अब, हम त्रिकोणमितीय समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात करेंगे। हम देखते हैं कि

$\sin x = 0$ तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 0$ तो $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अब हम निम्न परिणाम सिद्ध करेंगे:

प्रमेय 1 किन्हीं वास्तविक संख्याएँ x तथा y के लिए

$\sin x = \sin y$ से $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\sin x = \sin y$, तो

$$\sin x - \sin y = 0 \text{ या } 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

अर्थात् $\cos\dfrac{x+y}{2} = 0$ या $\sin\dfrac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\dfrac{x+y}{2} = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ या $\dfrac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = (2n + 1)\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अत: $x = (2n + 1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ या $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उपर्युक्त दोनों परिणामों को मिलाने पर, हम पाते हैं: $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 2 कोई वास्तविक संख्याएँ x तथा y के लिए, $\cos x = \cos y$ से $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\cos x = \cos y$, तो

$$\cos x - \cos y = 0 \text{ अर्थात् } -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

इस प्रकार $\sin\dfrac{x+y}{2} = 0$ या $\sin\dfrac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\dfrac{x+y}{2} = n\pi$ या $\dfrac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = 2n\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अत: $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 3 सिद्ध कीजिए कि यदि x तथा y का $\dfrac{\pi}{2}$ विषम गुणज नहीं है तो

$\tan x = \tan y$ से $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\tan x = \tan y$, तो $\tan x - \tan y = 0$

या $\dfrac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$

या $\sin(x - y) = 0$ (क्यों?)

इसलिए $x - y = n\pi$ अर्थात् $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 20 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

अतः $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$

इसलिए $x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

> **टिप्पणी** $\frac{4\pi}{3}$, x का एक ऐसा मान है जिसके संगत $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ है। x का कोई भी अन्य मान लेकर समीकरण हल किया जा सकता है, जिसके लिए $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, यह सभी विधियों से प्राप्त हल एक ही होंगे यद्यपि वे प्रत्यक्षतः विभिन्न दिखाई पड़ सकते हैं।

उदाहरण 21 $\cos x = \frac{1}{2}$ को हल कीजिए।

हल हम पाते हैं $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

इसलिए $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$.

उदाहरण 22 $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ को हल कीजिए।

हल हम पाते हैं, $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

या $\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

इसलिए $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

या $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 23 हल कीजिए $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$

हल समीकरण को लिख सकते हैं,

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

या $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

अर्थात् $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

इसलिए $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = \frac{1}{2}$

अर्थात् $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

अत: $4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = \frac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 24 हल कीजिए $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

हल समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$2\left(1-\sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$

या $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

या $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

अत: $\sin x = -\frac{1}{2}$ या $\sin x = 2$

परंतु $\sin x = 2$ असंभव है (क्यों?)

इसलिए $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

अत:, हल: $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ है, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रश्नावली 3.4

निम्नलिखित समीकरणों का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

1. $\tan x = \sqrt{3}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\operatorname{cosec} x = -2$

निम्नलिखित प्रत्येक समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

5. $\cos 4x = \cos 2x$

6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

7. $\sin 2x + \cos x = 0$

8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 25 यदि $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$ है, जहाँ x तथा y दोनों द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हों तो $\sin(x+y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \ldots (1)$$

अब $\qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

इसलिए $\qquad \cos x = \pm\dfrac{4}{5}$

क्योंकि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, अतः $\cos x$ ऋणात्मक है।

अतः $\qquad \cos x = -\dfrac{4}{5}$

अब $\qquad \sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169}$

अर्थात् $\qquad \sin y = \pm\dfrac{5}{13}$

क्योंकि y द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, $\sin y$ धनात्मक है। इसलिए $\sin y = \dfrac{5}{13}$ है। $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ तथा $\cos y$ का मान समीकरण (1) में रखने पर, हम पाते हैं,

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

उदाहरण 26 सिद्ध कीजिए: $\cos 2x \cos\dfrac{x}{2} - \cos 3x \cos\dfrac{9x}{2} = \sin 5x \sin\dfrac{5x}{2}$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin\frac{5x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 27 $\tan\dfrac{\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $x = \dfrac{\pi}{8}$ हो तो $2x = \dfrac{\pi}{4}$

अब $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

या $$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

मान लीजिए $y = \tan\frac{\pi}{8}$ तो $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

या $$y^2 + 2y - 1 = 0$$

इसलिए $$y = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

क्योंकि $\frac{\pi}{8}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, $y = \tan\frac{\pi}{8}$ धनात्मक है। अत:

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$$

उदाहरण 28 यदि $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, तो $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ तथा $\tan\frac{x}{2}$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ है इसलिए $\cos x$ ऋणात्मक है।

पुन: $$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}.$$

इसलिए $\sin\frac{x}{2}$ धनात्मक होगा तथा $\cos\frac{x}{2}$ ऋणात्मक होगा।

अब $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

इसलिए $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ या $\cos x = -\frac{4}{5}$ (क्यों?)

अब $$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

इसलिए $$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$$

या $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (क्यों?)

पुन: $$2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

इसलिए $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{10}$ या $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (क्यों?)

अतः $$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$$

उदाहरण 29 सिद्ध कीजिए: $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - \cos 2x\right] = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

सिद्ध कीजिए:

1. $2\cos \frac{\pi}{13} \cos\frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$

2. $(\sin 3x + \sin x) \sin x + (\cos 3x - \cos x) \cos x = 0$

3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \cos^2 \frac{x+y}{2}$

4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \sin^2 \frac{x-y}{2}$

5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$

6. $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ तथा $\tan \frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए:

8. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x द्वितीय चतुर्थांश में है।

9. $\cos x = -\frac{1}{3}$, x तृतीय चतुर्थांश में है।

10. $\sin x = \frac{1}{4}$, x द्वितीय चतुर्थांश में है।

सारांश

- यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r, चाप की लंबाई l तथा केंद्र पर अंतरित कोण θ रेडियन हैं, तो $l = r\,\theta$
- रेडियन माप $= \frac{\pi}{180} \times$ डिग्री माप
- डिग्री माप $= \frac{180}{\pi} \times$ रेडियन माप
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$
- $\cos (2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin (2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin (-x) = -\sin x$
- $\cos (-x) = \cos x$
- $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\quad$ $\sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

  $\cos (\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin (\pi - x) = \sin x$

  $\cos (\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin (\pi + x) = -\sin x$

  $\cos (2\pi - x) = \cos x$ $\quad$ $\sin (2\pi - x) = -\sin x$
- यदि x, y और $(x \pm y)$ में से कोई कोण $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

  $$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

- $\tan (x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
- यदि x, y और $(x \pm y)$ में से कोई कोण π का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

  $\cot (x + y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$
- $\cot (x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

  (iii) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

  (iv) $\sin x - \sin y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
- (i) $2\cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$

  (ii) $-2\sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y)$

  (iii) $2\sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$

  (iv) $2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$
- $\sin x = 0$ हो तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = 0$ हो तो $x = (2n + 1) \dfrac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$
- $\sin x = \sin y$ हो तो $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = \cos y$, हो तो $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$
- $\tan x = \tan y$ हो तो $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ऐसा विश्वास किया जाता है कि त्रिकोणमिती का अध्ययन सर्वप्रथम भारत में आरंभ हुआ था। आर्यभट्ट (476 ई), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) भास्कर प्रथम (600 ई.) तथा भास्कर द्वितीय (1114 ई.)ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह संपूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुन: वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरंभ किया परंतु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह संपूर्ण विश्व द्वारा अपनाई गई।

भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या (sine) और फलन के परिचय का पूर्व विवरण सिद्धांत (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने $90°$ से अधिक, कोणों के sine के मान के लए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में कार्य युक्ति भाषा में $\sin(A+B)$ के प्रसार की एक उपपत्ति है। $18°, 36°, 54°, 72°$, आदि के sine तथा cosine के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए हैं।

$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$, आदि को चाप $\sin x$, चाप $\cos x$, आदि के स्थान पर प्रयोग करने का सुझाव ज्योतिषविद Sir John F.W. Hersehel (1813 ई.) द्वारा दिए गए थे। ऊँचाई और दूरी संबंधित प्रश्नों के साथ Thales (600 ई. पूर्व) का नाम अपरिहाय रूप से जुड़ा हुआ है। उन्हें मिश्र के महान पिरामिड की ऊँचाई के मापन का श्रेय प्राप्त है। इसके लिए उन्होंने एक ज्ञात ऊँचाई के सहायक दंड तथा पिरामिड की परछाइयों को नापकर उनके अनुपातों की तुलना का प्रयोग किया था। ये अनुपात हैं

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan(\text{सूर्य का उन्नतांश})$$

Thales को समुद्री जहाज़ की दूरी की गणना करने का भी श्रेय दिया जाता है। इसके लिए उन्होंने समरूप त्रिभुजों के अनुपात का प्रयोग किया था। ऊँचाई और दूरी संबधी प्रश्नों का हल समरूप त्रिभुजों की सहायता से प्राचीन भारतीय कार्यों में मिलते हैं।

अध्याय **4**

गणितीय आगमन का सिद्धांत (Principle of Mathematical Induction)

❖*Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

4.1 भूमिका (Introduction)

गणितीय चिंतन का एक आधारभूत सिद्धांत निगमनिक तर्क है। तर्कशास्त्र के अध्ययन से उद्धृत एक अनौपचारिक और निगमनिक तर्क का उदाहरण तीन कथनों में व्यक्त तर्क है:–

(a) सुकरात एक मनुष्य है।

(b) सभी मनुष्य मरणशील हैं, इसलिए,

(c) सुकरात मरणशील है।

यदि कथन (a) और (b) सत्य हैं, तो (c) की सत्यता स्थापित है। इस सरल उदाहरण को गणितीय बनाने के लिए हम लिख सकते हैं।

(i) आठ दो से भाज्य है।

(ii) दो से भाज्य कोई संख्या सम संख्या है, इसलिए,

(iii) आठ एक सम संख्या है।

इस प्रकार संक्षेप में निगमन एक प्रक्रिया है जिसमें एक कथन सिद्ध करने को दिया जाता है, जिसे गणित में प्राय: एक **अनुमानित कथन** (conjecture) अथवा **प्रमेय** कहते हैं, तर्क संगत निगमन के चरण प्राप्त किए जाते हैं और एक उपपत्ति स्थापित की जा सकती है, अथवा नहीं की जा सकती है, अर्थात् निगमन व्यापक स्थिति से विशेष स्थिति प्राप्त करने का अनुप्रयोग है।

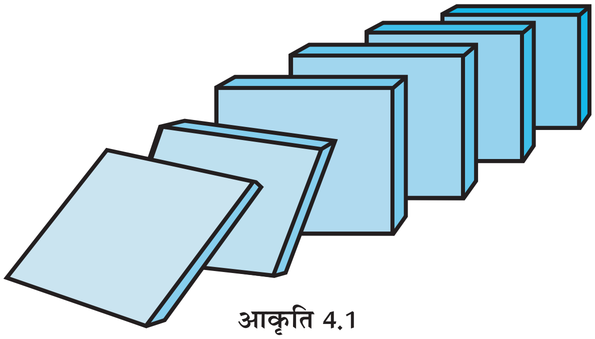
G. Peano
(1858-1932 A.D.)

निगमन के विपरीत, आगमन तर्क प्रत्येक स्थिति के अध्ययन पर आधारित होता है तथा इसमें प्रत्येक एवं हर संभव स्थिति को ध्यान में रखते हुए घटनाओं के निरीक्षण द्वारा एक अनुमानित कथन विकसित किया जाता है। इसको गणित में प्राय: प्रयोग किया जाता है तथा वैज्ञानिक चिंतन, जहाँ आँकड़ों का संग्रह तथा विशलेषण मानक होता है, का यह मुख्य आधार है। इस प्रकार, सरल भाषा में हम कह सकते हैं कि आगमन शब्द का अर्थ विशिष्ट स्थितियों या तथ्यों से व्यापकीकरण करने से है।

बीजगणित में या गणित की अन्य शाखाओं में, कुछ ऐसे परिणाम या कथन होते हैं जिन्हें एक धन पूर्णांक n के पदों में व्यक्त किया जाता है। ऐसे कथनों को सिद्ध करने के लिए विशिष्ट तकनीक पर आधारित समुचित सिद्धांत है जो **गणितीय आगमन का सिद्धांत** (Principle of Mathematical Induction) कहलाता है।

4.2 प्रेरणा (Motivation)

गणित में, हम सम्पूर्ण आगमन का एक रूप जिसे गणितीय आगमन कहते हैं, प्रयुक्त करते हैं। गणितीय आगमन सिद्धांत के मूल को समझने के लिए, कल्पना कीजिए कि एक पतली आयताकार टाइलों का समूह एक सिरे पर रखा है, जैसे आकृति 4.1 में प्रदर्शित है।



आकृति 4.1

जब प्रथम टाइल को निर्दिष्ट दिशा में धक्का दिया जाता है तो सभी टाइलें गिर जाएँगी। पूर्णत: सुनिश्चित होने के लिए कि सभी टाइलें गिर जाएँगी, इतना जानना पर्याप्त है कि

(a) प्रथम टाइल गिरती है, और

(b) उस घटना में जब कोई टाइल गिरती है, उसकी उत्तरवर्ती अनिवार्यत: गिरती है।

यही गणितीय आगमन सिद्धांत का आधार है।

हम जानते हैं कि प्राकृत संख्याओं का समुच्चय **N** वास्तविक संख्याओं का विशेष क्रमित उपसमुच्चय है। वास्तव में, **R** का सबसे छोटा उपसमुच्चय **N** है, जिसमें निम्नलिखित गुण हैं:

एक समुच्चय S **आगमनिक समुच्चय** (Inductive set) कहलाता है यदि $1 \in S$ और $x + 1 \in S$ जब कभी $x \in S$. क्योंकि **N,** जो कि एक आगमनिक समुच्चय है, **R** का सबसे छोटा उपसमुच्चय है, परिणामत: **R** के किसी भी ऐसे उपसमुच्चय में जो आगमनिक है, **N** अनिवार्य रूप से समाहित होता है।

दृष्टांत

मान लीजिए कि हम प्राकृत संख्याओं $1, 2, 3, \ldots, n$, के योग के लिए सूत्र प्राप्त करना चाहते हैं अर्थात् एक सूत्र जो कि $n = 3$ के लिए $1 + 2 + 3$ का मान देता है, $n = 4$ के लिए $1 + 2 + 3 + 4$ का मान देता है इत्यादि। और मान लीजिए कि हम किसी प्रकार से यह विश्वास करने के लिए प्रेरित होते हैं कि सूत्र $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ सही है।

यह सूत्र वास्तव में कैसे सिद्ध किया जा सकता है? हम, निश्चित ही n के इच्छानुसार चाहे गए, धन पूर्णांक मानों के लिए कथन को सत्यापित कर सकते हैं, किंतु इस प्रक्रिया का मान n के सभी मानों के लिए सूत्र को सिद्ध नहीं कर सकती है। इसके लिए एक ऐसी क्रिया शृंखला की आवश्यकता है, जिसका प्रभाव इस प्रकार का हो कि एक बार किसी धन पूर्णांक के लिए सूत्र के सिद्ध हो जाने के बाद आगामी धन पूर्णांकों के लिए सूत्र निरंतर अपने आप सिद्ध हो जाता है। इस प्रकार की क्रिया शृंखला को गणितीय आगमन विधि द्वारा उत्पन्न समझा जा सकता है।

4.3 गणितीय आगमन का सिद्धांत (The Principle of Mathematical Induction)

कल्पना कीजिए धन पूर्णांक $P(n)$ से संबद्ध एक दिया कथन इस प्रकार है कि

(i) $n = 1$, के लिए कथन सत्य है अर्थात् $P(1)$ सत्य है और

(ii) यदि $n = k$, एक प्राकृत संख्या, के लिए कथन सत्य है तो $n = k + 1$, के लिए भी कथन सत्य है अर्थात् $P(k)$ की सत्यता का तात्पर्य है $P(k + 1)$ की सत्यता। अत: सभी प्राकृत संख्या n के लिए $P(n)$ सत्य है।

गुण (i) मात्र तथ्य का कथन है। ऐसी परिस्थितियाँ भी हो सकती हैं जब $n \geq 4$ के सभी मानों के लिए कथन सत्य हो। इस स्थिति में, प्रथम चरण $n = 4$ से प्रारंभ होगा और हम परिणाम को $n = 4$ के लिए अर्थात् $P(4)$ सत्यापित करेंगे।

गुण (ii) प्रतिबंधित गुणधर्म है। यह निश्चयपूर्वक नहीं कहता कि दिया कथन $n = k$ के लिए सत्य है, परंतु केवल इतना कहता है कि यदि यह $n = k$ के लिए कथन सत्य है, तो $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। इस प्रकार गुणधर्म की सत्यता सिद्ध करने

के लिए केवल **प्रतिबंधित साध्य** (conditional proposition) को सिद्ध करते हैं: "यदि $n = k$ के लिए कथन सत्य है तो यह $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है"। इसे कभी-कभी **आगमन का चरण** (Induction step) कहा जाता है। इस आगमन चरण में '$n = k$ के लिए कथन सत्य है' की अभिधारणा (assumption) **आगमन परिकल्पना** (Induction hypothesis) कहलाती है।

उदाहरणार्थ: गणित में बहुधा एक सूत्र खोजा जा सकता है जो किसी पैटर्न के अनुरूप होता है, जैसे

$$1 = 1^2 = 1$$
$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \text{ इत्यादि।}$$

ध्यान दीजिए कि प्रथम दो विषम प्राकृत संख्याओं का योग द्वितीय प्राकृत संख्या का वर्ग है, प्रथम तीन विषम प्राकृत संख्याओं का योग तृतीय प्राकृत संख्या का वर्ग है, इत्यादि। अत: इस पैटर्न से प्रतीत होता है कि

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, अर्थात्

प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n का वर्ग है।

मान लीजिए कि

$P(n)$: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$

हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(n)$, n के सभी मानों के लिए सत्य है। गणितीय आगमन के प्रयोग वाली उपपत्ति के प्रथम चरण में $P(1)$ को सत्य सिद्ध करते हैं। इस चरण को **मूल चरण** कहते हैं। प्रत्यक्षत:

$1 = 1^2$ अर्थात् $P(1)$ सत्य है।

अगला चरण **आगमन चरण** (Induction step) कहलाता है। यहाँ हम कल्पना करते हैं कि $P(k)$ सत्य है जहाँ k, एक प्राकृत संख्या है और हमें $P(k + 1)$ की सत्यता सिद्ध करने की आवश्यकता है क्योंकि $P(k)$ सत्य है, अत:

$P(k) : 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2$ ... (1)

$P(k+1)$ पर विचार कीजिए

$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\}$ ... (2)

$= k^2 + (2k + 1)$ [(1) के प्रयोग से]

$= (k + 1)^2$

इसलिए, $P(k + 1)$ सत्य है और अब आगमनिक उपपत्ति पूर्ण हुई।

अत: सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 1 सभी $n \geq 1$ के लिए, सिद्ध कीजिए

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

हल मान लीजिए कि दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ के लिए, $P(1)$: $1 = \dfrac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \dfrac{1\times2\times3}{6} = 1$ जोकि सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad ...(1)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad [(1) \text{ के प्रयोग से}]$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 2 सभी धन पूर्णांक n के लिए सिद्ध कीजिए कि $2^n > n$.

हल मान लीजिए कि $P(n)$: $2^n > n$

जब $n=1$, $2^1>1$. अत: $P(1)$ सत्य है।

कल्पना कीजिए कि किसी धन पूर्णांक k के लिए $P(k)$ सत्य है अर्थात्

$$P(k): \quad 2^k > k \qquad \ldots (1)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है।

(1) के दोनों पक्षों में 2 का गुणा करने पर हम

$2.\, 2^k > 2k$ प्राप्त करते हैं।

अर्थात् $2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$

इसलिए, $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अत: गणितीय आगमन द्वारा, प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 3 सभी पूर्णांक $n \geq 1$ के लिए, सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

हल मान लीजिए कि दिया कथन $P(n)$ है तथा हम

$$P(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ लिखते हैं}$$

इस प्रकार $P(1): \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, जोकि सत्य है। अत: $P(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है।

कल्पना कीजिए कि पूर्णांक k के लिए $P(k)$ सत्य है

अर्थात्
$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \qquad \ldots (1)$$

हमें P(k + 1) को सत्य सिद्ध करना है जब P(k) सत्य है। इस हेतु निम्नलिखित पर विचार कीजिए।

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{[(1) के प्रयोग से]}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

इस प्रकार कथन P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अत: गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए P(n) सत्य है।

उदाहरण 4 प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $7^n - 3^n$, 4 से विभाजित होता है।

हल मान लीजिए दिया कथन P(n) है अर्थात्

P(n) : $7^n - 3^n$, 4 से विभाजित है।

हम पाते हैं

P(1): $7^1 - 3^1 = 4$ जो कि 4 से विभाजित होता है। इस प्रकार P(n), $n = 1$ के लिए सत्य है।

कल्पना कीजिए कि एक धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है,

अर्थात, P(k) : $7^k - 3^k$, 4 से विभाजित होता है।

अत: हम लिख सकते हैं $7^k - 3^k = 4d$, जहाँ $d \in \mathbf{N}$.

