GUJCET - 2017

1. જો $[2\ \ 3\ \ 4]\begin{bmatrix}1 & x & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 2 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 0\end{bmatrix} = 0$, તો x = ...

(A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{-5}{3}$ (D) $\frac{-7}{3}$

ઉકેલ : $[2\ 3\ 4]\begin{bmatrix}1 & x & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 2 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 0\end{bmatrix} = 0$

$\therefore \quad [2+6+12 \quad 2x+12+8 \quad 6+15+4x]\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 0\end{bmatrix} = 0$

$\therefore \quad [20 \quad 2x+20 \quad 4x+21]\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 0\end{bmatrix} = 0$

$\therefore \quad [20x + 4x + 40] = 0$

$\therefore \quad 24x + 40 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{-40}{24}$

$\therefore \quad x = \frac{-5}{3}$ **જવાબ (C)**

2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\,sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ = ...

(A) $4cos2x$ (B) $-4sin2x$ (C) $4sin2x$ (D) $-4cos2x$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\,sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \frac{d}{dx}\ 2\left[\left(sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{2}\right]$

$= \frac{d}{dx}\ 2\left[sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)sin\frac{\pi}{3}+cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)cos\frac{\pi}{3}\right]$

$= \frac{d}{dx}\ 2\,cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{d}{dx}\ (2\,cos2x)$

$= -2sin2x \times 2$

$= -4sin2x$ **જવાબ (B)**

3. [4, 6] પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં, વક્ર $f(x) = (x - 5)^2$નો .... આગળનો સ્પર્શક A(4, 1) તથા B(6, 1)ને જોડતી જીવાને સમાંતર છે.

(A) (4, 6) (B) $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (C) (0, 5) (D) (5, 0)

ઉકેલ : A(4, 1) અને B(6, 1) બંને $y = (x - 5)^2$ પર છે.

$y = (x - 5)^2$ એ [4, 6]માં સતત અને (4, 6)માં વિકલનીય છે.

મધ્યકમાન પ્રમેય પરથી $c \in (4, 6)$ મળે કે જેથી

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \; a = 4, \; b = 6$$

$$f(x) = (x - 5)^2$$

$$f'(x) = 2(x - 5)$$

$$\therefore \quad f'(c) = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4}$$

$$\therefore \quad 2(c - 5) = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

$$c = 5$$

$$\therefore \quad f(c) = 0$$

માંગેલ બિંદુ (5, 0) છે.

બીજી રીત :

$\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ = 0

$\therefore \quad f'(c) = 0$

$\therefore \quad 2(c - 5) = 0$

$\therefore \quad c = 5, f(c) = 0$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ (5, 0) છે.

જવાબ (D)

4. જો વિધેય $f(x) = \begin{cases} (\log_2 2x)^{\log_x 8}; & x \neq 1 \\ (k - 1)^3; & x = 1 \end{cases}$ $x = 1$ આગળ સતત હોય તો $k =$ ....

(A) $e + 1$ (B) $e^{\frac{1}{3}}$ (C) e^3 (D) $e - 1$

ઉકેલ : f એ $x = 1$ આગળ સતત છે.

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} (\log_2 2x)^{\log_x 8} = (k - 1)^3$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} (\log_2 2 + \log_2 x)^{3\log_x 2} = (k - 1)^3$$

$$\therefore \quad \left(\lim_{x \to 1} (1 + \log_2 x)^{\frac{1}{\log_2 x}}\right)^3 = (k - 1)^3$$

$$\therefore \quad e^3 = (k - 1)^3 \qquad \left(\lim_{x \to 1} \log_2 x = 0\right)$$

$$\therefore \quad e = k - 1$$

$$\therefore \quad k = e + 1$$

જવાબ (A)

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{1 + \cos 2x + \sin 2x}} =$ .... $+ c$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$

(A) $2 + \sqrt{\cot x}$ (B) $\sqrt{\tan x + 1}$ (C) $\sqrt{2 + 2\tan x}$ (D) $\sqrt{2 + 2\cot x}$

ઉકેલ : $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{1+\cos 2x+\sin 2x}} = \int \frac{dx}{\cos x\sqrt{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ 2\sqrt{1+\tan x}\ + c$

$= \sqrt{2+2\tan x}\ + c$ **જવાબ (C)**

6. જો $\int \frac{\sin 2x}{\sin 5x\sin 3x}\,dx = \frac{1}{3}\log|\sin 3x| - \frac{1}{5}\log|f(x)| + c$, તો $f(x) = ...$

