બનાવે છે. t સમયે OPનો X-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપને

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$T = 30$ s માટે,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

આને $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$ લખતાં, અને સમીકરણ (14.4) સાથે સરખાવતા, આપણને જાણવા મળે છે કે, આ કંપવિસ્તાર B, આવર્તકાળ 30 s અને પ્રારંભિક કળા $-\frac{\pi}{2}$ની સ.આ.ગ (SHM) છે. ◀

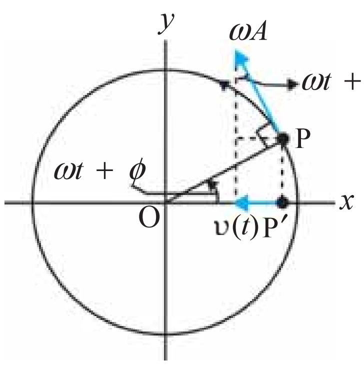
14.5 સરળ આવર્તગતિમાં વેગ અને પ્રવેગ (VELOCITY AND ACCELERATION IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતા કોઈ એક કણની ઝડપ υ એ આ વર્તુળની ત્રિજ્યા A ના તેની ω કોણીય ઝડપ ગણી હોય છે.

$$\upsilon = \omega A \qquad (14.8)$$

કોઈ પણ t સમયે વેગ **υ**ની દિશા એ આ સમયે કણ જે સ્થાને છે તે વર્તુળ પરના બિંદુના સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 14.11ની ભૂમિતિ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે, પ્રક્ષેપ કણ P'નો t સમયે વેગ

$$\upsilon(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \text{ છે.} \qquad (14.9)$$



*આકૃતિ 14.11 કણ P'નો વેગ $\upsilon(t)$, એ સંદર્ભ કણ Pના વેગ **υ**નો પ્રક્ષેપ છે.*

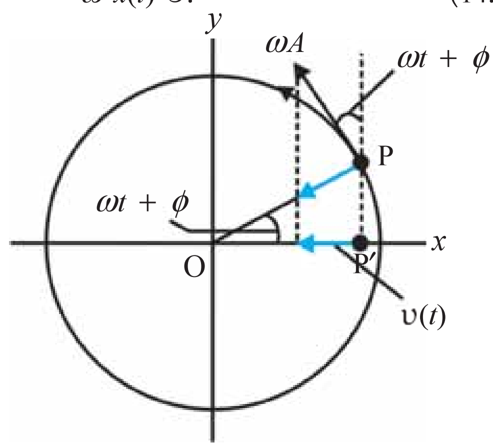
જ્યાં ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે $\upsilon(t)$ની દિશા એ ધન X-અક્ષની વિરુદ્ધ દિશા છે. સમીકરણ (14.9) સ.આ.ગ. કરતાં કોઈ એક કણનો તાત્ક્ષણિક વેગ આપે છે, જ્યાં સ્થાનાંતરને સમીકરણ (14.4) વડે આપવામાં આવે છે. સમીકરણ (14.4)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં, આપણે કોઈ પણ ભૌમિતિક દલીલ વગર પણ આ સમીકરણ મેળવી શકીએ છીએ.

$$\upsilon(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

સ.આ.ગ. કરતાં કોઈ કણનો તત્કાલિન પ્રવેગ મેળવવા માટે પણ આપણે આ જ રીતે સંદર્ભ વર્તુળની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતાં P કણના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું માન υ^2/A કે $\omega^2 A$ છે તથા તે કેન્દ્ર તરફ દિશામાન છે, એટલે કે દિશા PO તરફ છે. આમ પ્રક્ષેપ કણ P'નો તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ (આકૃતિ 14.12 જુઓ).

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \text{ છે.} \qquad (14.11)$$



*આકૃતિ 14.12 કણ P'નો પ્રવેગ $a(t)$એ સંદર્ભ કણ Pના પ્રવેગ **a**નો પ્રક્ષેપ છે.*

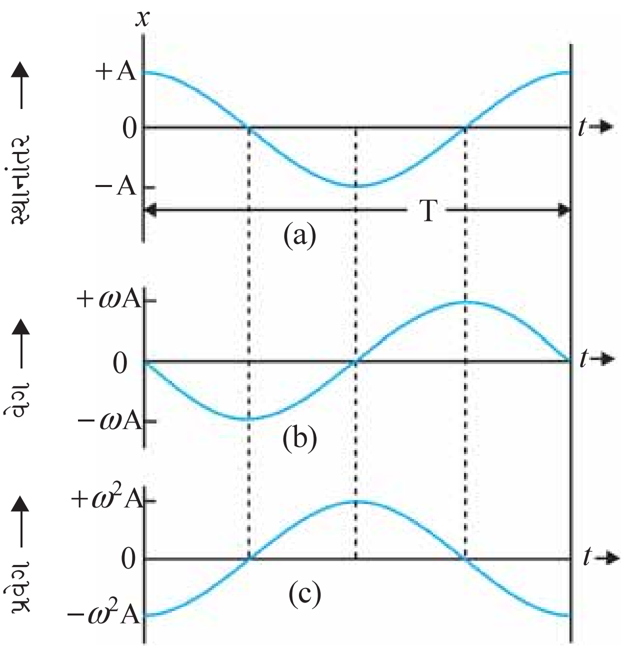
સમીકરણ (14.11) એ સ.આ.ગ. કરતાં કણનો પ્રવેગ દર્શાવે છે. સમીકરણ (14.9) દ્વારા આપવામાં આવતા વેગ $\upsilon(t)$ નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં સીધું જ ફરીથી આ સમીકરણ મેળવી શકાય છે :

$$a(t) = \frac{d}{dt}\upsilon(t) \qquad (14.12)$$

આપણે સમીકરણ (14.11) પરથી એક મહત્ત્વપૂર્ણ પરિણામ નોંધીએ કે સ.આ.ગ.માં પ્રવેગ એ સ્થાનાંતરને સમપ્રમાણ હોય છે. $x(t) > 0$ માટે $a(t) < 0$ અને $x(t) < 0$ માટે $a(t) > 0$. આમ, $-A$ અને Aની વચ્ચેના x નાં કોઈ પણ મૂલ્ય માટે પ્રવેગ $a(t)$ એ હંમેશાં કેન્દ્ર તરફ જ દિશામાન હોય છે.

સરળતા માટે, $\phi = 0$ મૂકો અને $x(t)$, $\upsilon(t)$ અને $a(t)$નાં સમીકરણો લખો.

$x(t) = A \cos \omega t$, $\upsilon(t) = -\omega A \sin \omega t$ અને $a(t) = -\omega^2 A \cos \omega t$. આને અનુરૂપ આલેખો આકૃતિ 14.13માં દર્શાવેલ છે. આ બધી જ રાશિઓ સમય સાથે sine પ્રકારે (જ્યાવર્તિય - sinusoidally) બદલાય છે; ફક્ત તેઓના મહત્તમોમાં ફેરફાર છે અને આ અલગઅલગ આલેખોની કળા જુદી-જુદી છે. x એ $-A$ થી Aની વચ્ચે; $\upsilon(t)$ એ $-\omega A$ થી ωAની વચ્ચે અને $a(t)$ એ $-\omega^2 A$થી $\omega^2 A$ની વચ્ચે બદલાય છે. સ્થાનાંતરના આલેખની સાપેક્ષે, વેગના આલેખમાં કળા-તફાવત $\pi/2$ છે અને પ્રવેગના આલેખમાં કળા-તફાવત π છે.



આકૃતિ 14.13 *સરળ આવર્તગતિ કરતા કોઈ એક કણના સ્થાનાંતર વેગ અને પ્રવેગ સમાન આવર્તકાળનાં છે પણ કળામાં ભિન્ન છે.*

> **ઉદાહરણ 14.5** એક પદાર્થ
>
> $$x = 5 \cos [2\pi t + \pi/4]$$
>
> સમીકરણ (SI એકમોમાં) અનુસાર સ.આ.ગ. કરે છે. $t = 1.5$ s માટે આ પદાર્થના (a) સ્થાનાંતર (b) ઝડપ અને (c) પ્રવેગની ગણતરી કરો.

