सीमा एवं अवकलज

Ex 10.1

प्रश्न 1. प्रदर्शित कीजिए कि फलन

$$f(x) = \frac{\log_e x}{x-1}$$

की x = 1 पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा समान हैं तथा इनका मान 1 है।

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = \frac{\log x}{x-1}$$

x = 1 पर दायीं सीमा

$$f(1+0) = \lim_{h \to 0} f(1+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{1+h-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \ldots\ldots\right]$$

[log (1 + x) के प्रसार से]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}\left[1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} \ldots\ldots\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} \ldots\ldots\right]$$

= 1 – 0 + 0 = 1

⇒ f(1 + 0) = 1 ….(1)

x = 1 पर बायीं सीमा

$$f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1-h)}{1-h-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h}\left[-h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \ldots\right]$$

[log (1 − x) के प्रसार से]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\left[1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \ldots\right]$$

$$f(1-0) = 1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$f(1+0) = f(1-0) = 1$$

अत: सिद्ध होता है कि $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$ की x = 1 पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा समान हैं तथा इनका मान 1 है।

प्रश्न 2. क्या x = 0 पर फलन $f(x) = \frac{x+|x|}{x}$ की सीमाएँ अस्तित्व में है।

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = \frac{x+|x|}{x}$$

x = 0 पर फलन की दायीं सीमा

$$f(0+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0+h+|0+h|}{0+h}, (h>0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h+|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{2h}{h}\right) = \lim_{h\to 0} 2 = 2$$

f(0 + 0) = 2 ....(1)

x = 0 पर फलन की बायीं सीमा

$$f(0-0) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)+|0-h|}{(0-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h+h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{-h} = \lim_{h \to 0}(0)$$

f(0 + 0) = 0 .....(2)

समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि

f(0 + 0) ≠ f(0 – 0)

इसलिए x = 0 पर दिये गये फलन की सीमा अस्तित्व में नहीं है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि x = 0 पर फलन f(x) = |x| + |x – 1| की सीमाएँ अस्तित्व में हैं।

हल : दिया गया फलन है :

f(x) = |x| + |x + 1|

x = 0 पर बायीं सीमा

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0}[|0-h|+|0-h+1|]$$

$$= \lim_{h \to 0}[h+|1-h|]$$

$$= \lim_{h \to 0} h+1-h \qquad [\because 1 > h]$$

$$= \lim_{h \to 0}(1) = 1$$

x = 0 पर दायीं सीमा

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0}[|0+h|+|0+h+1|]$$

$$= \lim_{h \to 0}(h+h+1)$$

$$= \lim_{h \to 0}(2h+1)$$

$$= 2(0) + 1 = 1$$

$$\because \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

∴ x = 0 पर फलन f(x) = |x| + |x – 1| की सीमाएँ अस्तित्व में है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि x = 2 पर फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & \text{जब } x \geq 2 \\ x, & \text{जब } x < 2 \end{cases}$$

की सीमाएँ अस्तित्व में नहीं हैं।

हल- x = 2 पर फलन की बायीं सीमा

$$\begin{aligned} f(2-0) &= \lim_{x\to 2^-} f(x) \\ &= \lim_{h\to 0} f(2-h) \\ &= \lim_{h\to 0}(2-h) \\ &= 2-0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

x = 2 पर फलन की दायीं सीमा

$$\begin{aligned} f(2+0) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) \\ &= \lim_{h\to 0} f(2+h) \\ &= \lim_{h\to 0}\{(2+h)^2+(2+h)+2\} \\ &= \lim_{h\to 0}\{4+h^2+4h+2+h+2\} \end{aligned}$$

= 4 + 0 + 0 + 2 + 0 + 2
= 8

स्पष्ट है कि f(2 – 0) ≠ f(2 + 0)

∴दिए गए फलन की x = 2 पर सीमाएँ अस्तित्व में नहीं हैं।

प्रश्न 5. फलन f(x) = $x cos\frac{1}{x}$ की x = 0 पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा ज्ञात कीजिए।

