1. **10 મીટર ત્રિજ્યાવાળી એક નળાકાર પીપમાં 314 (મીટર)^3/કલાકના દરે ઘઉં ભરવામાં આવે છે. તો ઘઉંની ઊંચાઈના વધવાનો દર .... હોય.**

(A) 1 મીટર/કલાક (B) 0.1 મીટર/કલાક (C) 1.1 મીટર/કલાક (D) 0.5 મીટર/કલાક

જવાબ **(A) 1 મીટર/કલાક**

➡ નળાકાર ટાંકીની ત્રિજ્યા $r = 10$ મીટર

$\frac{dV}{dt} = 314\ m^3/h.\quad \frac{dh}{dt} = ?$

ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ h મીટર છે.

$\therefore$ નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi r^2 h$

$\therefore V = \pi(10)^2\ h \qquad (\because\ r = 10\text{ m})$

$\therefore V = 100\ \pi\ h$

હવે $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(100\,\pi h) = 100\,\pi\,\frac{dh}{dt}$

$\therefore 314 = 100\,\pi\,\frac{dh}{dt}$

$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{314}{100\,\pi} = \frac{314}{100 \times 3.14} = 1$

$\therefore$ ટાંકીમાં ભરેલ ઘઉંની ઊંચાઈ વધવાનો દર

$\frac{dh}{dt} = 1\ m/h$ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

2. **$x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના (2, –1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ .... છે.**

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

જવાબ **(B) $\frac{6}{7}$**

➡ $x = t^2 + 3t - 8 \quad \therefore \frac{dx}{dt} = 2t + 3$

$y = 2t^2 - 2t - 5 \quad \therefore \frac{dy}{dt} = 4t - 2$

હવે $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t - 2}{2t + 3}$

વક્ર પરનું બિંદુ P(2, –1) છે.

$\therefore x = 2 = t^2 + 3t - 8 \quad \therefore t^2 + 3t - 10 = 0$

$\therefore (t + 5)\ (t - 2) = 0$

$\therefore t = -5, 2 \quad ....(i)$

$\therefore y = -1 = 2t^2 - 2t - 5 \quad \therefore 2t^2 - 2t - 4 = 0$

$\therefore t^2 - t - 2 = 0$

$\therefore (t - 2)\ (t + 1) = 0$

$\therefore t = 2, -1 \quad ....(ii)$

પરિણામ (i) અને (ii) ઉપરથી $t = 2$ મળે છે.

હવે $t = 2$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \frac{4(2) - 2}{2(2) + 3} = \frac{6}{7}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

3. રેખા $y = mx + 1$ એ વક્ર $y^2 = 4x$નો સ્પર્શક હોય, તો $m =$ ....

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

જવાબ (A) 1

➡ રેખા $y = mx + 1$ એ વક્ર $y^2 = 4x$નો સ્પર્શક છે.

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં, $2y\frac{dy}{dx} = 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$

$\therefore$ વક્રનાં સ્પર્શકનો ઢાળ $m = \frac{2}{y}$

$-$ $(x_1\ y_1)$ બિંદુએ ઢાળ $m = \frac{2}{y_1}$

વક્ર પરનાં (x_1, y_1) બિંદુએ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore$ $y = mx + y_1 - mx_1$

પરંતુ વક્રનાં સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + 1$ છે.

$\therefore y_1 - mx_1 = 1$

હવે $m = \frac{2}{y_1}$ તથા $(x_1\ y_1)$ વક્રનું બિંદુ હોવાથી $y_1^2 = 4x_1$

$$\therefore y_1 - \frac{2}{y_1}\left(\frac{y_1^2}{4}\right) = 1$$

$$\therefore y_1 - \frac{y_1}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$\therefore m = \frac{2}{y_1} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

4. વક્ર $2y + x^2 = 3$ના બિંદુ (1, 1) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 1$

જવાબ (B) $x - y = 0$

➡ વક્રનું સમીકરણ $2y + x^2 = 3$

(1, 1) બિંદુ વક્રનાં સમીકરણનું સમાધાન કરતું હોવાથી વક્ર પરનું બિંદુ છે.

$2y + x^2 = 3$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$2\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = -1$$

$\therefore$ (1, 1) બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ = 1

$\therefore$ (1, 1) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ = 1

$\therefore$ (1, 1) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$y - 1 = 1\ (x - 1)$

$\therefore\ x - y = 0$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

5. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતાં અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$ (C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

જવાબ (A) $x + y = 3$

➡ વક્રનું સમીકરણ $x^2 = 4y$

(1, 2) બિંદુએ વક્રનાં સમીકરણનું સમાધાન કરતું નથી.

$\therefore$ (1, 2) એ વક્રનું બિંદુ નથી.

$x^2 = 4y$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$2x = 4\frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{x}{2}$

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{2}{x}$

ધારો કે વક્ર પરનું બિંદુ (x_1, y_1) છે. $\therefore x_1^2 = 4y_1$

(x_1, y_1) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{2}{x_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$$y - y_1 = -\frac{2}{x_1}(x - x_1) \qquad \text{..........(i)}$$

આ અભિલંબ (1, 2)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore 2 - y_1 = -\frac{2}{x_1}(1 - x_1)$

$\therefore 2x_1 - x_1 y_1 = -2 + 2x_1$

$\therefore x_1 y_1 = 2$

$\therefore y_1 = \frac{2}{x_1}$

પરંતુ $x_1^2 = 4y_1 \therefore x_1^2 = 4\left(\frac{2}{x_1}\right)$

$\therefore x_1^3 = 8$

$\therefore x_1 = 2$

જવાબ (A) $x + y = 3$

➡ વક્રનું સમીકરણ $x^2 = 4y$

(1, 2) બિંદુએ વક્રનાં સમીકરણનું સમાધાન કરતું નથી.

$\therefore$ (1, 2) એ વક્રનું બિંદુ નથી.

$x^2 = 4y$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$2x = 4\frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{x}{2}$

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{2}{x}$

ધારો કે વક્ર પરનું બિંદુ (x_1, y_1) છે. $\therefore x_1^2 = 4y_1$

(x_1, y_1) બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{2}{x_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ :

$y - y_1 = -\frac{2}{x_1}(x - x_1)$ ....(i)

આ અભિલંબ (1, 2)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore 2 - y_1 = -\frac{2}{x_1}(1 - x_1)$

$\therefore 2x_1 - x_1 y_1 = -2 + 2x_1$

$\therefore x_1 y_1 = 2$

$\therefore y_1 = \frac{2}{x_1}$

પરંતુ $x_1^2 = 4y_1 \therefore x_1^2 = 4\left(\frac{2}{x_1}\right)$

$\therefore x_1^3 = 8$

$\therefore x_1 = 2$

6. વક્ર $9y^2 = x^3$ પરનાં .... બિંદુઓ આગળ દોરેલ અભિલંબ યામાક્ષો સાથે સમાન અંતઃખંડ બનાવે.