ઉકેલ આ પદાર્થની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 2\pi$ s^{-1} અને તેનો આવર્તકાળ T = 1 s છે.

$t = 1.5$ s માટે

(a) સ્થાનાંતર $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$
$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \pi/4)]$
$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$
$= -3.535 \text{ m}$

(b) સમીકરણ (14.9)નો ઉપયોગ કરતાં આ પદાર્થની ઝડપ
$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$
$= -(5.0 \text{ m}) (2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(3\pi + \pi/4)]$
$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$
$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) સમીકરણ (14.11)નો ઉપયોગ કરતાં આ પદાર્થનો પ્રવેગ
$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times$ સ્થાનાંતર
$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$
$= 140 \text{ m s}^{-2}$ ◀

14.6 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ (FORCE LAW FOR SIMPLE HARMONIC MOTION)

ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ અને સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણના પ્રવેગના સમીકરણ (14.11)નો ઉપયોગ કરતાં સ.આ.ગ. કરતાં m દ્રવ્યમાનના કણ પર લાગતું બળ

$$\text{F}(t) = ma$$
$$= -m\omega^2 x(t)$$

છે. એટલે કે $\text{F}(t) = -k\, x(t)$ (14.13)

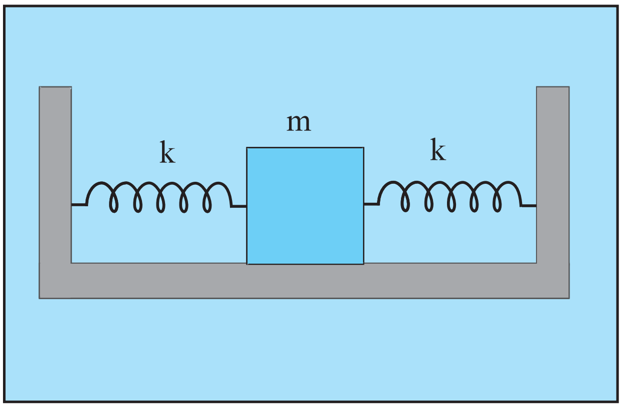
જ્યાં $k = m\omega^2$ (14.14a)

અથવા $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (14.14b)

પ્રવેગની જેમ, આ બળ પણ હંમેશાં મધ્યમાન સ્થાનની દિશા તરફનું હોય છે. તેથી તેને સ.આ.ગ.માં ક્યારેક પુનઃસ્થાપક બળ (Restoring Force) પણ કહેવામાં આવે છે. અત્યાર સુધીની ચર્ચાની સમીક્ષા કરીએ તો સરળ આવર્તગતિને બે સમતુલ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. સ્થાનાંતર માટેના સમીકરણ (14.4) વડે કે તેના બળના નિયમ કે જે સમીકરણ (14.13) વડે આપવામાં આવે છે. સમીકરણ (14.4)થી સમીકરણ (14.13) તરફ જવા તેનું બે વખત વિકલન કરવું પડે. તેવી જ રીતે, સમીકરણ (14.13)નું બે વખત સંકલન કરતાં આપણને પાછું સમીકરણ (14.4) મળે.

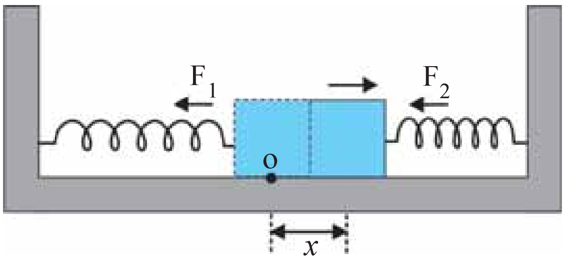
નોંધો કે સમીકરણ (14.13)માનું બળ $x(t)$ને (રેખીય) સમપ્રમાણમાં ચલે છે. કોઈ કણ કે જે આવા બળની અસરમાં દોલન કરતો હોય, તો તેને રેખીય આવર્ત દોલક કહેવામાં આવે છે. વાસ્તવિક જગતમાં, આ બળ x^2, x^3 વગેરે સાથે ચલિત નાની વધારાની પદાવલિઓ પણ ધરાવે છે. ત્યારે આવાં દોલકોને અરેખીય દોલકો (NonLinear Oscilliators) કહેવાય છે.

> **ઉદાહરણ 14.6** આકૃતિ 14.14માં બતાવ્યા પ્રમાણે k સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી બે સમાન સ્પ્રિંગો m દ્રવ્યમાન ના બ્લૉક સાથે અને સ્થિર આધાર સાથે જોડાયેલ છે. બતાવો કે જ્યારે આ દ્રવ્યમાન તેની સંતુલન સ્થિતિથી કોઈ પણ બાજુ સ્થાનાંતરિત (વિસ્થાપિત) થાય, ત્યારે તે એક સરળ આવર્તગતિ કરે છે. આ દોલનોનો આવર્તકાળ શોધો.



આકૃતિ 14.14

ઉકેલ આકૃતિ 14.15માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંતુલન સ્થિતિની જમણી બાજુએ ધારો કે, આ દ્રવ્યમાનનું નાના અંતર x જેટલું સ્થાનાંતર થાય છે.



આકૃતિ 14.15

આ પરિસ્થિતિમાં ડાબી બાજુની સ્પ્રિંગ x લંબાઈથી વિસ્તરશે (ખેંચાશે) અને જમણી બાજુની સ્પ્રિંગ એ આ જ લંબાઈથી સંકુચિત થાય છે. આ દ્રવ્યમાન પર લાગતા બળો છે.

$F_1 = -kx$ (ડાબી બાજુ પર સ્પ્રિંગ દ્વારા લગાડવામાં આવતું બળ, જે દ્રવ્યમાનને મધ્યમાન સ્થાન તરફ ખેંચવાનો પ્રયાસ કરે છે.)

$F_2 = -kx$ (જમણી બાજુ પર સ્પ્રિંગ દ્વારા લગાડવામાં આવતું બળ, જે દ્રવ્યમાનને મધ્યમાન સ્થાન તરફ ધકેલવાનો પ્રયાસ કરે છે.)

આમ, દ્રવ્યમાન પર લાગતું ચોખ્ખું બળ F છે,

$F = -2\ kx$

આમ, દ્રવ્યમાન પર લાગતું આ બળ તેના સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં અને મધ્યમાન સ્થાન તરફ દિશામાન છે, માટે આ કણની ગતિએ સરળ આવર્તગતિ છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ છે,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

◀

14.7 સરળ આવર્તગતિમાં ઊર્જા (ENERGY IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

સરળ આવર્તગતિ કરતા કોઈ પણ કણની ગતિઊર્જા (kinetic energy) અને સ્થિતિઊર્જા (potential energy) શૂન્ય અને તેમનાં મહત્તમ મૂલ્યો વચ્ચે બદલાતી રહે છે.

પરિચ્છેદ 14.5માં આપણે જોયું છે કે સ.આ.ગ. કરતા કણનો વેગ એ સમયનું આવર્ત વિધેય છે. તે સ્થાનાંતરના અંતિમ સ્થાનોએ શૂન્ય છે. તેથી આવા કણની ગતિઊર્જા (K)ને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 (\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

જે સમયનું આવર્ત વિધેય પણ છે, જ્યારે સ્થાનાંતર મહત્તમ હોય છે ત્યારે તે શૂન્ય હોય છે અને જ્યારે કણ મધ્યમાન સ્થાન પર હોય છે ત્યારે તે મહત્તમ હોય છે. નોંધો કે Kમાં υની નિશાનીનો કોઈ અર્થ નથી, તેથી Kનો આવર્તકાળ T/2 છે.

સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની સ્થિતિઊર્જા (PE) શું છે ? પ્રકરણ 6માં, આપણે જોયું છે કે સ્થિતિઊર્જાની સંકલ્પના ફક્ત સંરક્ષી બળો (Conservative Forces) માટે જ શક્ય છે. સ્પ્રિંગ બળ $F = -kx$ એ સંરક્ષી બળ છે, જેની સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિઊર્જા

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (14.16)$$

છે. તેથી સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની સ્થિતિઊર્જા

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 (\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

આમ સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણની સ્થિતિઊર્જા પણ આવર્ત છે, જેનો આવર્તકાળ T/2 છે, જે મધ્યમાન સ્થાને શૂન્ય છે અને મહત્તમ સ્થાનાંતરો માટે મહત્તમ છે.

સમીકરણ (14.15) અને (14.17) પરથી તંત્રની કુલ ઊર્જા E છે :

$$E = U + K$$

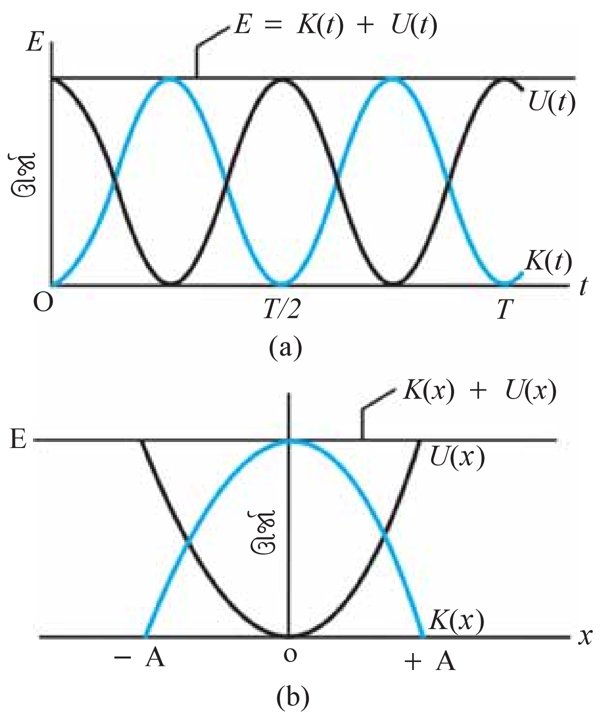
$$= \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} kA^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)]$$

ત્રિકોણમિતિના જાણીતા સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં કૌંસમાં રહેલ રાશિનું માન એક છે. આમ,

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \tag{14.18}$$

આમ, કોઈ પણ દોલકની કુલ યાંત્રિકઊર્જા એ સમયથી સ્વતંત્ર છે જે કોઈ પણ સંરક્ષી બળોને આધીન ગતિ માટે અપેક્ષિત છે. રેખીય સરળ આવર્ત દોલકની સ્થિતિ અને ગતિઊર્જા, સમય અને સ્થાનાંતર પર આધારિત છે એ આકૃતિ 14.16માં બતાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ 14.16 (a) *સ.આ.ગ. કરતા કોઈ એક કણ માટે ગતિઊર્જા, સ્થિતિઊર્જા અને કુલ ઊર્જાને સમયના વિધેય તરીકે [(a)માં દર્શાવેલ છે] અને સ્થાનાંતરના વિધેય તરીકે [(b)માં દર્શાવેલ છે]. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બંનેનું T/2 સમય બાદ પુનરાવર્તન થાય છે. કુલ ઊર્જા દરેક t કે x માટે અચળ રહે છે.*

આકૃતિ 14.16માં એ નિરીક્ષણ કરો કે સ.આ.ગ.માં ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા એ બંને હમેશાં ધન છે. ગતિઊર્જા ખરેખર ક્યારે પણ ઋણ હોતી નથી કારણ કે તે ઝડપના વર્ગના પ્રમાણમાં ચલે છે. સ્થિતિઊર્જાના અજ્ઞાત અચળાંકની પસંદગીના કારણે સ્થિતિઊર્જા ધન હોય છે. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા એ બંને પ્રત્યેક આવર્તકાળ દરમિયાન બે વખત અંતિમ મહત્તમ બને છે. $x = 0$ માટે, બધી જ ઊર્જા ગતિઊર્જા છે અને સીમાઓ $x = \pm A$ માટે તે બધી જ સ્થિતિઊર્જા છે. ગતિ દરમિયાન, આ ચરમ સ્થાનો વચ્ચે, સ્થિતિઊર્જાના ઘટવાથી ગતિઊર્જામાં વધારો થાય છે અથવા આનાથી ઊલટું થતું હોય છે.

ઉદાહરણ 14.7 *એક બ્લૉક જેનું દ્રવ્યમાન 1 kg છે તેને સ્પ્રિંગ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્પ્રિંગનો સ્પ્રિંગ અચળાંક 50 N m^{-1} છે. આ બ્લૉકને ઘર્ષણરહિત સપાટી પર $t = 0$ સમયે તેના સંતુલન સ્થાન $x = 0$ આગળ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ખેંચીને $x = 10$ cm અંતરે લાવવામાં આવે છે. જ્યારે તે મધ્યમાન સ્થિતિથી 5 સેમી દૂર છે ત્યારે આ બ્લૉકની ગતિઊર્જા, સ્થિતિઊર્જા અને કુલ ઊર્જાની ગણતરી કરો.*

ઉકેલ આ બ્લૉક સ.આ.ગ. કરે છે, સમીકરણ (14.14b) પ્રમાણે, તેની કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

$$\omega = \sqrt{\frac{50 \text{ N m}^{-1}}{1 \text{ kg}}}$$

$$= 7.07 \text{ rad s}^{-1}$$

તેથી કોઈ પણ t સમયે, તેના સ્થાનાંતરને

$$x(t) = 0.1 \cos (7.07t)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જ્યારે બ્લૉક તેના મધ્યમાન સ્થળેથી 5 cm દૂર હશે ત્યારે આપણી પાસે

$0.05 = 0.1 \cos (7.07t)$

અથવા $\cos (7.07t) = 0.5$ અને તેથી

$$\sin (7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

આ બ્લૉકનો $x = 5$ cm પરનો વેગ

$= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{ m s}^{-1}$

$= 0.61 \text{ m s}^{-1}$

તેથી આ બ્લૉકની ગ.ઊ.

$= \frac{1}{2} m \upsilon^2$

$= \frac{1}{2} [1 \text{ kg} \times (0.6123 \text{ m s}^{-1})^2]$

$= 0.19$ J

આ બ્લૉકની સ્થિતિઊર્જા

$= \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2} (50 \text{ N m}^{-1} \times 0.05 \text{ m} \times 0.05 \text{ m})$

$= 0.0625$ J

$x = 5$ cm પર બ્લૉકની કુલ ઊર્જા

$=$ K. E. + P. E.

