a) माना मीनार की ऊँचाई h है

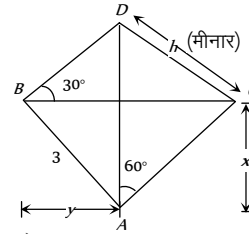


$$\therefore \tan 45^\circ = \frac{h}{70}, \therefore h = 70 \text{ m.}$$

49. (d) $\triangle CDA$ से, $x = h \cot 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$$\triangle CDB \text{ से, } y = h \cot 30^\circ = \sqrt{3}h$$

$$\triangle ABC \text{ से, } x^2 + 3^2 = y^2 \text{ (पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)}$$



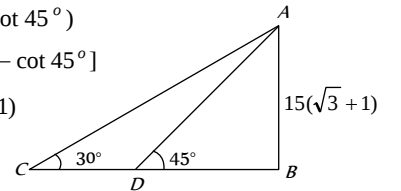
$$\Rightarrow \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3^2 = (\sqrt{3}h)^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{6}}{4} \text{ किमी.}$$

50. (a) $CD = h(\cot 30^\circ - \cot 45^\circ)$

$$15(\sqrt{3} + 1)[\cot 30^\circ - \cot 45^\circ]$$

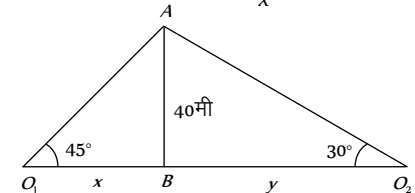
$$= 15(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 15(3 - 1) = 30 \text{ मी}$$



$$\text{चाल} = \frac{30}{1000} \times \frac{60 \times 60}{3} \text{ किमी/घंटा} = 36 \text{ किमी/घंटा.}$$

51. (d) $\triangle O_1AB$ से, $\tan 45^\circ = \frac{40}{x} \Rightarrow x = 40$ मी



$$\triangle AO_2B \text{ से, } \cot 30^\circ = \frac{y}{40}$$

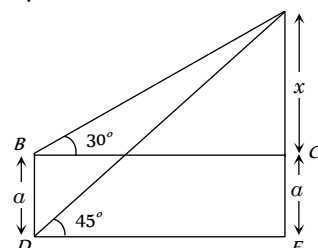
$$\Rightarrow y = 40 \cot 30^\circ = 40\sqrt{3}$$

$$\text{अतः व्यक्तियों के बीच की दूरी} = 40 + 40\sqrt{3} = 109.28 \text{ मी}$$

52. (c) $\triangle ABC$ में, $\tan 30^\circ = \frac{AC}{BC}$ या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{BC}$, जहाँ $AC = x$

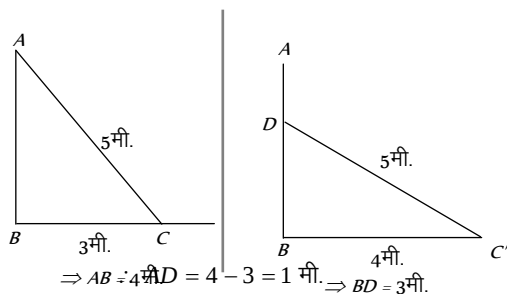
$$\text{या } BC = x\sqrt{3} \text{ और } \triangle ADE \text{ में, } \tan 45^\circ = \frac{a+x}{DE} \text{ या}$$

$$1 = \frac{a+x}{x\sqrt{3}} \text{ या } x\sqrt{3} = a+x, x(\sqrt{3}-1) = a \text{ या } x = \frac{a}{\sqrt{3}-1}$$

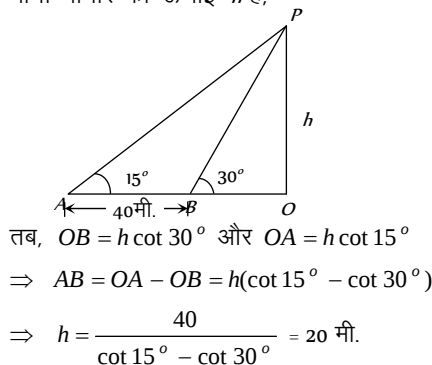


अतः, मीनार की ऊँचाई $= a + x = a + \frac{a}{\sqrt{3}-1}$
 $= a \left[\frac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt{3}-1} \right] = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{a(3+\sqrt{3})}{2}$

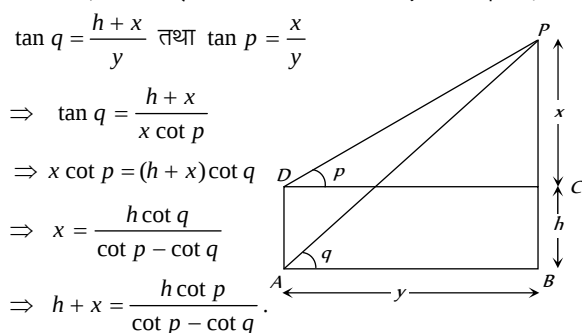
53. (a) प्रथम स्थिति से, द्वितीय स्थिति से,



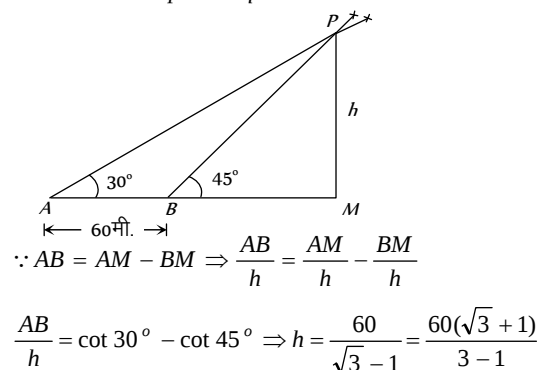
54. (b) माना मीनार की ऊँचाई h है,



55. (b) माना AD, h ऊँचाई का भवन है और BP एक पहाड़ी है, तब



56. (d)



$\Rightarrow h = 30(\sqrt{3}+1)\text{ मी.}$

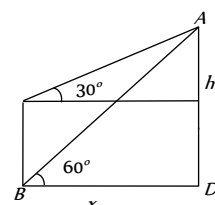
57. (b) माना ऊँचाई h है

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{h}{500} \Rightarrow h = \frac{500}{\sqrt{3}}$

58. (a) मंदिर से कुल दूरी $= \sqrt{x^2 + (240)^2}$,

जहाँ $x = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

अतः दूरी $= \sqrt{\frac{h^2}{3} + (240)^2}$



किन्तु $\frac{h}{\sqrt{\frac{h^2}{3} + (240)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{h^2}{\frac{h^2}{3} + (240)^2} = \frac{1}{3}$

हल करने के पश्चात्, $h = 60\sqrt{6}$ मी.