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $4, \frac{-8}{3}$ (C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

જવાબ (A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$

➡ વક્રનું સમીકરણ : $9y^2 = x^3$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$18y\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{6y}$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{6y}$

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= -\frac{6y}{x^2}$

અભિલંબ વક્ર સાથે સમાન લંબાઈનાં અંતઃખંડો બનાવે છે.

$\therefore$ અભિલંબનો ઢાળ $= \pm 1$ થશે.

$\therefore -\frac{6y}{x^2} = \pm 1$

$\therefore 6y = \pm x^2$

હવે સમીકરણ $9y^2 = x^3$ તથા $\pm x^2 = 6y$નો ઉકેલ મેળવીએ.

$9\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 = x^3$

$\therefore \frac{9x^4}{36} = x^3 \Rightarrow x = 4$ $(\because x \neq 0)$

$\therefore y^2 = \frac{x^3}{9} = \frac{(4)^3}{9} = \frac{64}{9}$

$\therefore y = \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\frac{8}{3}$

$\therefore$ માગેલ બિંદુનાં યામ $= \left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

7. વિકલનો ઉપયોગ કરીને વિધેયોનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધો : $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

➡ $y = x^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{4}} - y$

$= (x + \Delta x)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Delta x = (x + \Delta x)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}$

હવે $x = \frac{16}{81}$ તથા $\Delta x = \frac{1}{81}$ લેતાં,

$\frac{1}{4}\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(\frac{1}{81}\right) = \left(\frac{16}{81} + \frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^{-\frac{3}{4}} \times \frac{1}{81} = \left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \frac{1}{4}\left(\frac{27}{8}\right) \times \frac{1}{81} + \frac{2}{3} = \left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{96} + \frac{2}{3} = \frac{65}{96} = 0.677$

8. વિકલનો ઉપયોગ કરીને વિધેયોનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધો : $(33)^{-\frac{1}{5}}$

➡ $y = x^{-\frac{1}{5}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}(x)^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}(x)^{-\frac{6}{5}}$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{-\frac{1}{5}}$

$\therefore \Delta y = (x + \Delta x)^{-\frac{1}{5}} - y$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Delta x = (x + \Delta x)^{-\frac{1}{5}} - (x)^{-\frac{1}{5}}$

$\therefore -\frac{1}{5}(x)^{-\frac{6}{5}} \cdot \Delta x = (x + \Delta x)^{-\frac{1}{5}} - (x)^{-\frac{1}{5}}$

$x = 32$ તથા $\Delta x = 1$ લેતાં,

$-\frac{1}{5}(32)^{-\frac{6}{5}} \times (1) = (32 + 1)^{-\frac{1}{5}} - (32)^{-\frac{1}{5}}$

$\therefore -\frac{1}{5}\left(2^5\right)^{-\frac{6}{5}} \times (33)^{-\frac{1}{5}} - \left(2^5\right)^{-\frac{1}{5}}$

$\therefore (33)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5} \times \frac{1}{64} + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{320} + \frac{1}{2}$

$= \frac{-1 + 160}{320}$

$= \frac{159}{320}$

$= 0.497$

9. **સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ને $x = e$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે.**

➥ $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$\therefore f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot (1)}{x^2}$

$= \frac{1 - \log x}{x^2}$

$\therefore f''(x) = \frac{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4}$

$= \frac{-x - 2x + 2x \log x}{x^4}$

$= \frac{-3 + 2\log x}{x^3}$

મહત્તમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$

$\therefore \frac{1 - \log x}{x^2} = 0$

$\therefore 1 - \log x = 0 \qquad (\because x \neq 0)$

$\therefore \log x = 1$

$\therefore x = e$

$\therefore f''(e) = \frac{-3 + 2\log e}{e^3}$

$= \frac{-3 + 2}{e^3}$

$= -\frac{1}{e^3} < 0$

$\therefore f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ ને $x = e$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

10. વક્ર $x^2 = 4y$ના બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

➥ વક્રનું સમીકરણ $x^2 = 4y$

x પ્રત્યે સમીકરણનું વિકલન કરતાં,

$2x = 4\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}$

$\therefore (x_1\ y_1)$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_1\ y_1)} = \dfrac{x_1}{2}$

$\therefore (x_1\ y_1)$ બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $m = \dfrac{-2}{x_1}$

$\therefore (x_1\ y_1)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ,

$y - y_1 = -\dfrac{2}{x_1}(x - x_1)$ ....(i)

આ અભિલંબ (1, 2) બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore x = 1, y = 2$ લેતાં,

$\therefore 2 - y_1 = -\dfrac{2}{x_1}(1 - x_1)$

$\therefore 2 - \dfrac{x_1^2}{4} = \dfrac{-2}{x_1} + 2 \left(\because x_1^2 = 4y_1 \Rightarrow y_1 = \dfrac{x_1^2}{4}\right)$

$\therefore x_1^3 = 8$

$\therefore x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \dfrac{4}{4} = 1$

$\therefore (x_1\ y_1) = (2,\ 1)$

સમીકરણ (i)માં આ કિંમત મૂકતાં,

$y - 1 = -\dfrac{2}{2}(x - 2)$

$\therefore y - 1 = -x + 2$

$\therefore x + y - 3 = 0$ જે માગેલ અભિલંબનું સમીકરણ છે.

11. $x = a\cos\theta + a\,\theta\sin\theta,\ y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો θ બિંદુ આગળનો અભિલંબ ઊગમબિંદુથી અચળ અંતરે આવેલો છે તેમ સાબિત કરો.

➥ $x = a\cos\theta + a\,\theta\sin\theta$

$\therefore \dfrac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta = a\theta\cos\theta$

$y = a\sin\theta + a\,\theta\cos\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{d\theta} = -a\cos\theta + a\cos\theta + a\theta\sin\theta = a\theta\sin\theta$

સ્પર્શકનો ઢાળ $= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$

$\therefore\ \theta$ બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ $= -\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{-1}{\tan\theta} = -\cot\theta$

$\therefore\ \theta$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ,

$[y - (a\sin\theta - a\theta\cos\theta)] = -\cot\theta\ [x - (a\cos\theta + a\theta\sin\theta)]$

$\therefore y - a\sin\theta + a\theta\cos\theta = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}[x - a\cos\theta - a\theta\sin\theta]$

$\therefore\ y \sin\theta - a \sin^2\theta + a\theta \sin\theta \cos\theta = -x \cos\theta + a \cos^2\theta + a\theta \sin\theta \cos\theta$

$\therefore\ x \cos\theta + y \sin\theta = a(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$\therefore\ x \cos\theta + y \sin\theta = a \quad (\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

ઊગમબિંદુ (0, 0)માંથી અભિલંબ ઉપર દોરેલ લંબની લંબાઈ

$$= \frac{|0 + 0 - a|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

$= a =$ અચળ

$\therefore\ \theta$ બિંદુએ વક્રને દોરેલ અભિલંબ એ ઊગમબિંદુથી અચળ અંતરે આવેલો છે.