$= 0.25$ J

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, મહત્તમ સ્થાનાંતર પર ગતિઊર્જા શૂન્ય છે અને તેથી પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા એ સ્થિતિઊર્જા બરાબર હોય છે. તેથી, પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા

$= \frac{1}{2} (50 \text{ N m}^{-1} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m})$

$= 0.25$ J

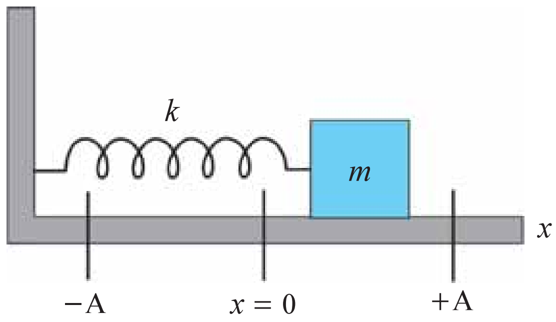
આ ઊર્જા 5 cmના સ્થાનાંતર પર બંને ઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. આ ઊર્જા-સંરક્ષણ સિદ્ધાંતનું સમર્થન કરનારું છે. ◀

14.8 સરળ આવર્તગતિ કરતાં કેટલાંક તંત્રો (SOME SYSTEMS EXECUTING SIMPLE HARMONIC MOTION)

સંપૂર્ણ શુદ્ધ **સરળ આવર્તગતિ**નાં કોઈ ભૌતિક ઉદાહરણો નથી. વ્યવહારમાં આપણે ચોક્કસ શરતોને આધિન લગભગ સરળ આવર્તગતિ કરતાં તંત્રોને જોયાં છે. આ વિભાગના અનુગામી ભાગમાં, આપણે આવાં કેટલાંક તંત્રો દ્વારા કરવામાં આવતી ગતિની ચર્ચા કરીશું.

14.8.1 એક સ્પ્રિંગને લીધે દોલનો (Oscillations due to a Spring)

સરળ આવર્તગતિનું સરળ દેખીતું ઉદાહરણ એ આકૃતિ 14.17માં બતાવ્યા પ્રમાણે કોઈ દૃઢ દીવાલ સાથે જોડેલ સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ m દળના કોઈ એક બ્લૉકનાં નાનાં દોલનો છે. આ બ્લૉકને ઘર્ષણરહિત સમક્ષિતિજ સપાટી પર મૂકવામાં આવેલ છે. જો બ્લૉકને એક બાજુએ ખેંચીને છોડવામાં આવે તો તે પછી મધ્યમાન સ્થાનને અનુલક્ષીને આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે. અહીં $x = 0$ એ જ્યારે સ્પ્રિંગ સંતુલનમાં હોય ત્યારે બ્લૉકના કેન્દ્રની સ્થિતિ દર્શાવે છે. $-A$ અને $+A$ વડે દર્શાવેલ



આકૃતિ 14.17 *એક રેખીય સરળ આવર્ત દોલક જે સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ m દ્રવ્યમાનનો એક બ્લૉક ધરાવે છે. આ બ્લૉક ઘર્ષણરહિત સપાટી પર ગતિ કરે છે. આ બ્લૉકને જ્યારે ખેંચીને કે ધકેલીને છોડી દેતાં, તે સરળ આવર્તગતિ કરે છે.*

સ્થાનો, મધ્યસ્થાન સ્થાનેથી ડાબી અને જમણી તરફના મહત્તમ સ્થાનાંતરો દર્શાવે છે. આપણે પહેલાં શીખ્યાં જ છીએ કે સ્પ્રિંગને વિશિષ્ટ ગુણધર્મો છે, જેને સૌ પ્રથમ અંગ્રેજી ભૌતિકશાસ્ત્રી રોબર્ટ હૂક દ્વારા શોધવામાં આવ્યા હતા. તેમણે બતાવ્યું હતું કે આવી પ્રણાલીને જ્યારે વિરુપિત કરવામાં આવે છે ત્યારે તેના પર પુનઃસ્થાપક બળ લાગે છે, જેનું માન, વિરૂપણ અથવા સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં છે અને તે વિરુદ્ધ દિશામાં કાર્ય કરે છે. તેને હૂકના નિયમ (પ્રકરણ 9) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સ્પ્રિંગની લંબાઈની તુલનામાં નાના સ્થાનાંતર માટે તે સાચો જળવાય છે. કોઈ પણ t સમયે, જો મધ્યમાન સ્થાનેથી બ્લૉકનું સ્થાનાંતર x હોય, તો બ્લૉક પર કાર્યરત પુનઃસ્થાપક બળ F

$$F(x) = -kx \qquad (14.19)$$

છે. સપ્રમાણતાના અચળાંક, kને સ્પ્રિંગ અચળાંક કહેવાય છે, જેનું મૂલ્ય સ્પ્રિંગની સ્થિતિસ્થાપકતાના ગુણધર્મો વડે અંકુશિત થાય છે. કડક સ્પ્રિંગ માટે kનું મૂલ્ય મોટું અને કોઈ મૃદુ (નરમ) સ્પ્રિંગ માટે kનું મૂલ્ય નાનું હોય છે. સમીકરણ (14.19) એ સ.આ.ગ.ના બળના નિયમ જેવું જ છે અને તેથી આ પ્રણાલી સરળ આવર્તગતિ કરે છે. સમીકરણ (14.14) પરથી આપણને

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (14.20)$$

મળે છે અને દોલકના આવર્તકાળ, Tને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (14.21)$$

દ્વારા આપવામાં આવે છે.

સખત સ્પ્રિંગ મોટા મૂલ્યનો k (સ્પ્રિંગ અચળાંક) ધરાવે છે. સમીકરણ (14.20) અનુસાર, નાના દ્રવ્યમાન mનો કોઈ એક બ્લૉક કોઈ કડક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ હોય, તો તે મોટી દોલન આવૃત્તિ ધરાવશે, જે ભૌતિકીય ધારણા પ્રમાણે છે.

▶ *ઉદાહરણ 14.8* એક 500 N m^{-1} સ્પ્રિંગ અચળાંક ધરાવતી સ્પ્રિંગની સાથે 5 kg નો કૉલર (પટ્ટો) જોડાયેલ છે. તે ઘર્ષણ વગર સમક્ષિતિજ સળિયા પર સરકે છે. આ કૉલર તેના સંતુલન સ્થાનેથી 10.0 cm સ્થાનાંતરિત થઈ અને મુક્ત થાય છે. આ કૉલર માટે
(a) દોલનોનો આવર્તકાળ
(b) મહત્તમ ઝડપ અને
(c) મહત્તમ પ્રવેગની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) સમીકરણ (14.21) વડે આ દોલનનો આવર્તકાળ આપવામાં આવે છે,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\text{kg}}{500\,\text{N m}^{-1}}}$$

$$= (2\pi/10)\ \text{s}$$

$$= 0.63\ \text{s}$$

(b) સ.આ.ગ. કરતા આ કૉલરનો વેગ

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે

તથા મહત્તમ ઝડપ

$$\upsilon_m = A\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}}}$$

$$= 1\ \text{m s}^{-1}$$

અને તે $x = 0$ પર પ્રાપ્ત થાય છે.

(c) સંતુલન સ્થિતિમાંથી થયેલ સ્થાનાંતર $x(t)$ પર આ કૉલરનો પ્રવેગ $a(t) = -\omega^2 x(t)$ વડે અપાય છે.