अब, हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है।

अब $\quad 7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7.3^k + 7.3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4.3^k = 4(7d + 3^k)$$

अंतिम पंक्ति से हम देखते हैं कि $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$, 4 से विभाजित होता है। इस प्रकार, P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन सिद्धांत से प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए कथन P(n) सत्य है।

उदाहरण 5 सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सिद्ध कीजिए कि $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, जहाँ $x > -1$.

हल मान लीजिए कि दिया कथन P(n) है

अर्थात् $\quad$ P(n): $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, $x > -1$ के लिए

जब $\quad n = 1$, P(n) सत्य है क्योंकि $(1+x) \geq (1 + x)$ जो $x > -1$ के लिए सत्य है

कल्पना कीजिए कि

P(k): $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$, $x > -1$ सत्य है। ... (1)

अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य हैं, $x > -1$ के लिए, जब कभी $P(k)$ सत्य है। ... (2)

सर्वसमिका $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$ पर विचार कीजिए।

दिया है कि $x > -1$, इस प्रकार $(1+x) > 0$.

इसलिए $(1+x)^k \geq (1+kx)$, का प्रयोग कर हम पाते हैं,

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$$

अर्थात् $(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx+kx^2)$. ... (3)

यहाँ k एक प्राकृत संख्या है और $x^2 \geq 0$ इस प्रकार $kx^2 \geq 0$. इसलिए,

$$(1+x+kx+kx^2) \geq (1+x+kx),$$

और इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx)$$

अर्थात् $(1+x)^{k+1} \geq [1+(1+k)x]$

इस प्रकार, कथन (2) सिद्ध होता है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 से भाज्य है।

हल मान लीजिए कि कथन $P(n)$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$P(n)$: $2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 से भाज्य है

जब $n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है। हम पाते हैं

$2.7 + 3.5 - 5 = 24$ जो कि 24 से भाज्य है।

कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है।

अर्थात् $2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q$, जबकि $q \in \mathbf{N}$ ... (1)

अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य है। जब कभी $P(k)$ सत्य है।

हम पाते हैं,

$$\begin{aligned} 2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 &= 2.7^k \,.\, 7^1 + 3.5^k \,.\, 5^1 - 5 \\ &= 7\,[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5] + 3.5^k \,.\, 5 - 5 \\ &= 7\,[24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5 \\ &= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5 \\ &= 7 \times 24q - 6.5^k + 30 \\ &= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5) \\ &= 7 \times 24q - 6\,(4p)\ [(5^k - 5), 4 \text{ का गुणज है (क्यों?)}, p \in \mathrm{N} \\ &= 7 \times 24q - 24p \\ &= 24\,(7q - p) \\ &= 24 \times r, r = 7q - p, \text{ कोई प्राकृत संख्या है।} \end{aligned} \quad \text{... (2)}$$

व्यंजक (1) का दायाँ पक्ष 24 से भाज्य है।

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से, सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 7 सिद्ध कीजिए कि:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$$

अर्थात्, $P(n) : 1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in \mathbf{N}$

हल मान लीजिए कि दिया कथन $P(n)$ है,

हम ध्यान देते हैं कि $n = 1$ के लिए, $P(n)$ सत्य है क्योंकि $P(1) : 1^2 > \frac{1^3}{3}$

कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है,

अर्थात्, $P(k) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$ ... (1)

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है।

हम पाते हैं, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + ... + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \qquad \text{[(1)के प्रयोग से]}$$

$$= \frac{1}{3}\,[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$= \frac{1}{3}\,[(k + 1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}\,(k + 1)^3$$

इस प्रकार, $P(k + 1)$ सत्य हुआ जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन द्वारा $n \in \mathbf{N}$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 8 प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा घातांकों का नियम $(ab)^n = a^n b^n$ सिद्ध कीजिए।

हल मान लीजिए दिया कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n) : (ab)^n = a^n b^n$.

हम ध्यान देते हैं कि $n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है, चूँकि $(ab)^1 = a^1 b^1$.

कल्पना कीजिए $P(k)$ सत्य है

अर्थात् $(ab)^k = a^k b^k$ ... (1)

हम सिद्ध करेंगे कि $P(k + 1)$ सत्य है जब कि $P(k)$ सत्य है।

अब, हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}(ab)^{k+1} &= (ab)^k\,(ab)\\ &= (a^k\, b^k)\,(ab) \qquad \text{[(1) से]}\\ &= (a^k \,.\, a^1)\,(b^k \,.\, b^1)\\ &= a^{k+1} \,.\, b^{k+1}\end{aligned}$$

इसलिए, $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्नावली 4.1

सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

1. $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. $1+\dfrac{1}{(1+2)}+\dfrac{1}{(1+2+3)}+\ldots+\dfrac{1}{(1+2+3+\ldots n)}=\dfrac{2n}{(n+1)}$.

4. $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

7. $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^2 + \ldots + n.2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

9. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

10. $\dfrac{1}{2.5}+\dfrac{1}{5.8}+\dfrac{1}{8.11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{n}{(6n+4)}$

11. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

13. $\left(1+\dfrac{3}{1}\right)\left(1+\dfrac{5}{4}\right)\left(1+\dfrac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\dfrac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$

14. $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{(3n+1)}$

17. $\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\dfrac{1}{7.9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n}{3(2n+3)}$

18. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \dfrac{1}{8}(2n+1)^2$

19. $n(n+1)(n+5)$, संख्या 3 का एक गुणज है।

20. $10^{2n-1}+1$ संख्या 11 से भाज्य है।

21. $x^{2n}-y^{2n}$, $(x+y)$ से भाज्य है।

22. $3^{2n+2}-8n-9$, संख्या 8 से भाज्य है।

23. 41^n-14^n, संख्या 27 का एक गुणज है।

24. $(2n+7)<(n+3)^2$

सारांश

- गणितीय चिंतन का एक मूल आधार निगमनात्मक विवेचन है। निगमन के विपरीत, आगमनिक विवेचन, भिन्न दशाओं के अध्ययन द्वारा एक अनुमानित कथन विकसित करने पर निर्भर करता है, जबतक कि हर एक दशा का प्रेक्षण न कर लिया गया हो।
- गणितीय आगमन सिद्धांत एक ऐसा साधन है जिसका प्रयोग विविध प्रकार के गणितीय कथनों को सिद्ध करने के लिए किया जा सकता है। धन पूर्णांकों से संबंधित इस प्रकार के प्रत्येक कथन को $P(n)$ मान लेते हैं, जिसकी सत्यता $n=1$ के लिए जाँची जाती है। इसके बाद किसी धन पूर्णांक k, के लिए $P(k)$ की सत्यता को मान कर $P(k+1)$ की सत्यता सिद्ध करते हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

अन्य संकल्पनाओं और विधियों के विपरीत गणितीय आगमन द्वारा उपपत्ति किसी व्यक्ति विशेष द्वारा किसी निश्चित काल में किया गया आविष्कार नहीं है। यह कहा जाता है कि गणितीय आगमन सिद्धांत **Phythagoreans** को ज्ञात था। गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रारंभ करने का श्रेय फ्रांसीसी गणितज्ञ **Blaise Pascal** को दिया जाता है। आगमन शब्द का प्रयोग अंग्रेज़ गणितज्ञ **John Wallis** ने किया था। बाद में इस सिद्धांत का प्रयोग द्विपद प्रमेय की उपपत्ति प्राप्त करने में किया गया। De Morgan ने गणित के क्षेत्र में विभिन्न विषयों पर बहुत योगदान किया है। वह पहले व्यक्ति थे, जिन्होंने इसे परिभाषित किया है और गणितीय आगमन नाम दिया है तथा गणितीय श्रेणियों के अभिसरण ज्ञात करने के लिए De Morgan का नियम विकसित किया।

G. Peano ने स्पष्टतया व्यक्त अभिधारणाओं के प्रयोग द्वारा प्राकृत संख्याओं के गुणों की व्युत्पत्ति करने का उत्तरदायित्व लिया, जिन्हें अब पियानों के अभिगृहीत कहते हैं। पियानों के अभिगृहीत में से एक का पुनर्कथन गणितीय आगमन का सिद्धांत है।

अध्याय **5**

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण
(Complex Numbers and Quadratic Equations)

❖*Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

5.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हमने एक और दो चर की एक घातीय समीकरणों का तथा एक चर की द्विघातीय समीकरणों का अध्ययन किया है। हमने देखा है कि समीकरण $x^2 + 1 = 0$ का कोई वास्तविक हल नहीं है क्योंकि $x^2 + 1 = 0$ से हमें $x^2 = -1$ प्राप्त होता है और प्रत्येक वास्तविक संख्या का वर्ग श्रेणेतर होता है इसलिए वास्तविक संख्या प्रणाली को बृहद् प्रणाली के रूप में बढ़ाने की आवश्यकता है जिससे कि हम समीकरण $x^2 = -1$ का हल प्राप्त कर सकें। वास्तव में, मुख्य उद्देश्य समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का हल प्राप्त करना है, जहाँ $D = b^2 - 4ac < 0$ है, जोकि वास्तविक संख्याओं की प्रणाली में संभव नहीं है।

W. R. Hamilton
(1805-1865 A.D.)

5.2 सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers)

हम कल्पना करें कि $\sqrt{-1}$ संकेतन i से निरूपित है। तब हमें $i^2 = -1$ प्राप्त होता है। इसका तात्पर्य है कि i, समीकरण $x^2 + 1 = 0$ का एक हल है।

$a + ib$ के प्रारूप की एक संख्या जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, एक सम्मिश्र संख्या परिभाषित करती है। उदाहरण के लिए, $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4 + i\left(\frac{-1}{11}\right)$ सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के लिए, a **वास्तविक भाग** कहलाता है तथा Rez द्वारा निरूपित किया जाता है और b **काल्पनिक भाग** कहलाता है तथा Imz द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $z = 2 + i5$, तब Re$z = 2$ और Im$z = 5$ दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ समान होंगी यदि $a = c$ और $b = d$.

उदाहरण 1 यदि $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तब x और y ज्ञात कीजिए।

हल हमें दिया है

$$4x + i(3x - y) = 3 + i(-6) \qquad \text{... (i)}$$

दोनों ओर के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को समान लेते हुए, हमें प्राप्त होता है,

$$4x = 3,\ 3x - y = -6,$$

जिन्हें युगपत् हल करने पर, $x = \frac{3}{4}$ और $y = \frac{33}{4}$

5.3 सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित (Algebra of Complex Numbers)

इस भाग में, हम सम्मिश्र संख्याओं के बीजगणित का विकास करेंगे।

5.3.1 *दो सम्मिश्र, संख्याओं का योग (Addition of two complex numbers)* यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब $z_1 + z_2$ के योग को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$, जो कि पुन: एक सम्मिश्र संख्या है।

उदाहरण के लिए, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i\,(3 + 5) = -4 + i\,8$

सम्मिश्र संख्याओं के योग निम्नलिखित प्रगुणों को संतुष्ट करते हैं।

(i) ***संवरक नियम*** दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या होती है, अर्थात सारी सम्मिश्र सख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, $z_1 + z_2$ एक सम्मिश्र संख्या है।

(ii) ***क्रम विनिमय नियम*** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(iii) ***साहचर्य नियम*** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

(iv) ***योगात्मक तत्समक का अस्तित्व*** सम्मिश्र संख्या $0 + i\,0$ (0 के द्वारा दर्शाया जाता है), योगात्मक तत्समक अथवा शून्य सम्मिश्र संख्या कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z, $z + 0 = z$.

(v) ***योगात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व*** प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, के लिए हमें सम्मिश्र संख्या $-a + i(-b)$ ($-z$ के द्वारा दर्शाया जाता है) प्राप्त होती है, जोकि योगात्मक प्रतिलोम अथवा z का ऋण कहलाता है। हम प्रेक्षित करते हैं कि $z + (-z) = 0$ (योगात्मक तत्समक)।

5.3.2 *दो सम्मिश्र संख्याओं का अंतर (Difference of two complex numbers)* किन्हीं दी गई सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 का अंतर $z_1 - z_2$ निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ उदाहरणार्थ $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3\,i) + (-2 + i)$ और $(2 - i) + (-6 - 3\,i) = -4 - 4\,i$

5.3.3 *सम्मिश्र संख्याओं का गुणन (Multiplication of two complex numbers)* मान लीजिए $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब गुणनफल $z_1.z_2$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$z_1\, z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

उदाहरण के लिए, $(3 + i5)\,(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28$

सम्मिश्र संख्याओं के गुणन की संक्रिया में निम्नलिखित प्रगुण होते हैं:

(i) **संवरक नियम** दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल, एक सम्मिश्र संख्या होती है, सारी सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, गुणनफल z_1, z_2 एक सम्मिश्र संख्या होती है।

(ii) **क्रम विनिमय नियम** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए,

$$z_1\, z_2 = z_2\, z_1$$

(iii) **साहचर्य नियम** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए

$$(z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$$

(iv) **गुणात्मक तत्समक का आस्तित्व** सम्मिश्र संख्या $1 + i\,0$ (1 के द्वारा दर्शाया जाता है), **गुणात्मक तत्समक** अथवा **एकल सम्मिश्र संख्या** कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए $z.1 = z$

(v) **गुणात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व** प्रत्येक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib\ (a \neq 0, b \neq 0)$ के लिए, हमें सम्मिश्र संख्या $\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ($\dfrac{1}{z}$ अथवा z^{-1} के द्वारा दर्शाया जाता है) प्राप्त होती है, z की गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है जिससे कि $z.\dfrac{1}{z} = 1$ (गुणात्मक तत्समक)

(vi) **बंटन नियम** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2, z_3 के लिए

(a) $z_1\ (z_2 + z_3) = z_1\ z_2 + z_1\ z_3$

(b) $(z_1 + z_2)\ z_3 = z_1\ z_3 + z_2\ z_3$

5.3.4 ***दो सम्मिश्र संख्याओं का भागफल (Division of two complex numbers)*** किन्हीं दो दी हुई सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, जहाँ $z_2 \neq 0$, भागफल $\dfrac{z_1}{z_2}$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1\dfrac{1}{z_2}$

उदाहरण के लिए, मान लिया $z_1 = 6 + 3i$ और $z_2 = 2 - i$

तब $$\frac{z_1}{z_2} = \left(6+3i)\times\frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right] = \frac{1}{5}(9+12i)$$

5.3.5 ***i की घात (Power of i)*** हमें ज्ञात हैं :

$$i^3 = i^2 i = (-1)\ i = -i\,, \qquad i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = \left(i^2\right)^2 i = (-1)^2\ i = i\,, \qquad i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1 \text{ इत्यादि,}$$

इसी प्रकार हम और भी प्राप्त करते हैं: $i^{-1} = \dfrac{1}{i}\times\dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-1} = -i,\quad i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{1}{-1} = -1,$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i,\quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

सामान्य रूप से, किसी पूर्णांक k के लिए, $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

5.3.6 ***एक ऋण वास्तविक संख्या के वर्गमूल (The square roots of a negative real number)***

ज्ञात है: $i^2 = -1$ और $(-i)^2 = i^2 = -1$. इसलिए -1 के वर्गमूल i और $-i$ हैं।

यद्यपि चिह्न $\sqrt{-1}$, का अर्थ हमारे लिए केवल i होगा।

अब हम देख सकते हैं कि i और $-i$ दोनों समीकरण $x^2 + 1 = 0$ अथवा $x^2 = -1$ के हल हैं।

इसी प्रकार, $\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\,(-1) = -3$

और $\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$

इसलिए -3 के वर्गमूल $\sqrt{3}\,i$ और $-\sqrt{3}\,i$ हैं।

फिर से केवल $\sqrt{3}\,i$ को दर्शाने के लिए ही प्रतीक $\sqrt{-3}$ का प्रयोग किया जाता है, अर्थात् $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$.

सामान्यतया यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, तब $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$,

हम जानते हैं कि सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के लिए $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ यह परिणाम तब भी सत्य होगा, जब $a > 0, b < 0$ या $a < 0, b > 0$.

क्या होगा ? यदि $a < 0, b < 0$, हम इसकी जाँच करते हैं

नोट कीजिए कि $i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ जोकि इस बात का विरोधाभास है कि $i^2 = -1$

इसलिए, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$ यदि a और b दोनों ऋण वास्तविक संख्याएँ हैं।

आगे यदि a और b दोनों में से कोई भी शून्य है, तब स्पष्ट रूप से $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} = 0$

5.3.7 *तत्समक (Identities)* हम निम्नलिखित तत्समक को सिद्ध करते हैं:

किन्हीं सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए

$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$

उपपत्ति हमें प्राप्त होता है, $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$= (z_1 + z_2)\,z_1 + (z_1 + z_2)\,z_2$ (बंटन नियम)

$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2$ (बंटन नियम)

$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2$ (गुणन का क्रम विनिमय नियम)

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

इसी भाँति हम निम्नलिखित तत्समकों को सिद्ध कर सकते हैं:

(i) $\left(z_1 - z_2\right)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

(ii) $\left(z_1 + z_2\right)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $\left(z_1 - z_2\right)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_2^2 = \left(z_1 + z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)$

वास्तव में बहुत से दूसरे तत्समकों को जोकि सभी वास्तविक संख्याओं के लिए सत्य हैं, सभी सम्मिश्र संख्याओं की सत्यता के लिए सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित को $a + ib$ के रूप में व्यक्त करें:

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

हल (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$

(ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5 = \frac{1}{256}\left(i^2\right)^2 i = \frac{1}{256}i$

उदाहरण 3 $(5-3i)^3$ को $a+bi$ के रूप में व्यक्त करें:

हल हमें प्राप्त है, $(5-3i)^3 = 5^3 - 3\times 5^2 \times (3i) + 3\times 5\,(3i)^2 - (3i)^3$

$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$

उदाहरण 4 $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त करें।

हल हमें प्राप्त है $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$$

5.4 सम्मिश्र संख्या का मापांक और संयुग्मी (The Modulus and the Conjugate of a Complex Number)

मान लीजिए $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब z का मापांक, जो $|z|$ द्वारा दर्शाया जाता है, को ऋणेत्तर वास्तविक संख्या $\sqrt{a^2+b^2}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है अर्थात् $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ और z का संयुग्मी, जो $\bar{z}$ द्वारा दर्शाया जाता है, सम्मिश्र संख्या $a-ib$ होता है, अर्थात् $\bar{z} = a - ib$

उदाहरण के लिए, $|3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $|2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

और $\overline{3+i} = 3-i$, $\overline{2-5i} = 2+5i$, $\overline{-3i-5} = 3i-5$

हम प्रेक्षित करते हैं कि ऋणेत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का गुणात्मक प्रतिलोम

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\text{, होता है}$$

अर्थात् $z\,\bar{z} = |z|^2$

अग्रत: किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 एवं z_2 के लिए निम्नलिखित निष्कर्षों को सुगमता से व्युत्पन्न किया जा सकता है:

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, यदि $|z_2| \neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ यदि $z_2 \neq 0$.