(A) $\sin 5x$ (B) $\sin 4x$ (C) $\sin 2x$ (D) $\sin 6x$

ઉકેલ : $\int \frac{\sin 2x}{\sin 5x\sin 3x}\,dx = \int \frac{\sin(5x-3x)}{\sin 5x\sin 3x}\,dx$

$= \int \frac{\sin 5x\cos 3x - \cos 5x\sin 3x}{\sin 5x\sin 3x}\,dx$

$= \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\,dx - \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\,dx$

$= \frac{1}{3}\log|\sin 3x| - \frac{1}{5}\log|\sin 5x| + c$

$\therefore\ f(x) = \sin 5x$ **જવાબ (A)**

7. યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ X નીચે આપેલ છે.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$4c^3$	$4c - 13c^2$	$7c - 1$

; $c > 0$, તો $c = ...$

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1 અને $\frac{-1}{4}$

ઉકેલ : $\Sigma p(x) = 1$

$p(0) + p(1) + p(2) = 1$

$\therefore\ 4c^3 + 4c - 13c^2 + 7c - 1 = 1$

$\therefore\ 4c^3 - 13c^2 + 11c - 2 = 0$

$\therefore\ (c-1)(4c^2 - 9c + 2) = 0$

$\therefore\ c \neq 1$ હોવાથી, $4c^2 - 9c + 2 = 0$

$\therefore\ (c-2)(4c-1) = 0$

$c \neq 2$ હોવાથી, $c = \frac{1}{4}$ (જો $c = 1$ અથવા $c = 2$ તો $4c^3 > 1$ હોવાથી) **જવાબ (C)**

8. દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય $p(x) = \binom{6}{x} p^x q^{6-x}$, $x = 0$ છે. 1, 2,..., 6.

જો $2p(2) = 3p(3)$, તો p = ...

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{5}$

ઉકેલ : $2\binom{6}{2} p^2 q^4 = 3\binom{6}{3} p^3 q^3$

$\therefore \quad \frac{2 \times 6 \times 5}{1 \times 2} \times q = 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times p$

$\therefore \quad q = 2p$

$\therefore \quad 1 - p = 2p$

$\therefore \quad p = \frac{1}{3}$

જવાબ (A)

9. યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને પ્ર. વિ. અનુક્રમે 10 અને 5 હોય તો, $E\left(\left(\frac{X-15}{5}\right)^2\right)$ = ...

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 5

ઉકેલ : મધ્યક $E(X) = 10$

પ્રમાણિત વિચલન = 5

$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 25$

$\therefore \quad E(X^2) - 100 = 25$

$\therefore \quad E(X^2) = 125$

$$\therefore \quad E\left(\left(\frac{X-15}{5}\right)^2\right) = E\left(\frac{X^2 - 30x + 225}{25}\right)$$

$$= \frac{1}{25}E(X^2) - \frac{6}{5}E(X) + 9$$

$$= \frac{125}{25} - \frac{6}{5} \times 10 + 9$$

$$= 5 - 12 + 9$$

$$= 2$$

જવાબ (C)

10. સુરેખ પ્રતિબંધો દ્વારા નક્કી થતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુ (0, 10), (5, 5), (25, 20) અને (0, 30) છે. ધારો કે $z = px + qy$, જ્યાં $p, q > 0$. z નું મહત્તમ (25, 20), (0, 30) આગળ મળે તે માટે p અને q ઉપરની શરતો ....

(A) $5p = 2q$ (B) $2p = 5q$ (C) $p = 2q$ (D) $q = 3p$

ઉકેલ : $z = px + qy$, (25, 20) અને (0, 30) આગળ મહત્તમ છે.

$\therefore \quad 25p + 20q = 30q$

$25p = 10q$

$5p = 2q$

જવાબ (A)

11. બે વક્ર $a_ix^2 + b_iy^2 = 1$; $(i = 1, 2)$, $(a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0)$ લંબચ્છેદી હોય તો, ...

(A) $a_1a_2 = b_1b_2$ (B) $a_1^{-1} - a_2^{-1} = b_1^{-1} - b_2^{-1}$

(C) $a_1^{-1} + a_2^{-1} = b_1^{-1} + b_2^{-1}$ (D) $a_1b_2 = a_2b_1$

ઉકેલ : $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$

$\therefore \quad 2a_1x + 2b_1y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a_1x}{b_1y}$

$a_2x^2 + b_2y^2 = 1$

$\therefore \quad 2a_2x + 2b_2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a_2x}{b_2y}$

વક્રો લંબચ્છેદી છે.