हल- दिया गया फलन f(x) = $x cos\frac{1}{x}$

x = 0 पर फलन की दायीं सीमा

$$f(0+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h\to 0}(0+h)\cos\frac{1}{0+h} = \lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h}$$

$$= 0 \times \cos\left(\frac{1}{0}\right)$$

= 0 x [-1, 1] के बीच कोई परिमित राशि के

⇒ f(0 + 0) = 0 .....(1)

x = 0 पर फलन की बायीं सीमा

$$f(0-0) = \lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h\to 0}(0-h)\cos\left(\frac{1}{0-h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}(-h)\cos\left(\frac{1}{h}\right) [\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$$

= 0 x [-1, 1] के बीच कोई परिमित राशि

f(0 – 0) = 0 .....(2)

Ex 10.2

निम्न सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1.

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ (b) $\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(x-1)}{2x^2+x-3}$

हल-

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x - x + 2}{x^2 + 3x - 2x - 6}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2) - (x-2)}{x(x+3) - 2(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+3}$$

$$= \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(x-1)}{2x^2 + x - 3}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(x-1)}{2x^2 + 3x - 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(x-1)}{x(2x+3) - 1((2x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(x-1)}{(2x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{2x+3}$$

$$= \frac{2 \times 1 - 3}{2 \times 1 + 3} = \frac{-1}{5}$$

प्रश्न 2.

(a) $\lim_{a \to \pi/4} \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\alpha - \pi/4}$ (b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$

हल-

(a) $\lim_{a \to \pi/4} \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\alpha - \pi/4}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

माना $\alpha = \frac{\pi}{4} + h$, जब $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ तब $h \to 0$

तब $\lim_{a \to \pi/4} \left(\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\alpha - \pi/4}\right)$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right)}{\frac{\pi}{4} + h - h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos h + \cos\frac{\pi}{4}\sin h - \cos\frac{\pi}{4}\cos h + \sin\frac{\pi}{4}\sin h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos h + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin h - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos h + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin h\right)}{h}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \sqrt{2}(1)$$

$$= \sqrt{2}$$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$

माना $x = 1 + h$, जब $x \to 1$ तब $h \to 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^n - 1}{1 + h - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{1 + n^h + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} h^2 + \ldots\ldots\right\} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left\{n + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} h + \ldots\ldots\right\}}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} (n + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} h + \ldots\ldots h$ की उच्च घातों के पद)

$= n + 0 + 0 + \ldots\ldots$

$= n$

अथवा

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^n - (1)^n}{x - 1}$$

$$= n(1)^{n-1} \qquad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right]$$

$$= n$$

प्रश्न 3.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

हल-

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{(1+x)^{1/2} - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\left\{1 + (x\log_e 2) + \frac{(x\log_e 2)^2}{\lfloor 2} + \frac{(x\log_e 2)^3}{\lfloor 2} + \ldots\ldots\right\} - 1}{\left\{1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{\lfloor 2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{\lfloor 3} x^3 + \ldots\ldots\right\} - 1} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \because a^x = 1 + x\log_e a + \frac{(x\log_e a)^2}{\lfloor 2} + \frac{(x\log_e a)^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \\ \text{और } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\log_e 2 + \frac{(x\log_e 2)^2}{\lfloor 2} + \frac{(x\log_e 2)^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots}{\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{\lfloor 2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{\lfloor 3} x^3 + \ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log 2 + \frac{(\log_e 2)^2 x}{\lfloor 2} + \frac{(\log_e 2)^3}{\lfloor 3} x^2 + \ldots\ldots}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{\lfloor 3} x^2 + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{\log_e 2 + 0 + 0 + \ldots\ldots}{\frac{1}{2} + 0 + 0 + \ldots\ldots}$$

$$= 2 \log_e 2$$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^{1/2} - (1-x^2)^{1/2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left\{1 + \frac{1}{2}(x^2) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}(x^2)^2 + \ldots\right\} - \left\{1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}(-x^2)^2 + \ldots\right\}}{x^2}$$

$$\left[\because (1+x)^2 = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left\{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x^4 + \ldots\right\} - \left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x^4 + \ldots\right\}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x^4 + \ldots\right\} + \left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x^4 + \ldots\right\}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[\left\{\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x^2 + \ldots\right\} + \left\{\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2} x^2 + \ldots\right\}\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{\lfloor 2} x^2 + \ldots\ldots \right\} + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{\lfloor 2} x^2 + \ldots\ldots \right\} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 0 + 0 + \ldots\ldots \right) + \left(\frac{1}{2} - 0 + 0 \ldots\ldots \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