उदाहरण 5 $2-3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल मान लिया $z = 2 - 3i$

तब $\bar{z} = 2 + 3i$ और $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

इसलिए, $2-3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \text{ प्राप्त होता है।}$$

ऊपर दिया गया सारा हल निम्नलिखित ढंग से भी दिखाया जा सकता है:

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

उदाहरण 6 निम्नलिखित को $a + ib$ के रूप में व्यक्त करें।

(i) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

हल (i) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3} = 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $i^{-35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = i$

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1 से 10 तक की सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$ **2.** $i^9 + i^{19}$ **3.** i^{-39}

4. $3(7 + i7) + i\,(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$

6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$ **7.** $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

8. $(1 - i)^4$ **9.** $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$ **10.** $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$

प्रश्न 11 से 13 की सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

11. $4 - 3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

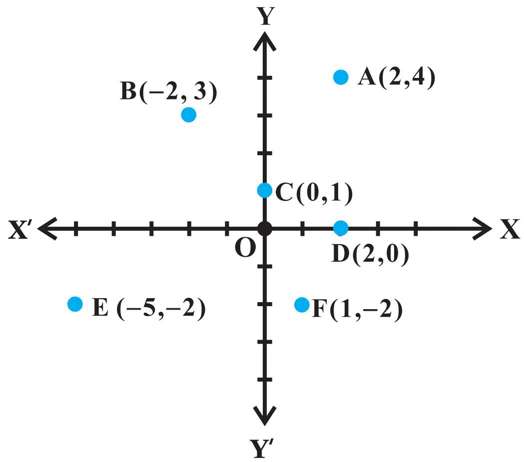
14. निम्नलिखित व्यंजक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 आर्गंड तल और ध्रुवीय निरूपण (Argand Plane and Polar Representation)

जैसा कि हम पहले से ही जानते हैं कि वास्तविक संख्याओं (x, y) के प्रत्येक क्रमित युग्म के संगत, हमें X Y तल में दो पारस्परिक लंब रेखाओं के संदर्भ में जिन्हें x– अक्ष y – अक्ष द्वारा जाना जाता है, एक अद्वितीय बिंदु प्राप्त होता है। अर्थात् सम्मिश्र संख्या $x + iy$ का जो क्रमित युग्म (x,y) के संगत है, तल में एक अद्वितीय बिंदु (x, y) के रूप में ज्यामितीय निरूपण किया जा सकता है। यह कथन विलोमत: सत्य है।

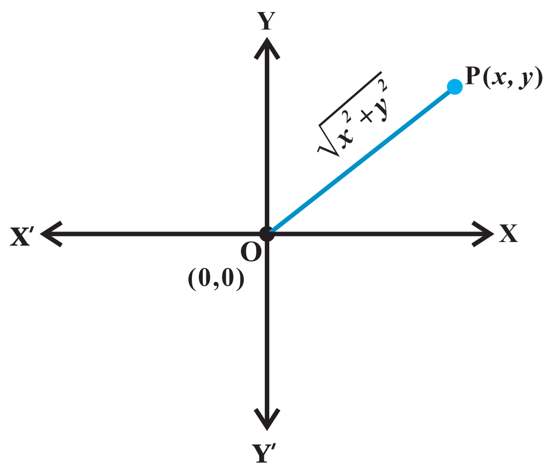
कुछ सम्मिश्र संख्याओं जैसे $2+4i, -2+3i, 0+1i, 2+0i, -5-2i$ और $1-2i$ को जोकि क्रमित युग्मों (2, 4), (–2,3), (0,1), (2,0), (–5,–2) और (1, –2) के संगत हैं, आकृति 5.1 में बिंदुओं A, B, C, D, E और F द्वारा ज्यामितीय निरूपण किया गया है।



आकृति 5.1

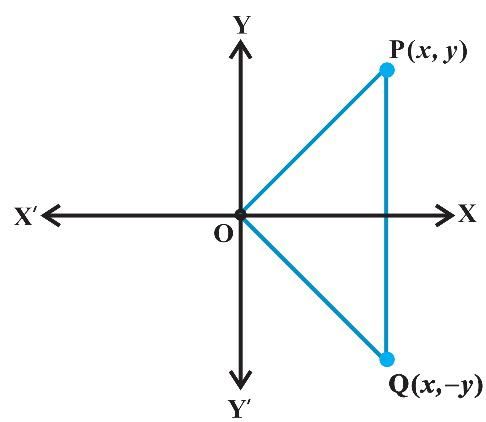
तल, जिसमें प्रत्येक बिंदु को एक सम्मिश्र संख्या द्वारा निर्दिष्ट किया गया है, सम्मिश्र तल या आर्गंड तल कहलाता है।
आर्गंड तल में सम्मिश्र संख्या $(x + iy)$ का मापांक बिंदु $P(x,y)$ से मूल बिंदु $O(0,0)$ के बीच की दूरी द्वारा प्राप्त होता है (आकृति 5.2)।

x–अक्ष पर बिंदु, सम्मिश्र संख्याओं $a + i0$ रूप के संगत होते हैं और y–अक्ष पर बिंदु, सम्मिश्र संख्याओं $0 + ib$ रूप के संगत होते हैं। आर्गंड तल में x–अक्ष और y–अक्ष क्रमशः वास्तविक अक्ष और काल्पनिक अक्ष कहलाते हैं।



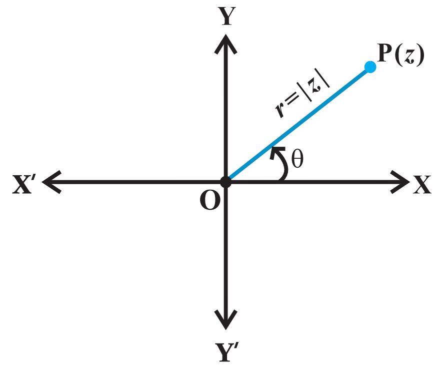
आकृति 5.2

आर्गंड तल में सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ और इसकी संयुग्मी $\bar{z} = x - iy$ को बिंदुओं $P(x, y)$ और $Q(x, -y)$ के द्वारा निरूपित किया गया है। ज्यामितीय भाषा से, बिंदु $(x, -y)$ वास्तविक अक्ष के सापेक्ष बिंदु (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब कहलाता है (आकृति 5.3)।



आकृति 5.3

5.5.1 *एक सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण (Polar representation of a complex number)* माना कि बिंदु P. ऋणेत्तर सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का निरूपण करता है। माना कि दिष्ट रेखाखंड OP की लंबाई r है और θ वह कोण है जो OP, x–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाता है।



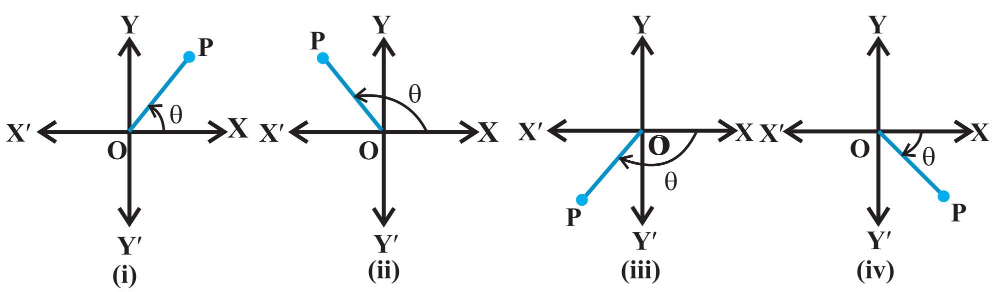
आकृति 5.4

हम ध्यान दें कि P वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (r, θ) से अद्वितीय रूप से निर्धारित किया जाता है। (r, θ) बिंदु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं आकृति 5.4 देखिए।

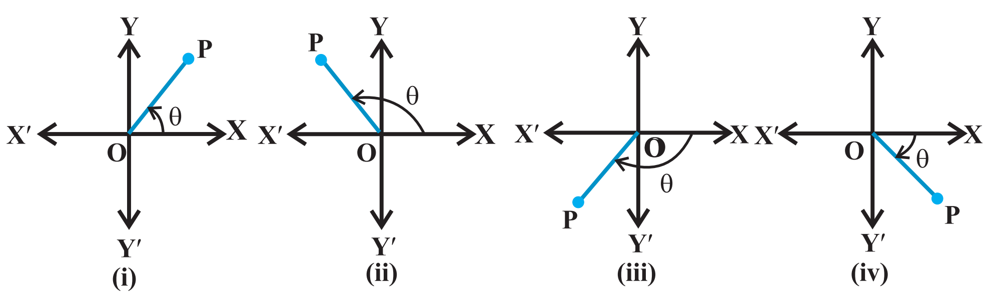
हम मूल बिंदु को ध्रुव तथा x–अक्ष की धन दिशा को प्रारंभिक रेखा मानते हैं।

यहाँ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ और इसलिए $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप कहलाता है। यहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ को z का मापांक कहते हैं और θ, सम्मिश्र संख्या का **कोणांक** या **आयाम** कहलाता है तथा कोणांक z से निरूपित होता है।

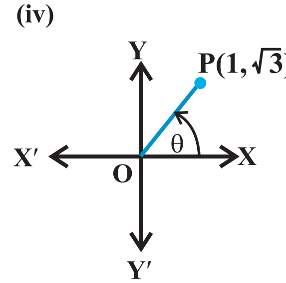
किसी सम्मिश्र संख्या $z \neq 0$, $0 \geq \theta < 2\pi$ में θ का केवल मान संगत हैं। फिर भी, 2π की लंबाई के किसी दूसरे, अंतराल के लिए, उदाहरण के तौर पर $-\pi < \theta \leq \pi$ इस प्रकार का एक अंतराल हो सकता है। हम θ का ऐसा मान, जिसमें की च$-\pi < \theta \leq \pi$, z का **मुख्य आयाम** कहलाता है और $\arg z$ से निरूपित किया जाता है। आकृति 5.5 और 5.6 देखिए।



आकृति 5.5 $(0 \leq \theta < 2\pi)$



आकृति 5.6 $(-\pi < \theta \leq \pi)$



आकृति 5.7

उदाहरण 7 सम्मिश्र संख्या $z = 1 + i\sqrt{3}$ को ध्रुवीय रूप में निरूपित कीजिए।

हल माना $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

दोनों तरफ का वर्ग करके और जोड़ने पर हमें प्राप्त है,

$$r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4$$

अर्थात् $r = \sqrt{4} = 2$ (प्रतिदर्श रूप से, $r > 0$)

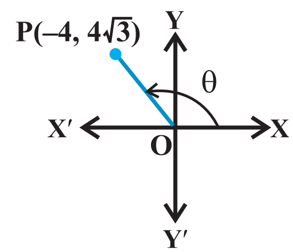
इसलिए $\cos\theta = \frac{1}{2}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

इनसे प्राप्त होता है $\theta = \frac{\pi}{3}$

इसलिए अपेक्षित ध्रुवीय रूप $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

सम्मिश्र संख्या संख्या को आकृति 5.7 में दर्शाया गया है।

उदाहरण 8 सम्मिश्र संख्या $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।



आकृति 5.8

हल दी हुई सम्मिश्र संख्या $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}$$

$= -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4 + i4\sqrt{3}$ (आकृति 5.8)

माना $-4 = r\cos\theta, \ 4\sqrt{3} = r\sin\theta$

दोनों ओर वर्ग करके और जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है $16 + 48 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$

जिससे हमें प्राप्त होता है, $r^2 = 64$, अर्थात् $r = 8$

इसलिए, $\cos\theta = -\frac{1}{2}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

इसलिए, आवश्यक ध्रुवीय रूप $= 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 2 तक सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए:

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + \text{i}$

प्रश्न 3 से 8 तक सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए:

3. $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$

6. -3 **7.** $\sqrt{3} + i$

5.6 द्विघातीय समीकरण (Quadratic Equations)

हमें पहले ही द्विघातीय समीकरणों के बारे में जानकारी है और हमने उनकों वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में उन स्थितियों में हल किया है जहाँ विविक्तकर ≥ 0 है। अब हम निम्नलिखित द्विघातीय समीकरण के बारे में विचार करते हैं:

$ax^2 + bx + c = 0$ जिसमें a, b, c वास्तविक गुणांक हैं और $a \neq 0$

मान लीजिए कि $b^2 - 4ac < 0$

हम जानते हैं कि हम सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल निकाल सकते हैं। इसलिए उपर्युक्त समीकरण के हल सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में हैं जोकि $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$ द्वारा प्राप्त होते हैं।

टिप्पणी यहाँ पर, कुछ लोग यह जानने के लिए उत्सुक होंगे, कि किसी समीकरण में कितने मूल होंगे? इस संदर्भ में, निम्नलिखित प्रमेय को उल्लेख (बिना उपपत्ति) के किया गया है जिसे 'बीजगणित की मूल प्रमेय' के रूप में जाना जाता है।

"एक बहुपद समीकरण का कम से कम एक मूल होता है"।

इस प्रमेय के फलस्वरूप हम निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण परिणाम पर पहुँचते हैं।

"n घात की एक बहुपद समीकरण में n मूल होते हैं।"

उदाहरण 9 $x^2 + 2 = 0$ को हल कीजिए।

हल : हमें दिया है $x^2 + 2 = 0$

या $x^2 = -2$

अर्थात् $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

उदाहरण 10 $x^2 + x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल यहाँ $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

इसलिए, इसके हल $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ हैं

उदाहरण 11 $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ को हल कीजिए।

हल यहाँ, समीकरण का विविक्तकर $1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$ है।

इसलिए हल $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$ है।

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए:

1. $x^2 + 3 = 0$
2. $2x^2 + x + 1 = 0$
3. $x^2 + 3x + 9 = 0$
4. $-x^2 + x - 2 = 0$
5. $x^2 + 3x + 5 = 0$
6. $x^2 - x + 2 = 0$
7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$
8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

9. $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ **10.** $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 12 $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ का संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)} = \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

इसलिए $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ का संयुग्मी, $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$ है।

उदाहरण 13 निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं का मापांक एवं कोणांक ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $\frac{1}{1+i}$

हल हमें प्राप्त है, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

अब, $0 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$

दोनों ओर वर्ग करके जोड़ते हुए हमें प्राप्त होता है, $r^2 = 1$ अर्थात् $r = 1$ तथा

$$\cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = 1$$

इसलिए, $\theta = \frac{\pi}{2}$

इस प्रकार $\frac{1+i}{1-i}$ का मापांक 1 है तथा कोणांक $\frac{\pi}{2}$ होगा।

(ii) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

मान लीजिए $\frac{1}{2} = r\cos\theta$, $-\frac{1}{2} = r\sin\theta$

भाग (i) की तरह हम प्राप्त करते हैं,

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

इसलिए $\theta = \frac{-\pi}{4}$

$\dfrac{1}{1+i}$ का मापांक $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ तथा कोणांक $\dfrac{-\pi}{4}$ है।

उदाहरण 14 यदि $x + iy = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ है तो, सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = 1$

हल हमें प्राप्त है, $x+iy = \dfrac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

इसलिए, $x - iy = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

इस प्रकार $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = \dfrac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \dfrac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

उदाहरण 15 θ का वास्तविक मान बताइए, जबकि

$\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ मात्र वास्तविक है।

हल हमें प्राप्त है, $\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \dfrac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{8i\ \sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

दिया हुआ है कि सम्मिश्र संख्या वास्तविक है।

इसलिए $\dfrac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0$ अर्थात् $\sin\theta = 0$

अत $\theta = n\pi, n \in \mathbf{Z}.$

उदाहरण 16 सम्मिश्र संख्या $z = \dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए।

हल हमें प्राप्त है, $z = \dfrac{i-1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$$

मान लीजिए $\quad \frac{\sqrt{3}-1}{2} = r\,cos\,\theta,\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} = r\,sin\,\theta$

दोनों ओर वर्ग करके, जोड़ते हुए हमें प्राप्त होता है,

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

अर्थात् $\quad r = \sqrt{2}$ इससे

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ प्राप्त होता है

इसलिए $\quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$ (क्यों ?)

अर्थात्, $\quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ध्रुवीय रूप है।

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए:
$\text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}z_1\, \text{Re}z_2 - \text{Im}z_1\, \text{Im}z_2$.

3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

4. यदि $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + y2^2) = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

5. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए:

(i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ $\qquad$ (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

प्रश्न 6 से 9 में दिए गए प्रत्येक समीकरण को हल कीजिए:

6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$ $\qquad$ **7.** $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$ $\qquad$ **9.** $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$, $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि $a + ib = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, सिद्ध कीजिए कि, $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{\left(2x^2+1\right)^2}$

12. माना $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$, निम्न का मान निकालिए।

(i) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$

13. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

14. यदि $(x - iy)(3 + 5i)$, $-6 - 24i$ की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

15. $\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

16. यदि $(x + iy)^3 = u + iv$, तो दर्शाईए कि $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}=4(x^2-y^2)$

17. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं जहाँ $|\beta|=1$, तब $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. समीकरण $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

19. यदि $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$ है

तो दर्शाइए कि $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

20. यदि $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तो m का न्यूनतम पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

सारांश

- $a + ib$ के प्रारूप की एक संख्या, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है, a सम्मिश्र संख्या का वास्तविक भाग और b इसका काल्पनिक भाग कहलाता है।
- माना $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$, तब
  (i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$
  (ii) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$
- किसी शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib\ (a \neq 0, b \neq 0)$ के लिए, एक सम्मिश्र संख्या $\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$, का

अस्तित्व होता है, इसे $\frac{1}{z}$ या z^{-1} द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और z का **गुणात्मक प्रतिलोम** कहलाता है जिससे कि

$(a+ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$ प्राप्त होता है।

- किसी पूर्णांक k के लिए, $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$
- सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का संयुग्मी $\bar{z}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और $\bar{z} = a - ib$ द्वारा दर्शाया जाता है।
- सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का ध्रुवीय रूप $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, है, जहाँ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (z का मापांक) और $\cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}$ (θ, z का **कोणांक** कहलाता है।) θ का मान, जिससे कि $-\pi < \theta \le \pi$, z का **प्रमुख कोणांक** कहलाता है।
- एक n घातवाले बहुपद समीकरण के n मूल होते हैं।
- एक द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$, के हल $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac-b^2}\, i}{2a}$ के द्वारा प्राप्त होते हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

यूनानियों ने इस तथ्य को पहचाना था कि एक ऋण संख्या के वर्गमूल का वास्तविक संख्या पद्धति में कोई अस्तित्व नहीं है परंतु इसका श्रेय भारतीय गणितज्ञ Mahavira (850 ई॰) को जाता है जिन्होंने सर्वप्रथम इस कठिनाई का स्पष्टतः उल्लेख किया। "उन्होंने अपनी कृति **'गणित सार संग्रह'** में बताया कि ऋण (राशि) एक पूर्णवर्ग (राशि) नहीं है, अतः इसका वर्गमूल नहीं होता है।" एक दूसरे भारतीय गणितज्ञ Bhaskara ने 1150 ई॰ में अपनी कृति **'बीजगणित'** में भी लिखा है, "ऋण राशि का कोई वर्गमूल नहीं होता है क्योंकि यह एक वर्ग नहीं है।" Cardan (1545 इ॰) ने $x + y = 10, xy = 40$ को हल करने में उत्पन्न समस्या पर ध्यान दिया। उन्होंने $x = 5 + \sqrt{-15}$ तथा $y = 5 - \sqrt{-15}$ इसके हल के रूप में ज्ञात किया जिसे उन्होंने स्वयं अमान्यकर दिया कि ये संख्याएँ व्यर्थ (useless) हैं। Albert Girard (लगभग 1625 ई॰) ने ऋण संख्याओं के वर्गमूल को स्वीकार किया और कहा कि, इससे हम बहुपदीय समीकरण की जितनी घात होगी, उतने मूल प्राप्त कराने में सक्षम होंगे। Euler ने सर्वप्रथम $\sqrt{-1}$ को i संकेतन प्रदान किया तथा W.R. Hamilton (लगभग 1830 ई॰) ने एक शुद्ध गणितीय परिभाषा देकर और तथाकथित 'काल्पनिक संख्या' के प्रयोग को छोड़ते हुए सम्मिश्र संख्या $a + ib$ को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (a, b) के रूप में प्रस्तुत किया।

अध्याय 6

रैखिक असमिकाएँ (Linear Inequalities)

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways.* — *MAXWELL*❖

6.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हम एक चर और दो चर राशियों के समीकरणों तथा शाब्दिक प्रश्नों को समीकरणों में परिवर्तित करके हल करना सीख चुके हैं। अब हमारे मस्तिष्क में स्वभावत: यह प्रश्न उठता है कि "क्या शाब्दिक प्रश्नों को सदैव एक समीकरण के रूप में परिवर्तित करना संभव है?" उदाहरणत: आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई 106 सेमी. से कम है, आपकी कक्षा में अधिकतम 60 मेज़ें या कुर्सियाँ या दोनों समा सकती हैं। यहाँ हमें ऐसे कथन मिलते हैं जिनमें '<' (से कम), '>' (से अधिक), '≤' (से कम या बराबर) '≥' (से अधिक या बराबर) चिह्न प्रयुक्त होते हैं। इन्हें हम **असमिकाएँ (Inequalities)** कहते हैं।

इस अध्याय में, हम एक या दो चर राशियों की रैखिक असमिकाओं का अध्ययन करेंगे। असमिकाओं का अध्ययन विज्ञान, गणित, सांख्यिकी, इष्टतमकारी समस्याओं (optimisation problems), अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान इत्यादि से संबंधित समस्याओं को हल करने में अत्यंत उपयोगी है।

6.2 असमिकाएँ (Inequalities)

हम निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करते हैं:

(i) रवि 200 रुपये लेकर चावल खरीदने के लिए बाज़ार जाता है, चावल 1 किग्रा॰ के पैकेटों में उपलब्ध हैं। एक किलो चावल के पैकेट का मूल्य 30 रुपये है। यदि x उसके द्वारा खरीदे गए चावल के पैकेटों की संख्या को व्यक्त करता हो, तो उसके द्वारा खर्च की गई धनराशि 30 x रुपये होगी। क्योंकि उसे चावल को पैकेटों में ही खरीदना है इसलिए वह 200 रुपये की पूरी धनराशि को खर्च नहीं कर पाएगा (क्यों?)। अत:

$$30x < 200 \quad \ldots (1)$$

स्पष्टत: कथन (i) समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें समता (equality) का चिह्न (=) नहीं है।