$\therefore \quad m_1 \cdot m_2 = -1$

$\therefore \quad \left(-\dfrac{a_1x}{b_1y}\right)\left(-\dfrac{a_2x}{b_2y}\right) = -1$

$\therefore \quad \dfrac{x^2}{y^2} = -\dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$ ...(1)

વળી, $a_1x^2 + b_1y^2 = a_2x^2 + b_2y^2 = 1$

$\therefore \quad (a_1 - a_2)x^2 = (b_2 - b_1)y^2$

$\therefore \quad \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$ ...(2)

(1) અને (2) પરથી,

$\therefore \quad \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = -\dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$

$\therefore \quad \dfrac{b_2 - b_1}{b_1b_2} = \dfrac{a_2 - a_1}{a_1a_2}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{b_1} - \dfrac{1}{b_2} = \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}$

$\therefore \quad a_1^{-1} - a_2^{-1} = b_1^{-1} - b_2^{-1}$ **જવાબ (B)**

12. બે ચોરસની બાજુઓ x અને y છે તથા $y = x + x^2$. બીજા ચોરસના ક્ષેત્રફળનો પ્રથમ ચોરસના ક્ષેત્રફળને સાપેક્ષ દર .... છે.

(A) $x^2 + 3x - 1$ (B) $2x^2 = 3x + 1$ (C) $2x^2 + 3x + 1$ (D) $1 + 2x$

ઉકેલ : ધારો કે x તથા y બાજુઓવાળા ચોરસનાં ક્ષેત્રફળ u તથા v છે.

$\therefore \quad u = x^2$ તથા $v = y^2$

વળી $y = x + x^2$

$\therefore \quad v = (x + x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$

હવે $u = x^2$, $v = x^2 + 2x^3 + x^4$

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad \frac{dv}{dx} = 2x + 6x^2 + 4x^3$

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$$

$$= \frac{2x + 6x^2 + 4x^3}{2x}$$

$$= 1 + 3x + 2x^2$$

જવાબ **(C)**

13. $\sqrt[3]{-0.99}$ નું આસન્ન મૂલ્ય .... છે.

(A) -0.9967 (B) -0.9976 (C) -1.0033 (D) -1

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \quad f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

ધારો કે $a = 1,\ h = -0.01$

$\therefore \quad a + h = 1 - 0.01 = 0.99$

$f(a + h) \simeq f(a) + h\,f'(a)$

$$f(0.99) \simeq f(1) - \frac{1}{100} f'(1)$$

$$= -1 - \frac{1}{100}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{-300 + 1}{300}$$

$$= \frac{-299}{300}$$

$$= -0.9967$$

જવાબ **(A)**

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{10} - x^2}}\ ;\ x > 1 =$ .... $+\ c$

(A) $\frac{1}{4} \log \sqrt{x^{10} - x^2} + x^2$ (B) $\frac{1}{2} \log |x^{10} - x^2|$

(C) $-\frac{1}{4}\ sec^{-1}\ (x^4)$ (D) $\frac{1}{4}\ sec^{-1}\ (x^4)$

ઉકેલ : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{10} - x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^8 - 1}}$

$$= \int \frac{x^3}{x^4\sqrt{(x^4)^2 - 1}}\ dx$$

ધારો કે $t = x^4$

$\therefore \quad dt = 4x^3\,dx$

$\therefore \quad I = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$

$\therefore \quad I = \frac{1}{4} sec^{-1} t + c$

$$= \frac{1}{4} sec^{-1}(x^4) + c$$

જવાબ **(D)**

15. $\int e^{sinx}\,(x\,cosx - sec\,x\,tan\,x)\,dx = \text{.........} + c,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(A) $e^{sinx}\,(x - sec\,x)$ (B) $e^{sinx}\,(sex\,x - x)$ (C) $e^{sinx}\,x\,cos\,x$ (D) $e^{sinx}\,(x + sec\,x)$

ઉકેલ : $\int e^{sinx}\,(x\,cosx - sec\,x\,tan\,x)\,dx = \int e^{sinx}\left(x - \frac{sin\,x}{cos^3 x}\right) cos\,x\,dx$