प्रश्न 4.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x - \tan^{-1} x}{x^3}$

हल-

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\right) - 2\left(1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \frac{x^6}{\lfloor 6} + \ldots\ldots\right)}{x\left(x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} \ldots\ldots\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 1 - 2) + x(1 - 1) + x^2\left(\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{2}{\lfloor 2}\right) + x^3\left(\frac{1}{\lfloor 3} - \frac{1}{\lfloor 3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ x \text{ की उच्च घातों के पद}}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 5} \ldots\ldots\ldots\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{\lfloor 2} + x \text{ की उच्च घातों के पद}}{1 - \frac{x^2}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 5} + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{\frac{4}{\lfloor 2} + 0 + 0 + \ldots\ldots}{1 - 0 + 0 + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{4}{\lfloor 2} = 2$$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x - \tan^{-1} x}{x^3}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{9x^5}{\lfloor 5} + \ldots\ldots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1-1) + x^3\left(\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{3}\right) + x^5\left(\frac{9}{\lfloor 5} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots x \text{ की उच्च घातों के पद}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3\left[\left(\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{3}\right) + x^2\left(\frac{9}{\lfloor 5} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots x \text{ की उच्च घातों के पद}\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{3}\right) + x^2\left(\frac{9}{\lfloor 5} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots x \text{ की उच्च घातों के पद}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{3}\right) + 0 + 0 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 5.

(a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+\sin x}{x-\cos x}}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{2n^2-1}}{4n+3}$

हल-

(a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+\sin x}{x-\cos x}}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+\sin x}{x-\cos x}\right)^{1/2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}\right)^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}{1-\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1+0\times[-1,1] \text{ के बीच परिमित राशि}}{1-0\times[-1,1] \text{ के बीच परिमित राशि}}\right]^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1+0}{1-0}\right)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{2n^2-1}}{4n+3}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(4+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} - n\sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}}{n\left(4 + \frac{3}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}}{4 + \frac{3}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{3-0} - \sqrt{2-0}}{4+0}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

प्रश्न 6.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

हल-

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \times 5x - \frac{\sin 3x}{3x} \times 3x}{\frac{\sin x}{x} \times x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[\frac{\sin 5x}{5x} \times 5 - \frac{\sin 3x}{3x} \times 3\right]}{x \times \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{5 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} - 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{5 \times 1 - 3 \times 1}{1}$$

$[\because$ जब $x \to 0$ तब $5x \to 0, 3x \to 0]$

$= 5 - 3$
$= 2$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left\{1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{\lfloor 2} + \frac{(\sin x)^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\right\} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \frac{(\sin x)^2}{\lfloor 2} + \frac{(\sin x)^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\left[1 + \frac{\sin x}{\lfloor 3} + \frac{(\sin x)^2}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$= 1 \times [1 + 0 + 0 + \ldots\ldots]$ $\left[\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right]$

$= 1$

प्रश्न 7.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ (b) $\lim_{x \to a} \frac{(x+2)^{3/2} - (a+2)^{3/2}}{x - a}$

हल-

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots - 1\right]}{1 - \left\{1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \ldots\ldots\right\}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+......\right]}{\left(\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^4}{\lfloor 4}+\frac{x^6}{\lfloor 6}.......\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1+\frac{x}{\lfloor 2}+\frac{x^2}{\lfloor 3}+......\right)}{x^2\left(\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{x^2}{\lfloor 4}+\frac{x^4}{\lfloor 6}.......\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{\lfloor 2}+\frac{x^2}{\lfloor 3}+......}{\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{x^2}{\lfloor 4}+\frac{x^4}{\lfloor 6}.......}$$

$$= \frac{1+0+0+......}{\frac{1}{\lfloor 2}-0+0+0+......}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\lfloor 2}}$$