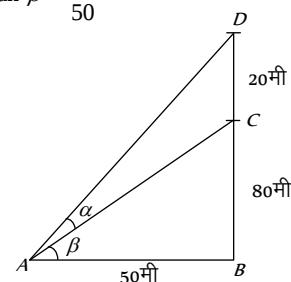
59. (b) माना $\angle BAC = \beta$, $\therefore \tan \beta = \frac{80}{50}$

अब, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{100}{50}$

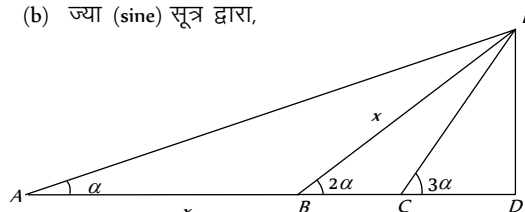
$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 2$

$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \frac{8}{5}}{1 - \frac{8}{5} \tan \alpha} = 2$

$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{21}$



60. (b) ज्या (sine) सूत्र द्वारा,

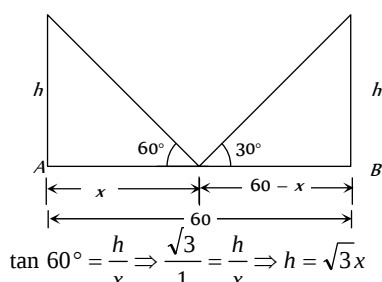


$\Rightarrow \frac{BE}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha}$

$\Rightarrow \frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha}$, (चूँकि $BE = AB$)

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3 - 4 \sin^2 \alpha$
 $= 3 - 2(1 - \cos 2\alpha) = 1 + 2 \cos 2\alpha$

61. (a)



.....(i)

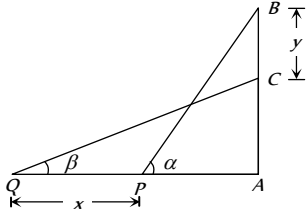
$$\tan 30^\circ = \frac{h}{60-x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{60-x} \Rightarrow 60-x = \sqrt{3}h \dots (ii)$$

समीकरण (i) व (ii) द्वारा, $60-x = \sqrt{3}(\sqrt{3}x)$

$$\frac{60}{4} = x \Rightarrow x = 15$$

तब $h = \sqrt{3}x \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$ मीटर.

62. (a) $PB = QC = l$, (सीढ़ी की लंबाई)
 $\Rightarrow PA = l \cos \alpha, QA = l \cos \beta$



$$\Rightarrow AC = l \sin \beta, AB = l \sin \alpha$$

$$\Rightarrow CB = AB - AC = l(\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$\Rightarrow y = l(\sin \alpha - \sin \beta)$$

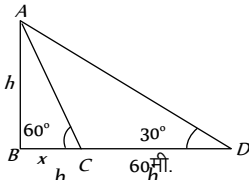
$$\text{और } QP = x = AQ - AP = l(\cos \beta - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{QP} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \frac{y}{x} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \cot \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \Rightarrow x = y \tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

63. (e) $\tan 30^\circ = \frac{h}{x+60}, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+60}$

$$x+60 = \sqrt{3}h, x = \sqrt{3}h - 60$$



$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}, x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h - 60 = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3h - 60\sqrt{3} = h$$

$$\Rightarrow h = \frac{60\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} = 51.96 \approx 52 \text{ मी.}$$

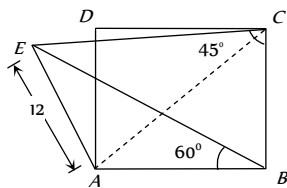
64. (a) माना AE एक ऊर्ध्वाधर लैम्प-पोस्ट है।
 दिया गया है, AE = 12 मी.

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{AC}$$

$$AC = AE = 12 \text{ मी.}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AE}{AB}$$

$$AB = \frac{AE}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$



$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{144 - 48} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{अतः, क्षेत्रफल} = AB \times BC = 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 48\sqrt{2} \text{ वर्ग सेमी.}$$

Critical Thinking Questions

1. (b) $\sin x - 3 \sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3 \cos 2x + \cos 3x$
 $\Rightarrow 2 \sin 2x \cos x - 3 \sin 2x - 2 \cos 2x \cos x + 3 \cos 2x = 0$
 $\Rightarrow \sin 2x(2 \cos x - 3) - \cos 2x(2 \cos x - 3) = 0$
 $\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x$
 $(\because \cos x \neq 3/2)$

$$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right), \text{ अर्थात् } x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

2. (b) $5 - 5 \sin^2 \theta + 7 \sin^2 \theta = 6 \Rightarrow 2 \sin^2 \theta = 1$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{2} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

3. (c) θ व 7θ तथा 3θ व 5θ को मिलाने पर,
 $2 \cos 4\theta(\cos 3\theta + \cos \theta) = 0 \Rightarrow 4 \cos 4\theta \cos 2\theta \cos \theta = 0$

$$\Rightarrow 4 \frac{1}{2^3 \sin \theta} (\sin 2^3 \theta) = 0; \sin 8\theta = 0 \therefore \theta = \frac{n\pi}{8}.$$