ધારો કે $t = sin\,x$

$\therefore\quad dt = cos\,x\,dx$

$$I = \int e^t \left(sin^{-1}t - \frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dt$$

$$= \int e^t \left(sin^{-1}t + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dt$$

$$= \int e^t \left(sin^{-1}t + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt - \int e^t \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dt$$

$$= \int e^t \left(sin^{-1}t + \frac{d}{dt}(sin^{-1}t)\right) dt - \int e^t \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right) dt$$

$$= e^t\,sin^{-1}t - e^t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + c$$

$$= e^{sin\,x}\left(x - \frac{1}{cos\,x}\right) + c$$

$$= e^{sin\,x}\,(x - sec\,x) + c$$

બીજી રીત :

$\int e^{sinx}\,(x\,cos\,x - sec\,x\,tan\,x)\,dx = \int x\,e^{sinx}\,cos\,x\,dx - \int e^{sinx}\,sec\,x\,tan\,x\,dx$

$= x\,e^{sinx} - \int e^{sinx}\,dx - e^{sinx}\,sec\,x + \int e^{sinx}\,dx$

$= e^{sinx}\,(x - sec\,x) + c$ **જવાબ (A)**

16. $\int sin\,11x\,sin^9x\,dx = \text{.........} + c$

(A) $\frac{sin\,10x\,sin^{10}x}{10}$ (B) $\frac{sin^{11}x}{11}$ (C) $\frac{sin\,9x\,sin^9x}{9}$ (D) $\frac{cos10x\,cos^{10}x}{10}$

ઉકેલ : $\int sin\,11x\,sin^9x\,dx = \int sin\,(10x + x)\,sin^9x\,dx$

$= \int (sin\,10x\,cos\,x + cos\,10x\,sin\,x)\,sin^9x\,dx$

$= \int sin\,10x\,sin^9x\,cos\,x\,dx + \int cos\,10x\,sin^{10}x\,dx$

$= sin\,10x \int sin^9x\,cos\,x\,dx - \int (10\,cos\,10x \int sin^9x\,cos\,x\,dx)\,dx + \int cos\,10x\,sin^{10}x\,dx$

$= sin\,10x\,\frac{sin^{10}x}{10} - \int sin^{10}x\,cos\,10\,x\,dx + \int cos\,10x\,sin^{10}x\,dx$

$= \frac{1}{10}\,sin\,10\,x\,sin^{10}x + c$ **જવાબ (A)**

17. $\int_{-\log 3}^{\log 3} cot^{-1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx = $ ....

(A) $\frac{\pi}{2}\log 3$ (B) $\pi \log 3$ (C) 0 (D) $\pi \log 9$

ઉકેલ : $\int_{-\log 3}^{\log 3} cot^{-1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx = \int_{-\log 3}^{\log 3}\left[\frac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right] dx$

$= \frac{\pi}{2}\int_{-\log 3}^{\log 3} 1 \cdot dx - \int_{-\log 3}^{\log 3} tan^{-1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx$

$= \frac{\pi}{2}[x]_{-\log 3}^{\log 3} - 0$ $\left(f(x) = tan^{-1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \text{ અયુગ્મ વિધેય છે.}\right)$

$= \frac{\pi}{2}(\log 3 + \log 3)$

$= \frac{\pi}{2} \times 2 \log 3$

$= \pi \log 3$

જવાબ (B)

18. $\int_{0}^{100\pi} |cos\, x|\, dx = $ ....

(A) 200 (B) 100 (C) 50 (D) 0

ઉકેલ : $\int_{0}^{100\pi} |cos\, x|\, dx = 100\int_{0}^{\pi} |cos\, x|\, dx$

$= 100\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\, x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos\, x\, dx\right]$

$= 100\left[[sin\, x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [sin\, x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$

$= 100\,[(1-0)-(0-1)]$

$= 100\,(1+1)$

$= 200$

જવાબ (A)

19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x - [sin\, x])\, dx = $ .... ($[x]$ એ xથી અધિક નહીં તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક છે.)

(A) $\frac{\pi^2}{8} - 2$ (B) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ (C) $\frac{\pi^2}{8} - 1$ (D) $\frac{\pi^2}{8}$

ઉકેલ : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x - [sin\, x])\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\, dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [sin\, x]\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [sin\, x]\, dx = 0\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 0\right)$

$= \frac{\pi^2}{8}$ **જવાબ (D)**

20. ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $(a > b)$ના બે નાભિલંબથી ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ = ... (e ઉત્કેન્દ્રતા છે.)