12. **કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો.**

➡ $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$

$= \dfrac{4\sin x - x(2 + \cos x)}{2 + \cos x}$

$= \dfrac{4\sin x}{2 + \cos x} - x$

$\therefore\ f'(x) = \dfrac{(2+\cos x)(4\cos x) - 4\sin x(-\sin x)}{(2 + \cos)^2} - 1$

$= \dfrac{8\cos x + 4\cos^2 x + 4\sin^2 x}{(2 + \cos)^2} - 1$

$= \dfrac{8\cos x + 4 - (2 + \cos x)^2}{(2 + \cos)^2}$

$= \dfrac{8\cos x + 4 - 4 - 4\cos x - \cos^2 x}{(2 + \cos)^2}$

$= \dfrac{4\cos x - \cos^2 x}{(2 + \cos)^2}$

$= \dfrac{\cos x\,(4 - \cos x)}{(2 + \cos)^2}$

હવે $-1 \le \cos x \le 1$

$\therefore\ 4 - \cos x > 0$ વળી $(2 + \cos x)^2 > 0$

જો $\cos x > 0$ હોય તો $f'(x) > 0$ થાય. તથા $\cos x < 0$ હોય તો $f'(x) < 0$ થાય.

$\therefore\ \cos x > 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ તથા $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

$\therefore\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ તથા $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\cos x < 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

13. **કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}, x \ne 0$ (a) વધતું વિધેય અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.**

➡ $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}, x \ne 0$

$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^4}$

$$= \frac{3(x^6 - 1)}{x^4}$$

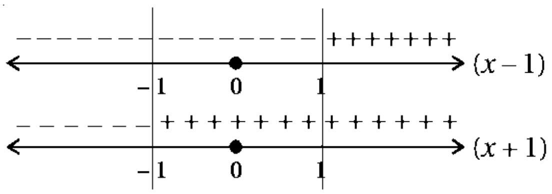
$$= \frac{3}{x^4}(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= \frac{3(x^4 + x^2 + 1)}{x^4}(x - 1)(x + 1)$$

(i) $f'(x) > 0$ હોય તો $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

$$\therefore \frac{3(x^4 + x^2 + 1)}{x^4}(x - 1)(x + 1) > 0$$

$$\therefore (x - 1)(x + 1) > 0 \quad \left(\because \frac{3(x^4 + x^2 + 1)}{x^4} > 0\right)$$



$\therefore x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$\therefore (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

(ii) $f'(x) < 0$ હોય તો $f(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે.

$$\therefore \frac{3(x^4 + x^2 + 1)}{x^4}(x - 1)(x + 1) < 0$$

$\therefore (x - 1)(x + 1) < 0$

$\therefore x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \qquad (\because x \neq 0)$

$\therefore (-1, 0) \cup (0, 1)$ અંતરાલમાં $f(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે.

14. $f(x) = x^4 + 32x$ જે અંતરાલમાં વધે કે ઘટે તે નક્કી કરો. $x \in R$

➠ $(-2, \infty)$માં વધતું, $(-\infty, 2)$માં ઘટતું

15. સાબિત કરો કે, વક્રો $xy = a^2$ અને $x^2 + y^2 = 2a^2$ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

➠ **સ્વપ્રયત્ને**

16. સાબિત કરો કે, $y = 6x^3 + 15x + 10$નાં કોઈપણ સ્પર્શકનો ઢાળ 12 હોઈ શકે નહીં. $x \in R$

➠ **સ્વપ્રયત્ને**

17. સાબિત કરો કે, $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ ને $x = \frac{1}{e}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે. $x \in R^+$

➠ **સ્વપ્રયત્ને**

18. સાદા લોલક માટે $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ જ્યાં T આવર્તકાળ અને l લોલકની લંબાઈ છે. આવર્તકાળ માપવામાં 4% ત્રુટિ આવે તો તેની લંબાઈમાં આવતી ત્રુટિ મેળવો.

➠ 8 %

19. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ પરનાં $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

➠ $x = y$

20. સાબિત કરો કે, $f(x) = 2\,|x - 2| + 3\,|x - 4|$ એ અંતરાલ (2, 4)માં ઘટતું વિધેય છે.

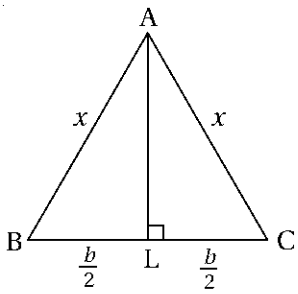
➠ **સ્વપ્રયત્ને**

21. **એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના અચળ આધારનું માપ b છે તથા તેની બે સમાન લંબાઈની બાજુઓનાં માપ 3 સેમી/સે ના દરે ઘટી રહ્યા છે. જ્યારે આ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓનાં માપ આધારના માપ જેટલાં થાય ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપથી ઘટે ?**

➥ ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

$AB = AC = x$ તથા $BC = b$

$AL \perp BC$



$\therefore BL = LC = \frac{1}{2} BC$

$\therefore BL = LC = \frac{b}{2}$

ΔALB કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore AL = \sqrt{AB^2 - BL^2} = \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}$

ΔABCનું ક્ષેત્રફળ $A = \frac{1}{2} BC \times AL = \frac{1}{2} b \times \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}$

આપેલ છે કે $\frac{dx}{dt} = -3$ સેમી/સેકન્ડ જ્યાં b = અચળ ઋણ નિશાની દર ઘટે છે તે દર્શાવે છે.

હવે $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}} \times 2x \times \frac{dx}{dt} = \frac{bx}{2\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}} \cdot \frac{dx}{dt}$

જ્યારે $b = x$ હોય ત્યારે,

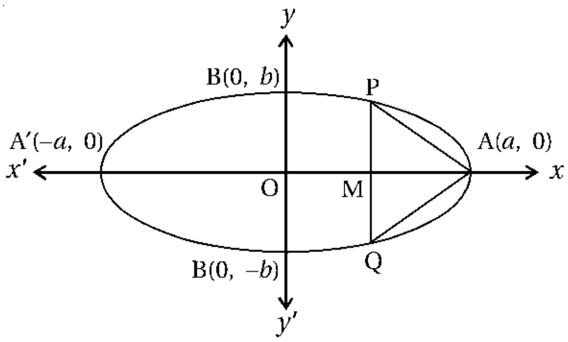
$\frac{dA}{dt} = \frac{b \times b}{2\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}}} \times (-3)$

$= -\sqrt{3}b$ સેમી^{2}/સેકન્ડ

અર્થાત્ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ઘટવાનો દર $\sqrt{3}b$ સેમી^{2}/સેકન્ડ છે.

22. **જેનું શીર્ષ પ્રધાન અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ હોય તેવા ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ માં અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.**

➥



ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$ અંતર્ગત સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ APQ આવેલો છે.

$A(a,\ 0)$, $P(a\ \cos\theta,\ b\ \sin\theta)$ તથા $Q(a\ \cos\theta - b\ \sin\theta)$ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ થશે.

ઉપવલયનું પ્રધાન અક્ષ X- અક્ષ છે.