(ii) रेशमा के पास 120 रुपये हैं जिससे वह कुछ रजिस्टर व पेन खरीदना चाहती है। रजिस्टर का मूल्य 40 रुपये और पेन का मूल्य 20 रुपये है। इस स्थिति में यदि रेशमा द्वारा खरीदे गए रजिस्टर की संख्या x तथा पेन की संख्या y हो तो उसके द्वारा व्यय की गयी कुल धनराशि $(40x + 20y)$ रुपये है। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$40x + 20y \leq 120 \quad \ldots (2)$$

क्योंकि इस स्थिति में खर्च की गयी कुल धनराशि अधिकतम 120 रुपये है। ध्यान दीजिए कथन (2) के दो भाग हैं।

$$40x + 20y < 120 \quad \ldots (3)$$

और

$$40x + 20y = 120 \quad \ldots (4)$$

कथन (3) समीकरण नहीं है, जबकि कथन (4) समीकरण है। उपरोक्त कथन जैसे (1), (2) तथा (3) **असमिका** कहलाते हैं।

परिभाषा 1 एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजकों में '<', '>', '≤' या '≥' के चिह्न के प्रयोग से बनती हैं।

$3 < 5$; $7 > 5$ आदि **संख्यांक असमिका** के उदाहरण हैं। जबकि
$x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ इत्यादि **शाब्दिक (चरांक) असमिका** के उदाहरण हैं।
$3 < 5 < 7$ (इसे पढ़ते हैं 5, 3 से बड़ा व 7 से छोटा है), $3 \leq x < 5$ (इसे पढ़ते हैं x, 3 से बड़ा या बराबर है व 5 से छोटा है) और $2 < y \leq 4$ **द्वि-असमिका** के उदाहरण हैं।
असमिकाओं के कुछ अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं :

$$ax + b < 0 \qquad \text{... (5)}$$
$$ax + b > 0 \qquad \text{... (6)}$$
$$ax + b \leq 0 \qquad \text{... (7)}$$
$$ax + b \geq 0 \qquad \text{... (8)}$$
$$ax + by < c \qquad \text{... (9)}$$
$$ax + by > c \qquad \text{... (10)}$$
$$ax + by \leq c \qquad \text{... (11)}$$
$$ax + by \geq c \qquad \text{... (12)}$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad \text{... (13)}$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{... (14)}$$

क्रमांक (5), (6), (9), (10) और (14) **सुनिश्चित असमिकाएँ** तथा क्रमांक (7), (8), (11), (12) और (13) **असमिकाएँ** कहलाती हैं। यदि $a \neq 0$ हो तो क्रमांक (5) से (8) तक की असमिकाएँ एक चर राशि x के रैखिक असमिकाएँ हैं और यदि $a \neq 0$ तथा $b \neq 0$ हो तो क्रमांक (9) से (12) तक की असमिकाएँ दो चर राशियों x तथा y के रैखिक असमिकाएँ हैं।

क्रमांक (13) और (14) की असमिकाएँ रैखिक नहीं हैं। वास्तव में यह एक चर राशि x के **द्विघातीय असमिकाएँ** हैं, जब $a \neq 0$.

इस अध्याय में हम केवल एक चर और दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का अध्ययन करेंगे।

6.3 एक चर राशि के रैखिक असमिकाओं का बीजगणितीय हल और उनका आलेखीय निरूपण (Algebraic Solutions of Linear Inequalities in One Variable and their Graphical Representation)

अनुभाग 6.2 के असमिका (1) अर्थात् $30x < 200$ पर विचार कीजिए। ध्यान दें, कि यहाँ x चावल के पैकेटों की संख्या को व्यक्त करता है।
स्पष्टत: x एक ऋणात्मक पूर्णांक अथवा भिन्न नहीं हो सकता है।
इस असमिका का बायाँ पक्ष $30x$ और दायाँ पक्ष 200 है।

$x = 0$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(0) = 0 < 200$ (दायाँ पक्ष), जोकि सत्य है।

$x = 1$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(1) = 30 < 200$ दायाँ पक्ष), जोकि सत्य है।

$x = 2$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(2) = 60 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 3$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(3) = 90 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 4$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(4) = 120 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 5$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(5) = 150 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 6$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(6) = 180 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 7$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\,(7) = 210 < 200$, जो कि असत्य है।

उपर्युक्त स्थिति में हम पाते हैं कि उपर्युक्त असमिका को सत्य कथन करने वाले x के मान केवल 0, 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। x के उन मानों को जो दिए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हों, उन्हें **असमिका का हल** कहते हैं। और समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ को हल समुच्चय कहते हैं।

इस प्रकार, एक चर राशि के किसी असमिका का हल, चर राशि का वह मान है, जो इसे एक सत्य कथन बनाता हो।

हमने उपर्युक्त असमिका का हल 'प्रयास और भूल विधि' (trial and error method) से प्राप्त किया है। जो अधिक सुविध ाजनक नहीं है। स्पष्टत: यह विधि अधिक समय लेने वाली तथा कभी-कभी संभाव्य नहीं होती है। हमें असमिकाओं के हल के लिए अधिक अच्छी या क्रमबद्ध तकनीक की आवश्यकता है। इससे पहले हमें संख्यांक असमिकाओं के कुछ और गुणधर्म सीखने चाहिए और असमिकाओं को हल करते समय उनका नियमों की तरह पालन करना चाहिए।

आपको स्मरण होगा कि रैखिक समीकरणों को हल करते समय हम निम्नलिखित नियमों का पालन करते हैं:

नियम 1 एक समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्याएँ जोड़ी (अथवा घटाई) जा सकती है।

नियम 2 एक समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येतर संख्याओं से गुणा (अथवा भाग) किया जा सकता है।

असमिकाओं को हल करते समय हम पुन: इन्हीं नियमों का पालन तथा नियम 2 में कुछ संशोधन के साथ करते हैं। अंतर मात्र इतना है कि ऋणात्मक संख्याओं से असमिका के दोनों पक्षों को गुणा (या भाग) करने पर असमिका के चिह्न विपरीत हो जाते हैं (अर्थात् '$<$' को $>$, '$\leq$' को '$\geq$' इत्यादि कर दिया जाता है)। इसका कारण निम्नलिखित तथ्यों से स्पष्ट है:

$3 > 2$ जबकि $-3 < -2$

$-8 < -7$ जबकि $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, अर्थात् $16 > 14$

इस प्रकार असमिकाओं को हल करने के लिए हम निम्नलिखित नियमों का उल्लेख करते हैं:

नियम 1 एक असमिका के दोनों पक्षों में, असमिका के चिह्नों को प्रभावित किए बिना समान संख्याएँ जोड़ी (अथवा घटाई) जा सकती हैं।

नियम 2 किसी असमिका के दोनों पक्षों को समान धनात्मक संख्याओं से गुणा (या भाग) किया जा सकता है। परंतु दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्याओं से गुणा (या भाग, करते समय असमिका के चिह्न तदनुसार परिवर्तित कर दिए जाते हैं।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 $30x < 200$, को हल ज्ञात कीजिए जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है।

(ii) x एक पूर्णांक है।

हल ज्ञात है कि $30x < 200$

अथवा $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (नियम 2)

अथवा $x < \frac{20}{3}$

(i) जब x एक प्राकृत संख्या है।

स्पष्टत: इस स्थिति में x के निम्नलिखित मान कथन को सत्य करते हैं।

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

असमिका का हल समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है

(ii) जब x एक पूर्णांक है

स्पष्टत: इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल हैं:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

असमिका का हल समुच्चय $\{\ldots,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है

उदाहरण 2 हल कीजिए: $5x-3<3x+1$, जब

(i) x एक पूर्णांक है। (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

हल दिया है, कि $5x-3<3x+1$

अथवा $5x-3+3<3x+1+3$ (नियम 1)

अथवा $5x<3x+4$

अथवा $5x-3x<3x+4-3x$ (नियम 1)

अथवा $2x<4$

अथवा $x<2$ (नियम 2)

(i) जब x एक पूर्णांक है। इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

अत: हल समुच्चय $\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

(ii) जब x एक वास्तविक संख्या है। इस स्थिति में असमिका का हल $x<2$ से व्यक्त है। इसका अर्थ है कि 2 से छोटी समस्त वास्तविक संख्याएँ असमिका के हल हैं। अत: असमिका का हल समुच्चय $(-\infty, 2)$. है।

हमने असमिकाओं के हल प्राकृत संख्याओं, पूर्णाकों तथा वास्तविक संख्याओं के समुच्चयों पर विचार करके ज्ञात किए हैं। आगे जब तक अन्यथा वर्णित न हो, हम इस अध्याय में असमिकाओं का हल वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में ही ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 3 हल कीजिए $4x+3<6x+7$.

हल ज्ञात है कि $4x+3<6x+7$

अथवा $4x-6x<6x+4-6x$

अथवा $-2x<4$ अथवा $x>-2$

अर्थात् –2 से बड़ी समस्त वास्तविक संख्याएँ, दिए गए असमिका के हल हैं। अत: हल समुच्चय $(-2, \infty)$ है।

उदाहरण 4 हल कीजिए $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6}-5$

हल हमें ज्ञात है कि $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6}-5$

या $2(5-2x) \le x-30$

या $10-4x \le x-30$

या $-5x \le -40$,

या $x \ge 8$

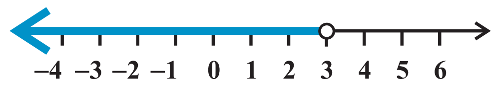
अर्थात् ऐसी समस्त वास्तविक संख्याएँ जो 8 से बड़ी या बराबर है। अत: इस असमिका के हल $x \in [8, \infty)$

उदाहरण 5 हल कीजिए $7x+3<5x+9$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल हमें ज्ञात है $7x+3<5x+9$

या $2x<6$ या $x<3$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति 6.1)।



आकृति 6.1

उदाहरण 6 हल कीजिए $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$

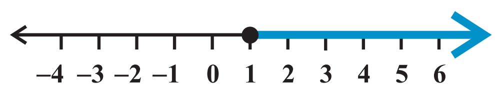
या $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x-3}{4}$

या $2(3x-4) \geq (x-3)$

या $6x - 8 \geq x - 3$

या $5x \geq 5$ or $x \geq 1$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति 6.2):



आकृति 6.2

उदाहरण 7 कक्षा XI के प्रथम सत्र व द्वितीय सत्र की परीक्षाओं में एक छात्र के प्राप्तांक 62 और 48 हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वार्षिक परीक्षा में पाकर वह छात्र 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

हल मान लीजिए कि छात्र वार्षिक परीक्षा में x अंक प्राप्त करता है।

तब $\frac{62+48+x}{3} \geq 60$

या $110 + x \geq 180$ या $x \geq 70$

इस प्रकार उस छात्र को वार्षिक परीक्षा में न्यूनतम 70 अंक प्राप्त करने चाहिए।

उदाहरण 8 क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें दोनों संख्याएँ 10 से बड़ी हों, और उनका योगफल 40 से कम हों।

हल मान लिया कि दो क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं में छोटी विषम संख्या x है। इस प्रकार दूसरी विषम संख्या $x + 2$ है। प्रश्नानुसार

$x > 10$ ... (1)

तथा $x + (x + 2) < 40$ ... (2)

(2) को हल करने पर हम पाते हैं कि

$2x + 2 < 40$

या $x < 19$ ... (3)

(1) और (3) से निष्कर्ष यह है कि

$$10 < x < 19$$

इस प्रकार विषम संख्या x के अभीष्ट मान 10 और 19 के बीच हैं। इसलिए सभी संभव अभीष्ट जोड़े (11, 13), (13, 15) (15, 17), (17, 19) होंगे।

प्रश्नावली 6.1

1. हल कीजिए : $24x < 100$, जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है। (ii) x एक पूर्णांक है।

2. हल कीजिए: $-12x > 30$, जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है। (ii) x एक पूर्णांक है।

3. हल कीजिए: $5x-3 < 7$, जब

(i) x एक पूर्णांक (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

4. हल कीजिए : $3x + 8 > 2$, जब

(i) x एक पूर्णांक (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

निम्नलिखित प्रश्न 5 से 16 तक वास्तविक संख्या x के लिए हल कीजिए:

5. $4x + 3 < 5x + 7$ **6.** $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$ **8.** $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$

9. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<11$ **10.** $\frac{x}{3}>\frac{x}{2}+1$

11. $\frac{3(x-2)}{5}\leq\frac{5(2-x)}{3}$ **12.** $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5}+4\right)\geq\frac{1}{3}(x-6)$

13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$ **14.** $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

15. $\frac{x}{4}<\frac{(5x-2)}{3}-\frac{(7x-3)}{5}$ **16.** $\frac{(2x-1)}{3}\geq\frac{(3x-2)}{4}-\frac{(2-x)}{5}$

प्रश्न 17 से 20 तक की असमिकाओं का हल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

17. $3x - 2 < 2x + 1$ **18.** $5x - 3 \geq 3x - 5$

19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$ **20.** $\frac{x}{2}\geq\frac{(5x-2)}{3}-\frac{(7x-3)}{5}$

21. रवि ने पहली दो एकक परीक्षा में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वह तीसरी एकक परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

22. किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पाँच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए। यदि सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हों तो वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसें पांचवीं परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाएगी।

23. 10 से कम क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए जिनके योगफल 11 से अधिक हों।

24. क्रमागत सम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें से प्रत्येक 5 से बड़े हों, तथा उनका योगफल 23 से कम हो।

25. एक त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा की तीन गुनी है तथा त्रिभुज की तीसरी भुजा सबसे बड़ी भुजा से 2 सेमी कम है। तीसरी भुजा की न्यूनतम लंबाई ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज का परिमाप न्यूनतम 61 सेमी है।

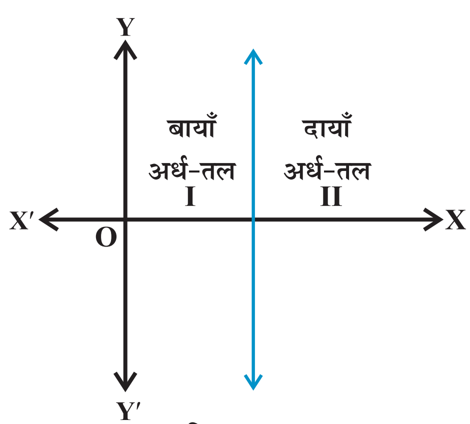
26. एक व्यक्ति 91 सेमी लंबे बोर्ड में से तीन लंबाईयाँ काटना चाहता है। दूसरी लंबाई सबसे छोटी लंबाई से 3 सेमी अधिक और तीसरी लंबाई सबसे छोटी लंबाई की दूनी है। सबसे छोटे बोर्ड की संभावित लंबाईयाँ क्या हैं, यदि तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से कम से कम 5 सेमी अधिक लंबा हो?

[**संकेत** यदि सबसे छोटे बोर्ड की लंबाई x सेमी हो, तब $(x+3)$ सेमी और $2x$ सेमी क्रमशः दूसरे और तीसरे टुकड़ों की लंबाईयाँ हैं। इस प्रकार $x + (x + 3) + 2x \leq 91$ और $2x \geq (x + 3) + 5$]

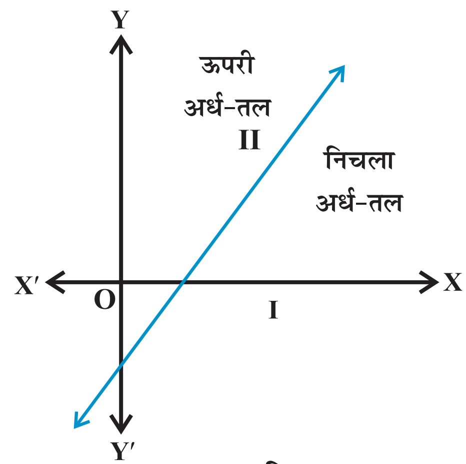
6.4 दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का आलेखीय हल (Graphical Solution of Linear Inequalities in Two Variables)

पहले अनुभाग में हमने देखा है कि एक चर राशि के रैखिक असमिका का आलेख एक चित्रीय निरूपण है और असमिका के हल का वर्णन करने की एक सरल विधि है। अब हम दो चर राशियों की रैखिक असमिका के आलेखन का वर्णन करेंगे।

हम जानते हैं कि एक रेखा कार्तीय तल को रेखा के अतिरिक्त दो भागों में बाँटती है। प्रत्येक भाग को **अर्ध-तल** कहते हैं। एक ऊर्ध्वाधर रेखा तल को बायाँ अर्ध-तल व दायाँ अर्ध-तल में विभाजित करती है और एक ऊर्ध्वेतर (non-vertical) रेखा एक तल को निचला अर्ध-तल व ऊपरी अर्ध-तल में विभाजित करती है। आकृति 6.3 व आकृति 6.4)।



आकृति 6.3



आकृति 6.4

कार्तीय तल में एक बिंदु या तो रेखा पर स्थित होगा या अर्ध-तल I या II में स्थित होगा। अब हम परीक्षण करेंगे कि क्या एक तल में स्थित बिंदु का असमिका $ax + by < c$ या $ax + by > c$ से कोई संबंध है?

आइए हम मान लें $\quad ax + by = c, \qquad \ldots (1)$

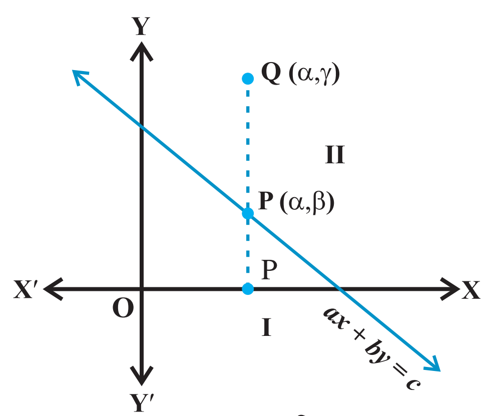
एक रेखा है जहाँ $a \neq 0$ तथा $b \neq 0$ है।

अब यहाँ तीन संभावनाएँ हैं:

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

स्पष्टतः स्थिति (i) में (i) को संतुष्ट करने वाले सभी बिंदु (x, y) (i) द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित हैं और विलोमतः।

स्थिति (ii) में पहले हम मान लेते हैं कि $b > 0$ और रेखा $ax + by = c$, $b > 0$, पर एक बिंदु $P(\alpha,\beta)$ लेते हैं ताकि $a\alpha + b\beta = c$.



आकृति 6.5

माना अर्ध-तल II में कोई बिंदु Q (α, γ) है (आकृति 6.5)।
अब आकृति 6.5 से हम निष्कर्ष निकालते है कि

$\gamma > \beta$ (क्यों?)

या $b\gamma > b\beta$

या $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$

या $a\alpha + b\gamma > c$ (क्यों?)