4. (b) $\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right), \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$ तथा

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{अतः, } \theta \text{ का मुख्य मान } = \frac{5\pi}{6}.$$

5. (d) $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Rightarrow \cos \left(x - \cos^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow x - \cos^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

अतः व्यापक हल है,

$$x - \cos^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2n\pi \pm \cos^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{या } x = 2n\pi \pm \cos^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x = 2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \pm \cos^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{ट्रिक : } a = b = c = 1 \text{ रखने पर, } \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} \text{ जो कि विकल्प (d) द्वारा प्राप्त होता है।}$$

6. (c) $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$

$$\Rightarrow \cos 2\theta - \cos 4\theta = 2 \cos 4\theta \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow -\cos 4\theta = \cos 6\theta \Rightarrow 2 \cos 5\theta \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ या } \frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}.$$

7. (a) $2 \sin 3x \cos x - 2 \sin 3x = 0, \therefore \sin 3x = 0, \cos x = 1$

$$\Rightarrow 3x = n\pi \text{ या } x = \frac{n\pi}{3} \text{ और } x = 2n\pi$$

द्वितीय मान $x = 2n\pi$, दिये गये मान $x = \frac{n\pi}{3}$ में समाहित है।

8. (b) $\tan(\cot x) = \cot(\tan x) \Rightarrow \tan(\cot x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan x\right)$

$$\Rightarrow \cot x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \tan x \Rightarrow \cot x + \tan x = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{(2n+1)\pi}$$

9. (c) $(5 + 4 \cos \theta)(2 \cos \theta + 1) = 0$

$\cos \theta = -5/4$, जो कि संभव नहीं है

$$\therefore 2 \cos \theta + 1 = 0 \text{ या } \cos \theta = -1/2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ अतः हल समुच्चय } = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\} \in [0, 2\pi]$$

10. (d) $1 + \sin x + \sin^2 x + \dots \infty = 4 + 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \sin x} = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = 1 - \frac{1}{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin x = 1 - \frac{(4 - 2\sqrt{3})}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ या } \frac{2\pi}{3}$$

11. (b) दिया गया है कि, $\cos p\theta = -\cos q\theta = \cos(\pi + q\theta)$

$$\Rightarrow p\theta = 2n\pi \pm (\pi + q\theta), n \in I$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{(2n+1)\pi}{p-q} \text{ या } \frac{(2n-1)\pi}{p+q}, n \in I$$

दोनों हल एक स.श्रे. बनाते हैं। $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{p-q}$ से एक स.श्रे.

प्राप्त होती है, जिसका सार्वअन्तर $\frac{2\pi}{p-q}$ है तथा

$\theta = \frac{(2n-1)\pi}{p+q}$ से एक स.श्रे. प्राप्त होती है जिसका सार्वअन्तर

$$\frac{2\pi}{p+q} \text{ है। स्पष्टतः, } \frac{2\pi}{p+q} < \left| \frac{2\pi}{p-q} \right|$$

12. (d) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1, \text{ (जैसा कि दिया गया है)}$$

अतः कोई हल नहीं है।

13. (c) प्रथम समीकरण को लिखा जा सकता है,

$$2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y)$$

$$\therefore \text{ या तो } \sin \frac{1}{2}(x+y) = 0 \text{ या } \sin \frac{1}{2}x = 0 \text{ या } \sin \frac{1}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow \text{ या तो } x+y=0 \text{ या } x=0 \text{ या } y=0$$

$$\text{अतः } |x| + |y| = 1 \Rightarrow x+y = -1, x-y = -1, x-y = 1$$

तथा $x+y = 1$ जब $x+y=0$, तो $x+y=1$ व $x+y=-1$

अग्राह्य हैं। अतः इसे $x-y=1$ या $x-y=-1$ के साथ हल

करने पर मान क्रमशः $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ या $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ प्राप्त होंगे। पुनः

इसे $x=0$ के साथ हल करने पर हमें $(0, \pm 1)$ प्राप्त होता है और $y=0$ के साथ $(\pm 1, 0)$ प्राप्त होता है जो कि अन्य हल है।

अतः हमें x और y के लिये 6 हल के युग्म प्राप्त होते हैं।

14. (d) ट्रिक: माना $a=2, b=3, c=4$ तथा विकल्पों से जाँच करते हैं।

15. (b) $a(b \cos C - c \cos B) = ab \cos C - ac \cos B$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2} = b^2 - c^2$$

16. (d) $\tan \alpha = \frac{-\frac{AC}{AP} + \frac{AB}{AP}}{1 + \frac{AC}{AP} \cdot \frac{AB}{AP}}$ { $AP = n(AB) \Rightarrow AP = 2n(AC)$ }

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2n^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{(2n^2+1)} = \tan \alpha \Rightarrow n = (2n^2+1) \tan \alpha$$

17. (c) $\frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2}$

$$= \sum \frac{s(s-a)}{abc} = \frac{s(s-a+s-b+s-c)}{abc} = \frac{s^2}{abc}$$

18. (a) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}} \Rightarrow \sqrt{\frac{b+c}{2c}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$$\text{या } b^2 + bc = 2s(s-a)$$

$$\Rightarrow b^2 + bc = (a+b+c) \left(\frac{b+c-a}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

19. (d) यहाँ $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{s-b}{s}$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{s-b}{s} \Rightarrow 3s - 3b = s \Rightarrow 2s = 3b$$

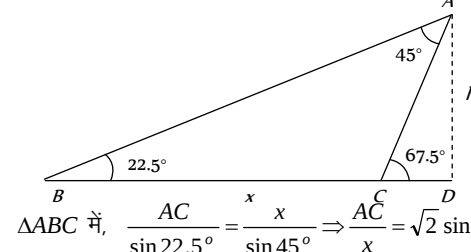
$$\Rightarrow a+b+c = 3b \text{ या } a+c = 2b$$