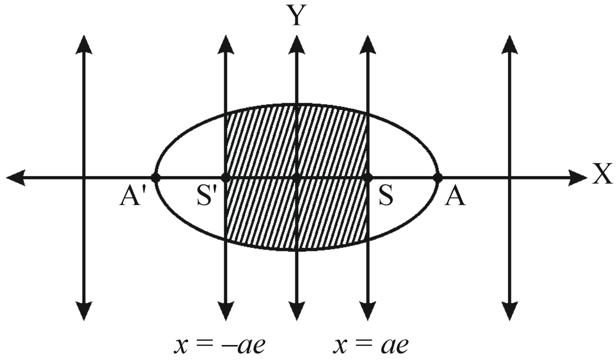
(A) $2b(be + a\,sin^{-1}e)$ (B) $8b(be + a\,sin^{-1}e)$ (C) $b(be + a\,sin^{-1}e)$ (D) $4b(be + a\,sin^{-1}e)$

ઉકેલ : ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $(a > b)$ છે.

$\therefore \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$\therefore \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$\therefore \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$



નાભિલંબ તથા ઉપવલય દ્વારા ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ

$= 4\,|\,\mathrm{I}\,|, \ \mathrm{I} = \int_0^{ae} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$\mathrm{I} = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$

$= \frac{b}{a}\left[\frac{ae}{2}\sqrt{a^2 - a^2e^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\frac{ae}{a} - 0\right]$

$= \frac{b}{a}\left[\frac{aeb}{2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}e\right] = \frac{b}{2}[be + a\,sin^{-1}e]$

ક્ષેત્રફળ $= 4\,|\,\mathrm{I}\,| = 4 \times \frac{b}{2}[be + a\,sin^{-1}e]$

$= 2b\,[be + a\,sin^{-1}e]$ **જવાબ (A)**

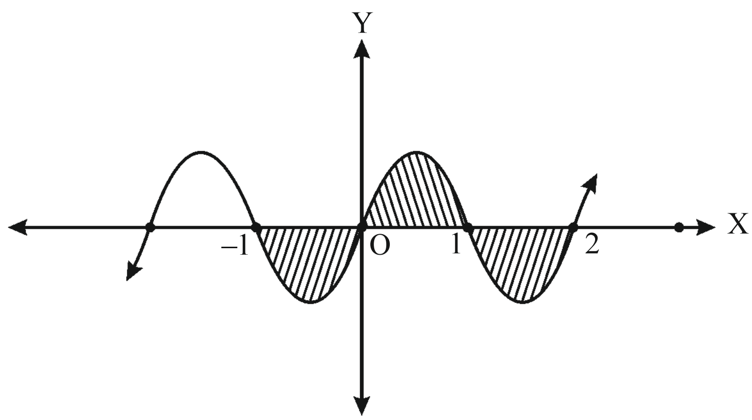
21. $f(x) = sin\pi x$ અને X-અક્ષ દ્વારા $x \in [-1, 2]$ માટે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 8π (B) $\frac{8}{\pi}$ (C) $\frac{6}{\pi}$ (D) 6π

ઉકેલ : $f(x) = sin\,\pi\,x$ અને X-અક્ષ દ્વારા

$x \in [-1, 2]$ માટે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ

$\mathrm{A} = 3\,|\,\mathrm{I}\,|$.



જ્યાં $\mathrm{I} = \int_0^1 sin\,\pi\,x\,dx$

$= \left[-\frac{cos\,\pi x}{\pi}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{\pi} cos\,\pi + \frac{cos\,0}{\pi}$

$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}$

ક્ષેત્રફળ $= 3\,|\,I\,| = 3 \times \frac{2}{\pi} = \frac{6}{\pi}$ **જવાબ (C)**

22. વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$; $x > 0$ ની કક્ષા તથા પરિમાણ અનુક્રમે .... છે.

(A) 2 અને 6 (B) 3 અને 2 (C) 2 અને 3 (D) 2 અને પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે

ઉકેલ : વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$ આપેલ છે.

કક્ષા 2, પરિમાણ 3. **જવાબ (C)**

23. કોઈ વક્રનો અવાભિલંબ અચળ હોય તથા વક્ર ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય તો તેનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x^2 + y^2 = k^2$; $k \in R$ (B) $y^2 = kx$; $k \in R$

(C) $x^2 = ky^2$; $k \in R$ (D) $x^2 - y^2 = k^2$; $k \in R$

ઉકેલ : અવાભિલંબની લંબાઈ $y\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2}$ (અચળ $\frac{k}{2}$ ધારો.)