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

તેથી મહત્તમ પ્રવેગ

$$a_{max} = \omega^2 A \text{ છે,}$$

$$a_{max} = \frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}} \times 0.1\ \text{m}$$

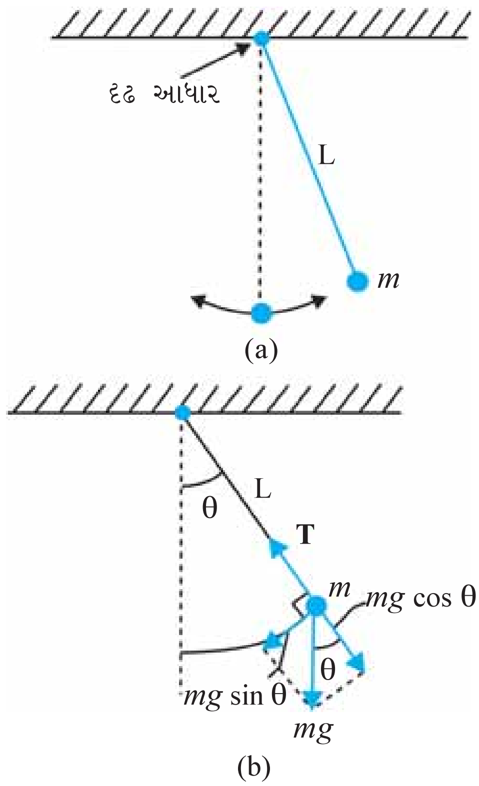
$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

અને તે સીમાંત બિંદુઓએ જોવા મળે છે. ◀

14.8.2 સાદું લોલક (Simple Pendulum)

એવું કહેવાય છે કે ગેલેલિયોએ તેના નાડીના ધબકાર દ્વારા ચર્ચમાં ઝૂલતાં ઝૂમરના આવર્તકાળનું માપન કર્યું હતું. તેમણે જોયું કે ઝૂમરની ગતિ આવર્ત હતી. આ પ્રણાલી એ એક પ્રકારના લોલક જેવી છે. આશરે 100 cm લાંબી ખેંચી ન શકાય તેવી એક દોરી પર પથ્થરના એક ટુકડાને બાંધીને તમે પણ તમારું પોતાનું લોલક બનાવી શકો છો. તમારા લોલકને યોગ્ય આધારથી લટકાવો જેથી તે મુક્ત રીતે દોલન કરી શકે. પથ્થરને એક બાજુ એક નાના અંતરનું સ્થાનાંતર આપી અને તેને છોડી દો. આ પથ્થર આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે, જે આવર્તિ છે જેનો આવર્તકાળ લગભગ 2 s છે.

આપણે હવે એમ દર્શાવીશું કે આ આવર્તગતિ એ મધ્યમાન સ્થાનેથી નાનાં સ્થાનાંતરો માટે સરળ આવર્તગતિ છે. એક સાદું લોલક લો, જેમાં m દ્રવ્યમાનના એક નાના ગોળાને ખેંચી ન શકાય તેવી, વજનરહિત, L લંબાઈની દોરી સાથે બાંધવામાં આવેલ છે. એ દોરીનો બીજો છેડો છતના આધાર સાથે બાંધેલ છે. આ ગોળા એક સમતલમાં, આધાર બિંદુમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ રેખાને અનુલક્ષીને દોલનો કરે છે. આકૃતિ 14.18(a) આ પ્રણાલી દર્શાવે છે. આકૃતિ 14.18(b) એ સાદા લોલકનો આ ગોળા પર કાર્ય કરતાં બળોને દર્શાવતો free body diagram (મુક્ત પદાર્થ રેખાચિત્ર) છે.



આકૃતિ **14.18** (a) *પોતાનાં મધ્યસ્થાન સ્થાનને અનુલક્ષીને દોલન કરતો એક ગોળો.* (b) *ત્રિજ્યાવર્તી બળ T- mg* cos θ *એ કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે પણ આધારને અનુલક્ષીને કોઈ ટૉર્ક નથી. સ્પર્શીય બળ mg* sin θ *એ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક પૂરું પાડે છે.*

દોરીનો ઊર્ધ્વ સાથે બનતો કોણ θ છે. જ્યારે આ ગોળો સંતુલન સ્થાનમાં હોય ત્યારે $\theta = 0$.

આ ગોળો પર ફક્ત બે બળો લાગે છે : દોરીમાંનું તણાવ બળ (Tension) **T** અને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ($= m\,g$). આ બળ $m\,g$ને દોરીની દિશામાં $m\,g \cos\theta$ [ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક (રેડિયલ કમ્પોનન્ટ)] અને તેને લંબ $m\,g \sin\theta$ [સ્પર્શીય ઘટક (ટેંજેન્શિયલ કમ્પોનન્ટ)]માં વિભાજિત કરી શકાય છે. આ ગોળાની ગતિ જેનું કેન્દ્ર આધારબિંદુ હોય તેવા L ત્રિજ્યાના વર્તુળ પરની ગતિ છે, તેથી આ ગોળો ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ ($\omega^2 L$) ધરાવે છે અને તેને એક સ્પર્શીય પ્રવેગ પણ છે. આ સ્પર્શીય પ્રવેગ એ વર્તુળના ચાપ પરની અનિયમિત ગતિને કારણે છે. આ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ એ પરિણામી ત્રિજ્યાવર્તી બળ T-$mg \cos\theta$ દ્વારા આપવામાં આવે છે, જ્યારે સ્પર્શીય પ્રવેગને $mg \sin\theta$ વડે આપવામાં આવે છે. આધારને અનુલક્ષીને ટૉર્ક સાથે કામ કરવું વધુ સગવડતાંભર્યું છે, કારણ કે ત્રિજ્યાવર્તી બળ શૂન્ય ટૉર્ક આપે છે. આધારને અનુલક્ષીને ટૉર્ક τ એ સંપૂર્ણપણે બળના સ્પર્શીય ઘટક દ્વારા આપવામાં આવે છે.

$$\tau = -L\,(mg \sin\theta) \tag{14.22}$$

આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક છે જે કોણીય સ્થાનાંતર ઘટાડવા માટે કાર્ય કરે છે અને તેથી ઋણ સંજ્ઞા છે. ન્યૂટનના ચાકગતિના નિયમ અનુસાર

$$T = I\,\alpha \tag{14.23}$$

જ્યાં I એ આધારબિંદુને અનુલક્ષીને પ્રણાલીની જડત્વની ચાકમાત્રા છે અને α એ તેનો કોણીય પ્રવેગ છે. આમ,

$$I\,\alpha = -mg \sin\theta\, L \tag{14.24}$$

અથવા

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I}\sin\theta \tag{14.25}$$

જો આપણે ધારીએ કે સ્થાનાંતર θ એ નાનું છે, તો આપણે આ સમીકરણ (14.25)ને સરળ કરી શકીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે $\sin\theta$ ને નીચે પ્રમાણે વ્યક્ત કરી શકાય છે :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \mp \ldots \tag{14.26}$$

અહીં, θ radianમાં છે.

હવે જો θ નાનો હોય તો, તો $\sin\theta$ નું સન્નિકટ θ દ્વારા અંદાજી શકાય છે અને પછી સમીકરણ (14.25)ને

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I}\theta \tag{14.27}$$

તરીકે લખી શકાય.

કોષ્ટક 14.1માં, આપણે કોણ θને ડિગ્રીમાં, તેને સમતુલ્ય readiansમાં અને $\sin\theta$ વિધેયના મૂલ્યની યાદી આપેલ છે.

સ.આ.ગ. SHM કંપવિસ્તાર કેટલો નાનો હોવો જોઈએ ?

જ્યારે તમે સાદા લોલકનો આવર્તકાળ નિર્ધારિત કરવા પ્રયોગ કરો છો, ત્યારે તમારા શિક્ષક તમને કંપવિસ્તાર નાનો રાખવા કહે છે. પરંતુ શું તમે ક્યારેય પૂછ્યું છે કે નાનો એટલે કેટલો નાનો ? 5^o, 2^o, 1^o અથવા 0.5^o જેટલો કંપવિસ્તાર જોઈએ ? અથવા તે 10^o, 20^o અથવા 30^o હોઈ શકે ?

આની અગત્યતા સમજવા માટે, એ વધુ યોગ્ય રહેશે કે જુદા જુદા કંપવિસ્તાર માટે તેનો આવર્તકાળ માપવામાં આવે. અલબત્ત, મોટા કંપવિસ્તાર માટે, તમારે એ કાળજી લેવી પડશે કે લોલક એક ઊર્ધ્વ સમતલમાં દોલન કરે. ચાલો આપણે નાના-કંપવિસ્તારના દોલનના આવર્તકાળને $T(0)$ વડે દર્શાવીએ અને θ_0 કંપવિસ્તાર માટેના આવર્તકાળને $T(\theta_0) = cT(0)$ લખીએ, જ્યાં c એ ગુણાંક પરિબળ છે. જો તમે c વિરુદ્ધ θ_0નો આલેખ દોરો, તો તમને કંઈક અંશે નીચે દર્શાવેલ મૂલ્યો મળશે :

θ_0	:	20^o	45^o	50^o	70^o	90^o
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

આનો અર્થ એ થયો કે 20^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 2 % જેટલી, 50^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 5 %, 70^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 10 % અને 90^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 18 % ત્રુટિ છે.