$\therefore a, b, c$ स.श्रे. में हैं, साथ ही $\sin A, \sin B, \sin C$ स.श्रे. में हैं।

20. (b) $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos C = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle C = \frac{\pi}{3}$$

21. (a) $\triangle ACD$ में, $\frac{h}{\sin 67.5^\circ} = \frac{AC}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{h}{AC} = \sin 67.5^\circ \dots (i)$



$$\triangle ABC \text{ में, } \frac{AC}{\sin 22.5^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{AC}{x} = \sqrt{2} \sin 22.5^\circ$$

.....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से, $\frac{h}{x} = \frac{1}{2}$

22. (c) $a \cos x + b \sin x = c$

$$\Rightarrow a \left(\frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \right) + \frac{2b \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = c$$

$$\Rightarrow (a+c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2b \tan \frac{x}{2} + (c-a) = 0$$

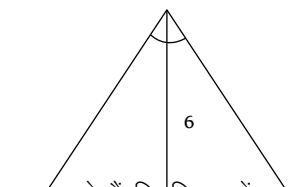
इस समीकरण के मूल $\tan \frac{\alpha}{2}$ तथा $\tan \frac{\beta}{2}$ हैं,

$$\therefore \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = \frac{2b}{a+c} \text{ तथा } \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{a+c}$$

$$\text{अब, } \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{2b}{a+c}}{1 - \frac{c-a}{a+c}} = \frac{b}{a}.$$

23. (c) $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \Rightarrow \sin A \cos B = \sin B \cos A$
 $\Rightarrow \sin(A-B) = 0 \Rightarrow \sin(A-B) = \sin 0$
 $\Rightarrow A-B = 0 \Rightarrow A = B$
 इसी तरह $A = B = C$. अतः यह समबाहु त्रिभुज है।

24. (c) स्पष्टतः, $\tan A = \frac{\frac{2}{6} + \frac{3}{6}}{1 - \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}} = 1 \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$.



25. (c) हम जानते हैं कि त्रिभुज में महत्तम भुजा के सामने वाला कोण महत्तम होता है। अतः कोण $\angle A, \angle B$ तथा $\angle C$ स.श्रे. में हैं।

अतः $\angle B = 60^\circ$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{100 + a^2 - 81}{20a}$$

$$\Rightarrow a^2 + 19 = 10a \Rightarrow a^2 - 10a + 19 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 76}}{2} \Rightarrow a + c\sqrt{2} = 5 \pm \sqrt{6}.$$

26. (d) $\angle C = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$

अतः, $a + c\sqrt{2} = k(\sin A + \sqrt{2} \sin C)$

$$= k \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} \right) = k \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{तथा } k = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a + c\sqrt{2} = \frac{b}{\sin 75^\circ} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = 2b.$$

27. (b) $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$
 $\Rightarrow \sin(B+C) \sin(B-C) = \sin(A+B) \sin(A-B)$
 $\Rightarrow \sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 A - \sin^2 B$
 $\Rightarrow 2 \sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C \Rightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$
 अतः a^2, b^2, c^2 स.श्रे. में हैं।

28. (a) हमें ज्ञात है कि $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \lambda, \text{ (माना)}$$

$$\therefore a = 4\lambda, b = 5\lambda, c = 6\lambda; \text{ अब } \cos A + \cos B + \cos C$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{240\lambda^3} \{4\lambda(45\lambda^2 + 5\lambda(27\lambda^2) + 6\lambda(5\lambda^2))\} = \frac{69}{48}.$$

29. (b) $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2x \times 2y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = xy\sqrt{3}.$
30. (b) भुजायें $(x^2 + x + 1), (2x + 1), (x^2 - 1)$ हैं। महत्तम भुजा, महत्तम कोण रखती है। अतः महत्तम भुजा $x^2 + x + 1$ है।
 अब $\cos \theta = \frac{(2x+1)^2 + (x^2-1)^2 - (x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}$

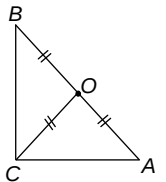
$$\Rightarrow \theta = 120^\circ.$$

31. (b) $\cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$
- $$= \frac{s}{s-a}, \text{ {चूँकि } } 3a = b+c \text{ या } a+b+c = 2s = 4a \}$$
- $$= 2a/a = 2.$$

32. (a) $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$
 $\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$
 $\Rightarrow (\cos^2 A - \sin^2 C) + \cos^2 B = 0$
 $\Rightarrow \cos(A-C) \cos(A+C) + \cos^2 B = 0$
 $\Rightarrow 2 \cos A \cos B \cos C = 0$
 अतः, $\cos A = 0$ या $\cos B = 0$ या $\cos C = 0$
 $\Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$ या $B = \frac{\pi}{2}$ या $C = \frac{\pi}{2}.$

33. (a) यहाँ $R = OA = OB = OC = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{1}{2} ab}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{ab}{a+b+c}$$



$$\therefore r + R = \frac{ab}{a+b+c} + \frac{c}{2} = \frac{2ab + c(a+b+c)}{2(a+b+c)}$$

$$= \frac{2ab + ca + bc + a^2 + b^2}{2(a+b+c)}, (\because c^2 = a^2 + b^2)$$

$$= \frac{(a+b)^2 + c(a+b)}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)}$$