ΔAPQનું ક્ષેત્રફળ,

$$A = \frac{1}{2} \times PQ \times AM$$
$$= \frac{1}{2}(2b \sin\theta)(a - a\cos\theta)$$
$$= ab\ \sin\theta\ (1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dA}{d\theta} = ab\ \cos\theta\ (1 - \cos\theta) + ab\ \sin\theta\ (\sin\theta)$$
$$= ab\ (\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= ab\ (\cos\theta - \cos^2\theta)\ (\because\ \cos 2\theta = \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta)$$

$$\therefore \frac{d^2A}{d\theta^2} = ab\ (-\sin\theta + 2\ \sin 2\theta)$$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ ક્ષેત્રફળ માટે, $\frac{dA}{d\theta} = 0$

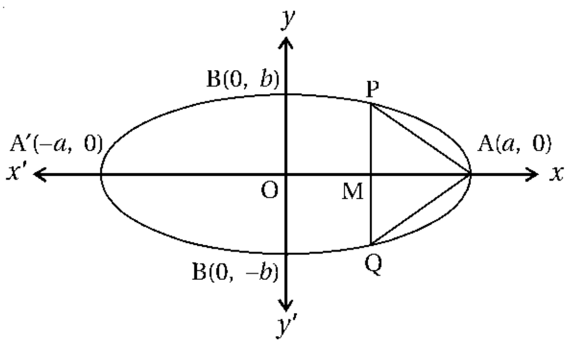
$\therefore\ ab\ (\cos\theta - \cos 2\theta) = 0$

$\therefore\ \cos\theta = \cos 2\theta$

$\therefore\ \theta = 2\pi - 2\theta$

$\therefore\ \theta = \frac{2\pi}{3}$

➥



ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$ અંતર્ગત સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ APQ આવેલો છે.

$A(a,\ 0)$, $P(a\ \cos\theta,\ b\ \sin\theta)$ તથા $Q(a\ \cos\theta - b\ \sin\theta)$ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ થશે.

ઉપવલયનું પ્રધાન અક્ષ X- અક્ષ છે.

ΔAPQનું ક્ષેત્રફળ,

$$A = \frac{1}{2} \times PQ \times AM$$
$$= \frac{1}{2}(2b \sin\theta)(a - a\cos\theta)$$

$= ab \sin\theta\ (1 - \cos\theta)$

$\therefore \dfrac{dA}{d\theta} = ab \cos\theta\ (1 - \cos\theta) + ab \sin\theta\ (\sin\theta)$

$= ab\ (\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= ab\ (\cos\theta - \cos^2\theta)\ (\because \cos 2\theta = \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta)$

$\therefore \dfrac{d^2A}{d\theta^2} = ab\ (-\sin\theta + 2 \sin 2\theta)$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ ક્ષેત્રફળ માટે, $\dfrac{dA}{d\theta} = 0$

$\therefore ab\ (\cos\theta - \cos 2\theta) = 0$

$\therefore \cos\theta = \cos 2\theta$

$\therefore \theta = 2\pi - 2\theta$

$\therefore \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

23. લંબચોરસ આધાર તથા પૃષ્ઠો ધરાવતી એક ખુલ્લી ટાંકીની ઊંડાઈ 2 મીટર તથા ઘનફળ 8 (મીટર)^3 છે. જો આ ટાંકીના આધારના બાંધકામની કિંમત ₹ 70 પ્રતિ(મીટર)^2 તથા પૃષ્ઠોના બાંધકામની કિંમત ₹ 45 પ્રતિ(મીટર)^2 હોય, તો ટાંકી બનાવવા માટે થતો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

➡ ધારો કે ટાંકીની લંબાઈ તથા પહોળાઈ અનુક્રમે x અને y મીટર છે તથા તેની ઊંડાઈ 2 મીટર છે.

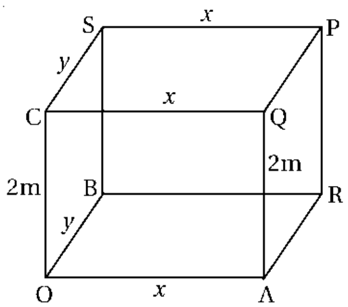
ટાંકીનું ઘનફળ,

$V = l \times b \times h$

$= 2xy\ m^3$

$\therefore 8 = 2xy$

$\therefore xy = 4$



ટાંકીના તળિયાનું ક્ષેત્રફળ $= xy$

ટાંકીની ચારેય બાજુનું ક્ષેત્રફળ $= 2(2y) + 2(2x)$

$= 4(y + x)$

$\therefore$ ઉપરથી ખુલ્લી ટાંકીની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ,

$A = xy + 4(x + y)$

$\therefore$ ટાંકી બનાવવા માટેનો ખર્ચ,

તળિયા માટે ₹ 70/મીટર^2 તથા બાજુ માટે ₹ 45/મીટર^2 છે.

$\therefore$ કુલ ખર્ચ $C = (70\ xy + 45 \times 4(x + y)$ ₹

$C =$ ₹ $(70\ xy + 180\ (x + y)$

પરંતુ $xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{x}$ લેતાં,

$$C = 70(4) + 180 \left(x + \frac{4}{x}\right) = 280 + 180 \left(x + \frac{4}{x}\right) \qquad \text{........(i)}$$

$$\therefore \frac{dc}{dx} = 180 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)$$

તથા $\dfrac{d^2c}{dx^2} = 180\left(\dfrac{8}{x^3}\right)$

➥ ધારો કે ટાંકીની લંબાઈ તથા પહોળાઈ અનુક્રમે x અને y મીટર છે તથા તેની ઊંડાઈ 2 મીટર છે.

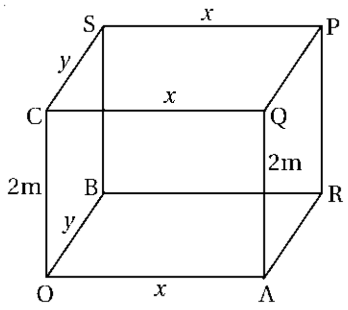
ટાંકીનું ઘનફળ,

$V = l \times b \times h$

$= 2xy\ m^3$

$\therefore 8 = 2xy$

$\therefore xy = 4$



ટાંકીના તળિયાનું ક્ષેત્રફળ = xy

ટાંકીની ચારેય બાજુનું ક્ષેત્રફળ = $2(2y) + 2(2x)$

$= 4(y + x)$

$\therefore$ ઉપરથી ખુલ્લી ટાંકીની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ,

$A = xy + 4(x + y)$

$\therefore$ ટાંકી બનાવવા માટેનો ખર્ચ,

તળિયા માટે ₹ 70/મીટર^2 તથા બાજુ માટે ₹ 45/ મીટર^2 છે.

