1. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 3} x + 3$

➡ $\lim_{x \to 3} x + 3 = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 3$

$= 3 + 3$

$= 6$

2. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right)$

➡ $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right) = \lim_{x \to \pi} x - \lim_{x \to \pi} \frac{22}{7}$

$= \pi - \frac{22}{7}$

3. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{r \to 1} \pi r^2$

➡ $\lim_{r \to 1} \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi$

4. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

➡ **2**

5. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 8}}{\sqrt{x}}$

➡ **3**

6. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x + 3}}{x + 3}$

➡ $\frac{1}{2}$

7. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 4} \frac{4x + 3}{x - 2}$

➡ $\lim_{x \to 4} \frac{4x + 3}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 4} 4x + 3}{\lim_{x \to 4} x - 2}$

$= \frac{4 \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 3}{\lim_{x \to 4} x - \lim_{x \to 4} 2}$

$= \frac{4(4) + 3}{4 - 2}$

$= \frac{16 + 3}{2}$

$= \frac{19}{2}$

8. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 9}{x - 27}$

➡ $\frac{1}{3}$

9. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1}$

➡ $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \to -1} (x^{10} + x^5 + 1)}{\lim_{x \to -1} (x - 1)}$

$$= \frac{\lim_{x \to -1} x^{10} + \lim_{x \to -1} x^5 + \lim_{x \to -1} 1}{\lim_{x \to -1} x - \lim_{x \to -1} 1}$$

$$= \frac{(-1)^{10} + (-1)^5 + 1}{-1 - 1}$$

$$= \frac{1 - 1 + 1}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

10. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 2} (3 - x)$

➡ 1

11. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

➡ 1

12. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to -1} (4x^2 + 2)$

➡ 6

13. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{ax + b}{cx + 1}$

➡ અહીં અંશ તથા છેદમાં $x = 0$ લેતાં, શૂન્ય થતાં નથી.

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{ax + b}{cx + 1} = \frac{\lim_{x \to 0} (ax + b)}{\lim_{x \to 0} (cx + 1)}$

$$= \frac{a(0) + b}{c(0) + 1}$$

$$= b$$

14. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

➡ અહીં અંશ તથા છેદમાં $x = 2$ મૂકતાં, $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

અંશ તથા છેદનાં અવયવો પાડીએ.

અંશ : $3x^2 - x - 10$	છેદ : $x^2 - 4$
$= 3x^2 - 6x + 5x - 10$	$= (x - 2)(x + 2)$
$= (3x + 5)(x - 2)$	

$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(3x + 5)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x + 5}{x + 2}$$

$$= \frac{3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5}{\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 2}$$

$$= \frac{3(2) + 5}{2 + 2}$$

$$= \frac{11}{4}$$

15. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 2}$

➥ **0**

16. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

➥ અહીં અંશ તથા છેદમાં $x = 3$ લેતાં, $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$\therefore$ અંશ તથા છેદનાં અવયવો પાડીએ.

અંશ	છેદ
અંશ : $x^4 - 81$	છેદ : $2x^2 - 5x - 3$
$= (x^2)^2 - (9)^2$	$= 2x^2 - 6x + x - 3$
$= (x^2 - 9)\ (x^2 + 9)$	$= (2x + 1)\ (x - 3)$
$= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$	

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{(2x + 1)(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)(x^2 + 9)}{2x + 1}$$

$$= \frac{(3 + 3)(3^2 + 9)}{2(3) + 1}$$

$$= \frac{(6)(18)}{7}$$

$$= \frac{108}{7}$$

17. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 1}$

➥ $-\frac{3}{2}$

18. $\lim_{x \to 0} \frac{(x + 1)^5 - 1}{x}$

➥ અહીં અંશ તથા છેદમાં $x = 0$ મૂકતાં, $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$x + 1 = y$ લેતાં, $x = y - 1$

હવે જેમ $x \to 0$ થાય તેમ $y \to 1$ થશે.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 1)^5 - 1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{y^5 - 1}{y - 1}$$

$= \lim_{y \to 1} \frac{y^5 - (1)^5}{y - 1} \left(\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં} \right)$

$= 5(1)^{5-1}$

$= 5$

19. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

➥ અંશ તથા છેદમાં $x = -2$ મૂકતાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{2 + x}{2x(x + 2)}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{1}{2x}$