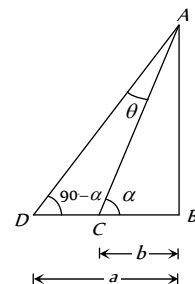
$$\therefore 2(r+R) = a+b.$$

34. (c) माना मीनार AB के आधार के बिन्दु B से गुजरने वाली क्षैतिज रेखा पर दो बिन्दु C व D हैं। C व D की बिन्दु B से दूरी क्रमशः b और a है।

$$\therefore BD = a \text{ और } BC = b$$

$\therefore$ रेखा CD मीनार की चोटी A पर θ कोण अन्तरित करती है,

$$\therefore \angle CAD = \theta$$



प्रश्नानुसार, बिन्दु C तथा D पर शिखर का उन्नयन कोण α व $90^\circ - \alpha$ है

$$\therefore \angle BCA = \alpha \text{ तथा } \angle BDA = 90^\circ - \alpha$$

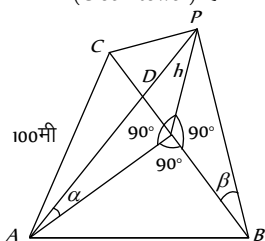
$$\Delta ABC \text{ में, } AB = BC \tan \alpha = b \tan \alpha \quad \dots (i)$$

$$\text{और } \Delta ABD \text{ में, } AB = BD \tan(90^\circ - \alpha) = a \cot \alpha \quad \dots (ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) को गुणा करने पर,

$$(AB)^2 = (b \tan \alpha)(a \cot \alpha) = ab, \therefore AB = \sqrt{ab}.$$

35. (b) DP एक घंटाघर (Clock tower) है जोकि BC के मध्य बिन्दु D पर स्थित है।



$$\angle PAD = \alpha = \cot^{-1} 3.2 \Rightarrow \cot \alpha = 3.2$$

$$\text{तथा } \angle PBD = \beta = \operatorname{cosec}^{-1} 2.6 \Rightarrow \operatorname{cosec} \beta = 2.4$$

$$\therefore \cot \beta = \sqrt{(\operatorname{cosec}^2 \beta - 1)} = \sqrt{(5.76)} = 2.4$$

ΔPAD तथा PBD में,

$$AD = h \cot \alpha = 3.2h \text{ तथा } BD = h \cot \beta = 2.4h$$

समकोण ΔABD में, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

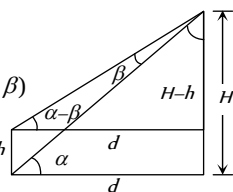
$$\Rightarrow 100^2 = [(3.2)^2 + (2.4)^2]h^2 = 16h^2 \Rightarrow h = 25 \text{ मी.}$$

36. (b) $d = H \cot \alpha$

$$d = (H - h) \cot(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow H \cot \alpha = (H - h) \cot(\alpha - \beta)$$

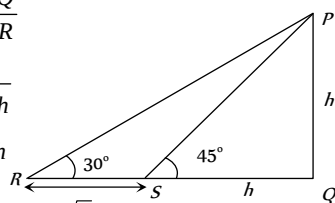
$$\text{या } H = \frac{h \cot(\alpha - \beta)}{\cot(\alpha - \beta) - \cot \alpha}.$$



37. (b) ΔPQR में, $\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{50(\sqrt{3} - 1) + h}$$

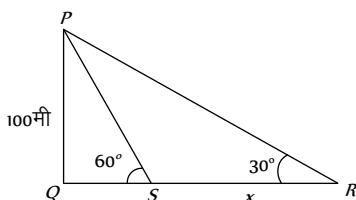
$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 50(\sqrt{3} - 1) + h$$



$$\Rightarrow (\sqrt{3} - 1)h = 50(\sqrt{3} - 1)$$

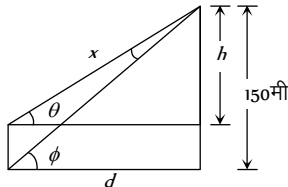
$$\Rightarrow h = 50 \text{ मीटर.}$$

38. (b) $x = QR - QS = 100 \cot 30^\circ - 100 \cot 60^\circ$



$$= 100\sqrt{3} - \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{200\sqrt{3}}{3} \text{ मीटर.}$$

39. (d) $d = 150 \cot \phi = 60$ मी, तथा $h = 60 \tan \theta = 80$ मी



$$\text{अतः, } x = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ मीटर.}$$

$$40. (a) \quad n = 2 \text{ के लिए, } f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ = 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos x$$

$\cos x$ का आवर्तनांक 2π व $\cos \frac{x}{2}$ का आवर्तनांक 4π है,

अतः $\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ का आवर्तनांक 4π है।

$n = 3$ के लिये,

$$\frac{\sin\{3(x + 4\pi)\}}{\sin\left\{\frac{(x + 4\pi)}{3}\right\}} = \frac{\sin 3x}{\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} \neq \frac{\sin 3x}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}$$

अतः $n = 3$ के लिये 4π आवर्तनांक नहीं है। इसी तरह हम

देख सकते हैं कि $n = 4$ तथा 5 के लिये भी $\frac{\sin nx}{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}$ का