$\therefore\ y\,dy = \frac{k}{2}\,dx$

$\therefore\ \int y\,dy = \frac{k}{2}\int dx$

$\therefore\ \frac{y^2}{2} = \frac{k}{2}x + \frac{c}{2}$

$\therefore\ y^2 = kx + c$

તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ c = 0$

$\therefore\ y^2 = kx,\ k \in R$ **જવાબ (B)**

24. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+2}$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) e^{x+y+2} (B) e^{y} (C) e^{-y} (D) $\log|x+y+2|$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+2}$

$\therefore\ \frac{dx}{dy} = x + y + 2$

$\therefore\ \frac{dx}{dy} - x = y + 2$

$\therefore$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int p\,dy} = e^{-\int dy} = e^{-y}$ **જવાબ (C)**

25. જો $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$ અને $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 7$ અને $(\overline{a} \hat{,} \overline{b}) = \alpha$, તો α = ...

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$

$\therefore \quad \overline{a} + \overline{b} = -\overline{c}$

$\therefore \quad |\overline{a} + \overline{b}|^2 = |\overline{c}|^2$

$\therefore \quad |\overline{a}|^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 = |\overline{c}|^2$

$\therefore \quad 9 + 2|\overline{a}||\overline{b}| \cos\alpha + 25 = 49$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{49-34}{2\times3\times5}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{15}{2\times3\times5}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$ **જવાબ (C)**

26. A(1, –2, 4), B(5, –1, 7), C(3, 6, –2), D(4, 5, –1) માટે $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$નો $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ પર પ્રક્ષેપ .... છે.

(A) $(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (B) $\frac{3}{13}(4, 1, 3)$

(C) (1, –1, 1) (D) (2, –2, 2)

ઉકેલ : A(1, –2, 4), B(5, –1, 7), C(3, 6, –2) અને D(4, 5, –1)

$\therefore \quad \overrightarrow{\mathbf{AB}} = (5, -1, 7) - (1, -2, 4) = (4, 1, 3)$

$\overrightarrow{\mathbf{CD}} = (4, 5, -1) - (3, 6, -2) = (1, -1, 1)$

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$નો $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ પર પ્રક્ષેપ $= \left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{CD}}}{|\overrightarrow{\mathbf{CD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

$= \frac{(4,1,3)\cdot(1,-1,1)}{(1+1+1)}(1, -1, 1)$

$= \frac{(4-1+3)}{3}(1, -1, 1)$

$= \frac{6}{3}(1, -1, 1)$

$= (2, -2, 2)$ **જવાબ (D)**

27. Aનો સ્થાન સદિશ (4, 2, –3) છે. Aનું XY-સમતલથી લંબ અંતર p_1 છે તથા તેનું Y-અક્ષથી લંબ અંતર p_2 છે. તો $p_1 + p_2$ = ...

(A) 8 (B) 3 (C) 2 (D) 7

ઉકેલ : બિંદુ A(4, 2, –3) છે.

Aનું XY-સમતલથી લંબ અંતર $= |-3|$

$\therefore \quad p_1 = 3$

A નું Y-અક્ષથી લંબ અંતર $p_2 = \sqrt{x^2 + z^2}$

$= \sqrt{16+9}$

$= 5$

$\therefore \; p_1 + p_2 = 3 + 5 = 8$ **જવાબ (A)**

28. સમતલ $ax + by + cz = 1$ અક્ષોને A, B, Cમાં છેદે છે. જો $G\left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, 1\right)$ એ ΔABCનું મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો $a + b + 3c =$ ....

(A) 2 (B) 4 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

ઉકેલ : સમતલ $ax + by + cz = 1$ અક્ષોને $A\left(\frac{1}{a}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$, $C\left(0, 0, \frac{1}{c}\right)$માં છેદે છે.

ΔABCનું મધ્યકેન્દ્ર $G\left(\frac{1}{3a}, \frac{1}{3b}, \frac{1}{3c}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, 1\right)$

$\therefore \; \frac{1}{3a} = \frac{1}{6}, \; \frac{1}{3b} = \frac{-1}{3}, \; \frac{1}{3c} = 1$

$\therefore \; a = 2, \quad b = -1, \quad c = \frac{1}{3}$

$\therefore \; a + b + 3c = 2 - 1 + 1 = 2$ **જવાબ (A)**

29. જો $x = 4z + 3$, $y = 2 - 3z$ ના દિક્‌ખૂણા α, β અને γ હોય, તો $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$ ....