या, $Q(\alpha, \gamma)$, असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करती है।
अर्थात्, रेखा $ax + by = c$ के ऊपर अर्ध-तल II में स्थित सभी बिंदु असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करते हैं।
विलोमत: माना रेखा $ax + by = c$ पर एक बिंदु P (α, β) है और $Q(\alpha, \gamma)$ कोई बिंदु, असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करता है।

ताकि $a\alpha + b\gamma > c$

$\Rightarrow a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$

$\Rightarrow \gamma > \beta$ (क्योंकि $b > 0$)

अर्थात् $Q(\alpha, \gamma)$ अर्ध-तल II में स्थित है
अत: अर्ध-तल II का कोई भी बिंदु असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करता है और विलोमत: कोई बिंदु जो असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करता है, अर्ध-तल II में स्थित होता है।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $b < 0$ के लिए वे सभी बिंदु जो असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करते हैं, अर्ध-तल I में स्थित होते हैं और विलोमत:

अत: हम इस निष्कर्ष पर आते हैं कि वे सभी बिंदु जो असमिका $ax + by > c\,;\, b > 0$ या $b < 0$ के अनुसार, को संतुष्ट करते हैं वे अर्ध-तल II या I में से किसी एक तल में स्थित होते हैं और विलोमत:।

असमिका $ax + by > c$ का आलेखन इन अर्ध-तलों में से एक अर्ध-तल होगा [(जिसे **हल-क्षेत्र** (Solution region) कहते हैं] और इस अर्ध-तल को **छायांकित क्षेत्र** (Shaded region) द्वारा निरूपित करते हैं।

टिप्पणी **1** वह क्षेत्र जिसमें किसी असमिका के संपूर्ण हल स्थित हों, उसे असमिका का **हल-क्षेत्र** (Solution region) कहते हैं।

2. किसी असमिका द्वारा निरूपित क्षेत्र को पहचानने के लिए, किसी अर्ध-तल में केवल एक बिंदु (a, b) (जो रेखा पर स्थित न हो) लेकर जाँचना ही पर्याप्त है कि वह उस असमिका को संतुष्ट करता है अथवा नहीं। यदि यह बिंदु असमिका को संतुष्ट करता है तो असमिका उस अर्ध-तल को निरूपित करती है और उस अर्ध-तल को छायांकित कर देते हैं जिसमें यह बिंदु है। अन्यथा यह असमिका उस अर्ध-तल को निरूपित करेगी जिसमें यह बिंदु नहीं है। अपनी सुविधा की दृष्टि से बिंदु $(0, 0)$ को प्राथमिकता दी जाती है।

3. यदि एक असमिका $ax + by \geq c$ या $ax + by \leq c$ के स्वरूप की है तो रेखा $ax + by = c$ पर स्थित सभी बिंदु भी उसके हल-क्षेत्र में सम्मिलत होते हैं। इसलिए हल क्षेत्र पर गहरी काली रेखा खींचते हैं।

4. यदि असमिका $ax + by > c$ या $ax + by < c$ के स्वरूप की है तो रेखा $ax + by = c$ पर स्थित सभी बिंदु उसके हल-क्षेत्र में सम्मिलित नहीं होते हैं। इसलिए हल क्षेत्र पर रेखा को बिंदुवत् या खंडित खींचते हैं।

अनुभाग 6.2 में हमें दो चर राशियों x तथा y का निम्नलिखित रैखिक असमिका प्राप्त हुई थी।

$$40x + 20y \leq 120 \quad \ldots (1)$$

जब रेशमा द्वारा रजिस्टर और पेन के खरीदने संबंधी शाब्दिक प्रश्न को गणितीय रूप में परिवर्तित करने से प्राप्त हुई थी।

चूँकि वस्तुओं की संख्या एक ऋणात्मक और भिन्नात्मक संख्या नहीं हो सकती है, अत: हम इस असमिका का हल x तथा y को केवल पूर्ण संख्या के रूप में ध्यान रखते हुए करते है। इस अवस्था में हम x तथा y के मानों के ऐसे जोड़े ज्ञात करते हैं जिनके संगत कथन (1) सत्य है। वास्तव में ऐसे युग्मों का समुच्चय असमिका (1) का **हल समुच्चय** (Solution set) होगा। $x = 0$ लेकर प्रारंभ करने पर हम पाते हैं कि (1) का

बायाँ पक्ष $= 40x + 20y = 40\,(0) + 20y = 20y$.

इस प्रकार

$20y \le 120$ या $y \le 6$ ... (2)

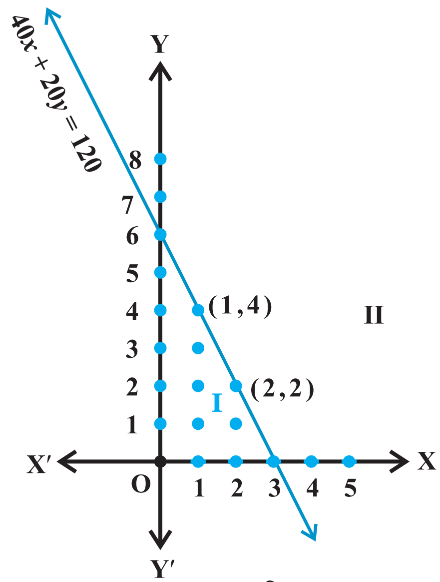
अत: $x = 0$ के संगत y के मान 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 मात्र हो सकते हैं। इस स्थिति में (1) के हल (0, 0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5) और (0,6) हैं।

इसी प्रकार जब $x = 1, 2, 3$ हैं तो (1) के अन्य हल निम्नलिखित हैं:

(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)

(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0)

यह आकृति 6.6 में दिखाया गया है।



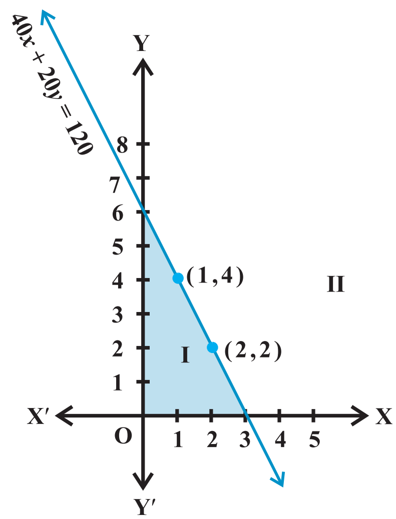
आकृति 6.6

अब हम x तथा y के **प्रांत** (domain) को पूर्ण संख्याओं से विस्तारित करके वास्तविक संख्याएँ करते हैं, और देखते हैं कि इस अवस्था में असमिका (1) के क्या हल होते हैं। आप देखेंगे कि हल करने की आलेखित-विधि (Graphical method) इस स्थिति में अधिक सुविधाजनक है। इस उद्देश्य से, हम (1) के संगत समीकरण

$40x + 20y = 120$ ... (3)

पर विचार करते हैं और इसका आलेख खींचते हैं।

यह एक सरल रेखा है जो कार्तीय तल को अर्ध-तल I व अर्ध-तल II में विभाजित करती है



आकृति 6.7

असमिका (1) का आलेख खींचने के लिए, हम अर्ध-तल-I में एक बिंदु (0, 0) मान लेते हैं और यह जाँचते हैं कि x और y के मान असमिका को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

आप यह देखेंगे कि $x = 0, y = 0$ असमिका को संतुष्ट करते हैं। इस प्रकार हम कहते हैं कि असमिका का आलेख, अर्ध-तल I है (आकृति 6.7 में दिखाया गया है)। चूँकि रेखा के सभी बिंदु असमिका (1) को संतुष्ट करते हैं। अत: रेखा भी आलेख का एक भाग है।

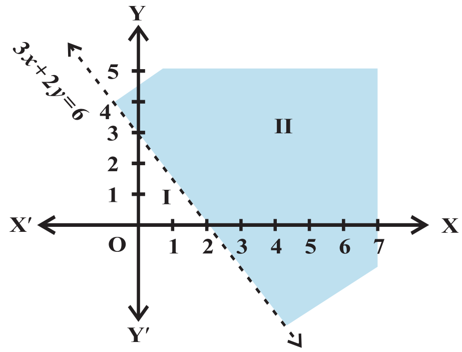
इस प्रकार दिए गए असमिका का आलेख, रेखा सहित अर्ध-तल I है। स्पष्टत: अर्ध-तल II आलेख का भाग नहीं है। इस प्रकार असमिका (1) का हल इसके आलेख (रेखा सहित, अर्ध-तल I) के समस्त बिंदु है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं के हल करने की विधि स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 9 $3x + 2y > 6$ को आलेखीय विधि (Graphically) से हल कीजिए।

हल सर्वप्रथम हम समीकरण $3x + 2y = 6$ का ग्राफ खंडित रेखा के रूप में खींचते हैं (आकृति 6.8)।

यह रेखा xy - तल को दो अर्ध-तल I तथा II में विभाजित करती है हम एक बिंदु (जो रेखा पर स्थित नहीं है) जैसे $(0, 0)$ का चयन करते हैं जो अर्ध-तल I में स्थित है (आकृति 6.8)। अब जाँच करते हैं कि यह बिंदु दी गई असमिका को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।



आकृति 6.8

हम पाते हैं कि $3 (0) + 2 (0) > 6$

या $0 > 6$, जो असत्य है।

अत: अर्ध-तल I, दिए हुए असमिका का हल-क्षेत्र नहीं है। स्पष्टत: रेखा पर स्थित कोई भी बिंदु, दी गई असमिका को संतुष्ट नहीं करता है। दूसरे शब्दों में, छायांकित अर्ध-तल II, रेखा के बिंदुओं को छोड़कर, दी गई असमिका का हल क्षेत्र है।

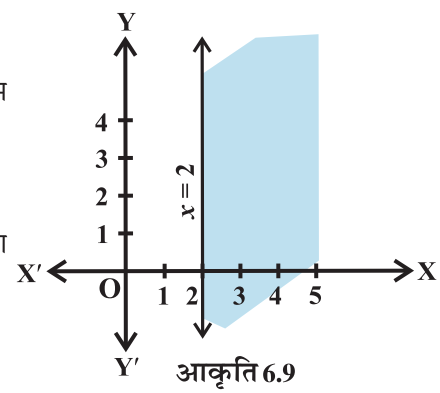
उदाहरण 10 द्विविमीय तल में असमिका $3x - 6 \geq 0$ का आलेखन-विधि से हल कीजिए।

हल $3x - 6 = 0$ का आलेख आकृति 6.9 में दिया गया है।

हम एक बिंदु $(0, 0)$ का चयन करते हैं और इसे दी गई असमिका में रखने पर हम पाते हैं कि

$3 (0) - 6 \geq 0$ या $-6 \geq 0$ जो कि असत्य है।

इस प्रकार दी गई असमिका का हल-क्षेत्र रेखा $x = 2$ के दाहिनी ओर छायांकित भाग है।



आकृति 6.9

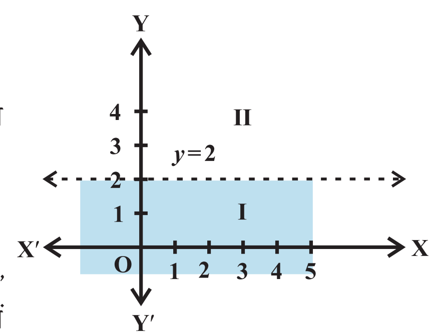
उदाहरण 11 $y < 2$ को आलेखन-विधि से हल कीजिए।

हल $y = 2$ का आलेख 6.10 में दिया गया है।

हम निचले अर्ध-तल I में एक बिंदु जैसे $(0, 0)$ का चयन करते हैं और दी गई असमिका में $y = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि

$1 \times 0 < 2$ या $0 < 2$ जोकि सत्य है।

इस प्रकार रेखा $y = 2$ के नीचे का क्षेत्र जिसमें मूल बिंदु $(0, 0)$ स्थित है, दी गई असमिका का हल-क्षेत्र है। अत: रेखा $y = 2$ के नीचे के समस्त बिंदु (जिसमें रेखा के बिंदु सम्मिलित नहीं हैं) दी गई असमिका के हल हैं।



आकृति 6.10

प्रश्नावली 6.2

निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन-विधि से द्विविमीय तल में निरूपित कीजिए।

1. $x + y < 5$ **2.** $2x + y \geq 6$ **3.** $3x + 4y \leq 12$

4. $y + 8 \geq 2x$ **5.** $x - y \leq 2$ **6.** $2x - 3y > 6$

7. $-3x + 2y \geq -6$ **8.** $3y - 5x < 30$ **9.** $y < -2$ **10.** $x > -3$.

6.5 दो चर राशियों की असमिका निकाय का हल (Solution of System of Linear Inequalities in Two Variables)

पिछले अनुभाग में हम दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का आलेखन-विधि से हल करना सीख गए हैं। अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से दो चर राशियों की असमिका निकाय को हल करने की विधि स्पष्ट करेंगे।

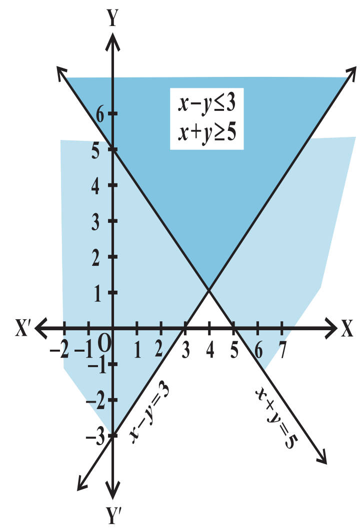
उदाहरण 12 निम्नलिखित असमिका निकाय

$$x + y \geq 5 \qquad \dots (1)$$

$$x - y \leq 3 \qquad \dots (2)$$

को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

हल रैखिक असमिका x + y = 5 का आलेख आकृति 6.11 में खींचा गया है।



आकृति 6.11

हम देखते हैं कि असमिका (1) का हल, रेखा x + y = 5 के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है जिसमें रेखा पर स्थित सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं।

उन्हीं निर्देशांक्षों पर हम समीकरण का भी आलेख खींचते है जैसा कि (आकृति 6.11) में दिखाया गया है। तब असमिका (2) का हल रेखा $x - y = 3$ के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है, जिसमें रेखा पर सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं।

स्पष्टत: द्विछायांकित क्षेत्र (double shaded region) जो उपर्युक्त दोनों छायांकित क्षेत्रों में उभयनिष्ठ हैं, वही दिए हुए असमिका निकाय (1) व (2) का वांछित हल क्षेत्र है।

उदाहरण 13 निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को आलेखन विधि द्वारा हल कीजिए।

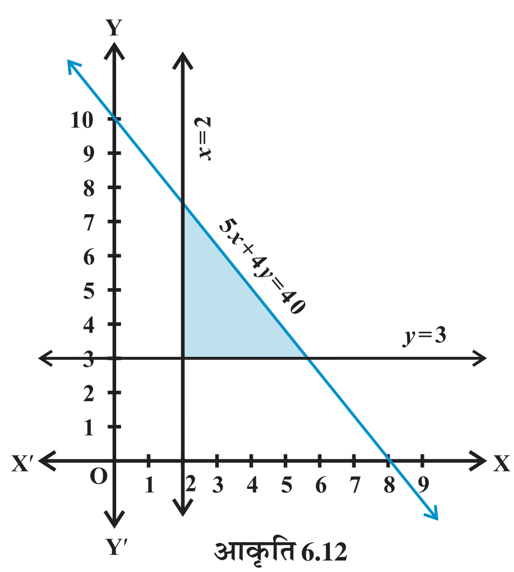
$$5x + 4y \leq 40 \qquad \dots (1)$$

$$x \geq 2 \qquad \dots (2)$$

$$y \geq 3 \qquad \dots (3)$$

हल सर्वप्रथम हम समीकरणों $5x + 4y = 40$, $x = 2$ और = 3 द्वारा निरूपित रेखाओं के आलेख खींचते हैं।

तब हम देखते हैं कि असमिका (1), रेखा $5x + 4y = 40$ के नीचे छायांकित क्षेत्र को निरूपित करता है जिसमें रेखा के सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं असमिका (2), रेखा x = 2 के दाहिनी ओर का छायांकित क्षेत्र और असमिका (3), रेखा y = 3 के ऊपरी छायांकित क्षेत्र जिनमें इन रेखाओं के सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं, को निरूपित करता है। अत: सर्वनिष्ठ छायांकित क्षेत्र और रेखाओं पर सभी बिंदु (आकृति 6.12) दिए हुए रैखिक असमिका निकाय के हल हैं।



आकृति 6.12

बहुत सी व्यावहारिक स्थितियों में जो असमिका निकाय से युक्त हैं, चर राशियाँ x और y प्राय: ऐसी राशियाँ होती हैं, जो

ऋणात्मक नहीं हो सकती हैं। उदाहरणतः उत्पादित इकाइयों की संख्या, क्रय की गई वस्तुओं की संख्या, काम करने में लगे घंटों की संख्या आदि। स्पष्टतः ऐसी परिस्थिति में $x \geq 0$ और $y \geq 0$ हल क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में ही होता है।

आइए अब हम कुछ ऐसे असमिका निकाय पर विचार करते हैं, जिनमें $x \geq 0, y \geq 0$ हैं।

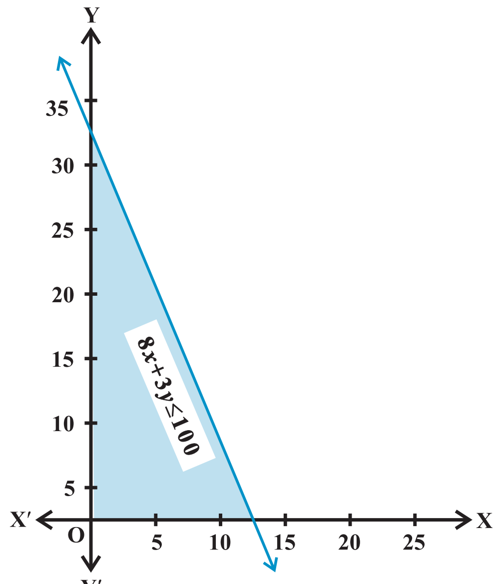
उदाहरण 14 निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

$$8x + 3y \leq 100 \quad \ldots (1)$$
$$x \geq 0 \quad \ldots (2)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

हल हम रेखा $8x + 3y = 100$ का आलेख खींचते हैं।

असमिका $8x + 3y \leq 100$ इस रेखा के नीचे के छायांकित क्षेत्र को निरूपित करता है, जिसमें रेखा $8x + 3y = 100$ के सभी बिंदु सम्मिलित हैं (आकृति 6.13)।

चूंकि $8x + 3y \leq 100$, अतः त्रिविध छायांकित (Triple shaded) क्षेत्र का प्रत्येक बिंदु जो प्रथम चतुर्थांश में है, तथा जिसमें रेखाओं के बिंदु भी सम्मिलित हैं, दिए हुए असमिका निकाय का हल निरूपित करता है।



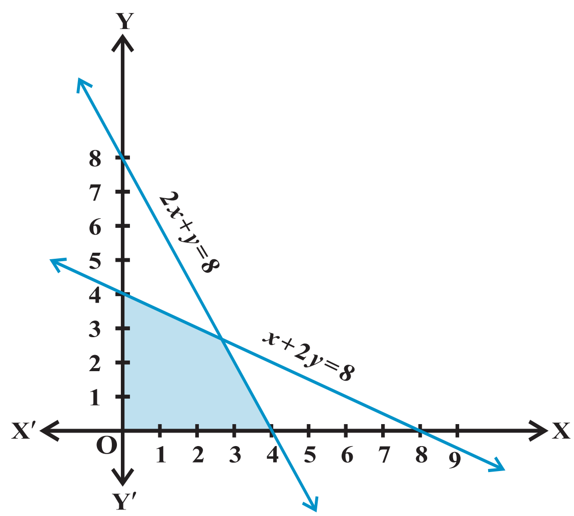
आकृति 6.13

उदाहरण 15 निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

$$x + 2y \leq 8 \quad \ldots (1)$$
$$2x + y \leq 8 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0 \quad \ldots (3)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

हल हम रेखाओं $x + 2y = 8$ और $2x + y = 8$ का आलेख खींचते हैं। असमिका (1) और (2) दोनों संगत रेखाओं के बिंदुओं सहित अपने से नीचे स्थित क्षेत्रों को निरूपित करते हैं।

चूंकि $x \geq 0, y \geq 0$ अतः प्रथम चतुर्थांश में स्थित सर्वनिष्ठ छायांकित क्षेत्र के प्रत्येक बिंदु दिए हुए असमिका निकाय के हल को निरूपित करता है आकृति (6.14)।



आकृति 6.14

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1 से 15 तक निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए: graphically:

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x + 2y \leq 12, \; x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$

4. $x + y \geq 4,\ 2x - y < 0$

5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$

6. $x + y \leq 6,\ x + y \geq 4$

7. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

8. $x + y \leq 9,\ y > x,\ x \geq 0$

9. $5x + 4y \leq 20,\ \ x \geq 1, y \geq 2$

10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0,\ y \geq 0$

11. $2x + y \geq 4,\ x + y \leq 3,\ 2x - 3y \leq 6$

12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0 , y \geq 1.$

13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x,\ x \geq 3,\ \ x, y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80,\ x \leq 15,\ y \geq 0, x \geq 0$

15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 16 हल कीजिए $-8 \leq 5x - 3 < 7$.

हल इस स्थिति में हमारे पास दो असमिकाएँ $-8 \leq 5x - 3$ और $5x - 3 < 7$ हैं। इन्हें हम साथ-साथ हल करना चाहते हैं। हम दिए गए असमिका के मध्य में चर राशि x का गुणांक एक बनाना चाहते हैं।

हमें ज्ञात है कि $\quad -8 \leq 5x - 3 < 7$

या $\quad -5 \leq 5x < 10 \quad$ या $-1 \leq x < 2$

उदाहरण 17 हल कीजिए $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$.