$\therefore$ કુલ ખર્ચ $C = (70\ xy + 45 \times 4(x + y)$ ₹

$C =$ ₹ $(70\ xy + 180\ (x + y)$

પરંતુ $xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{x}$ લેતાં,

$$C = 70(4) + 180\left(x + \frac{4}{x}\right) = 280 + 180\left(x + \frac{4}{x}\right) \quad \text{........(i)}$$

$$\therefore \frac{dc}{dx} = 180\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)$$

તથા $\dfrac{d^2c}{dx^2} = 180\left(\dfrac{8}{x^3}\right)$

24. એક ચોરસની પરિમિતિ તથા વર્તુળના પરિઘનો સરવાળો અચળ k છે. સાબિત કરો કે જ્યારે ચોરસની બાજુની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા કરતાં બમણી હોય ત્યારે તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે.

➥ ધારો કે વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે તથા ચોરસની બાજુની લંબાઈ x છે.

$\therefore$ વર્તુળનો પરીઘ = $2\pi r$

ચોરસની પરિમિતિ = $4x$

આપેલ છે કે, વર્તુળનો પરીઘ + ચોરસની પરિમિતિ = K,

જ્યાં k અચળ છે.

$\therefore 2\pi r + 4x = k$

$$\therefore r = \frac{k - 4x}{2\pi} \quad \text{..........(i)}$$

ધારો કે A = વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ + ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore A = \pi r^2 + x^2$

$\therefore A = \pi \dfrac{(k - 4x)^2}{4\pi^2} + x^2 \qquad (\because \text{(i) પરથી})$

$\therefore A = \dfrac{1}{4\pi}(k - 4x)^2 + x^2$

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{1}{4\pi}\ 2(k - 4x)\ (-4) + 2x$

$= \dfrac{-2}{\pi}\ (k - 4x) + 2x$

તથા $\dfrac{d^2A}{dx^2} = -\dfrac{2}{\pi}(-4) + 2$

$= \dfrac{8}{\pi} + 2 > 0$

ન્યૂનતમ કે મહત્તમ ક્ષેત્રફળ માટે $\dfrac{dA}{dx} = 0$

$\therefore -\dfrac{2}{\pi}\ (k - 4x) + 2x = 0$

$\therefore \dfrac{-2k}{\pi} + \dfrac{8x}{\pi} + 2x = 0$

$\therefore 8x + 2\pi x = 2k$

$\therefore x = \dfrac{k}{4 + \pi} \qquad$ ....(i)

➡ ધારો કે વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે તથા ચોરસની બાજુની લંબાઈ x છે.

$\therefore$ વર્તુળનો પરીઘ $= 2\pi r$

ચોરસની પરિમિતિ $= 4x$

આપેલ છે કે, વર્તુળનો પરીઘ + ચોરસની પરિમિતિ = K,

જ્યાં k અચળ છે.

$\therefore 2\pi r + 4x = k$

$\therefore r = \dfrac{k - 4x}{2\pi} \qquad$ ....(i)

ધારો કે A = વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ + ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore A = \pi r^2 + x^2$

$\therefore A = \pi \dfrac{(k - 4x)^2}{4\pi^2} + x^2 \qquad (\because \text{(i) પરથી})$

$\therefore A = \dfrac{1}{4\pi}(k - 4x)^2 + x^2$

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{1}{4\pi}\ 2(k - 4x)\ (-4) + 2x$

$= \dfrac{-2}{\pi}\ (k - 4x) + 2x$

તથા $\dfrac{d^2A}{dx^2} = -\dfrac{2}{\pi}(-4) + 2$

$= \dfrac{8}{\pi} + 2 > 0$

ન્યૂનતમ કે મહત્તમ ક્ષેત્રફળ માટે $\dfrac{dA}{dx} = 0$

$\therefore -\dfrac{2}{\pi}\ (k - 4x) + 2x = 0$

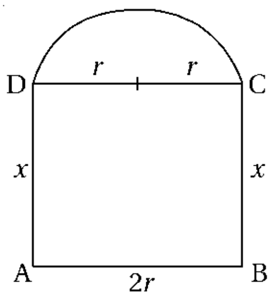
$\therefore \dfrac{-2k}{\pi} + \dfrac{8x}{\pi} + 2x = 0$

$\therefore 8x + 2\pi x = 2k$

$\therefore x = \dfrac{k}{4 + \pi}$ ....(i)

25. **એક બારી લંબચોરસ પર અર્ધવર્તુળ ગોઠવેલ હોય તે આકારની છે, બારીની કુલ પરિમિતિ 10 મીટર છે. બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ પ્રવેશી શકે તે માટે બારીનાં પરિમાણ શોધો.**

➡ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બારી છે. જે નીચેથી લંબચોરસ છે તથા ઉપરથી અર્ધવર્તુળાકાર છે.
અર્ધવર્તુળાકારની ત્રિજ્યા ધારો કે r મીટર છે.
$\therefore$ બારીની પહોળાઈ = $2r$
મીટર થશે.



ધારો કે બારીની લંબાઈ x મીટર છે.
બારીની પરિમિતિ P = DA + AB + BC + અર્ધવર્તુળાકાર ચાપ CD

$\therefore P = x + 2r + x + \pi r$

$\therefore P = 2x + r(2 + \pi)$

$\therefore 10 = 2x + r(2 + \pi)$ ....(i)

બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ મેળવવા માટે બારીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોવું જોઈએ.
બારીનું ક્ષેત્રફળ A = લંબચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore A = 2rx + \dfrac{\pi r^2}{2}$

$\therefore A = r\left[10 - r(2 + \pi)\right] + \dfrac{\pi r^2}{2}$ $\left(\because \text{(i) ઉપરથી}\right)$

$\therefore A = 10r - r^2\left(2 + \pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$

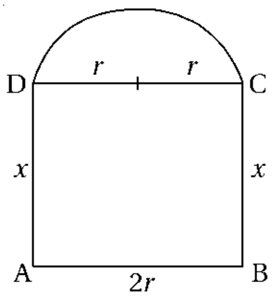
$\therefore A = 10r - r^2\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

હવે $\dfrac{dA}{dr} = 10 - 2r\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

તથા $\dfrac{d^2A}{dr^2} = -2\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right) < 0$

મહત્તમ ક્ષેત્રફળ માટે, $\dfrac{dA}{dr} = 0$

➡ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બારી છે. જે નીચેથી લંબચોરસ છે તથા ઉપરથી અર્ધવર્તુળાકાર છે.
અર્ધવર્તુળાકારની ત્રિજ્યા ધારો કે r મીટર છે.
$\therefore$ બારીની પહોળાઈ = $2r$
મીટર થશે.



ધારો કે બારીની લંબાઈ x મીટર છે.

બારીની પરિમિતિ P = DA + AB + BC + અર્ધવર્તુળાકાર ચાપ CD

$\therefore$ $P = x + 2r + x + \pi r$

$\therefore$ $P = 2x + r(2 + \pi)$

$\therefore$ $10 = 2x + r(2 + \pi)$ ....(i)

બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ મેળવવા માટે બારીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોવું જોઈએ.