$$= \lfloor 2$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

(b) $\lim_{x\to a} \frac{(x+2)^{3/2}-(a+2)^{3/2}}{x-a}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x+2)^{3/2}-(a+2)^{3/2}}{(x+2)-(a+2)}$$

$$= \lim_{(x+2)\to(a+2)} \left[\frac{(x+2)^{3/2}-(a+2)^{3/2}}{(x+2)-(a+2)}\right]$$

$$= \lim_{y\to b} \left[\frac{y^{3/2}-b^{3/2}}{y-b}\right], \text{ जहाँ } y = x+2, b = a+2$$

$$= \frac{3}{2} b^{3/2-1} \qquad \left[\because \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n(a)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{3}{2} b^{1/2}$$

$$= \frac{3}{2}(a+2)^{1/2}$$

Ex 10.3

प्रश्न 1. $x = 10$ पर $x^2 - 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ पर $f(x) = x^2 - 2$

हम जानते हैं कि

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ होता है।}$$

$$\therefore \quad f'(10) = \lim_{h \to 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(10+h)^2 - 2] - [10^2 - 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(100 + 20h + h^2 - 2) - (100 - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h^2 + 20h + 98) - (98)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 20) = 20$$

प्रश्न 2. $x = 50$ पर $49x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल- $\because f(x) = 49x$

$$\therefore \quad f'(50) = \lim_{h \to 0} \frac{f(50+h) - f(50)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{49(50+h) - 49 \times 50}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{49 \times 50 + 49h - 49 \times 50}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{49h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 49$$

$$= 49$$

प्रश्न 3. प्रथम सिद्धान्त से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) $x^3 - 16$ **(ii)** $(x-1)(x-2)$

(iii) $\frac{1}{x^2}$ **(iv)** $\frac{x+1}{x-1}$

हल- (i) माना कि $f(x) = x^3 - 16$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3-16]-[x^3-16]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3h^2x+h^3-16-x^3+16}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3hx+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2)$$

$$= 3x^2$$

(ii) माना कि $f(x) = (x-1)(x-2)$

$= x^2 - 2x - x + 2$

$= x^2 - 3x + 2$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2-3(x+h)+2]-[x^2-3x+2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2-3x-3h+2-x^2+3x-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h-3)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h-3)$$

$$= 2x - 3$$

(iii) माना कि

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2(x)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{h(x+h)^2(x)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{h(x+h)^2(x)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x-h)}{h(x+h)^2(x)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{(x+h)^2(x)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

(iv) माना कि

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)+1}{(x+h)-1} - \frac{x+1}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x-1)[(x+h)+1]-[(x+h)-1](x+1)}{h[(x+h)-1][x-1]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+xh+x-x-h-1-(x^2+xh-x+x+h-1)}{h(x-1)(x-1+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + xh - h - 1 - x^2 - xh - h + 1}{h(x-1)(x-1+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(x-1)(x-1+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(x-1)(x-1+h)}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

प्रश्न 4. फलन

$$f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + ... + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

के लिए सिद्ध कीजिए कि
f′ (1) = 100 f'(0).

हल- दिया गया है

$$f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + ..., + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{99}}{99}\right) + ... + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= \frac{1}{100}\frac{d}{dx}(x^{100}) + \frac{1}{99}\frac{d}{dx}(x^{99}) + ... + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= \frac{1}{100} \times 100x^{99} + \frac{1}{99} \times 99x^{98} + ... + \frac{1}{2} \times 2x + 1 + 0$$

$$f'(x) = x^{99} + x^{98} + ... + x + 1$$

∴ f'(1) = 1 + 1 + ... + 1 + 1 = 100
∵ 100 पद है।

या f'(1) = 100 x 1 = 100 f′ (0) ∵ f'(0) = 1
अतः f'(1) = 100 f'(0) इतिसिद्धम्।

प्रश्न 5. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए
$$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$$

का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$$
$$\therefore f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + ... + a^{n-1} + 0 \quad \left[\because \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right]$$
$$= nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + ... + a^{n-1}$$

प्रश्न 6. किन्हीं अचरों a और b के लिए,

(i) (x – a) (x – b)
(ii) $(ax^2 + b)^2$

(iii) $\frac{x-a}{x-b}$ के अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल- (i) माना कि f(x) = (x – a) (x – b)