$= \frac{1}{2(-2)}$

$= -\frac{1}{4}$

20. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

➥ $\lim_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

$= \lim_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{z - 1} \times \frac{z - 1}{z^{\frac{1}{6}} - (1)^{\frac{1}{6}}}$

$= \lim_{z \to 1} \frac{\frac{1}{3}(1)^{\frac{1}{3} - 1}}{\frac{1}{6}(1)^{\frac{1}{6} - 1}} \left(\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં} \right)$

$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}$

$= 2$

21. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{3x + 1}{x + 3}$

➥ $\mathbf{\frac{1}{3}}$

22. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, \ a + b + c \neq 0$

➥ અંશ તથા છેદમાં $x = 1$ માં શૂન્ય થતું નથી.

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a} = \frac{\lim_{x \to 1} ax^2 + bx + c}{\lim_{x \to 1} cx^2 + bx + a}$

$= \frac{a(1)^2 + b(1) + c}{c(1)^2 + b(1) + a}$

$$= \frac{a+b+c}{c+b+a} = 1$$

23. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{(bx)}$

➡ અંશમાં અને છેદમાં $x = 0$ મૂકતાં, $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \times \frac{a}{b}$$

$$= (1) \times \frac{a}{b} \quad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

$$= \frac{a}{b}$$

24. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ **$(a, b \neq 0)$**

➡ અંશ તથા છેદમાં $x = 0$ મૂકતાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \times \frac{a}{b} \times \frac{bx}{\sin(bx)}$$

$$= (1)\left(\frac{a}{b}\right)(1) \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

$$= \frac{a}{b}$$

25. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

➡ અંશ તથા છેદમાં $x = \pi$ મૂકતાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)} \qquad \pi - x = y \text{ લેતાં}, \; ; \text{ જેમ } x \to \pi \Rightarrow y \to 0$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\pi \cdot y} = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad \left(\because \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

26. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$

➡ $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \cos x}{\lim\limits_{x \to 0} (\pi - x)}$$

$$= \frac{\cos 0}{\pi - 0}$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

27. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

➡ $x - \frac{\pi}{2} = y$ લેતાં,

જેમ $x \to \frac{\pi}{2}$ તેમ $y \to 0$ તથા $x = y + \frac{\pi}{2}$

અને $2x = 2y + \pi$ મળે.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to 0} \frac{\tan(\pi + 2y)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\tan(2y)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\tan(2y)}{2y} \times 2$$

$$= (1)2 \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

$$= 2$$

28. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos x - 1}$

➡ અહીં અંશ તથા છેદમાં $x = 0$ લેતાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.($\because \cos 0 = 1$ છે.)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\sin^2 x - 1}{1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1} \left(\because \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right) \times 4}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 \times 4$$

$$= (1)^2 \times (1)^2 \times 4 \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

$$= 4$$

29. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

➡ $$\lim_{x \to 0} \operatorname{cosec} x - \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{\sin 0}{1 + \cos 0}$$

$$= \frac{0}{1 + 1}$$

$$= 0$$

30. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 0} \frac{ax + x\cos x}{b \sin x}$

➡ અંશ તથા છેદમાં $x = 0$ લેતાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax + x\cos x}{b \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\,(a + \cos x)}{b \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{a + \cos x}{b \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)} \quad (\because \text{ અંશ તથા છેદને } x \text{ વડે ભાગતાં})$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} (a + \cos x)}{\lim_{x \to 0} b \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$= \frac{a + \cos 0}{b\,(1)} \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

$$= \frac{a + 1}{b}$$

31. લક્ષની ગણતરી કરો : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$ $a, b, a + b \neq 0$

➡ અંશ તથા છેદમાં $x = 0$ મૂકતાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$$

અંશ તથા છેદના દરેક પદને x વડે ભાગતાં,

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin ax}{x} + b}{a + \frac{\sin bx}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right) \times a + b}{a + \left(\frac{\sin bx}{bx}\right) \times b}$$

$$= \frac{(1) \times a + b}{a + (1) + b} \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

$= \dfrac{a+b}{a+b} = 1$

32. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} x \sec x$

➡ $\lim_{x \to 0} x \sec x = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\cos x}$