हल ज्ञात है कि $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$

या $\quad -10 \leq 5 - 3x \leq 16 \quad$ या $-15 \leq -3x \leq 11$

या $\quad 5 \geq x \geq -\dfrac{11}{3}$

जिसे हम $\dfrac{-11}{3} \leq x \leq 5$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

उदाहरण 18 निम्नलिखित असमिका-निकाय को हल कीजिए:

$$3x - 7 < 5 + x \quad \ldots (1)$$

$$11 - 5x \leq 1 \quad \ldots (2)$$

और उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल असमिका (1) से हम प्राप्त करते हैं

$$3x - 7 < 5 + x$$

या $x < 6$ ... (3)

असमिका (2) से भी हम प्राप्त करते हैं

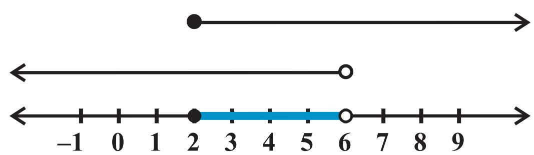
$$11 - 5x \leq 1$$

या $-5x \leq -10$

या $x \geq 2$ ... (4)

यदि संख्या रेखा पर (3) तथा (4) को आलेखित करें तो हम पाते हैं कि x के उभयनिष्ठ मान 2 के बराबर या 2 से बड़े व 6 से छोटे हैं जो आकृति 6.16 में गहरी काली रेखा द्वारा प्रदर्शित किए गए हैं।

अतः असमिका निकाय का हल वास्तविक संख्या x, 2 के बराबर या 2 से बड़ा और 6 से छोटी है। इस प्रकार $2 \leq x < 6$.



आकृति 6.16

उदाहरण 19 किसी प्रयोग में नमक के अम्ल के एक विलयन का तापमान 30° सेल्सियस और 35° सेल्सियस के बीच ही रखना है। फारेनहाइट पैमाने पर तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, यदि सेंटीग्रेड से फारेनहाइट पैमाने पर परिवर्तन सूत्र

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

है, जहाँ C और F क्रमशः तापमान को अंश सेल्सियस तथा अंश फारेनहाइट में निरूपित करते हैं।

हल ज्ञात है कि $30 < C < 35$

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$, रखने पर हम पाते हैं,

$$30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35,$$

या $\frac{9}{5} \times 30 < (F - 32) < \frac{9}{5} \times 35$

या $54 < (F - 32) < 63$

या $86 < F < 95.$

इस प्रकार तापमान का अभीष्ट परिसर 86° F से 95° F है।

उदाहरण 20 एक निर्माता के पास अम्ल के 12% विलयन के 600 लिटर हैं। ज्ञात कीजिए कि 30% अम्ल वाले विलयन के कितने लिटर उसमें मिलाए जाएँ ताकि परिणामी मिश्रण में अम्ल की मात्रा 15% से अधिक परंतु 18% से कम हो।

हल मान लीजिए कि 30% अम्ल के विलयन की मात्रा x लिटर है।

तब संपूर्ण मिश्रण $= (x + 600)$ लिटर

इसलिए $30\%\ x + 12\%$ का $600 > 15\%$ का $(x + 600)$

और $30\%\ x + 12\%$ का $600 < 18\%$ का $(x + 600)$

या $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x+600)$

और $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x+600)$

या $30x + 7200 > 15x + 9000$

और $30x + 7200 < 18x + 10800$

या $15x > 1800$ और $12x < 3600$

या $x > 120$ और $x < 300$,

अर्थात $120 < x < 300$

इस प्रकार 30% अम्ल के विलयन की अभीष्ट मात्रा 120 लिटर से अधिक तथा 300 लिटर से कम होनी चाहिए।

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1 से 6 तक की असमिकाओं को हल कीजिए:

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$

2. $6 \le -3(2x-4) < 12$

3. $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$

4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$

5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$

6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$.

प्रश्न 7 से 10 तक की असमिकाओं को हल कीजिए और उनके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

7. $5x + 1 > -24, \quad 5x - 1 < 24$

8. $2(x-1) < x + 5, \quad 3(x+2) > 2 - x$

9. $3x - 7 > 2(x-6), \quad 6 - x > 11 - 2x$

10. $5(2x-7) - 3(2x+3) \le 0, \quad 2x + 19 \le 6x + 47$.

11. एक विलयन को 68° F और 77° F के मध्य रखना है। सेल्सियस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ सेल्सियस फारेनहाइट परिवर्तन सूत्र $F = \frac{9}{5}C + 32$ है।

12. 8% बोरिक एसिड के विलयन में 2% बोरिक एसिड का विलयन मिलाकर तनु (dilute) किया जाता है। परिणामी मिश्रण में बोरिक एसिड 4% से अधिक तथा 6% से कम होना चाहिए। यदि हमारे पास 8% विलयन की मात्रा 640 लिटर हो तो ज्ञात कीजिए कि 2% विलयन के कितने लिटर इसमें मिलाने होंगे?

13. 45% अम्ल के 1125 लिटर विलयन में कितना पानी मिलाया जाए कि परिणामी मिश्रण में अम्ल 25% से अधिक परंतु 30% से कम हो जाए?

14. एक व्यक्ति के बौद्धिक-लब्धि (IQ) मापन का सूत्र निम्नलिखित है:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100,$$

जहाँ MA मानसिक आयु और CA कालानुक्रमी आयु है। यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की IQ, असमिका $80 \le IQ \le 140$ द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिसर ज्ञात कीजिए।

सारांश

- एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजकों में $<, >, \leq$ या $\geq$ के चिह्न के प्रयोग से बनती है।
- एक असमिका के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटायी जा सकती है।
- किसी असमिका के दोनों पक्षों को समान धनात्मक, संख्या से गुणा (या भाग) किया जा सकता है। परंतु दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्याओं से गुणा (या भाग) करने पर असमिका के चिह्न तदनुसार बदल जाते हैं।
- x के उन मानों (Values) को जो दिऐ गए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हों, उन्हें असमिका का हल कहते हैं।
- $x < a$ (या $x > a$) का संख्या रेखा पर आलेख खींचने के लिए संख्या रेखा पर संख्या a पर एक छोटा सा वृत्त बनाकर, a से बाईं (या दाईं) ओर की संख्या रेखा को गहरा काला कर देते हैं।
- $x \leq a$ (या $x \geq a$) का संख्या रेखा पर आलेख खींचने के लिए संख्या रेखा पर संख्या a पर एक छोटा काला वृत्त बनाकर a से बाईं (या दाईं) ओर की संख्या रेखा को गहरा काला कर देते हैं।
- यदि दो चरांकों की एक असमिका के चिह्न $\leq$ या $\geq$ हों तो रेखा पर स्थित बिंदु, असमिका के हल में सम्मिलित होते हैं और असमिका का आलेख, समता द्वारा निरूपित गहरी मोटी रेखा के बाईं (नीचे) या दाईं (ऊपर) होता है जो उस क्षेत्र का कोई भी बिंदु असमिका को संतुष्ट करता है।
- यदि दो चरांकों की एक असमिका के चिह्न $<$ या $>$ हों तो रेखा पर स्थित बिंदु, असमिका के हल में सम्मिलित नहीं होते हैं और असमिका का आलेख, समता द्वारा निरूपित दानेदार रेखा के बाईं (नीचे) या दाईं (ऊपर) होता है जो उस क्षेत्र का कोई भी बिंदु, असमिका को संतुष्ट करता है।
- असमिकाओं के निकाय का हल क्षेत्र, वह उभयनिष्ठ क्षेत्र है जो निकाय में सभी दी गई असमिकाओं को संतुष्ट करता है।

अध्याय 7

क्रमचय और संचय (Permutations and Combinations)

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have* – DARWIN❖

7.1 भूमिका (Introduction)

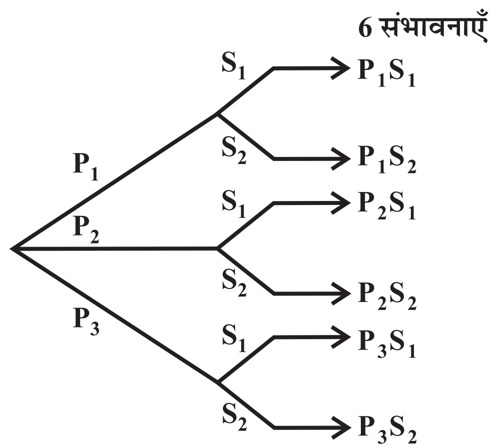
Jacob Bernoulli
(1654-1705 A.D.)

मान लीजिए कि आपके पास नंबर वाले ताले का एक सूटकेस है। माना उस ताले में 4 चक्र लगे हैं और प्रत्येक चक्र 0 से 9 तक के 10 अंकों द्वारा चिह्नित है। ताले को खोला जा सकता है यदि 4 विशिष्ट अंको को, बिना दोहराए, एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाए। माना किसी कारण आप अंकों के इस निश्चित क्रम को भूल गए हैं। आपकों केवल पहला अंक याद है जो कि 7 है। ताले को खोलने के लिए, आपको 3 अंकों के कितने अनुक्रमों की जाँच करनी पड़ेगी? इस प्रश्न के उत्तर के लिए, आप संभवत: शेष 9 अंकों में से एक समय में 3 अंकों को लेकर, सभी संभव क्रमों को अविलंब सूचीबद्ध करना प्रारंभ कर दें। परंतु यह विधि थकाने वाली और नीरस होगी, क्योंकि संभव क्रमों की संख्या बड़ी हो सकती है। इस अध्याय में, हम कुछ ऐसी मौलिक गणन तकनीक सीखेंगे जिनसे हम, 3 अंकों के क्रमों को सूचीबद्ध किए बिना ही, इस प्रश्न का उत्तर दे सकेंगे। वस्तुत: ये तकनीक, वस्तुओं के चयन तथा उनको क्रमबद्ध करने के भिन्न-भिन्न तरीकों की संख्या निर्धारित करने में उपयोगी होती हैं। प्रथम चरण में, हम उस सिद्धांत पर विचार करेंगे, जो कि इन तकनीकों को सीखनें के लिए अत्यधिक मौलिक है।

7.2 गणना का आधारभूत सिद्धांत (Fundamental Principle of Counting)

आइए हम निम्नलिखित समस्या पर विचार करें: मोहन के पास P_1, P_2, P_3 तीन पैंट तथा S_1, S_2 दो कमीज़ें है।

उसके पास पहनने के लिए पैंट तथा कमीज़ के कितने भिन्न-भिन्न जोड़े (युग्म) हैं? एक पैंट चुनने के लिए 3 तरीके हैं, क्योंकि चयन के लिए 3 पैंट उपलब्ध हैं। इसी प्रकार एक कमीज़ का चयन 2 तरह से किया जा सकता है। पैंट के प्रत्येक चयन के लिए कमीज़ के चयन के 2 विकल्प संभव हैं। अत: पैंट तथा कमीज़ के जोड़ों के चयन की संख्या $3 \times 2 = 6$ है। इस तथ्य को आकृति 7.1 में स्पष्ट किया गया है।

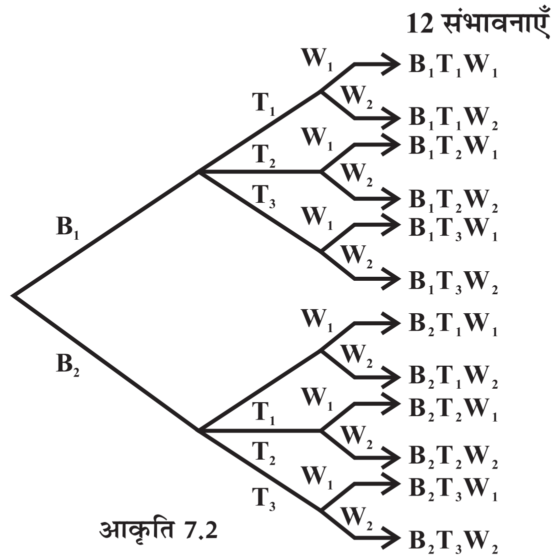


आकृति 7.1

आइए हम इसी प्रकार की एक दूसरी समस्या पर विचार करें: शबनम के पास 2 बस्ते, 3 खाने के डिब्बे तथा 2 पानी की बोतलें हैं। वह इन वस्तुओं को किस प्रकार से ले जा सकती है (प्रत्येक में से एक चुन कर)।

एक बस्ते को 2 भिन्न तरीकों से चुना जा सकता है। एक बस्ते के चुने जाने के बाद, एक खाने के डिब्बे को चुनने के 3 भिन्न तरीके हैं। इस प्रकार बस्ते और खाने के डिब्बे के जोड़ों की संख्या $2 \times 3 = 6$ है। इनमें से प्रत्येक जोड़े के लिए, एक

पानी की बोतल को चुनने के 2 भिन्न तरीके हैं। अतः शबनम द्वारा इन वस्तुओं को स्कूल ले जाने के कुल $6 \times 2 = 12$ भिन्न तरीके हैं। यदि हम दो बस्तों को B_1, B_2, तीन खाने के डिब्बों को T_1, T_2, T_3 तथा दो पानी की बोतलों को W_1, W_2, नाम दें, तो इन संभावनाओं को नीचे बनी आकृति द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है (आकृति 7.2.)।



आकृति 7.2

वस्तुतः उपर्युक्त प्रकार की समस्याओं को निम्नलिखित सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सरल किया जाता है, जिसे **गणना का आधारभूत सिद्धांत** अथवा केवल **गणन सिद्धांत** कहते हैं और जिसका कथन इस प्रकार है,

"यदि एक घटना m भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तदोपरांत एक अन्य घटना n भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो दिए हुए क्रम में दोनों घटनाओं के भिन्न तरीकों के घटित होने की कुल भिन्न संख्या $m \times n$ है।"

ऊपर वर्णित सिद्धांत का घटनाओं की सीमित संख्या के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 3 घटनाओं के लिए, यह सिद्धांत निम्नलिखित प्रकार से होग'यदि एक घटना m भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, इसके उपरांत एक दूसरी घटना n भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, *तदोपरांत* एक तीसरी घटना p भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो तीनों घटनाओं के घटित होने के भिन्न तरीकों की कुल संख्या,दिएहुएक्रमें, $m \times n \times p$ है।"

प्रथम प्रश्न में, पैंट तथा कमीज़ के जोड़ों को पहनने की अभीष्ट संख्या, निम्नलिखित घटनाओं के उत्तरोत्तर घटित होने के विभिन्न विन्यासों की संख्या के तुल्य है:

(i) एक पैंट के चयन की घटना

(ii) एक कमीज़ के चयन की घटना

दूसरे प्रश्न में विन्यासों की अभीष्ट संख्या, निम्नलिखित घटनाओं के उत्तरोत्तर घटित होने के विभिन्न विन्यासों की संख्या के बराबर है:

(i) एक बस्ते के चयन की घटना,

(ii) एक खाने के डिब्बे के चयन की घटना,

(iii) एक पानी की बोतल के चयन की घटना।

यहाँ दोनों में से प्रत्येक प्रश्न में घटनाएँ अनेक संभव क्रमों में घटित हो सकती हैं परंतु हम इन संभव क्रमों में से किसी एक का चयन करते हैं और इस चयनित क्रम में घटनाओं के घटित होने के विभिन्न विन्यासों की गणना करते हैं।

उदाहरण 1 शब्द ROSE, के अक्षरों से बनने वाले 4 अक्षरों वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, जबकि अक्षरों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल रचित शब्दों की संख्या, 4 रिक्त स्थानों $\square\,\square\,\square\,\square$ को 4 अक्षरों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है, जबकि इस बात का ध्यान रखा जाए कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। पहले स्थान को, 4 अक्षर R, O, S, और E में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, दूसरे स्थान को शेष तीन अक्षरों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता हैं इसके उपरांत तीसरे स्थान को 2 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है और अंत में चौथे स्थान को केवल 1 तरीके से भरा जा सकता है इस प्रकार गुणन सिद्धांत द्वारा चारों स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ है। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या 24 है।

टिप्पणी यदि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति होती, तो कितने शब्द बन सकते हैं? यह बात सरलता से समझी जा सकती है कि 4 रिक्त स्थानों में से प्रत्येक उत्तरोत्तर 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

उदाहरण 2 भिन्न-भिन्न रंगों के दिए हुए 4 झंडों से, कितने भिन्न-भिन्न संकेत उत्पन्न किए जा सकते हैं, यदि एक संकेत के लिए, एक दूसरे के नीचे, 2 झंडों की आवश्यकता पड़ती है?

हल उत्पादित संकेतों की संख्या 2 रिक्त स्थानों $\begin{array}{|c|}\hline \quad\quad \\ \hline \quad\quad \\ \hline\end{array}$ को भिन्न-भिन्न रंगों के 4 झंडों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है। ऊपर के रिक्त स्थान को 4 झंडों में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, नीचे के रिक्त स्थान को शेष 3 झंडों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। अतः गुणन सिद्धांत द्वारा संकेतों की अभीष्ट संख्या $= 4 \times 3 = 12$.

उदाहरण 3 अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से कितनी 2 अंकीय सम संख्याएँ बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है?

हल संख्याओं को बनाने के तरीके, 2 रिक्त स्थानों $\square\square$ को उत्तरोत्तर उचित प्रकार से भरने के तरीको की संख्या के बराबर है। यहाँ इकाई स्थान को भरने के लिए केवल 2 विकल्प हैं: अंक 2 या 4, और यह 2 तरीकों से किया जा सकता है। इसके पश्चात् दहाई स्थान को 5 अंकों में से किसी एक द्वारा भरा जा सकता है (क्योंकि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है)। अतः इसके 5 विकल्प हैं। अतएव गुणन सिद्धांत द्वारा दो अंकों वाली सम संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 2 \times 5$, अर्थात् 10 है।

उदाहरण 4 यदि पाँच विभिन्न झंडे उपलब्ध हैं, तो उन विभिन्न संकेतों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्हें कम से कम दो झंडों को एक ऊर्ध्व दंड पर क्रमवत एक को दूसरे के नीचे रखकर उत्पन्न किया जा सकता है?

हल एक संकेत या तो 2 या 3 या 4 या 5 झंडों से बनाया जा सकता है। अब हम 2, 3, 4 या 5 झंडों से बनने वाले संकेतों की संभव संख्याओं की अलग-अलग गणना करेंगे और फिर इन संख्याओं को जोड़ देंगे।

2 झंडों द्वारा बनने वाले संकेतों की संख्या, 5 उपलब्ध झंडों से 2 रिक्त स्थानों $\begin{array}{|c|}\hline \quad\quad \\ \hline \quad\quad \\ \hline\end{array}$ को उत्तरोत्तर भरने की संख्या के बराबर है। गुणन नियम के अनुसार इसकी संख्या $= 5 \times 4 = 20$ है।

इसी प्रकार 3 झंडों द्वारा बनने वाले संकेतों की संख्या, 5 झंडों से 3 रिक्त स्थानों को उत्तरोत्तर भरने की संख्या के बराबर है इसकी संख्या $5 \times 4 \times 3 = 60$ है।

इसी प्रकार 4 झंडों वाले संकेतों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

और 5 झंडों वाले संकेतों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

अतः संकेतो की अभीष्ट संख्या $= 20 + 60 + 120 + 120 = 320$.

प्रश्नावली 7.1

1. अंक 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि

(i) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो ?

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो ?

2. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है ?

3. अंग्रेज़ी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

4. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारंभ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

5. एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है और परिणाम अंकित कर लिए जाते हैं। परिणामों की संभव संख्या क्या है?

6. भिन्न-भिन्न रंगों के 5 झंडे दिए हुए हैं। इनसे कितने विभिन्न संकेत बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक संकेत में 2 झंडों, एक के नीचे दूसरे, के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है?

7.3 क्रमचय (Permutations)

पिछले अनुच्छेद के उदाहरण 1 में, हम वास्तव में अक्षरों के विभिन्न विन्यासों, जैसे ROSE, REOS, ..., इत्यादि, की संभव संख्या की गणना करते हैं। इस सूची में प्रत्येक विन्यास दूसरे से भिन्न हैं। दूसरे शब्दों में अक्षरों के लिखने का क्रम महत्वपूर्ण है इनमें से प्रत्येक विन्यास, 4 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में सभी को साथ लेकर बनाया गया, **क्रमचय** कहलाता है अब यदि हमें शब्द NUMBER, के अक्षरों में से 3 अक्षरीय, अर्थपूर्ण या अर्थहीन रचित शब्दों की संख्या निर्धारित करनी है, जबकि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो, तो हमें NUM, NMU,MUN,NUB, ...इत्यादि विन्यासों की गणना की आवश्यकता है। यहाँ पर हम 6 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में 3 अक्षरों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की गणना कर रहे हैं। इस प्रकार के शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (गुणन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा) हैं।

यदि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति होती, तो शब्दों की अभीष्ट संख्या $6 \times 6 \times 6 = 216$ होगी।

परिभाषा 1 क्रमचय एक निश्चित क्रम में बना विन्यास है, जिसको दी हुई वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है।

नीचे दिए उप-अनुच्छेद में हम उस सूत्र को निर्धारित करेंगे जिसकी आवश्यकता इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए पड़ती है।

7.3.1 क्रमचय, जब सभी वस्तुएँ भिन्न-भिन्न हैं (Permutations when all the objects are distinct)

प्रमेय 1 n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या को प्रतीक ^nP_r से निरूपित

करते हैं, जहाँ $0 < r \leq n$ तथा किसी भी क्रमचय में वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$

उपपत्ति क्रमचयों की संख्या, r रिक्त स्थानों को $\square\ \square\ \square \dots \square$ उत्तरोत्तर

$\leftarrow r$ रिक्त स्थान $\rightarrow$

n वस्तुओं से भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है। पहला स्थान n तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद दूसरा स्थान $(n-1)$ तरीकों से भरा जा सकता है। इसके उपरांत तीसरा स्थान $[n-2)$ तरीकों से भरा जा सकता है .... और r वाँ स्थान $(n-(r-1)]$ तरीकों से भरा जा सकता है। अतः r रिक्त स्थानों को उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या $= n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))$ या $n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$

${}^nP_r$ के लिए यह एक बोझिल व्यंजक है और हमें एक ऐसे संकेतन की आवश्यकता है, जिसकी सहायता से इस व्यंजक के विस्तार को घटाया जा सके। प्रतीक $n!$ (जिसे n क्रमगुणित पढ़ते हैं)इसमें हमारी सहायता करता है। निम्नलिखित विवरण में हम सीखेंगे कि वास्तव में $n!$ का क्या अर्थ है?