आवर्तनांक 4π नहीं होगा।

त्रिकोणमितीय समीकरण एवं असमिकाएँ त्रिभुजों के गुण, ऊँचाई एवं दूरी

SET Self Evaluation Test -11

- समीकरण $\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x$, $(0 \leq x \leq \pi)$ का व्यापक हल होगा [DCE 2001]
 - $\pi - \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
 - $\pi - \tan^{-1}(2)$
 - $\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
 - इनमें से कोई नहीं
- यदि $\left(\frac{\sin \theta}{\sin \phi}\right)^2 = \frac{\tan \theta}{\tan \phi} = 3$, तो θ व ϕ के मान हैं
 - $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \phi = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
 - $\theta = n\pi - \frac{\pi}{3}, \phi = n\pi - \frac{\pi}{6}$
 - $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}, \phi = n\pi + \frac{\pi}{3}$
 - इनमें से कोई नहीं
- यदि $2(\sin x - \cos 2x) - \sin 2x(1 + 2 \sin x) + 2 \cos x = 0$, तो [Karnataka CET 2002]
 - $x = \frac{\pi}{6}(4n+1)$ या $x = \frac{\pi}{2}(4n-1)$
 - $x = \frac{\pi}{6}(4n-1)$ या $x = \frac{\pi}{2}(4n-1)$
 - $x = \frac{\pi}{6}(4n+1)$ या $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$
 - इनमें से कोई नहीं
- $\tan(x-y)=1$, $\sec(x+y)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ को सन्तुष्ट करने वाले x तथा y के घनात्मक मान हैं
 - $x = \frac{25\pi}{24}, y = \frac{19\pi}{24}$
 - $x = \frac{37\pi}{24}, y = \frac{7\pi}{24}$
 - $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}$
 - $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{7\pi}{12}$
- यदि θ और ϕ न्यूनकोण को सन्तुष्ट करते हैं व $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\cos \phi = \frac{1}{3}$, तो $\theta + \phi$ का मान है [IIT Screening 2004]
 - $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$
 - $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
 - $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$
 - $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$
- अंतराल $(0, 2\pi)$ में समीकरण $\tan x + \sec x = 2 \cos x$ के हलों की संख्या होगी [IIT 1993; Kurushetra CEE 1998; AIEEE 2002; MP PET 2000]
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
- k के निम्न पूर्णांक मानों की संख्या जिसके लिये समीकरण $7 \cos x + 5 \sin x = 2k + 1$ का एक हल होगा [IIT Screening 2002]
 - 4
 - 8
 - 10
 - 12
- यदि $f(x) = \cos \sqrt{x}$, तब निम्न कथन सत्य है [Kurushetra CEE 1998]
 - $f(x)$ एक आवर्ती फलन है, जिनका आवर्तनांक $\sqrt{2\pi}$ है
 - $f(x)$ एक आवर्ती फलन है, जिनका आवर्तनांक $\sqrt{\pi}$ है
 - $f(x)$ एक आवर्ती फलन है, जिनका आवर्तनांक $4\pi^2$ है
 - $f(x)$ एक आवर्ती फलन नहीं है
- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण की लम्बाई सामने वाले शीर्ष से डाले गये लम्ब की लम्बाई की $2\sqrt{2}$ गुनी है, तो दूसरे दो कोण क्रमशः हैं [MNR 1994]
 - $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$
 - $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$
 - $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$
 - $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$
- यदि त्रिभुज की भुजाएँ $\sin \alpha, \cos \alpha$ और $\sqrt{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$ (जबकि $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) हैं, तब त्रिभुज का महत्तम कोण है [AIEEE 2004]
 - 150°
 - 90°
 - 120°
 - 60°
- $\triangle ABC$ में, $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$ तथा $\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}$, यदि त्रिभुज है
 - समबाहु
 - समद्विबाहु
 - समकोण
 - समकोण समद्विबाहु
- त्रिभुज ABC में, $\angle B = \frac{\pi}{3}$ व $\angle C = \frac{\pi}{4}$ तथा D , BC को 1 : 3 के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, तो $\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD}$ का मान होगा [IIT 1995; UPSEAT 2001, 03]
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 - $\frac{1}{\sqrt{6}}$
 - $\sqrt{\frac{2}{3}}$
- त्रिभुज ABC में कोण A , कोण B से बड़ा है। यदि कोण A व कोण B की मापें समीकरण $3 \sin x - 4 \sin^3 x - k = 0, 0 < k < 1$, को सन्तुष्ट करती हैं, तो कोण C की माप है [IIT 1990; DCE 2001]
 - $\frac{\pi}{3}$
 - $\frac{\pi}{2}$
 - $\frac{2\pi}{3}$
 - $\frac{5\pi}{6}$

14. यदि त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B, C से डाले गये शीर्षलम्ब क्रमशः p_1, p_2, p_3 तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ हो, तब
- (a) $\frac{s-a}{\Delta}$ (b) $\frac{s-b}{\Delta}$
 (c) $\frac{s-c}{\Delta}$ (d) $\frac{s}{\Delta}$
15. निम्न में से किन अवयवों के समूह से न्यूनकोण ΔABC का निर्धारण संभव नहीं है जबकि R परिवृत्त की त्रिज्या है [IIT Screening 2002]
- (a) $a, \sin A, \sin B$
 (b) a, b, c
 (c) $a, \sin B, R$
 (d) $a, \sin A, R$
16. किसी ऊर्ध्वाधर स्तम्भ का ऊपर का $\frac{3}{4}$ भाग, स्तम्भ के पाद से 40 मीटर दूर क्षैतिज तल में स्थित किसी बिन्दु पर $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ का कोण अन्तरित करता हो, तो ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की सम्भावित ऊँचाई होगी [AIEEE 2003]
- (a) 20 मी.टर (b) 40 मीटर
 (c) 60 मीटर (d) 80 मीटर
17. r त्रिज्या का एक गोलाकार गुब्बारा दर्शक की आँख पर α कोण अन्तरित करता है। यदि गोले के केन्द्र का उन्नयन कोण β हो, तो गोले के केन्द्र की ऊँचाई है [IIT 1970]
- (a) $r \operatorname{cosec}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \beta$ (b) $r \operatorname{cosec} \alpha \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$
 (c) $r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{cosec} \beta$ (d) $r \sin \alpha \operatorname{cosec}\left(\frac{\beta}{2}\right)$
18. किसी त्रिभुज ABC में दो भुजा a, b तथा एक कोण A दिया गया हो तथा यदि तीसरी भुजा के दो सम्भावित मान c_1 व c_2 हों, तो
- (a) $c_1 - c_2 = 2\sqrt{(a^2 + b^2 \sin^2 A)}$
 (b) $c_1 - c_2 = 2\sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)}$
 (c) $c_1 - c_2 = 4\sqrt{(a^2 + b^2 \sin^2 A)}$
 (d) $c_1 - c_2 = 3\sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)}$
19. एक मीनार AB ऊर्ध्वाधर से पश्चिम की दिशा में α कोण से झुकी है। A बिन्दु से d दूरी पर पूर्व की दिशा में बिन्दु C से मीनार के उच्चतम बिन्दु B का उन्नयन कोण β है। यदि C के पूर्व में इससे $2d$ दूरी पर स्थित बिन्दु D से B का उन्नयन कोण γ हो, तो $2 \tan \alpha$ का मान निम्न प्रकार से दिया जा सकता है [IIT 1994]
- (a) $3 \cot \beta - 2 \cot \gamma$ (b) $3 \cot \gamma - 2 \cot \beta$
 (c) $3 \cot \beta - \cot \gamma$ (d) $\cot \beta - 3 \cot \gamma$
20. निम्न में से किन प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाले त्रिभुज का अस्तित्व होगा [IIT 1986; Pb. CET 2003]
- (a) $b \sin A = a, A < \frac{\pi}{2}$
 (b) $b \sin A > a, A > \frac{\pi}{2}$
 (c) $b \sin A > a, A < \frac{\pi}{2}$
 (d) इनमें से कोई नहीं