गुणन नियम का प्रयोग करने पर

$$\frac{d}{dx}f(x) = (x-a)\frac{d(x-b)}{dx} + (x-b)\frac{d}{dx}(x-a)$$
$$= (x-a)\left[\frac{d}{dx}(x) - \frac{d(b)}{dx}\right] + (x-b)\left[\frac{d(x)}{dx} - \frac{d(a)}{dx}\right]$$

= (x – a) [1 – 0] + (x – b) [1 – 0]

= (x – a) + (x – b)
= 2x – a – b

(ii) माना कि $f(x) = (ax^2 + b)^2$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(ax^2 + b)\,.\,(ax^2 + b)$$

गुणन नियम का प्रयोग करने पर

$$= (ax^2 + b)\,\frac{d\,(ax^2 + b)}{dx} + (ax^2 + b)\,\frac{d}{dx}(ax^2 + b)$$

$$= (ax^2 + b)\left[\frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(b)\right] + (ax^2 + b)\left[\frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(b)\right]$$

$$= (ax^2 + b)\left[a\frac{d}{dx}(x^2) + 0\right] + (ax^2 + b)\left[a\,.\,\frac{d}{dx}(x^2) + 0\right]$$

$$= (ax^2 + b)\,[a\,(2x^{2-1})] + (ax^2 + b)\,[a\,(2x^{2-1})]$$

$= (ax^2 + b)\,(2ax) + (ax^2 + b)\,(2ax)$
$= 4ax\,(ax^2 + b)$

(iii) माना कि $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$

भागफल नियम का प्रयोग करने

$$= \frac{(x-b)\frac{d}{dx}(x-a) - (x-a)\frac{d}{dx}(x-b)}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{(x-b)\left[\frac{d(x)}{dx} - \frac{d(a)}{dx}\right] - (x-a)\left[\frac{d(x)}{dx} - \frac{d(b)}{dx}\right]}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{(x-b)\,[1-0] - (x-a)\,[1-0]}{(x-b)^2} = \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{x-b-x+a}{(x-b)^2} = \frac{a-b}{(x-b)^2}$$

प्रश्न 7. किसी अचर a के लिए

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}$$

का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि

$$f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

भागफल नियम का प्रयोग करने पर

$$f'(x) = \frac{(x-a)\frac{d(x^n - a^n)}{dx} - (x^n - a^n)\frac{d}{dx}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x-a)\left[\frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(a^n)\right] - (x^n - a^n)\left[\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(a)\right]}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x-a)[nx^{n-1} - 0] - (x^n - a^n)[1-0]}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x-a)(nx^{n-1}) - (x^n - a^n)}{(x-a)^2} = \frac{nx^n - an\,x^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(n-1)\,x^n - a\,(nx^{n-1} - a^{n-1})}{(x-a)^2}$$

प्रश्न 8. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) $2x - \frac{3}{4}$
(ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$
(iii) $x^5 (3 - 6x^{-9})$
(iv) $x^{-4} (3 - 4x^{-5})$
(v) $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

हल- (i) माना कि

$$f(x) = 2x - \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x - \frac{3}{4}\right) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{d(x)}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 2 . \frac{dx}{dx} - 0 = 2$$

(ii) माना कि $f(x) = (5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

$$f'(x) = (x - 1)\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x - 1) + (5x^3 + 3x - 1)\frac{d}{dx}(x - 1)$$

$$= (x - 1)\left[\frac{d}{dx}5x^3 + \frac{d}{dx}(3x) - \frac{d}{dx}(1)\right] + (5x^3 + 3x - 1)\left[\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1)\right]$$

$$= (x - 1)\left[5 . \frac{d}{dx}(x)^3 + \frac{3dx}{dx} - 0\right] + (5x^3 + 3x - 1)[1 - 0]$$

$$= (x - 1)[5(3x^{3-1}) + 3] + (5x^3 + 3x - 1)$$

$= (x - 1)[15x^2 + 3] + (5x^3 + 3x - 1)$

$= 15x^3 + 3x - 15x^2 - 3 + 5x^3 + 3x - 1$

$= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$

(iii) माना कि

$$f(x) = x^5(3 - 6x^{-9}) = 3x^5 - 6x^{-4}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5 - 6x^{-4})$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^5) - \frac{d}{dx}(6x^{-4})$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) - 6\frac{d}{dx}(x^{-4})$$