7.3.2 *क्रमगुणित संकेतन (Factorial notation)* संकेतन $n!$ प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को व्यक्त करता है अर्थात् $1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$ को $n!$ द्वारा निरूपित किया जाता है। हम इस प्रतीक को 'n क्रमगुणित पढ़ते हैं। इस प्रकार $1 \times 2 \times 3 \times 4 ... \times (n-1) \times n = n!$ तदनुसार

$$1 = 1!$$
$$1 \times 2 = 2!$$
$$1 \times 2 \times 3 = 3!$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! \text{ इत्यादि}$$

हम परिभाषित करते हैं, कि $0! = 1$

इस प्रकार हम लिख सकते हैं, कि $5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$
$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$

स्पष्टतया सभी प्राकृत संख्या n के लिए

$$n! = n(n-1)!$$
$$= n(n-1)(n-2)! \quad [\text{यदि } n \geq 2]$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)! \quad [\text{यदि } n \geq 3]$$

इत्यादि

उदाहरण 5 मान निकालिए (i) $5!$ (ii) $7!$ (iii) $7! - 5!$

हल (i) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

और (iii) $7! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

उदहारण 6 परिकलन कीजिए (i) $\frac{7!}{5!}$ (ii) $\frac{12!}{(10!)(2!)}$

हल (i) हम प्राप्त करते हैं, $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

और (ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)} = \frac{12\times 11\times (10!)}{(10!)\times (2)} = 6 \times 11 = 66$

उदाहरण 7 मान निकालिए $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, जहाँ $n = 5, r = 2$

हल हमें निम्नलिखित का मान निकालना है

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} \quad (\text{क्योंकि } n = 5, r = 2)$$

यहाँ पर $\frac{5!}{2\,!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{4\times 5}{2} = 10$

उदाहरण 8 यदि $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$, तो x ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9\times 8!} = \frac{x}{10\times 9\times 8!}$

अतएव $1 + \frac{1}{9} = \frac{x}{10\times 9}$ या $\frac{10}{9} = \frac{x}{10\times 9}$

अत: $x = 100$

प्रश्नावली 7.2

1. मान निकालिए:

(i) $8\,!$ (ii) $4\,! - 3\,!$

2. क्या $3\,! + 4\,! = 7\,!$?

3. $\frac{8!}{6!\times 2!}$ का परिकलन कीजिए

4 यदि $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{n!}{(n-r)!}$, का मान निकालिए जब

(i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 9, r = 5$.

7.3.3 ^nP_r के लिए सूत्र की व्युत्पत्ति (*Derivation of the formula for* ^nP_r)

$$^n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n$$

आइए हम उस अवस्था पर वापस चलें जहाँ हमने निम्नलिखित ज्ञात किया था:

$$^n\mathrm{P}_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,\,(n-r+1)$$

इसके अंश और हर को $(n-r)\,(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1$, से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है कि

$$^{n}\mathrm{P}_r = \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

इस प्रकार $^{n}\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, जहाँ $0 < r \le n$

यह $^{n}\mathrm{P}_r$ पहले से अधिक सुविधाजनक व्यंजक है।

विशेष रूप से जब $r = n$, तो $^{n}\mathrm{P}_n = \frac{n!}{0!} = n!$

क्रमचयों की गणना, केवल उन तरीकों की गणना है, जिनमें एक समय में कुछ या सभी वस्तुओं का विन्यास किया गया हो। एक भी वस्तु के बिना विन्यास की संख्या बराबर है उस संख्या के जिसमें सभी वस्तुओं को छोड़कर विन्यास किया गया हो और हमें ज्ञात है कि ऐसा करने का केवल एक तरीका है। इसी कारण से हमने $^{n}\mathrm{P}_0 = 1$ परिभाषित किया है।

$$^{n}\mathrm{P}_0 = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)!} \qquad \ldots (1)$$

अत: सूत्र (1), $r = 0$ के लिए भी लागू है।

अत: $$^{n}\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n.$$

प्रमेय 2 n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या, जबकि वस्तुओं के पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है।

इसकी उपपत्ति पिछले प्रमेय की उपपत्ति के समान है, अत: इसको पाठक के लिए छोड़ दिया गया है।

अब हम $^{n}\mathrm{P}_r$ के सूत्र की उपयोगिता को स्पष्ट करने के लिए पिछले अनुच्छेद के कुछ प्रश्नों को इस सूत्र के प्रयोग द्वारा सरल कर रहे हैं।

उदाहरण 1 में शब्दों की अभीष्ट संख्या $= {}^{4}\mathrm{P}_4 = 4! = 24$ जब पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हैं। यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो, तो शब्दों की अभीष्ट संख्या $4^4 = 256$ होगी।

NUMBER शब्द के अक्षरों में से 3 अक्षरों वाले चयनित शब्दों की संख्या $= {}^{6}\mathrm{P}_3 = \frac{6!}{3!} = 4\times 5\times 6 = 120$, यहाँ इस प्रश्न में भी पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो, तो शब्दों की अभीष्ट संख्या $6^3 = 216$ होगी।

12 व्यक्तियों के एक समुदाय से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष के चयन के तरीकों की संख्या, यह मानकर कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है, स्पष्टतया

$$^{12}\mathrm{P}_2 = \frac{12!}{10!} = 11\times 12 = 132.$$

7.3.4 ***क्रमचय, जब सभी वस्तुएँ भिन्न-भिन्न नहीं हैं (Permutations when all the objects are not distinct objects)*** मान लीजिए कि हमें शब्द ROOT के अक्षरों के पुनर्विन्यास के तरीकों की संख्या ज्ञात करनी है। इस दशा में, सभी

अक्षर भिन्न-भिन्न नहीं है। यहाँ 2 O हैं जो समान प्रकार के अक्षर हैं। हम इन दोनों O को अस्थाई रूप से भिन्न-भिन्न मान लेते हैं जैसे O_1 और O_2. अब इस दशा में 4 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या 4! है। इन क्रमचयों में से एक क्रमचय RO_1O_2T पर विचार कीजिए। इसके संगत, यहाँ पर 2! क्रमचय RO_1O_2T तथा RO_2O_1T ऐसे हैं जो कि समान क्रमचय होते यदि O_1 तथा O_2 को भिन्न-भिन्न नहीं माना गया होता अर्थात् यदि O_1 तथा O_2 दोनों क्रमचय में O होते। अतएव, क्रमचयों की अभीष्ट संख्या $= \frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$

इस बात को नीचे स्पष्ट किया गया है:

क्रमचय जब O_1, O_2 भिन्न-भिन्न हैं।		क्रमचय जब O_1, O_2 दोनों O के समान हैं
RO_1O_2T, RO_2O_1T	$\longrightarrow$	R O O T
TO_1O_2R, TO_2O_1R	$\longrightarrow$	T O O R
RO_1TO_2, RO_2TO_1	$\longrightarrow$	R O T O
TO_1RO_2, TO_2RO_1	$\longrightarrow$	T O R O
RTO_1O_2, RTO_2O_1	$\longrightarrow$	R T O O
TRO_1O_2, TRO_2O_1	$\longrightarrow$	T R O O
O_1O_2RT, O_2O_1TR	$\longrightarrow$	O O R T
O_1RO_2T, O_2RO_1T	$\longrightarrow$	O R O T
O_1TO_2R, O_2TO_1R	$\longrightarrow$	O T O R
O_1RTO_2, O_2RTO_1	$\longrightarrow$	O R T O
O_1TRO_2, O_2TRO_1	$\longrightarrow$	O T R O

$$\left.\begin{matrix} O_1\,O_2TR \\ O_2\,O_1TR \end{matrix}\right] \longrightarrow OOTR$$

आइए अब हम शब्द INSTITUTE के अक्षरों के पुनर्विन्यास के तरीकों की संख्या ज्ञात करें। इस दशा में 9 अक्षर हैं, जिनमें I दो बार तथा T तीन बार आता है।

अस्थाई रूप से, हम इन समान अक्षरों को भिन्न-भिन्न मान लेते हैं जैसे I_1, I_2, T_1, T_2, T_3. 9 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में सभी को लेने से बने क्रमचयों की संख्या 9! है। इनमें से एक क्रमचय माना कि $I_1 NT_1 SI_2 T_2 U E T_3$ पर विचार कीजिए। यदि I_1, I_2 समान नहीं हों और T_1, T_2, T_3 एक जैसे न हों तो I_1, I_2 का 2! तरीकों से तथा T_1, T_2, T_3 का 3! तरीकों से विन्यास किया जा सकता है। यदि I_1, I_2 समान हों तथा T_1, T_2, T_3 समान हो, तो $2! \times 3!$ क्रमचय समान होगें। इस प्रकार पूछे गए विभिन्न क्रमचयों की कुल संख्या $\frac{9!}{2!\,3!}$ है। हम निम्नलिखित प्रमेय का कथन (बिना उपपत्ति) व्यक्त कर सकते हैं।

प्रमेय 3 n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जहाँ p वस्तुएँ समान प्रकार की और शेष भिन्न प्रकार की हैं $= \frac{n!}{p!}$.

वस्तुत: इस संबंध में एक अधिक व्यापक प्रमेय है जो नीचे वर्णित है:

प्रमेय 4 n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$ है।, जहाँ p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की, p_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की , ..., p_k वस्तुएँ kवाँ प्रकार की और शेष (यदि कोई है) विभिन्न प्रकार की हैं।

उदाहरण 9 ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर 9 अक्षर हैं, जिनमें A, 4 बार आया है, 2 बार L आया है तथा शेष विभिन्न प्रकार के हैं। अतएव विन्यासों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{9!}{4!\,2!} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$$

उदाहरण 10 1 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है?

हल यहाँ पर अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है, उदाहरण के लिए 1234 तथा 1324 दो भिन्न-भिन्न संख्याएँ हैं। अत: 4-अंकीय संख्याओं की संख्या 9 विभिन्न अंकों में से एक समय में 4 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार

4-अंकीय संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= {}^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9\times8\times7\times6 = 3024.$

उदाहरण 11 100 से 1000 के बीच स्थित कितनी संख्याएँ हैं, जिन्हें अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से बनाया जा सकता है, यदि अंकों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल 100 से 1000 के बीच स्थित प्रत्येक संख्या एक 3 अंकीय संख्या है। प्रथम हम 6 अंकों में से एक समय में 3 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह संख्या ${}^6P_3$ है परंतु इन क्रमचयों में वे भी सम्मिलित हैं, जिनमें

0, सैकड़े के स्थान पर है। उदाहरण के लिए 092, 042 .... इत्यादि और ये ऐसी संख्याएँ है जो वास्तव में 2 अंकीय हैं। अतः अभीष्ट संख्या को ज्ञात करने के लिए, इस प्रकार की 2 अंकीय संख्याओं के $^6P_3$ में से घटाना पड़ेगा। अब इन 2-अंकीय संख्याओं की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम 0 को सैकड़े के स्थान पर स्थिर कर देते हैं और शेष 5 अंको से एक समय में दो अंकों को लेकर बनने वाले पुनर्विन्यासों की संख्या ज्ञात करते हैं। यह संख्या $^5P_2$ है।

अतः अभीष्ट संख्या $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = \dfrac{6!}{3!} - \dfrac{5!}{3!}$

$= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5 = 100$

उदाहरण 12 n का मान ज्ञात कीजिए, इस प्रकार कि

(i) ${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3,\ n > 4$ (ii) $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

हल (i) दिया है कि

${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3$

या $n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4) = 42\ n(n-1)\ (n-2)$

क्योंकि $n > 4$ इसलिए $n(n-1)\ (n-2) \neq 0$

अतएव, दोनों पक्षों को $n(n-1)\ (n-2)$, से भाग देने पर

$(n-3)\ (n-4) = 42$

या $n^2 - 7n - 30 = 0$

या $n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

या $(n-10)\ (n+3) = 0$

या $n - 10 = 0$ या $n + 3 = 0$

या $n = 10$ या $n = -3$

क्योंकि n ऋण संख्या नहीं हो सकती है अतः $n = 10$

(ii) दिया है कि $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}$

इस प्रकार $3n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3) = 5(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)$

या $3n = 5\ (n-4)$ [क्योंकि $(n-1)\ (n-2)\ (n-3) \neq 0,\ n > 4$]

या $n = 10$

उदाहरण 13 ज्ञात कीजिए r, यदि $5\ {}^4P_r = 6\ {}^5P_{r-1}$.

हल यहाँ पर

$5\ {}^4P_r = 6\ {}^5P_{r-1}$

या $5 \times \dfrac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \dfrac{5!}{(5-r+1)!}$

या $\dfrac{5!}{(4-r)!} = \dfrac{6 \times 5!}{(5-r+1)\ (5-r)(5-r-1)!}$

या $(6 - r)(5 - r) = 6$

या $r^2 - 11r + 24 = 0$

या $r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$

या $(r - 8)(r - 3) = 0$

या $r = 8$ or $r = 3.$

अत: $r = 8, 3.$

उदाहरण 14 DAUGHTER शब्द के अक्षरों से 8 अक्षर वाले विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि

(i) सब स्वर एक साथ रहें। (ii) सब स्वर एक साथ नहीं रहें।

हल (i) DAUGHTER शब्द में 8 विभिन्न अक्षर हैं, जिनमें से 3 स्वर हैं, अर्थात् A, U तथा E क्योंकि सभी स्वरों को एक साथ रहना है इसलिए हम कुछ समय के लिए उनको सम्मिलित रूप से एक वस्तु (AUE) मान लेते हैं। यह अकेली वस्तु शेष 5 वस्तुओं (अक्षरों) के साथ मिलकर 6 वस्तुएँ हो जाती हैं। फिर हम 6 वस्तुओं में से एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह संख्या $^6P_6 = 6!$ है। इनमें से प्रत्येक क्रमचय के संगत हमें तीन स्वरों A, U, E में से सभी को एक समय में लेकर 3! क्रमचय बनते हैं। अतएव गुणन सिद्धांत से क्रमचयों की अभीष्ट संख्या $= 6! \times 3! = 4320.$

(ii) यदि हमें उन क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है, जिनमें सभी स्वर एक साथ नहीं हैं, तो हमें पहले 8 अक्षरों में से एक समय में सभी को साथ लेकर बनने वाले विन्यासों की संभव संख्या ज्ञात करनी होगी, जो 8! है। फिर इस संख्या से हमें सब स्वरों के एक साथ रहने वाली क्रमचयों की संख्या घटानी पड़ेगी।

अत: अभीष्ट संख्या $8! - 6! \times 3! = 6!(7\times8 - 6)$

$= 2 \times 6!(28 - 3)$

$= 50 \times 6! = 50 \times 720 = 36000$

उदाहरण 15 4 लाल, 3 पीली तथा 2 हरी डिस्कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि एक ही रंग की डिस्कों में कोई अंतर नहीं है ?

हल डिस्कों की कुल संख्या $4 + 3 + 2 = 9$ है। इन 9 डिस्कों में से 4 डिस्कें एक प्रकार की (लाल), 3 डिस्कें दूसरे प्रकार की (पीली) तथा 2 डिस्कें तीसरे प्रकार की (हरी) हैं।

इस प्रकार डिस्कों को व्यवस्थित करने की संख्या $\dfrac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260.$

उदाहरण 16 INDEPENDENCE शब्द के अक्षरों से बनने वाले विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए। इन विन्यासों में से कितने विन्यासों में,

(i) शब्द P से प्रारंभ होते हैं?

(ii) सभी स्वर सदैव एक साथ रहते हैं?

(iii) स्वर कभी भी एक साथ नहीं रहते हैं?

(iv) शब्द I से प्रारंभ होते हैं और उनका अंत P से होता है ?

हल यहाँ पर 12 अक्षर है, जिनमें से N तीन बार, E चार बार D, दो बार आता है और शेष अक्षरों में सभी भिन्न-भिन्न हैं।

इसलिए विन्यासों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{12!}{3!\,4!\,2!} = 1663200$

(i) हम P को सबसे बाएँ स्थान पर स्थिर कर देते हैं और फिर शेष 11 अक्षरों के विन्यास की गणना करते हैं। अतएव

P से प्रारंभ होने वाले शब्दों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600 .$$

(ii) प्रदत्त शब्द में 5 स्वर हैं, जो कि 4 बार E है तथा 1 बार I है क्योंकि कि इनको सदैव एक साथ रहना है, इसलिए इनको कुछ समय के लिए एक अकेली वस्तु $\boxed{\text{EEEEI}}$ समझ लेते हैं। यह अकेली वस्तु शेष 7 वस्तुओं के साथ मिलकर कुल 8 वस्तुएँ हो जाती हैं। इन 8 वस्तुओं जिनमें 3 बार N है, तथा दो बार D है के विन्यासों की संख्या $\frac{8!}{3!\,2!}$ है। इनमें से प्रत्येक विन्यास के संगत 5 स्वर E, E, E, E तथा I के विन्यासों की संख्या $\frac{5!}{4!}$ है। इसलिए गुणन सिद्धांत द्वारा विन्यासों की अभीष्ट संख्या $= \frac{8!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{4!} = 16800$

(iii) विन्यासों की अभीष्ट संख्या

= विन्यासों की कुल संख्या (बिना किसी प्रतिबंध के) – विन्यासों की संख्या, जिनमें सभी स्वर एक साथ रहते हैं

$$= 1663200 - 16800 = 1646400$$

(iv) हम I तथा P को दोनों सिरों पर स्थिर कर देते हैं (I बाएँ सिरे पर और P दाएँ सिरे पर). इस प्रकार हमारे पास 10 अक्षर शेष रहते हैं।

अतः विन्यासों की अभीष्ट संख्या $= \frac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$

प्रश्नावली 7.3

1. 1 से 9 तक के अंकों को प्रयोग करके कितने 3 अंकीय संख्याएँ बन सकती हैं, यदि किसी भी अंक को दोहराया नहीं गया है?

2. किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?

3. अंक 1, 2, 3, 4, 6, 7 को प्रयुक्त करने से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है?

4. अंक 1, 2, 3, 4, 5 के उपयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगीं?

5. 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

6. यदि $^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$ तो n ज्ञात कीजिए।

7. r ज्ञात कीजिए, यदि (i) $^5P_r = 2\,{}^6P_{r-1}$ (ii) $^5P_r = {}^6P_{r-1}$.

8. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तथ्यत: केवल एक बार उपयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं?

9. MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि किसी भी अक्षर की

पुनरावृत्ति नहीं की जाती है, यदि

(i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं? (ii) एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?

(iii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किंतु प्रथम अक्षर एक स्वर है?

10. MISSISSIPPI शब्द के अक्षरों से बने भिन्न-भिन्न क्रमचयों में से कितनों में चारों I एक साथ नहीं आते हैं?

11. PERMUTATIONS शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि

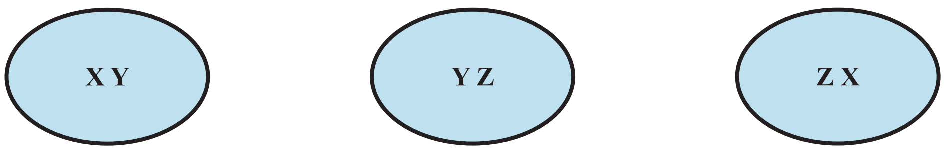
(i) चयनित शब्द का प्रारंभ P से तथा अंत S से होता है।

(ii) चयनित शब्द में सभी स्वर एक साथ हैं?

(iii) चयनित शब्द में P तथा S के मध्य सदैव 4 अक्षर हों?