1. (c) दिया गया समीकरण है, $\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x$

$$\Rightarrow \cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x(\cos x - 2) = 2 \sin x(2 - \cos x)$$

$$\Rightarrow (\cos x - 2)(\cos x + 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x + 2 \sin x = 0, \quad (\because \cos x \neq 2)$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = n\pi + \tan^{-1}(-1/2), n \in I$$

$$\text{चूँकि } 0 \leq x \leq \pi, \text{ अतः } x = \pi + \tan^{-1}(-1/2).$$

2. (a) $\left(\frac{\sin \theta}{\sin \phi}\right)^2 = \frac{\tan \theta}{\tan \phi}$

$$\Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = \sin \phi \cos \phi$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\phi$$

$$2\theta = \pi - 2\phi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\text{किन्तु } \frac{\tan \theta}{\tan \phi} = 3 \Rightarrow \frac{\tan \theta}{\cot \theta} = 3 \Rightarrow \tan^2 \theta = 3$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \therefore \phi = n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

ट्रिक : $n = 0, 1$ के लिये विकल्पों की जाँच करें।

3. (a) $2(\sin x - \cos 2x) - \sin 2x(1 + 2 \sin x) + 2 \cos x = 0$

$$\Rightarrow 2 \sin x - 2 + 4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x + 2 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 2 - \cos x[4 \sin^2 x + 2 \sin x - 2] = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \cos x)(\sin x + 1)(4 \sin x - 2) = 0$$

$$\text{अतः } \sin x = -1 \text{ या } \cos x = 1 \text{ या } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = (4n - 1)\frac{\pi}{2} \text{ तथा } x = (4n + 1)\frac{\pi}{6}.$$

4. (a,b) $\tan(x - y) = 1 \Rightarrow x - y = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

(वे मान जो 0 व 2π के बीच विद्यमान है)

$$\sec(x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

(वे मान जो 0 व 2π के बीच विद्यमान है)

चूँकि x, y धनात्मक हैं, अतः $x + y > x - y$

$$\text{अतः } x + y = \frac{11\pi}{6} \text{ तथा } x - y = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{या } x + y = \frac{11\pi}{6} \text{ और } x - y = \frac{5\pi}{4}$$

इन दो समीकरणों के निकाय को हल करने पर,

$$x = \frac{25\pi}{24} \text{ तथा } y = \frac{19\pi}{24} \text{ या } x = \frac{37\pi}{24} \text{ तथा } y = \frac{7\pi}{24}.$$

5. (b) $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\cos \phi = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \phi < \frac{\pi}{2}. \text{ अतः } \frac{\pi}{2} < (\theta + \phi) < \frac{2\pi}{3}.$$

6. (c) दिया गया है, $\tan x + \sec x = 2 \cos x$ (i)

$$\Rightarrow (\sin x + 1) = 2 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow (\sin x + 1) = 2(1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x)[2(1 - \sin x) - 1] = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin x) - 1 = 0$$

$$[\because \sin x \neq -1 \text{ अन्यथा } \cos x = 0]$$

तथा $\tan x, \sec x$ अपरिभाषित होंगे]

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{अंतराल } (0, 2\pi) \text{ में, } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$$

7. (b) $-\sqrt{7^2 + 5^2} \leq (7 \cos x + 5 \sin x) \leq \sqrt{7^2 + 5^2}$

$$\text{अतः } -\sqrt{74} \leq (2k + 1) \leq \sqrt{74}$$

$$-8.6 \leq (2k + 1) \leq 8.6 \text{ या } -9.6 \leq 2k \leq 7.6$$

$$\text{या } -4.8 \leq k \leq 3.8$$

अतः k के पूर्णांक मान $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ (आठ मान) हैं।

8. (d) यदि $f(x) = \cos \sqrt{x}$, तब $f(x)$ आवर्ती फलन नहीं है।

9. (c) यहाँ $a^2 + b^2 = 8p^2$ (i)

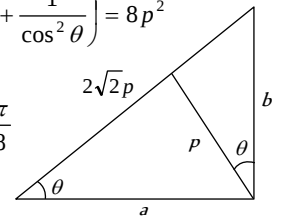
$$\text{जहाँ } p = a \sin \theta = b \cos \theta$$

$$\text{समीकरण (i) द्वारा, } p^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = 8p^2$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$$

अतः दूसरा कोण $\frac{3\pi}{8}$ है।



10. (c) $a = \sin \alpha, b = \cos \alpha, c = \sqrt{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (1 + \sin \alpha \cos \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{1 - 1 - \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos C = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

11. (d) ट्रिक : यदि Δ समबाहु है, तब

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

यदि Δ समद्विबाहु है तब माना

$$A = 30^\circ, B = 30^\circ, C = 120^\circ.$$

$$\text{तब } \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

यदि Δ समकोण है तब माना $A = 90^\circ, B = 30^\circ, C = 60^\circ.$

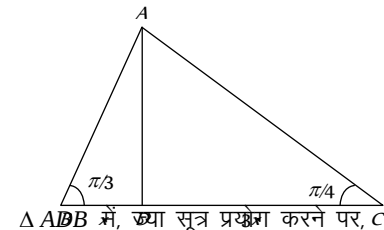
$$\text{तब } \sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