આ પ્રયોગમાં, તમે ક્યારેય પણ $T(0)$નું માપન કરી શકશો નહિ કારણ કે આનો અર્થ એ છે કે ત્યાં કોઈ આવર્તનો નથી. સૈદ્ધાંતિક રીતે, ફક્ત $\theta = 0$ માટે જ $\sin\theta$ એ θ ની બરાબર હોય છે. θ નાં અન્ય તમામ મૂલ્યો માટે કેટલીક અચોક્કસતા હશે જ. θ ના વધવા સાથે આ તફાવત વધે છે. તેથી આપણે નક્કી કરવું જોઈએ કે આપણે કેટલી ત્રુટિ ચલાવી શકીએ છીએ. કોઈ માપ ક્યારેય સંપૂર્ણ સચોટ નથી. તમારે આના જેવા અન્ય પ્રશ્નો પર પણ વિચારવું જોઈએ : જેમકે સ્ટૉપવૉચની ચોકસાઈ શું છે ? સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરવામાં અને રોકવામાં તમારી પોતાની ચોકસાઈ શું છે ? તમને ખ્યાલ આવશે કે આ સ્તરે તમારા માપનની સચોટતા ક્યારેય 5 % અથવા 10 % કરતાં વધુ સારી નથી હોતી. ઉપર્યુક્ત કોષ્ટક બતાવે છે કે લોલકના આવર્તકાળ 50^o કંપવિસ્તારના મૂલ્યની તેના નાના કંપવિસ્તારના મૂલ્યની સરખામણીએ ભાગ્યે જ 5 % વધે છે. તમે તમારા પ્રયોગોમાં 50^o જેટલો કંપવિસ્તાર રાખી શકો છો.

આ કોષ્ટકમાંથી એ જોઈ શકાય છે કે 20 ડિગ્રી જેટલા મોટા મૂલ્ય માટે પણ sin θ એ લગભગ એ જ રહે છે જે θ ને **રેડિયનમાં રજૂ કરતાં** થાય.

કોષ્ટક 14.1 sin θ એ કોણ θ ના વિધેય તરીકે

θ (degrees)	θ (radians)	sin θ
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

સમીકરણ (14.27) એ ગાણિતિક રીતે સમીકરણ (14.11)ને સમતુલ્ય છે. ફરક એટલો જ છે કે ચલ તરીકે કોણીય સ્થાનાંતર છે. આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે નાના θ માટે આ બૉબની ગતિ એ સરળ આવર્ત છે.

સમીકરણો (14.27) અને (14.11) પરથી,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

અને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{14.28}$$

હવે, સાદા લોલકની દોરી દ્રવ્યમાનરહિત છે, તેથી જડત્વની ચાકમાત્રા I એ mL^2 છે. સમીકરણ (14.28) એ ત્યાર બાદ સાદા લોલકના આવર્તકાળ માટેનું પ્રચલિત સૂત્ર આપે છે.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14.29}$$

ઉદાહરણ 14.9 જે દર સેકન્ડ ટીક કરે છે તેવા સાદા લોલકની લંબાઈ કેટલી થશે ?

ઉકેલ સમીકરણ (14.29) પરથી સાદા લોલકનો આવર્તકાળ નીચે પ્રમાણે આપવામાં આવે છે :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

આ સંબંધ પરથી આપણને મળશે.

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

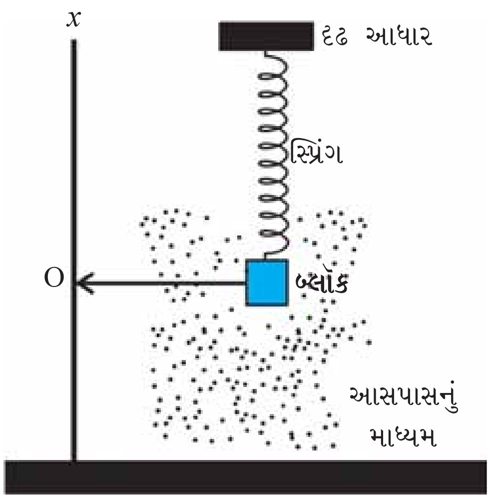
જે દર સેકન્ડ ટીક કરે તેવા સાદા લોલકનો આવર્તકાળ 2 s છે. આમ, g = 9.8 m s^{-2} અને T = 2 s માટે,

$$L = \frac{9.8(\text{m s}^{-2})\times 4(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1 \text{ m}$$

14.9 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ (DAMPED SIMPLE HARMONIC MOTION)

આપણે જાણીએ છીએ કે હવામાં ઝૂલતાં એક સાદા લોલકની ગતિ, ધીરે ધીરે અંતમાં નષ્ટ થઈ જાય છે. આમ કેમ થાય છે ? આનું કારણ એ છે કે, હવાનું ખેંચાણ (Drag) અને આધાર પરનું ઘર્ષણ (Friction) એ લોલકની ગતિને અવરોધે છે અને તેથી તેની ઊર્જાનો ધીમે ધીમે વ્યય થાય છે. આ લોલકને **અવમંદિત દોલનો (damped oscillations)** કરતું કહેવામાં આવે છે. અવમંદિત દોલનોમાં, જોકે પ્રણાલીની ઊર્જા સતત વ્યય થતી રહે છે. આમ છતાં નાના અવમંદન માટે તે દોલનો દેખીતી રીતે આવર્ત જ રહે છે. આ અવમંદિત બળો સામાન્યપણે ઘર્ષણ બળો છે. દોલકની ગતિ પર આવાં બાહ્ય બળોની અસરને સમજવા માટે, ચાલો આપણે આકૃતિ 14.19માં બતાવ્યા પ્રમાણેનું એક ઉદાહરણ જોઈએ. અહીં k સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલ m દ્રવ્યમાનનો એક બ્લૉક એ ઊર્ધ્વતલમાં (શિરોલંબ) દોલન કરે છે. આ બ્લૉકને નીચેની તરફ થોડુંક ખેંચીને મુક્ત કરતાં, તેનાં દોલનની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ થશે જે સમીકરણ (14.20)માં જોઈ શકાય છે. જોકે વ્યવહારમાં, આસપાસનું માધ્યમ (હવા) એ આ બ્લૉકની ગતિ પર અવમંદિત બળ લગાડે છે અને આ બ્લૉક-સ્પ્રિંગ પ્રણાલીની યાંત્રિકઊર્જામાં ઘટાડો થશે. ઊર્જાનો આ ઘટાડો એ આસપાસના માધ્યમની (અને બ્લૉકની પણ) ઉષ્મા તરીકે દેખાય છે. [આકૃતિ 14.19]



આકૃતિ 14.19 આસપાસનું શ્યાન માધ્યમ એ દોલિત સ્પ્રિંગ પર એક અવમંદિત બળ લગાડે છે જે અંતમાં તેને સ્થિર કરે છે.