7.4 संचय (Combinations)

मान लीजिए कि 3 लॉन टेनिस खिलाड़ियों X, Y, Z का एक समूह है। 2 खिलाड़ियों की एक टीम बनानी है। इसको हम कितने प्रकार से कर सकते हैं? क्या X और Y की टीम, Y तथा X की टीम से भिन्न है? यहाँ पर खिलाड़ियों का क्रम महत्त्वपूर्ण नहीं है।



आकृति 7.3

वास्तव में टीम बनाने के केवल तीन ही संभव तरीके हैं। यह XY, YZ तथा ZX हैं (आकृति 7.3)। यहाँ पर, प्रत्येक चयन, 3 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 को लेकर बना हुआ, संचय कहलाता है।

किसी संचय में चयनित वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। अब कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

बारह व्यक्ति एक कमरे में मिलते हैं और प्रत्येक व्यक्ति अन्य सभी व्यक्तियों से हाथ मिलाता है। 'हाथ मिलाने' की कुल संख्या का निर्धारण हम किस प्रकार करते हैं। X का Y से हाथ मिलाना तथा Y का X से हाथ मिलाना दो भिन्न हाथ मिलाना नहीं हैं। यहाँ क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। 'हाथ मिलाने' की कुल संख्या उतनी ही है, जितनी 12 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है।

सात बिंदु एक वृत्त पर स्थित हैं। इन बिंदुओं में से किन्हीं भी दो को मिलाकर कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं। यहाँ जीवाओं की कुल संख्या उतनी ही है, जितनी 7 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है।

अब हम n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या, जिसे प्रतीक ${}^nC_r$ से प्रकट करते हैं, ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त करते हैं।

मान लीजिए कि हमारे पास 4 भिन्न-भिन्न वस्तुएँ A, B, C और D हैं। इनमें से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर यदि इसे संचय बनाना चाहें, तो ये संचय AB, AC, AD, BC, BD, CD हैं। यहाँ पर AB तथा BA एक ही संचय है, क्योंकि वस्तुओं का क्रम संचय को परिवर्तित नहीं करता है। इसी कारण से हमने BA, CA, DA, CB, DB तथा DC को इस सूची में सम्मिलित नहीं किया है। इस प्रकार 4 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या 6 है, अर्थात् ${}^4C_2 = 6$.

इस सूची के प्रत्येक संचय के संगत, हमें 2! क्रमचय मिल सकते हैं, क्योंकि प्रत्येक संचय की 2 वस्तुओं को 2! तरीकों से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है। इसलिए, क्रमचयों की संख्या $= {}^4C_2 \times 2!$, दूसरी तरफ 4 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या $= {}^4P_2$.

अतएव $\quad {}^4P_2 = {}^4C_2 \times 2!$ या $\dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = {}^4C_2$

अब, मान लीजिए कि हमारे पास 5 विभिन्न वस्तुएँ A, B, C, D, E हैं। इनमें से एक समय में 3 वस्तुओं को लेकर, यदि हम संचय बनाते हैं, तो ये ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE इन ${}^5C_3$ संचयों में से प्रत्येक के संगत 3! क्रमचय हैं, क्योंकि प्रत्येक संचय की तीन वस्तुओं को 3! तरीकों से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है। इसलिए क्रमचयों की कुल संख्या = ${}^5C_3 \times 3!$

अतः $\quad {}^5P_3 = {}^5C_3 \times 3!$ या $\dfrac{5!}{(5-3)!\,3!} = {}^5C_3$

ये उदाहरण, क्रमचय तथा संचय के बीच संबंध दर्शाने वाली, निम्नलिखित प्रमेय की ओर संकेत करते हैं:

प्रमेय 5 ${}^nP_r = {}^nC_r\; r!,\ 0 < r \le n.$

उपपत्ति ${}^nC_r$ संचयों में से प्रत्येक के संगत $r\,!$ क्रमचय हैं, क्योंकि प्रत्येक संचय के r वस्तुओं को $r\,!$ तरीकों से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है।

अतः n विभिन्न वस्तुओं में से, एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनने वाले क्रमचयों की कुल संख्या ${}^nC_r \times r!$. है। दूसरी ओर यह संख्या ${}^nP_r$ है।

इस प्रकार $\quad {}^nP_r = {}^nC_r \times r!,\ 0 < r \le n\,.$

टिप्पणी **1.** उपर्युक्त परिणाम से $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!$, अर्थात् $\ {}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}\,.$

विशेष रूप से, यदि $r = n$, तो ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!\ 0!} = 1.$

2. हम परिभाषित करते हैं कि ${}^nC_0 = 1$, अर्थात् n विभिन्न वस्तुओं में से केवल उन तरीकों की संख्या की गणना करना है जहाँ कुछ भी वस्तु लिए बिना बनाए गए संचयों की संख्या 1 मानी जाती है। संचयों की गणना करना, जिनमें एक समय में कुछ या सभी वस्तुओं का चयन किया जाता है। कुछ भी वस्तु लिए बिना चयन करना, इस बात के समान है कि सभी वस्तुओं को छोड़ दिया गया है और हमें ज्ञात है कि ऐसा करने का केवल मात्र एक तरीका है। इसी प्रकार, हम परिभाषित करते हैं कि ${}^nC_0 = 1.$

3. क्योंकि $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^nC_0$, इसलिए, सूत्र ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $r = 0$ के लिए भी उपयुक्त है।

अतः

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},\ 0 \le r \le n.$$

4. ${}^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\big(n-(n-r)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r,$

अर्थात्, n वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करना, $(n-r)$ वस्तुओं को अस्वीकार करने के समान है।

5. ${}^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b$ या $a = n - b$, अर्थात् $n = a + b$

प्रमेय 6 ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

उपपत्ति हम जानते हैं ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r$$

उदाहरण 17 यदि ${}^nC_9 = {}^nC_8$, तो ${}^nC_{17}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि ${}^nC_9 = {}^nC_8$

अर्थात् $$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

या $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{n-8}$ या $n - 8 = 9$ या $n = 17$

इसलिए ${}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$.

उदाहरण 18 2 पुरुषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 व्यक्तियों की एक समिति बनानी है। यह कितने प्रकार से किया जा सकता है? इनमें से कितनी समितियाँ ऐसी हैं, जिनमें 1 पुरुष तथा 2 महिलाएँ हैं?

हल यहाँ क्रम का महत्व नहीं है। अत: हमें संचयों की गणना करनी है। यहाँ पर समितियों की संख्या उतनी ही है, जितनी 5 विभिन्न व्यक्तियों में से एक समय में 3 को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है। इसलिए समिति बनाने के तरीकों की अभीष्ट

संख्या = ${}^5C_3 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{4\times5}{2} = 10$.

पुन: 2 पुरुषों में से 1 को चुनने के ${}^2C_1$ तरीके हैं तथा 3 महिलाओं में से 2 चुनने के ${}^3C_2$ तरीके हैं। इसलिए, इस प्रकार की समितियों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6.$$

उदाहरण 19 52 ताशों की एक गड्डी से 4 पत्तों को चुनने के तरीकों की संख्या क्या है? इन तरीकों में से कितनों में

(i) चार पत्ते एक ही प्रकार (suit) के हैं?
(ii) चार पत्ते चार, भिन्न प्रकार (suit) के हैं?
(iii) तस्वीरें हैं?
(iv) दो पत्ते लाल रंग के और दो काले रंग के हैं?
(v) सभी पत्ते एक ही रंग के हैं?

हल 52 पत्तों में से 4 पत्तों को चुनने के उतने ही तरीके हैं, जितने 52 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 4 वस्तुओं को ले कर बनने वाले संचय हैं। इसलिए, तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\ 48!} = \frac{49\times50\times51\times52}{2\times3\times4} = 270725$$

(i) गड्डी में पत्ते चार प्रकार के हैं ईंट, चिड़ी, हुकुम, पान और प्रत्येक के 13 पत्ते हैं। इसलिए 4 ईंट के पत्ते चुनने के ${}^{13}C_4$ तरीके हैं। इसी प्रकार 4 चिड़ी के पत्ते चुनने के ${}^{13}C_4$ 4 हुकुम के पत्ते चुनने के ${}^{13}C_4$ तथा 4 पान के पत्ते चुनने के ${}^{13}C_4$ तरीके हैं। इसलिए तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$

$$= 4\times\frac{13!}{4!\ 9!} = 2860$$

(ii) प्रत्येक प्रकार के 13 पत्ते हैं। इसलिए ईंट के 13 पत्तों में से 1 चुनने के ${}^{13}C_1$ तरीके हैं, पान के 13 पत्तों में से 1 चुनने के ${}^{13}C_1$, चिड़ी के 13 पत्तों में से 1 चुनने के ${}^{13}C_1$ तरीके हैं। अत: गुणन सिद्धांत द्वारा, तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$$

(iii) गड्डी में कुल 12 तस्वीरें हैं और इन 12 पत्तों में से 4 पत्ते चुनने हैं। इसे ${}^{12}C_4$ तरीकों से किया जा सकता है। इसलिए

तरीकों की अभीष्ट संख्या $= \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$.

(iv) गड्डी में 26 लाल रंग के और 26 काले रंग के पत्ते हैं। अत: तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26 लाल रंग के पत्तों में से 4 पत्ते ${}^{26}C_4$ तरीकों से चुने जा सकते हैं। 26 काले रंगे के पत्तों में से 4 पत्ते ${}^{26}C_4$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

अत: तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4 = 2\times\frac{26!}{4!\ 22!} = 29900.$

प्रश्नावली 7.4

1. यदि ${}^{n}C_8 = {}^{n}C_2$, तो ${}^{n}C_2$ ज्ञात कीजिए।

2. n का मान निकालिए, यदि

(i) ${}^{2n}C_2 : {}^{n}C_2 = 12 : 1$ (ii) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11 : 1$

3. किसी वृत्त पर स्थित 21 बिंदुओं से होकर जाने वाली कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं?

4. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कितने तरीके हैं?

5. 6 लाल रंग की, 5 सफेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।

6. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यत: एक इक्का है।

7. 17 खिलाड़ियों में से, जिनमें केवल 5 खिलाड़ी गेंदबाज़ी कर सकते हैं, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों का चयनकितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम में तथ्यत: 4 गेंदबाज़ हैं?

8. एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंद हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए।

9. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं?

विविध उदाहरण

उदाहरण 20 INVOLUTE शब्द के अक्षरों से, अर्थपूर्ण या अर्थहीन प्रत्येक 3 स्वरों तथा 2 व्यंजनों वाले, कितने शब्दों की रचना की जा सकती है?

हल शब्द INVOLUTE, में I,O,E, तथा U, 4 स्वर और N, V, L तथा T, 4 व्यंजन हैं

4 में से 3 स्वरों के चयन के तरीकों की संख्या = $^4C_3 = 4$.

4 में से 2 व्यंजनों के चयन के तरीकों की संख्या = $^4C_2 = 6$.

अत: 3 स्वरों तथा 2 व्यंजनों के संचय की संख्या $4 \times 6 = 24$.

अब, इन 24 संचयों में से प्रतयेक में 5 अक्षर हैं, जिन्हें परस्पर एक दूसरे के साथ 5! प्रकार से विन्यासित किया जा सकता है। अतएव विभिन्न शब्दों की अभीष्ट संख्या $24 \times 5\,! = 2880$.

उदाहरण 21 किसी समूह में 4 लड़कियाँ और 7 लड़के हैं। इनमें से 5 सदस्यों की एक टीम का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि टीम में (i) एक भी लड़की नहीं है ? (ii) कम से कम एक लड़का तथा एक लड़की है? (iii) कम से कम 3 लड़कियाँ हैं ?

हल (i) क्योंकि टीम में कोई भी लड़की सम्मिलित नहीं है, इसलिए केवल लड़कों का चयन करना है। 7 लड़कों में से 5 लड़कों का चयन $^7C_5$ प्रकार से किया जा सकता है। अत: अभीष्ट संख्या

$$= {}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

(ii) क्योंकि प्रत्येक टीम में कम से कम एक लड़की तथा एक लड़का है, इसलिए टीम निम्नलिखित प्रकार से चयनित होगी:

(a) 1 लड़का तथा 4 लड़कियाँ (b) 2 लड़के तथा 3 लड़कियाँ

(c) 3 लड़के तथा 2 लड़कियाँ (d) 4 लड़के तथा 1 लड़की

1 लड़का तथा 4 लड़कियों का चयन $^7C_1 \times {}^4C_4$ प्रकार से किया जा सकता है।

2 लड़के तथा 3 लड़कियों का चयन $^7C_2 \times {}^4C_3$ प्रकार से किया जा सकता है।

3 लड़के तथा 2 लड़कियों का चयन $^7C_3 \times {}^4C_2$ प्रकार से किया जा सकता है।

4 लड़के तथा 1 लड़की का चयन ${}^7C_4 \times {}^4C_1$ प्रकार से किया जा सकता है।

अतः अभीष्ट संख्या = ${}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$

$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$

(iii) क्योंकि टीम में कम से कम 3 लड़कियाँ हैं, इसलिए टीम की रचना निम्नलिखित प्रकार से हो सकती है:

(a) 3 लड़कियाँ तथा 2 लड़के अथवा (b) 4 लड़कियाँ तथा 1 लड़का।

नोट कीजिए कि टीम में सभी 5 लड़कियाँ नहीं हो सकतीं, क्योंकि समूह में केवल 4 लड़कियाँ हैं।

3 लड़कियों तथा 2 लड़कों का चयन ${}^4C_3 \times {}^7C_2$ प्रकार से किया जा सकता है।

4 लड़कियों तथा 1 लड़के का चयन ${}^4C_4 \times {}^7C_1$ प्रकार से किया जा सकता है।

इसलिए अभीष्ट संख्या

$= {}^4C_3 \times {}^7C_2 + {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 84 + 7 = 91$

उदाहरण 22 AGAIN शब्द के अक्षरों से बनने वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए। यदि इन शब्दों को इस प्रकार लिखा जाए जिस प्रकार किसी शब्दकोश में लिखा जाता है, तो 50वाँ शब्द क्या है?

हल AGAIN शब्द में 5 अक्षर हैं, जिनमें A दो बार आता है। इसलिए शब्दों की अभीष्ट संख्या $= \frac{5!}{2!} = 60$

A से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम A को सबसे बाएँ स्थान पर स्थिर कर देते हैं, और फिर शेष 4 भिन्न अक्षरों का, एक समय में सभी को लेकर पुनर्विन्यासित करते हैं। इन विन्यासों की संख्या उतनी ही है, जितनी 4 विभिन्न वस्तुओं से, एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या है। अतएव A से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या = $4! = 24$ फिर G से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या $= \frac{4!}{2!} = 12$ क्योंकि G को सबसे बाएँ स्थान पर स्थापित करने के बाद हमारे पास अक्षर A, A, I तथा N शेष रहते हैं। इसी प्रकार I से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या 12 है। इस प्रकार अभी तक प्राप्त शब्दों की संख्या $= 24 + 12 + 12 = 48$

अब 49वाँ शब्द NAAGI है। अतः 50 वाँ शब्द NAAIG है।

उदाहरण 23 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 अंकों के प्रयोग द्वारा 1000000 से बड़ी कितनी संख्याएँ बन सकती हैं?

हल क्योंकि 1000000 एक 7 अंकीय संख्या है और प्रयोग किए जाने वाले अंकों की भी संख्या 7 है, इसलिए केवल 7 अंकीय संख्याओं की ही गणना उत्तर में की जाएगी। इसके अतिरिक्त क्योंकि रचित संख्याओं को 1000000 से बड़ा होना चाहिए, अतः उन संख्याओं को 1, 2 या 4 से प्रारंभ होना चाहिए।

1 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की संख्या $= \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{2} = 60$, क्योंकि जब 1 को सबसे बाएँ स्थान पर स्थापित कर देते हैं, तो फिर शेष अंक 0, 2, 2, 2, 4, 4, को पुनर्विन्यासित करते हैं, जिनमें 2, तीन बार तथा 4, दो बार आते हैं।

2 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की कुल संख्या $= \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{2} = 180$

4 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की कुल संख्या $= \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$

अत: रचित संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 60 + 180 + 120 = 360$

वैकल्पिक विधि

7 अंकीय संख्याओं का विन्यास स्पष्टतया $\frac{7!}{3!\ 2!} = 420$ है किंतु इनमें वे संख्याएँ भी सम्मिलित हैं, जिनमें 0 सबसे बाएँ स्थान पर है। इस प्रकार के विन्यासों की संख्या $\frac{6!}{3!\ 2!} = 60$ (0 के सबसे बाएँ स्थान पर स्थिर करके)।

अतएव, संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 420 - 60 = 360$

टिप्पणी यदि प्रदत्त सूची के एक या एक से अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है, तो यह मान लेते हैं, कि किसी भी संख्या में अंकों को उतनी ही बार प्रयोग किया जा सकता है जितनी बार वे सूची में दिए गए हैं, अर्थात्, उपर्युक्त प्रश्न में 1 तथा 0 केवल एक बार प्रयोग किए जा सकते हैं, जबकि 2 तथा 4, क्रमश: 3 तथा 2 बार प्रयोग किए जा सकते हैं।

उदाहरण 24 5 लड़कियों और 3 लड़कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से बैठा सकते हैं, जब कि कोई भी दो लड़के एक साथ नहीं बैठते हैं?

हल हम पहले 5 लड़कियों को बैठा देते हैं। इसे 5! प्रकार से कर सकते हैं। इस प्रकार के प्रत्येक विन्यास में, तीन लड़कों को केवल गुणा से चिह्नित स्थानों पर बैठाया जा सकता है।

$$\times G \times G \times G \times G \times G \times.$$

गुणा से चिह्नित 6 स्थानों पर 3 लड़को को $^6P_3$ तरीकों से बैठाया जा सकता है। अत: गुणन सिद्धांत से, इन तरीकों की कुल संख्या

$$= 5! \times {}^6P_3 = 5! \times \frac{6!}{3!}$$
$$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 14400$$

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. DAUGHTER शब्द के अक्षरों से, कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि प्रत्येक शब्द में 2 स्वर तथा 3 व्यंजन हों ?

2. EQUATION शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि स्वर तथा व्यंजक एक साथ रहते हैं ?

3. 9 लड़के और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनानी हैं यह कितने प्रकार से किया जा सकता है, जबकि समिति में,

(i) तथ्यत: 3 लड़कियाँ हैं ? (ii) न्यूनतम 3 लड़कियाँ हैं? (iii) अधिकतम 3 लड़कियाँ हैं?

4. यदि शब्द EXAMINATION के सभी अक्षरों से बने विभिन्न क्रमचयों को शब्दकोष की तरह सूचीबद्ध किया जाता है, तो E से प्रारंभ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व कितने शब्द हैं ?

5. 0, 1, 3, 5, 7 तथा 9 अंकों से, 10 से विभाजित होने वाली और बिना पुनरावृत्ति किए कितनी 6 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

6. अंग्रेज़ी वर्णमाला में 5 स्वर तथा 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला से 2 भिन्न स्वरों और 2 भिन्न व्यंजनो वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है ?

7. किसी परीक्षा के एक प्रश्नपत्र में 12 प्रश्न हैं जो क्रमशः 5 तथा 7 प्रश्नों वाले दो खंडों में विभक्त हैं अर्थात् खंड I और खंड II. एक विद्यार्थी को प्रत्येक खंड से न्यूनतम 3 प्रश्नों का चयन करते हुए कुल 8 प्रश्नों को हल करना है। एक विद्यार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

8. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों के संचय की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि 5 पत्तों के प्रत्येक चयन (संचय) में तथ्यत: एक बादशाह है।

9. 5 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाता है कि महिलाएँ सम स्थानों पर बैठती हैं। इस प्रकार के कितने विन्यास संभव हैं?

10. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा से, 10 का चयन एक भ्रमण-दल के लिए किया जाता है। 3 विद्यार्थी ऐसे हैं, जिन्होंने यह निर्णय लिया है कि या तो वे तीनों दल में शमिल होंगे या उनमें से कोई भी दल में शामिल नहीं होगा। भ्रमण-दल का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है?

11. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एक साथ रहें ?

सारांश

- गणना का आधारभूत सिद्धांत: यदि एक घटना m विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तद्‌परांत एक दूसरी घटना n विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो प्रदत्त क्रम में घटनाओं के घटित होने की संख्या $m \times n$ है।
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, ${}^nP_r$ द्वारा प्रकट की जाती है और ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, जहाँ $0 \le r \le n$.
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति है, n^r है।
- n वस्तुओं में से एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$ है जहाँ p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की, p_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, ..., p_k वस्तुएँ k वें प्रकार की और शेष सभी वस्तुए, यदि कोई हैं तो विभिन्न प्रकार की हैं:
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या को ${}^nC_r$ से प्रकट करते हैं और ${}^nC_r$ $= = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$.