બારીનું ક્ષેત્રફળ A = લંબચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore A = 2rx + \frac{\pi r^2}{2}$

$\therefore A = r\left[10 - r(2 + \pi)\right] + \frac{\pi r^2}{2}$ (∵ (i) ઉપરથી)

$\therefore A = 10r - r^2\left(2 + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore A = 10r - r^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$

હવે $\frac{dA}{dr} = 10 - 2r\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$

તથા $\frac{d^2A}{dr^2} = -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) < 0$

મહત્તમ ક્ષેત્રફળ માટે, $\frac{dA}{dr} = 0$

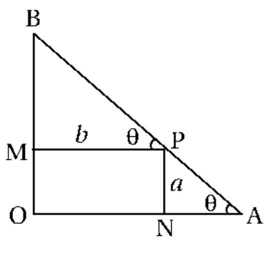
26. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પરના એક બિંદુના કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓથી લંબઅંતર a તથા b છે. (a, b અચળ છે) સાબિત કરો કે, કર્ણની મહત્તમ લંબાઈ $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ છે.

➥ ΔAOBમાં $\overline{AB}$ કર્ણ છે. $\overline{AB}$ પરનું કોઈ બિંદુ P છે.

$\overline{PN} \perp \overline{OA}$ તથા $\overline{PM} \perp \overline{OB}$

$\therefore$ PN = a તથા PM = b

ધારો કે $\angle OAB = \theta$



ΔANPમાં $\sin\theta = \frac{PN}{AP} = \frac{a}{AP}$

$\therefore AP = a \operatorname{cosec}\theta$

ΔPMBમાં $\cos\theta = \frac{PM}{BP} = \frac{b}{BP}$

$\therefore$ BP = b secθ

કર્ણની લંબાઈ l હોય તો,

l = AB = AP + BP

$\therefore$ $l = a$ cosecθ + b secθ

$\therefore \dfrac{dl}{d\theta} = -a\,\text{cosec}\,\theta\,\cot\theta + b\sec\theta\,\tan\theta$

તથા $\dfrac{d^2l}{d\theta^2} = a\,\text{cosec}^3\theta + a\,\text{cosec}\,\theta\,\cot^2\theta + b\sec^3\theta + b\sec\theta\,\tan^2\theta$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે, $\dfrac{dl}{d\theta} = 0$

$\therefore -a\,\text{cosec}\theta\,\cot\theta + b\sec\theta\,\tan\theta = 0$

$\therefore \dfrac{-a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0$

$\therefore -a\cos^3\theta + b\sin^3\theta = 0$

$\therefore \tan^3\theta = \dfrac{a}{b}$

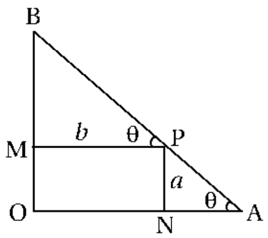
$\therefore \tan\theta = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

➥ ΔAOBમાં $\overline{AB}$ કર્ણ છે. $\overline{AB}$ પરનું કોઈ બિંદુ P છે.

$\overline{PN} \perp \overline{OA}$ તથા $\overline{PM} \perp \overline{OB}$

$\therefore$ PN = a તથા PM = b

ધારો કે $\angle$OAB = θ



ΔANPમાં $\sin\theta = \dfrac{PN}{AP} = \dfrac{a}{AP}$

$\therefore$ AP = a cosecθ

ΔPMBમાં $\cos\theta = \dfrac{PM}{BP} = \dfrac{b}{BP}$

$\therefore$ BP = b secθ

કર્ણની લંબાઈ l હોય તો,

l = AB = AP + BP

$\therefore$ $l = a$ cosecθ + b secθ

$\therefore \dfrac{dl}{d\theta} = -a\,\text{cosec}\,\theta\,\cot\theta + b\sec\theta\,\tan\theta$

તથા $\dfrac{d^2l}{d\theta^2} = a\,\text{cosec}^3\theta + a\,\text{cosec}\,\theta\,\cot^2\theta + b\sec^3\theta + b\sec\theta\,\tan^2\theta$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે, $\dfrac{dl}{d\theta} = 0$

$\therefore -a\,\text{cosec}\theta\,\cot\theta + b\sec\theta\,\tan\theta = 0$

$\therefore \dfrac{-a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0$

$\therefore -a\cos^3\theta + b\sin^3\theta = 0$

$\therefore \tan^3\theta = \dfrac{a}{b}$

$\therefore \tan\theta = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

27. **જે બિંદુઓ આગળ (અથવા xની જે કિંમતો આગળ) વિધેય $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$, (a) સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય (b) સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય (c) નતિબિંદુ ધરાવે તે બિંદુઓ (અથવા xની કિંમતો) શોધો.**

➡ $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$

$\therefore f'(x) = (x-2)^4\, 3(x+1)^2 + 4(x-2)^3(x+1)^3$

$= (x-2)^3(x+1)^2\, [3(x-2) + 4(x+1)]$

$= (x-2)^3(x+1)^2\, [7x-2]$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે $f'(x) = 0$

$\therefore (x-2)^3(x+1)^2\,(7x-2) = 0$

$\therefore x-2 = 0,\ x+1 = 0,\ 7x-2 = 0$

$\therefore x = 2,\ x = -1,\ x = \dfrac{2}{7}$

$x = 2$ આગળ :

જ્યારે $x < 2$ હોય ત્યારે,

$f'(x) = (-ve)\ (+ve)\ (+ve) = (-ve)$

જ્યારે $x > 2$ હોય ત્યારે,

$f'(x) = (+ve)\ (+ve)\ (+ve) = (+ve)$

આમ, $f'(x)$ એ $(-ve)$ થી $(+ve)$ નિશાની બદલે છે.

$\therefore f(x)$ એ $x = 2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે છે.

$x = -1$ આગળ :

જ્યારે $x < -1$ હોય ત્યારે,

$f'(x) = (-ve)\ (+ve)\ (-ve) = (+ve)$

જ્યારે $x > -1$ હોય ત્યારે,

$f'(x) = (-ve)\ (+ve)\ (-ve) = (+ve)$

$\therefore x = -1$ આગળ $f'(x)$નું ચિહ્ન બદલાતું નથી.

$\therefore x = -1$ આગળ $f(x)$ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળતું નથી.

$x = \dfrac{2}{7} = 0.28$ આગળ :

જ્યારે $x < 0.28$ હોય ત્યારે,

$f'(x) = (-ve)\ (+ve)\ (-ve) = +ve$

જ્યારે $x > 0.28$ હોય ત્યારે,

$f'(x) = (-ve)\ (+ve)\ (+ve) = -ve$

આમ, $x = \dfrac{2}{7}$ આગળ $f'(x)$ $+ve$ થી $-ve$ બને છે.

$\therefore x = \dfrac{2}{7}$ આગળ વિધેય $f(x)$ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે છે.

$\therefore f(x)$ એ $x = \dfrac{2}{7}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ $x = 2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ તથા $x = -1$ આગળ નતિબિંદુ ધરાવે છે.