આ અવમંદિત બળો એ આસપાસના માધ્યમની પ્રકૃતિ પર આધારિત હોય છે. જો આ બ્લૉકને પ્રવાહીમાં ડૂબાડવામાં આવે, તો અવમંદન ખૂબ વધારે હશે અને ઊર્જાનો વ્યય ઘણો ઝડપી થશે. સામાન્યતઃ, અવમંદન એ બ્લૉકના (કે બૉબ)ના વેગનાં સમપ્રમાણમાં હોય છે [સ્ટૉકનો નિયમ યાદ કરો, સમીકરણ (10.19)] અને વેગની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે. જો અવમંદન બળને $\mathbf{F}_d$ વડે દર્શાવવામાં આવે, તો આપણને

$$\mathbf{F}_d = -b\ \boldsymbol{\upsilon} \qquad (14.30)$$

મળે છે. જ્યાં ધન અચળાંક b એ માધ્યમની લાક્ષણિકતાઓ (ઉદાહરણ તરીકે સ્નિગ્ધતા) અને બ્લૉકના આકાર અને પરિમાણ વગેરે પર આધારિત છે. સમીકરણ (14.30) એ મહદંશે નાના વેગ માટે યથાર્થ છે.

જ્યારે m દ્રવ્યમાનને સ્પ્રિંગ સાથે જોડીને છોડવામાં આવે છે, ત્યારે સ્પ્રિંગ થોડી ખેંચાશે અને આ દ્રવ્યમાન અમુક ઊંચાઈ પર સ્થિર થશે. આકૃતિ 14.20માં આ સ્થિતિને O દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ છે, તે આ દ્રવ્યમાનની સંતુલન સ્થિતિ છે. જો દ્રવ્યમાનને થોડુંક નીચે ખેંચવામાં આવે કે ઉપર ધકેલવામાં આવે, તો સ્પ્રિંગને કારણે બ્લૉક પર પુનઃસ્થાપક બળ $\mathbf{F}_s = -k\mathbf{x}$ લાગે છે, જ્યાં $\mathbf{x}$ એ તેના સંતુલન સ્થાનથી દ્રવ્યમાનનું સ્થાનાંતર છે. આમ, કોઈ પણ t સમયે દ્રવ્યમાન પર લાગતું કુલ બળ $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\boldsymbol{\upsilon}$ છે. જો t સમયે દ્રવ્યમાનનો પ્રવેગ $\mathbf{a}(t)$ હોય, તો ન્યૂટનના ગતિના દ્વિતીય નિયમ દ્વારા ગતિની દિશાને અનુલક્ષીને, આપણને

$$m\ a(t) = -k\ x(t) - b\ \upsilon(t) \qquad (14.31)$$

મળે. અહીં આપણે સદિશ સંકેત નથી લીધાં કારણ કે આપણે એકપરિમાણીય ગતિ પર ચર્ચા કરી રહ્યા છીએ. વેગ $v(t)$ અને પ્રવેગ $\mathbf{a}(t)$ માટે અનુક્રમે $x(t)$ના પ્રથમ અને દ્વિતીય વિકલનનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (14.32)$$

મળે છે. સમીકરણ (14.32)નો ઉકેલ એ અવમંદિત બળ (જે વેગના સમપ્રમાણમાં છે)ની હાજરીમાં ગતિ કરતાં બ્લૉકની ગતિનું વર્ણન કરે છે. ઉકેલ એ નીચેના સ્વરૂપમાં જોવા મળે છે.

$$x(t) = A\ e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

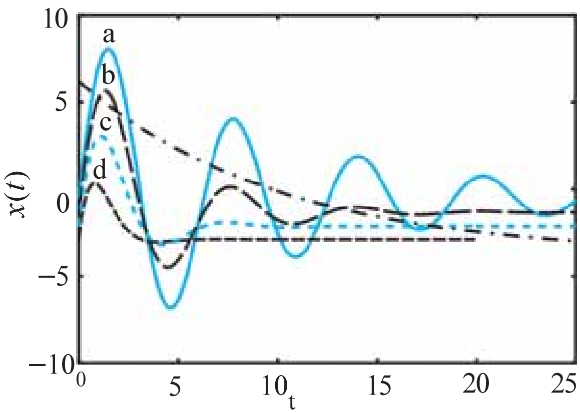
જ્યાં $A\,e^{-bt/2m}$ કંપવિસ્તાર છે અને ω' અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ છે. જેને,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

આ વિધેયમાં, cosine વિધેયનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega'$ છે આમ છતાં વિધેય $x(t)$ એ શુદ્ધ આવર્ત નથી કારણ કે $e^{-bt/2m}$ અવયવી લીધે તે સમય સાથે સતત ઘટતો જાય છે. જોકે, એક આવર્તકાળ T દરમિયાન થતો આ ઘટાડો જો નાનો હોય, તો સમીકરણ (14.33) દ્વારા પ્રસ્તુત આ ગતિ લગભગ આવર્ત છે.

આ ઉકેલ, સમીકરણ (14.33), આકૃતિ 14.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે આલેખના રૂપમાં રજૂ કરી શકાય છે. આપણે તેને cosine વિધેય તરીકે ગણી શકીએ કે જેનો કંપવિસ્તાર $A\ e^{-bt/2m}$ છે, તે ધીમે ધીમે સમય સાથે ઘટે છે.



આકૃતિ **14.20** *એક અવમંદિત દોલક એ દોલનના ઘટતાં કંપવિસ્તારવાળું લગભગ આવર્ત છે. વધુ અવમંદન સાથે તેનાં દોલનો ઝડપથી નાશ પામે છે.*

હવે, અવમંદિત (આદર્શ) દોલકની યાંત્રિકઊર્જા $E = 1/2\ kA^2$ છે. અવમંદિત દોલક માટે, તેની યાંત્રિકઊર્જા અચળ નથી પરંતુ તે સમય સાથે ઘટે છે. જો અવમંદન નાનું હોય, તો આપણે કંપવિસ્તાર $A\ e^{-bt/2m}$ મૂકીને તે જ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2\ e^{-bt/m} \qquad (14.35)$$

સમીકરણ (14.35) દર્શાવે છે કે આ પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા સમય સાથે ચર-ઘાતાંકીય રૂપે ઘટે છે. નોંધ કરો કે નાના અવમંદનનો અર્થ છે કે $\left(\frac{b}{\sqrt{k\ m}}\right)$ પરિમાણરહિત ગુણોત્તર 1 થી બહુ નાનો છે.

* ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ આ બ્લૉક એ સ્પ્રિંગ પર સ્થિર સમતુલન સ્થિતિ O પર હશે; અહીં x તે બિંદુથી સ્થાનાંતર રજૂ કરે છે.

અલબત્ત, જો આપણે $b = 0$ મૂકીએ, તો અવંદિત દોલકનાં આ પરિચ્છેદનાં બધાં જ સમીકરણો એ, અપેક્ષા મુજબ, અવમંદન વિનાના (આદર્શ) દોલકનાં અનુરૂપ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત થશે.

▶ *ઉદાહરણ 14.10* આકૃતિ 14.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે અવમંદિત દોલક માટે, બ્લૉકનું દ્રવ્યમાન 200 g, $k = 90\ \text{N m}^{-1}$ અને અવમંદન અચળાંક b, $40\ \text{g s}^{-1}$ છે તો (a) દોલનનો આવર્તકાળ (b) તેના દોલનના કંપવિસ્તારનું મૂલ્ય પ્રારંભિક મૂલ્ય કરતાં અડધું થવા માટે લાગતો સમય અને (c) તેની યાંત્રિકઊર્જાનું મૂલ્ય પ્રારંભિક મૂલ્ય કરતાં અડધું થવા માટે લાગતા સમયની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) આપણે જોઈએ છીએ કે $km = 90 \times 0.2 = 18\ \text{kg N m}^{-1} = 18\ \text{kg}^2\ \text{s}^{-2}$; આથી $\sqrt{km} = 4.243\ \text{kg s}^{-1}$ અને $b = 0.04\ \text{kg s}^{-1}$. આથી b એ $\sqrt{km}$ થી ખૂબ જ નાનો છે. આથી સમીકરણ (14.34) દ્વારા આવર્તકાળ T આપી શકાય,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ kg}{90\ \text{N}\ m^{-1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) હવે, સમીકરણ (14.33) પરથી, કંપવિસ્તારને તેના પ્રારંભિક મૂલ્યથી અડધો થવા માટે લાગતો સમય, $T_{1/2}$ વડે આપવામાં આવે છે,

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) તેની યાંત્રિક ઊર્જાના પ્રારંભિક મૂલ્યને અડધી થવા માટે લેવામાં આવતો સમય $t_{1/2}$ની ગણતરી કરવા માટે આપણે સમીકરણ (14.35)નો ઉપયોગ કરીશું. આ સમીકરણ પરથી આપણને મળશે.