$= \dfrac{0}{\cos 0}$

$= \dfrac{0}{1}$

$= 0$

33. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9}$

➡ **18**

34. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$

➡ $\dfrac{1}{2}$

35. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 + 4x + 12}{x^3 - 3x + 2}$

➡ $\dfrac{4}{3}$

36. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

➡ **3**

37. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x-2}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} \right)$

➡ **2**

38. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{4}{x^2 - 2x} \right)$

➡ **2**

39. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$

➡ **32**

40. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + \sqrt{2}x - 4}$

➡ $\dfrac{2}{3}$

41. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \dfrac{(a+x)^2 - a^2}{x}$

➡ $2a$

42. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 3x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}$

➡ $\frac{5}{4}$

43. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{5x}$

➡ $\frac{3}{5}$

44. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin 3x - 3\sin x}$

➡ $-\frac{1}{8}$

45. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(4x^2)}{x^4}$

➡ **16**

46. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \tan(2x)}{\tan x}$

➡ **–2**

47. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^\circ)}{x}$

➡ $\frac{\pi}{180}$

48. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2}$

➡ $\frac{m^2}{2}$

49. જો $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ તો $\lim_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

➡ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 1$

$= (1)^2 - 1$

$= 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -x^2 - 1$

$= -(1)^2 - 1$

$= -2$

અહીં $\lim_{x \to 1^-} f(x) \ne \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

50. **જો** $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$ **a ની કઈ કિંમત (કે કિંમતો) માટે** $\lim_{x \to a} f(x)$ **નું અસ્તિત્વ છે ?**

➡ $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ કારણ કે $|x| = x,\ x \geq 0$
$= -x,\ x < 0$

વિકલ્પ : **I** : જ્યારે $a = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$= \lim_{h \to 0} f(-h)$ $(\because x < 0, f(x) = -x+1)$

$= \lim_{h \to 0} h+1$

$= 0 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$

$= \lim_{h \to 0} f(h)$

$= \lim_{h \to 0} h-1 \quad (\because x > 0, f(x) = x-1)$

$= -1$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore$ $a = 0$ માટે $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

વિકલ્પ : **II** : જ્યારે $a < 0$ હોય.

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-x+1)$ $(\because x < 0, f(x) = -x+1)$

$= -a + 1$ જે વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$\therefore$ $a < 0$ હોય ત્યારે $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે.

➡ $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ કારણ કે $|x| = x,\ x \geq 0$
$= -x,\ x < 0$

વિકલ્પ : **I** : જ્યારે $a = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$= \lim_{h \to 0} f(-h)$ $(\because x < 0, f(x) = -x+1)$

$= \lim_{h \to 0} h+1$

$= 0 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$

$= \lim_{h \to 0} f(h)$

$= \lim_{h \to 0} h-1 \quad (\because x > 0, f(x) = x-1)$

$= -1$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore$ $a = 0$ માટે $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

વિકલ્પ : II : જ્યારે $a < 0$ હોય.

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-x + 1)$ ($\because x < 0, f(x) = -x + 1$)

$= -a + 1$ જે વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$\therefore a < 0$ હોય ત્યારે $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે.

51. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - \cos(5x)}{x^2}$

➡ **8**

52. જો $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$ તો $\lim_{x \to 0} f(x)$ અને $\lim_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

➡ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3(x + 1)$

$= 3\ (0 + 1)$

$= 3$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x + 3$

$= 2(0) + 3$

$= 3$

$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે. તથા $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.

હવે $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 3(x + 1)$

$= 3\ (1 + 1)$

$= 6$

53. જો $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ તો $\lim_{x \to 0} f(x)$ની ગણતરી કરો.

➡ આપણે જાણીએ છીએ કે, $|x| = x, x > 0$

$= -x, x < 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$

$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x}$

$= \lim_{x \to 0^-} -1$

$= -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} 1$

$= 1$

અહીં $\lim_{x \to 0^-} f(x) \ne \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

54. **ધારો કે $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ એ નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ વ્યાખ્યાયિત કરો, તો $\lim_{x \to a_1} f(x)$ શું થાય ? કોઈક $a \neq a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ હોય તો $\lim_{x \to a} f(x)$ ગણો.**

➡ $\lim_{x \to a_1} f(x) = \lim_{x \to a_1} (x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots(x - a_n)$

$= (a_1 - a_1)(a_1 - a_2)\ldots\ldots(a_1 - a_n)$

$= 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots(x - a_n)$

$= (a - a_1)(a - a_2)\ldots\ldots(a - a_n)$

જ્યાં $a \neq a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$.

55. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \dfrac{3\sin^2 x - 2\sin(x^2)}{3x^2}$

➡ $\dfrac{1}{3}$

56. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1 - \cos x}{x \sin x}$

➡ $\dfrac{3}{2}$

57. **જો** $f(x) \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$ **અને જો** $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ **તો a અને bની શક્ય કિંમતો કઈ છે ?**

➡ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} a + bx$

$= a + b(1)$

$= a + b$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} b - ax$

$= b - a(1)$

$= b - a$

તથા $f(1) = 4$

હવે $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$

$\therefore a + b = b - a = 4$

$\therefore \left.\begin{array}{r} a + b = 4 \\ -a + b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0,\ b = 4$

58. **લક્ષની ગણતરી કરો :** $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 6x}$

➡ $\dfrac{4}{9}$

59. **જો $f(x) = |x| - 5$ તો $\lim_{x \to 5} f(x)$ શોધો.**

➡ $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} |x| - 5$

$= |5| - 5$

$= 5 - 5$

$= 0$

60. જો $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ તો $\lim_{x \to 0} f(x)$ શોધો.

➡ આપણે જાણીએ છીએ કે, $|x| = x, x \geq 0$

$= -x, x < 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$

$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x}$

$= \lim_{x \to 0^-} -1$

$= -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} 1$

$= 1$

અહીં $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

61. જો $f(x) = \begin{cases} 5x - 4, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^3 - 3x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ હોય તો $\lim_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

➡ 1

62. જો વિધેય $f(x)$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$ ને સંતોષે, તો $\lim_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

➡ $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$

$\therefore \frac{\lim_{x \to 1} [f(x) - 2]}{\lim_{x \to 1} x^2 - 1} = \pi \quad \left(\because \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \right)$

$\therefore \lim_{x \to 1} [f(x) - 2] = \pi \cdot \lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} 2 = \pi (1 - 1)$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) - 2 = 0$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

63. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -1 \\ cx^2, & x > -1 \end{cases}$ **જો** $\lim_{x \to -1} f(x)$ **નું અસ્તિત્વ હોય તો** c **નું મૂલ્ય શોધો.**

➥ **1**

64. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 0 \\ 3x^2 + 1, & x \ge 0 \end{cases}$ **હોય તો** $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ **મેળવો.**

➥ **1**

65. **જો** $f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$ **તો કયા પૂર્ણાંકો** m **અને** n **માટે** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **અને** $\lim_{x \to 1} f(x)$ **એ બંને લક્ષના અસ્તિત્વ હોય ?**

➥ $f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} mx^2 + n$

$= m(0)^2 + n$

$= n$

$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} nx + m$

$= n(0) + m$

$= m$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$\therefore m = n$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} nx + m$

$= n(1)^3 + m$

$= n + m$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} nx^3 + m$

$= n(1)^3 + m$

$= n + m$

હવે $\lim_{x \to 1} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે.

$\therefore \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\therefore n + m = n + m$ જે પ્રત્યેક $n, m \in Z$ માટે સત્ય છે.

$\therefore \forall m, n, \in Z$ માટે $\lim_{x \to 1} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે.

66. $f(x) = \begin{cases} 6x - 6, & x \le 3 \\ 2x - k, & x > 3 \end{cases}$ **જો** $\lim_{x \to 3} f(x)$ **નું અસ્તિત્વહોય તો** k **નું મૂલ્ય શોધો.**

➥ **– 6**

67. જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - |x|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ હોય તો $\lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી, તેમ સાબિત કરો.

➡ $\lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

68. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 2 \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$ હોય તો $\lim_{x \to 2}$ મેળવો.

➡ 7

69. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ x + K, & x < 0 \end{cases}$ જો $\lim_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ ધરાવે તો K નું મૂલ્ય મેળવો.

➡ K = 1

70. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ 3x + 2, & x > 2 \end{cases}$ હોય તો $\lim_{x \to 2} f(x)$ શોધો.

➡ $\lim_{x \to 2} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.