28. **વિધેય $f(x) = \cos^2 x + \sin x,\ x \in [0, \pi]$નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.**

➡ $f(x) = \cos^2 x + \sin x,\ x \in [0, \pi]$

$f'(x) = -2\cos x \sin x + \cos x$

$= \cos x\, [1 - 2\sin x]$

મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે, $f'(x) = 0$

$\therefore \cos x\, [1 - 2\sin x] = 0$

$\therefore \cos x = 0,\ \sin x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

હવે $f(x) = \cos^2 x + \sin x$

$\therefore f(0) = \cos^2 0 + \sin 0 = 1$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$\therefore f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\therefore$ વિધેયનું નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય $= \frac{5}{4}$

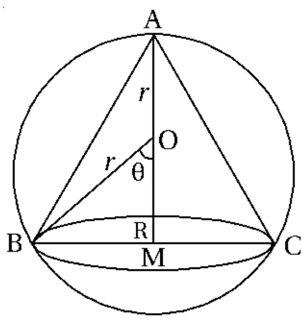
તથા નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 1$

29. r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ $\frac{4r}{3}$ છે તેમ સાબિત કરો.

➥ r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકની અંતર્ગત એક શંકુ આવેલો છે. ધારો કે ગોલક નું કેન્દ્ર O છે.

$\overline{BC}$ એ શંકુનાં પાયાનો વ્યાસ છે.

$\overline{AM}$ એ શંકુની ઊંચાઈ છે.



$OA = OB = r$

ધારો કે $BM = R$

$= $ શંકુની ત્રિજ્યા

$AM = H$

ધારો કે, $\angle BOM = \theta$

$R = r\sin\theta$ તથા $AM = H = AO + OM$

$= r + r\cos\theta$

$= r(1 + \cos\theta)$

હવે શંકુનું ઘનફળ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$\therefore V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sin^2\theta \cdot r(1 + \cos\theta)$

$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2\theta\,(1 + \cos\theta)$

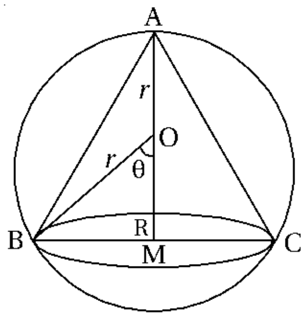
$\therefore \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{3}\pi r^3 \left[2\sin\theta\cos\theta\,(1 + \cos\theta) - \sin^3\theta\right]$

$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\theta \left[2\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]$

$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\theta \left[2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta\right]$

$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\theta\,[3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1]$

➥ r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકની અંતર્ગત એક શંકુ આવેલો છે. ધારો કે ગોલકનું કેન્દ્ર O છે.
$\overline{BC}$ એ શંકુનાં પાયાનો વ્યાસ છે.
$\overline{AM}$ એ શંકુની ઊંચાઈ છે.



$OA = OB = r$

ધારો કે $BM = R$
$= $ શંકુની ત્રિજ્યા

$AM = H$

ધારો કે, $\angle BOM = \theta$

$R = r\sin\theta$ તથા $AM = H = AO + OM$
$= r + r\cos\theta$
$= r(1 + \cos\theta)$

હવે શંકુનું ઘનફળ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sin^2\theta \cdot r(1 + \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2\theta\,(1 + \cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{3}\pi r^3 \left[2\sin\theta\cos\theta\,(1 + \cos\theta) - \sin^3\theta\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\theta \left[2\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\theta \left[2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\theta\,[3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1]$$

30. ધારો કે f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) > 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે.

➥ વિધેય $f(x)$ એ $[a, b]$ ઉપર વ્યાખ્યાયિત છે.

$\forall x \in [a, b]$ માટે $f'(x) > 0$

ધારો કે $x_1, x_2 \in [a, b]$ તથા $x_1 < x_2$

$\therefore [x_1, x_2]$ એ $[a, b]$નો ઉપઅંતરાલ થશે.

$f(x)$ એ (a, b)માં વિકલનીય છે.

તથા $[x_1, x_2] \subset (a, b)$

$\therefore f(x)$ એ $[x_1, x_2]$માં સતત તથા (x_1, x_2)માં વિકલનીય વિધેય છે.

$\therefore C \in (x_1, x_2)$ મળે કે જેથી

$$f'(C) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{........(i)}$$

પરંતુ $\forall x \in [a, b]$ માટે $f'(x) > 0$ છે.

$\therefore f'(C) > 0$ થશે.

$\therefore \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

$\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad (\because x_2 - x_1 > 0)$

$\therefore f(x_2) > f(x_1)$

આમ, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

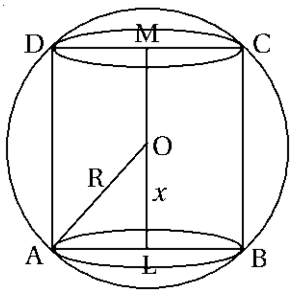
$\therefore f(x)$ એ વધતું વિધેય છે.

x_1, x_2 એ (a, b)નાં સ્વૈર બિંદુઓ છે.

$\therefore f(x)$ એ (a, b)માં વધતું વિધેય છે.

31. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ છે તેમ સાબિત કરો. આ નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

➡ R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત નળાકાર આવેલો છે. સ્પષ્ટ છે કે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ બને તે માટે નળાકારની અક્ષ એ ગોલકનો વ્યાસ હોવો જોઈએ.



ધારો કે ગોલકનું કેન્દ્ર O છે.

OA = R ધારો કે OL = x

જ્યાં ML એ ABCD નળાકારની અક્ષ છે.

ML = 20L = $2x$

ΔOLA કાટકોણ ત્રિકોણ થશે.

$\therefore OA^2 = AL^2 + OL^2$

$\therefore R^2 = AL^2 + x^2$

$\therefore AL = \sqrt{R^2 - x^2}$

નળાકાર ABCDની ઊંચાઈ h = ML = $2x$ થશે.

પાયાની ત્રિજ્યા $r = AL = \sqrt{R^2 - x^2}$ થશે.

જ્યાં R = ગોલકની ત્રિજ્યા = અચળ

નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi r^2 h$

$\therefore V = \pi (R^2 - x^2)\, 2x$

$\therefore V = 2\pi (R^2 x - x^3)$

$\therefore \dfrac{dV}{dx} = 2\pi (R^2 - 3x^2)$

તથા $\dfrac{d^2V}{dx^2} = 2\pi (0 - 6x) = -12\pi x$

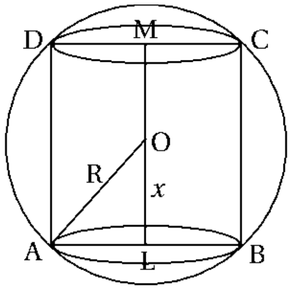
હવે મહત્તમ કે ન્યૂનતમ ઘનફળ માટે, $\dfrac{dV}{dx} = 0$

$\therefore 2\pi (R^2 - 3x^2) = 0$

$\therefore R^2 - 3x^2 = 0$

$\therefore x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

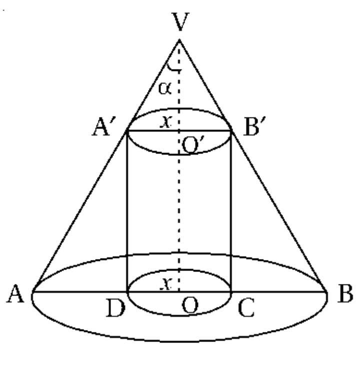
➡ R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત નળાકાર આવેલો છે. સ્પષ્ટ છે કે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ બને તે માટે નળાકારની અક્ષ એ ગોલકનો વ્યાસ હોવો જોઈએ.