(A) $\frac{2}{\sqrt{26}}$ (B) $\frac{8}{\sqrt{26}}$ (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $x = 4z + 3$, $y = 2 - 3z$.

$\therefore \; \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-3} = z \qquad l = 4, m = -3, n = 1.$ તેથી $l^2 + m^2 + n^2 = 26$

હવે, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{26}} + \left(\frac{-3}{\sqrt{26}}\right) + \frac{1}{\sqrt{26}}$

$= \frac{2}{\sqrt{26}}$ **જવાબ (A)**

30. એક સમતલનો અભિલંબ X-અક્ષ, Y-અક્ષ, Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ માપના ખૂણા બનાવે છે. ઊગમબિંદુથી સમતલ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ $\sqrt{2}$ છે. તો સમતલનું સમીકરણ ....

(A) $x + y + z = \sqrt{2}$ (B) $x + y + z = 1$ (C) $x + y = 2$ (D) $x = \sqrt{2}$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ X-અક્ષ, Y-અક્ષ તથા Z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ માપના ખૂણા બનાવે છે.

$\therefore \; \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{2}$

$p - \alpha$ (અભિલંબ) સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ

$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ છે.

$x \cos \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} + z \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$

$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 0 = \sqrt{2}$

$x + y = 2$ **જવાબ (C)**

31. જો $f : R - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to R - \left\{\frac{3}{5}\right\}; f(x) = \frac{3x+1}{5x-3}$, વિધેય હોય, તો ....

(A) $f^{-1}(x) = 2f(x)$ (B) $f^{-1}(x) = f(x)$ (C) $f^{-1}(x) = -f(x)$ (D) $f^{-1}(x)$નું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : $f : R - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to R - \left\{\frac{3}{5}\right\}$

$f(x) = \frac{3x+1}{5x-3}$

હવે, $f(x) = y \Rightarrow \frac{3x+1}{5x-3} = y$

$\therefore \quad 3x + 1 = 5xy - 3y$

$\therefore \quad 1 + 3y = 5xy - 3x$

$x = \frac{1+3y}{5y-3}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{5x-3} = f(x)$ **જવાબ (B)**

નોંધ : જો $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, તો

$f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$

$= \frac{-3x-1}{-5x+3}$

$= \frac{3x+1}{5x-3}$

32. જો $f : R \to R, f(x) = 3x + 2, g : R \to R, g(x) = 6x + 5$, તો $(gof^{-1})(10) =$ ....

(A) 21 (B) 29 (C) 7 (D) $\frac{8}{3}$

ઉકેલ : $f : R \to R, f(x) = 3x + 2, g : R \to R, g(x) = 6x + 5$

સ્પષ્ટ છે કે f તથા g એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેયો છે.

$\therefore \quad f^{-1} : R \to R$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

$gof^{-1} : R \to R, (gof^{-1})(10) = g(f^{-1}(10))$

$= g\left(\frac{10-2}{3}\right)$

$= g\left(\frac{8}{3}\right)$

$= 6\left(\frac{8}{3}\right) + 5$

$= 16 + 5 = 21$ **જવાબ (A)**

33. સંબંધ $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ એ $\{1, 2, 3\}$ પર વ્યાખ્યાયિત છે તે ....

(A) પરંપરિત નથી (B) સંમિત છે (C) સ્વવાચક છે (D) સામ્ય છે

ઉકેલ : $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ એ $\{1, 2, 3\}$ પર વ્યાખ્યાયિત છે.

સ્પષ્ટ છે કે S પરંપરિત નથી. $((1, 2) \in S, (2, 1) \in S$ પરંતુ $(1, 1) \notin S)$ **જવાબ (A)**

34. $tan^{-1}(cot\,x) + cot^{-1}(tan\,x) =$ .... (જ્યાં $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $2x$ (C) $\pi - 2x$ (D) $\pi - x$

ઉકેલ : $tan^{-1}(cot\,x) + cot^{-1}(tan\,x)$

$= \frac{\pi}{2} - cot^{-1}(cot\,x) + \frac{\pi}{2} - tan^{-1}(tan\,x)$

$= \pi - (x + x)$

$= \pi - 2x$ **જવાબ (C)**

35. $cos\,(2(tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1} 5)) =$ ....