$$= 3 . (5x^4) - 6(-4)x^{-5}$$

$$= 15x^4 + 24x^{-5} = 15x^4 + \frac{24}{x^5}$$

(iv) माना कि

$$f(x) = x^{-4}(3 - 4x^{-5})$$

$$\therefore f'(x) = x^{-4}\frac{d}{dx}(3 - 4x^{-5}) + (3 - 4x^{-5})\frac{d}{dx}(x^{-4})$$

$$= x^{-4}\left[\frac{d}{dx}(3) - \frac{d}{dx}(4x^{-5})\right] + (3-4x^{-5})(-4)(x^{-5})$$

$$= x^{-4}[0-(4)(-5)x^{-6}] + (3 - 4x^{-5})(-4)x^{-5}$$

$$= x^{-4}[20x^{-6}] - x^{-5}(12 - 16x^{-5})$$

$$= 20x^{-10} - 12x^{-5} + 16x^{-10}$$

$$= 36x^{-10} - 12x^{-5}$$

$$= -\frac{12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$$

(v) माना कि

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x+1}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)$$

$$= \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2) - 2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(x)^2 - x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{0-2\left[\frac{dx}{dx} + \frac{d(1)}{dx}\right]}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)(2x) - x^2\left[\frac{d(3x)}{dx} - \frac{d}{dx}(1)\right]}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{0-2(1+0)}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)(2x)-x^2(3-0)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{(6x^2-2x)-3x^2}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

प्रश्न 9. प्रथम सिद्धान्त से cos x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि f (x) = cos x

$$\text{तब } f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$\because \cos x - \cos y = -2\sin\frac{(x+y)}{2} \times \sin\frac{(x-y)}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

= – sin x . 1
= – sin x

प्रश्न 10. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए
(i) sin x cos x
(ii) sec x
(iii) cosec x

(iv) 3 cot x + 5 cosec x
(vi) 5 sin x – 6 cos x + 7

हल- (i) माना कि f(x) = sin x cos x

गुणन नियम का प्रयोग करने पर

$$\therefore f'(x) = \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

= sin x (-sin x) + cos x (cos x)
= – $\sin^2$ x + $\cos^2$ x
= $\cos^2$x – $\sin^2$x
= cos 2x

(ii) माना कि f(x) = sec x

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\sec x)\left[= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right]$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(1) - 1 \frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0-(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

= sec x. tan x

(iii) माना कि f(x) = cosec x

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(1) - 1 . \frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{0-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

= – cosec x . cot x

(iv) माना कि f(x) = 3 cot x + 5 cosec x

$$\therefore\ f'(x) = \frac{d}{dx}(3\ \cot\ x + 5\ \operatorname{cosec}\ x)$$
$$= \frac{d}{dx}(3\ \cot\ x) + \frac{d}{dx}(5\ \operatorname{cosec}\ x)$$
$$= 3\ .\ \frac{d}{dx}(\cot\ x) + 5\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}\ x)$$

= – 3 $\operatorname{cosec}^2 x$ – 5 cosec x cot x

(v) माना कि f(x) = 5 sin x – 6 cos x + 7

$$\therefore\ f'(x) = \frac{d}{dx}(5\ \sin\ x - 6\ \cos\ x + 7)$$
$$= \frac{d}{dx}(5\ \sin\ x) - \frac{d}{dx}(6\ \cos\ x) + \frac{d}{dx}(7)$$

= 5 cos x – 6 (- sin x) + 0
= 5 cos x + 6 sin x

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x^2 - 7x + 5}$$
का मान है

(A) 1/3
(B) -1/3
(C) 1
(D) – 1

हल : (B)

प्रश्न 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

का मान है

(A) 0
(B) ∞
(C) 1
(D) – 1

हल : (A)

प्रश्न 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{x} - \log_e(1+x)}{x^2}$$

का मान है

(A) 2/3
(B) 1/3
(C) 1/2
(D) 3/2

हल : (D)

प्रश्न 4.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} \right)$$

का मान है

(A) 3
(B) 2
(C) 1
(D) – 1

हल : (C)

प्रश्न 5.