ધારો કે ગોલકનું કેન્દ્ર O છે.
OA = R ધારો કે OL = x
જ્યાં ML એ ABCD નળાકારની અક્ષ છે.
ML = 20L = $2x$
ΔOLA કાટકોણ ત્રિકોણ થશે.
$\therefore OA^2 = AL^2 + OL^2$
$\therefore R^2 = AL^2 + x^2$
$\therefore AL = \sqrt{R^2 - x^2}$
નળાકાર ABCDની ઊંચાઈ h = ML = $2x$ થશે.
પાયાની ત્રિજ્યા $r = AL = \sqrt{R^2 - x^2}$ થશે.
જ્યાં R = ગોલકની ત્રિજ્યા = અચળ
નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi r^2 h$
$\therefore V = \pi (R^2 - x^2)\, 2x$
$\therefore V = 2\pi (R^2x - x^3)$
$\therefore \frac{dV}{dx} = 2\pi (R^2 - 3x^2)$
તથા $\frac{d^2V}{dx^2} = 2\pi (0 - 6x) = -12\,\pi x$
હવે મહત્તમ કે ન્યૂનતમ ઘનફળ માટે, $\frac{dV}{dx} = 0$
$\therefore 2\pi (R^2 - 3x^2) = 0$
$\therefore R^2 - 3x^2 = 0$
$\therefore x = \frac{R}{\sqrt{3}}$

32. h ઊંચાઈવાળા અને અર્ધશિરઃકોણ α હોય, તેવા લંબવૃત્તીય શંકુમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ એ શંકુની ઊંચાઈ કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તેમ સાબિત કરો અને સાબિત કરો કે નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$ છે.

➡ VAB શંકુની અંતર્ગત નળાકાર A'B'CD આવેલો છે. શંકુની ઊંચાઈ VO = h આપેલ છે. શંકુનો અર્ધ શીર્ષકોણ $\angle AVO = \alpha$ છે.



ધારો કે નળાકારની ત્રિજ્યા x છે.
$\therefore$ A'O' = OD = x

$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

$\therefore \angle AVO = \angle A'VO' = \alpha$

$\Delta A'O'V$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \tan\alpha = \frac{A'O'}{VO'} = \frac{x}{VO'}$

$\therefore VO' = \frac{x}{\tan\alpha} = x\cot\alpha$

હવે નળાકારની ઊંચાઈ $OO' = VO - VO'$

$= h - x\cot\alpha$

નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi(OD)^2\ (OO')$

$= \pi x^2 (h - x\cot\alpha)$

$= \pi hx^2 - \pi x^3 \cot\alpha$

$\frac{dV}{dx} = 2\pi hx - 3\pi x^2\cot\alpha$

તથા $\frac{d^2V}{dx^2} = 2\pi h - 6\pi x\cot\alpha$

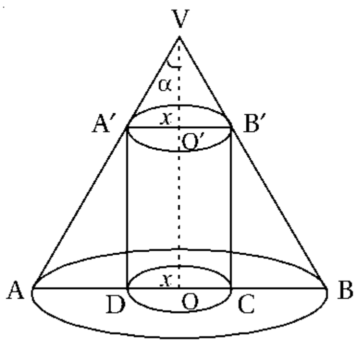
હવે મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટે $\frac{dV}{dx} = 0$

$\therefore 2\pi hx - 3\pi x^2\cot\alpha = 0$

$\therefore \pi x(2h - 3x\cot\alpha) = 0$

પરંતુ $x \neq 0 \quad \therefore 2h - 3x\cot\alpha = 0$

➥ VAB શંકુની અંતર્ગત નળાકાર A'B'CD આવેલો છે. શંકુની ઊંચાઈ $VO = h$ આપેલ છે. શંકુનો અર્ધ શીર્ષકોણ $\angle AVO = \alpha$ છે.



ધારો કે નળાકારની ત્રિજ્યા x છે.

$\therefore A'O' = OD = x$

$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

$\therefore \angle AVO = \angle A'VO' = \alpha$

$\Delta A'O'V$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \tan\alpha = \frac{A'O'}{VO'} = \frac{x}{VO'}$

$\therefore VO' = \frac{x}{\tan\alpha} = x\cot\alpha$

હવે નળાકારની ઊંચાઈ $OO' = VO - VO'$

$= h - x\cot\alpha$

નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi(OD)^2\ (OO')$

$= \pi x^2 (h - x\cot\alpha)$

$= \pi hx^2 - \pi x^3 \cot\alpha$

$\frac{dV}{dx} = 2\pi hx - 3\pi x^2\cot\alpha$

તથા $\frac{d^2V}{dx^2} = 2\pi h - 6\pi\, x \cot\alpha$

હવે મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટે $\frac{dV}{dx} = 0$

$\therefore\ 2\pi\, hx - 3\pi x^2 \cot\alpha = 0$

$\therefore\ \pi\, x\, (2h - 3x \cot\alpha) = 0$

પરંતુ $x \neq 0 \quad \therefore\ 2h - 3x \cot\alpha = 0$

33. **શંકુની ત્રિજ્યા 4 સેમી/સેના દરથી વધે છે. તેની ઊંચાઈ 3 સેમી/સેના દરથી ઘટે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 3 સેમી અને ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે તેની તિર્યક સપાટીનો વૃદ્ધિ દર શોધો.**

➠ **20π સેમી^{2}/સે**

34. **સાબિત કરો કે, નિશ્ચિત ક્ષેત્રફળવાળા લંબચોરસોમાં ચોરસની પરિમિતિ ન્યૂનતમ હોય છે.**

➠ **સ્વપ્રયત્ને**

35. **રેખીય ગતિ કરતાં પદાર્થકણનું સૂત્ર, $S = \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 7$ છે. તો તેનો પ્રવેગ ક્યારે ન્યૂનતમ થાય ?**

➠ $t = 2$ સમયે

36. **વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$નો મહત્તમ ઢાળ કેટલો ? ક્યા બિંદુએ મળે ?**

➠ મહત્તમ ઢાળ = 1, (1, –23) બિંદુએ

37. **શંકુ આકારની ગળણીનાં નીચેનાં છિદ્રમાંથી 5 સેમી^{3}/સેના દરથી પાણી ટપકી રહ્યું છે. પાણીથી બનતા શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 4 સેમી છે. શંકુનાં અર્ધશીર્ષકોણનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે. તો પાણીથી બનતાં શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો.**

➠ **$\frac{5}{2\sqrt{3}\,\pi}$ સેમી/સે**