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) 1 (D) –1

ઉકેલ : $cos\,(2(tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1} 5)) = cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$= cos\pi$

$= -1$ **જવાબ (D)**

36. ΔABCમાં જો $A = tan^{-1} 2$, $B = tan^{-1} 3$, તો $C =$ ....

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : ΔABCમાં $A + B + C = \pi$

$A + B = \pi - C$

$tan^{-1} 2 + tan^{-1} 3 = \pi - C$

$\pi + tan^{-1} \frac{2+3}{1-2\times 3} = \pi - C \qquad (2 \times 3 = 6 > 1)$

$tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right) = -C$

$tan^{-1}(-1) = -C$

$\therefore \quad C = \frac{\pi}{4}$

બીજી રીત :

$tanA + tanB + tanC = tanA\ tanB\ tanC$

$\therefore \quad 2 + 3 + tanC = 6\ tanC$

$\therefore \quad 5\ tanC = 5$

$\therefore \quad tanC = 1$

$\therefore \quad C = \frac{\pi}{4}$

જવાબ (B)

37. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(2, 5)$, $(7, k)$ તથા $(3, 1)$ અને ક્ષેત્રફળ 10 હોય, તો kનું મૂલ્ય શોધો.

(A) –5 અથવા 35 (B) 5 અથવા –35 (C) 15 અથવા –5 (D) –5 અથવા –25

ઉકેલ : ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ $(2, 5)$, $(7, k)$, $(3, 1)$ છે અને ક્ષેત્રફળ 10 છે.

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|D|, \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & k & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(k - 1) - 5(7 - 3) + 1(7 - 3k)$

$= 2k - 2 - 20 + 7 - 3k$

$= -k - 15$

$\therefore \quad \Delta = 10 \Rightarrow \frac{1}{2}|-k - 15| = 10$

$\therefore \quad k + 15 = 20$ અથવા $k + 15 = -20$

$\therefore \quad k = 5$ અથવા $k = -35$ **જવાબ (B)**

38. જો $k = p + q + r$, તો $\begin{vmatrix} k+r & p & q \\ r & k+p & q \\ r & p & k+q \end{vmatrix}$નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $2k^2$ (B) $2k^3$ (C) k^3 (D) $3k^2$

ઉકેલ : $k = p + q + r$

$$\begin{vmatrix} k+r & p & q \\ r & k+p & q \\ r & p & k+q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+r+p+q & p & q \\ r+k+p+q & k+p & q \\ r+p+k+q & p & k+q \end{vmatrix} \quad (C_{21}(1), C_{31}(1)))$$

$$= \begin{vmatrix} 2k & p & q \\ 2k & k+p & q \\ 2k & p & k+q \end{vmatrix} \quad (\because k = p + q + r)$$

$$= 2k \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 1 & k+p & q \\ 1 & p & k+q \end{vmatrix}$$

$$= 2k \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$

$= 2k^3$ **જવાબ (B)**

39. $D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & -1 \\ \cos\theta & 1 & -\cos\theta \\ 1 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય અનુક્રમે p તથા q હોય તો $2p + 3q =$ ....

(A) 16 (B) 6 (C) 14 (D) 8

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & -1 \\ \cos\theta & 1 & -\cos\theta \\ 1 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= 1\,(1 + cos^2\theta) + cos\theta\,(cos\theta + cos\theta) - 1\,(cos^2\theta - 1)$

$= 1 + cos^2\theta + 2cos^2\theta - cos^2\theta + 1$

$= 2\,(1 + cos^2\theta)$

$0 \le cos^2\theta \le 1$

$\therefore \quad 1 \le 1 + cos^2\theta \le 2$

$\therefore \quad 2 \le 2\,(1 + cos^2\theta) \le 4$

$\therefore \quad p = 4,\ q = 2$

હવે, $2p + 3q = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 8 + 6 = 14.$ **જવાબ (C)**

40. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, તો $A^2 - 6A = $ ....

(A) $27\,I_3$ (B) $5\,I_3$ (C) $20\,I_3$ (D) $30\,I_3$

ઉકેલ : $A^2 - 6A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 33 & 24 \\ 24 & 24 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -24 & -24 \\ -24 & -6 & -24 \\ -24 & -24 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$

$= 27\,I_3$ **જવાબ (A)**

●●●