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{\pi}{4x} \cos \frac{\pi}{4x}$$

का मान है

(A) π/4
(B) π/2
(C) 0
(D) ∞

हल : (A)

प्रश्न 6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

का मान है

(A) 0
(B) 1
(C) log (ab)
(D) log (a/b)

हल : (D)

प्रश्न 7.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^0}{x}$$

का मान है

(A) 0
(B) 1
(C) π/180
(D) π

हल : (C)

प्रश्न 8.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

का मान है।

(A) 0
(B) 1/2

(C) -1/2
(D) -1

हल : (B)

प्रश्न 9.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{\tan x} \right)^4$$

का मान है

(A) 0
(B) 81
(C) 4
(D) 1

हल : (B)

प्रश्न 10.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1+3^{1/x}}{1-3^{1/x}}$$

का मान है

(A) 0
(B) ∞
(C) – 1
(D) 1

हल : (C)

प्रश्न 11. यदि y, x का फलन हो तो y का x के सापेक्ष अवकलज है

(A) $\frac{\delta y}{\delta x}$ (B) $\lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$

(C) $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ (D) $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta x}{\delta y}$

हल : (C)

प्रश्न 12. x^n का अवकलज है

(A) x^{n-1}
(B) $(n – 1)x^{n-2}$
(C) nx^{n-1}
(D) $x^{n+1} /n + 1$

हल : (C)

प्रश्न 13.
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ **का अवकलज है**

(A) $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (B) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
(C) $2x\sqrt{x}$ (D) $-2x\sqrt{x}$

हल : (B)

प्रश्न 14.
$\frac{d}{dx}(5^x)$
बराबर है

(A) 5^x
(B) 10^x
(C) $10^x \log_e 5$
(D) $5^x \log_e 5$

हल : (D)

प्रश्न 15.
$\frac{d}{dx}(\log_a x)$
बराबर है

(A) $\frac{1}{x.\log_e a}$ (B) $\frac{\log_e a}{x}$
(C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{x}{\log_e a}$

हल : (A)

प्रश्न 16. यदि $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5$ तब $f'(1)$ बराबर है

(A) 0
(B) 9
(C) 4
(D) 15

हल : (D)

प्रश्न 17.
sec x° का अवकलज है

(A) $\sec x^0 \tan x^0$ **(B)** $\frac{\pi}{180} \sec x \tan x$

(C) $\frac{\pi}{180} \sec x^0 \tan x^0$ **(D)** $\sec x \tan x$

हल :
(C)

प्रश्न 18. $\log_x a$ का अवकलज है

(A) $\frac{\log_e a}{x \log_e x}$ **(B)** $-\frac{\log_e a}{x(\log_e x)^2}$

(C) $\frac{\log_e a}{x(\log_e x)^2}$ **(D)** $-\frac{\log_e a}{x \log_e x}$

हल : (B)

प्रश्न 19. यदि $f(x) = \frac{2x+c}{x-1}$ तथा $f'(0) = 0$ तब c का मान

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) -2

हल : (D)

प्रश्न 20. $log_e \sqrt{x}$ का अवकलज है

(A) $\frac{1}{2x}$ (B) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(C) $2\sqrt{x}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{x}$

हल : (A)

प्रश्न 21.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{x}-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$$

तो a,b,c का मान ज्ञातकीजिए।

हल :

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{x}-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left|\frac{a\left(1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+....\right)-b\left(1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-.....\right)+c\left(1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+....\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-......\right)}\right|=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left|\frac{(a-b+c)+x(a-c)+x^2\left(\frac{a}{\lfloor 2}+\frac{b}{\lfloor 2}+\frac{c}{\lfloor 2}\right)+x^3\left(\frac{a}{\lfloor 3}-\frac{c}{\lfloor 3}\right)+.....}{x^2\left(1-\frac{x^2}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 5}.......\right)}\right|=2$$