यदि त्रिभुज समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है तो कोई एक कोण 90° होगा और शेष दो कोण 45° हैं।

$$\text{इसलिए } \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{तथा } \cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}.$$

12. (c) माना $\angle BAD = \alpha, \angle CAD = \beta$



$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin(\pi/3)} \quad \dots(i)$$

$\triangle ADC$ में, ज्या सूत्र प्रयोग करने पर,

$$\frac{3x}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin(\pi/4)} \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) को (ii) से भाग करने पर,

$$\frac{x}{\sin \alpha} \times \frac{\sin \beta}{3x} = \frac{AD}{\sin(\pi/3)} \times \frac{\sin(\pi/4)}{AD}$$

$$\frac{\sin \beta}{3 \sin \alpha} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

13. (c) प्रतिबन्धानुसार, $\sin 3A = \sin 3B = k$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{3A-3B}{2} \cos \frac{3A+3B}{2} = 0$$

या तो $A = B$. $\therefore A > B$ संभव नहीं है

$$\text{या } \frac{3A+3B}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A+B = \frac{\pi}{3} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3}$$

14. (c) हमें ज्ञात है कि, $\frac{1}{2}ap_1 = \Delta, \frac{1}{2}bp_2 = \Delta, \frac{1}{2}cp_3 = \Delta$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{2\Delta}{a}, p_2 = \frac{2\Delta}{b}, p_3 = \frac{2\Delta}{c}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} = \frac{a}{2\Delta} + \frac{b}{2\Delta} - \frac{c}{2\Delta} = \frac{a+b-c}{2\Delta}$$

$$= \frac{2(s-c)}{2\Delta} = \frac{s-c}{\Delta}$$

15. (d) $\frac{a}{\sin A} = R$ तथा $b = 2R \sin B$, अतः दो भुजायें एवं दो कोण ज्ञात हैं अर्थात् $\angle C$ ज्ञात है। इस प्रकार दो भुजायें एवं उनके मध्य कोण ज्ञात हैं। $\therefore$ स्थिति (a) में त्रिभुज अद्वितीय है। यदि a, b, c ज्ञात हैं तो स्थिति (b) में त्रिभुज अद्वितीय है। $b = 2R \sin B$, $\sin A = \frac{a}{2R}$ $\therefore$ भुजायें a, b तथा कोण A तथा B ज्ञात हैं,

$\therefore \angle C$ ज्ञात है इस प्रकार दो भुजायें एवं उनके मध्य कोण ज्ञात हैं।

$\therefore$ स्थिति (c) में त्रिभुज अद्वितीय है।

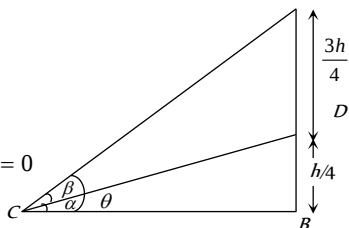
$$\frac{a}{\sin A} = R, \text{ अतः एक कोण तथा एक भुजा ज्ञात है।}$$

$\therefore$ स्थिति (d) में त्रिभुज अद्वितीय नहीं है।

16. (b) $\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = \theta - \alpha$; $\tan \beta = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\frac{h}{40} - \frac{h}{160}}{1 + \frac{h}{40} \cdot \frac{h}{160}}$$

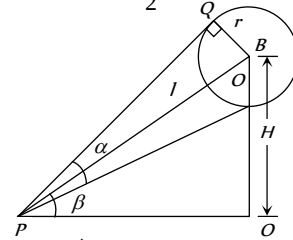
$$\Rightarrow h^2 - 200h + 6400 = 0$$



$$\Rightarrow h = 40 \text{ या } 160 \text{ मीटर}$$

$\therefore$ सम्भावित ऊँचाई = 40 मीटर

17. (a) $\triangle PQB$ में, $l = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$



और $\triangle POB$ में, $H = l \sin \beta \Rightarrow H = r \sin \beta \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$

18. (b) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\text{या } c^2 - (2b \cos A)c + (b^2 - a^2) = 0,$$

जो कि c में द्विघातीय है। माना उपरोक्त समीकरण के दो मूल c_1 व c_2 हैं, तब $c_1 + c_2 = 2b \cos A$ और $c_1 c_2 = b^2 - a^2$

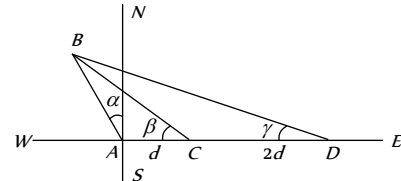
$$\therefore c_1 - c_2 = \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2}$$

$$= \sqrt{[(2b \cos A)^2 - 4(b^2 - a^2)]}$$

$$= \sqrt{[4a^2 - 4b^2(1 - \cos^2 A)]} = 2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

19. (c) C पर $(m-n)$ प्रमेय द्वारा,

$$(d+2d) \cot \beta = d \cot \gamma - 2d \cot(90^\circ + \alpha)$$



$$3d \cot \beta = d \cot \gamma + 2d \tan \alpha$$

$$\Rightarrow 3 \cot \beta = \cot \gamma + 2 \tan \alpha$$

$$\therefore 2 \tan \alpha = 3 \cot \beta - \cot \gamma$$

20. (a) हमें ज्ञात है कि $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow a \sin B = b \sin A$

$$\therefore \text{विकल्प (a) द्वारा, } b \sin A = a \Rightarrow a \sin B = a$$

$$\Rightarrow \sin B = 1 \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore A < \frac{\pi}{2} \text{ विकल्प द्वारा } \triangle ABC \text{ संभव है।}$$

$$\text{विकल्प (b) द्वारा, } b \sin A > a \Rightarrow a \sin B > a$$

$$\Rightarrow \sin B > 1, \text{ जोकि संभव नहीं है।}$$

इसी तरह दर्शाया जा सकता है कि विकल्प (c) असंभव है।

* * *