यह तभी सम्भव है जब

$a-b+c=0$ **....(i)**

$a-c=0$ **....(ii)**

$$\frac{a}{\lfloor 2}+\frac{b}{\lfloor 2}+\frac{c}{\lfloor 2}=2$$

या $a+b+c=2\lfloor 2$

या $a+b+c=4$ **....(iii)**

समीकरण (i), (ii) व (iii) को हल करने पर,

$a=1$

$b=2$

$c=1$

प्रश्न 22.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+c}-\sqrt{x}\right)$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+c}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x(1+c/x)}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}.\sqrt{x}\left[(1+c/x)^{1/2}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x}\right)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{c}{x}\right)^2+\ldots\ldots\right\}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{c}{2x}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}\frac{c^2}{x^2}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{c}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}\frac{c^2}{x}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{c}{2}+0+0+\ldots\ldots$$

$$=\frac{c}{2}$$

प्रश्न 23.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{ रूप}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2}-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}+\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}\times\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+1}}+\frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 24.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x-1}}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x-1}}$$

$$\left|\frac{6+\frac{1}{x}}{3x-1}\right|$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{6 + 1/x}{3 - 1/x} \right)}$$

$$= \left(\frac{3 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} \right) \left(\frac{6 + 0}{3 - 0} \right)$$

$= (3)^2$

$= 9$

प्रश्न 25.

$$\lim_{x \to \infty} 2^x \sin\left(\frac{a}{2^x} \right)$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x \to \infty} 2^x \sin\left(\frac{a}{2^x} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 2^x \frac{\sin\left(\frac{a}{2^x} \right)}{a} \times a$$

$$= a \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^x} \right)}{\left(\frac{a}{2^x} \right)} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ रूप} \right)$$

$$= a \lim_{y \to 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)$$

[यहाँ $y = \frac{a}{2^x}$, जब $x \to \infty$, $2^x \to \infty$, तब $\frac{a}{2^x} \to 0$]

$= a \times 1$

$= a$

प्रश्न 26.

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^1 - e^{-1}}{e^1 + e^{-1}} = \frac{e - \frac{1}{e}}{e + \frac{1}{e}} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

प्रश्न 27.

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{(\pi - 2x)^2}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{(\pi - 2x)^2}$$

माना $\frac{\pi}{2} + h = x$

$\because$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$, तो $h \to 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + \cos\left\{2\left(\frac{1}{2}\pi + h\right)\right\}}{\left\{\pi - 2\left(\frac{1}{2}\pi + h\right)\right\}^2} \quad \left[\because \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + \cos(\pi + 2h)}{4h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos 2h}{4h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin^2 h}{4h^2} = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1)^2 = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 28. यदि $y = \frac{x}{x+5}$ तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$

हल :

$$y = \frac{x}{x+5} \qquad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+5}\right)$$

$$= \frac{(x+5)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(x+5).1 - x(1+0)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{x+5-x}{(x+5)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{(x+5)^2} \qquad \ldots(2)$$

$$\text{L.H.S.} = x\frac{dy}{dx} = x \,.\, \frac{5}{(x+5)^2} \qquad [\text{समी. (2) से}]$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \frac{5x}{(x+5)^2} \qquad \ldots(3)$$

$$\text{R.H.S.} = y(1-y) = \frac{x}{x+5}\left(1 - \frac{x}{x+5}\right)$$

$$= \frac{x}{x+5}\left(\frac{x+5-x}{x+5}\right)$$

$$= \frac{5x}{(x+5)^2}$$

$= \text{L.H.S.}$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 29. यदि $y = x^3 . e^x \sin x$ तो $\frac{dy}{dx}$ सिद्ध कीजिए कि

हल : $y = x^3 . e^x \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \,.\, e^x \sin x)$$

$$= x^3 \frac{d}{dx}(e^x \sin x) + e^x \sin x \,.\, \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= x^3 \left\{ e^x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{d}{dx} e^x \right\}$$

$$+ e^x \sin x \,.\, (3x^{3-1})$$

$$= x^3[e^x \cos x + \sin x\, e^x] + e^x \sin \mathrm{x} \,.\, 3x^2$$

$$= x^3 e^x \cos x + x^3 e^x \sin x + 3x^2 e^x \sin x$$