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

અથવા $\frac{1}{2} = \exp(-bt_{1/2}/m)$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

અથવા $t_{1/2} = \frac{0.693}{40\text{g s}^{-1}} \times 200\text{g}$

$$= 3.46\ \text{s}$$

આ કંપવિસ્તારના ક્ષયકાળથી માત્ર અડધો છે. આ આશ્ચર્યજનક નથી, કારણ કે સમીકરણ (14.33) અને (14.35) અનુસાર, ઊર્જાએ કંપવિસ્તારના વર્ગ પર આધાર રાખે છે. નોંધ લો કે ઘાતમાં 2નો અંક એ બંને ચર-ઘાતાંકીય પદોમાં છે. ◀

14.10 પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ (FORCED OSCILLATIONS AND RESONANCE)

જ્યારે કોઈ એક પ્રણાલી (જેવી કે સાદું લોલક અથવા સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ એક બ્લૉક)ને તેની સંતુલિત અવસ્થામાંથી સ્થાનાંતરિત કરીને મુક્ત કરવામાં આવે, તો તે તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે દોલનો કરશે અને આ દોલનોને **મુક્ત દોલનો (free oscillations)** કહેવાય છે. કાયમ હાજર એવાં અવમંદન બળોનાં કારણે બધાં જ મુક્ત દોલનો સમય જતાં ક્ષય પામે છે. આમ છતાં, કોઈ બાહ્ય પરિબળ આ દોલનો ટકાવી રાખી શકે છે. આવાં દોલનોને **બળપ્રેરિત (Forced)** અથવા **પ્રણોદિત (driven) દોલનો (Oscillations)** કહેવાય છે. આપણે એક આવર્ત બાહ્ય બળનો કિસ્સો લઈશું કે જેની આવૃત્તિ ω_d છે કે જેને પ્રણોદિત આવૃત્તિ કહેવાય છે. કોઈ બળ પ્રેરિત આવર્ત દોલનો માટે એ અતિ મહત્ત્વનું સત્ય છે કે આ પ્રણાલી તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે નહિ પણ બાહ્ય પરિબળની આવૃત્તિ ω_dથી દોલનો કરશે અને તેનાં મુક્ત દોલનો અવમંદનના કારણે અટકી જશે. બળપ્રેરિત દોલનનું સૌથી વધુ પ્રચલિત ઉદાહરણ એ, બગીચામાં હીંચકામાં ઝૂલતો કોઈ એક બાળક આ દોલનો જાળવી રાખવા તેના પગથી સમયાંતરે જમીનને ધક્કો લગાવે છે (અથવા બીજું કોઈ આ બાળકને સમયાંતરે ધક્કો લગાવતું હોય.) તે છે.

ધારો કે કોઈ એક અવમંદિત દોલક પર F_0 જેટલા કંપવિસ્તારનું સમયાંતરે બદલાતું કોઈ આવર્ત બાહ્ય બળ $F(t)$ લાગુ પડે છે. આવા બળને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય છે :

$$F(t) = F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

રેખીય પુનઃસ્થાપક બળ (restoring force), અવમંદન બળ (damping force) અને સમીકરણ (14.36) દ્વારા રજૂ કરાયેલ સમય આધારિત પ્રણોદિત (ચાલક) બળ (driving force)ની સંયુક્ત અસર નીચે કણની ગતિને

$$m\, a(t) = -k\, x(t) - b\upsilon(t) + F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

આ સમીકરણ (14.37a)માં પ્રવેગ માટે d^2x/dt^2 મૂકતાં અને તેની પુનઃગોઠવણી કરતાં,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_d t \quad (14.37b)$$

મળે છે. આ m દ્રવ્યમાનના દોલકનું સમીકરણ છે જેના પર (કોણીય) આવૃત્તિ ω_dનું આવર્ત બળ લગાડવામાં આવેલ છે. આ દોલક શરૂઆતમાં તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે દોલનો કરે છે. જ્યારે આપણે બાહ્ય આવર્ત બળ લાગુ કરીએ છીએ, ત્યારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિનાં દોલનો ક્ષીણ થાય છે અને પછી આ પદાર્થ બાહ્ય આવર્ત બળની (કોણીય) આવૃત્તિ સાથે દોલનો કરે છે. તેનાં પ્રાકૃતિક આવર્તનો સંપૂર્ણ ક્ષય પામે ત્યાર બાદ તેના સ્થાનાંતરને

$$x(t) = A \cos (\omega_d t + \phi) \quad (14.38)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જ્યાં, સમય tને જ્યારથી આપણે આવર્ત બળ લાગુ પાડીએ તે ક્ષણથી માપવામાં આવે છે.

કંપવિસ્તાર A એ બળપ્રેરિત આવૃત્તિ ω_d અને પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ωનું વિધેય છે. વિશ્લેષણ દર્શાવે છે કે તેને નિમ્ન સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$A = \frac{F_0}{\{m^2(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + \omega_d^2 b^2\}^{1/2}} \quad (14.39a)$$

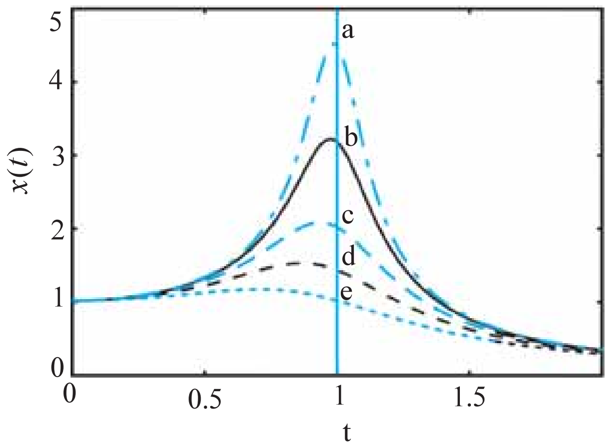
$$\text{અને} \quad \tan\phi = \frac{-\upsilon_0}{\omega_d x_0} \quad (14.39b)$$

જ્યાં m એ કણનું દ્રવ્યમાન છે અને υ_0 એ વેગ અને x_0 એ $t = 0$ સમયે કણનો વેગ અને કણનું સ્થાનાંતર છે. આ એ સમય છે કે જ્યારે આપણે આવર્ત બળ લાગુ પાડીએ છીએ. સમીકરણ (14.39) બતાવે છે કે બળપ્રેરિત દોલકનો આવર્તકાળ ચાલક બળની (કોણીય) આવૃત્તિ પર આધારિત છે. જ્યારે ω_d એ ωથી સદંતર ભિન્ન હોય તથા જ્યારે તે ωની નજીક હોય, ત્યારે આપણને દોલકનાં જુદાં જુદાં વર્તન જોવા મળે છે. આપણે આ બે કિસ્સાઓની વિચારણા કરીશું.

(a) નાનું અવમંદન અને ચાલક આવૃત્તિ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિથી ખૂબ જુદી હોય (Small Damping, Driving Frequency Far from Natural Frequency) : આ કિસ્સામાં $\omega_d b$ એ $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ કરતાં ઘણી ઓછી હશે અને આપણે તે પદને અવગણી શકીએ છીએ. આથી સમીકરણ (14.39) થશે,

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_d^2)} \quad (14.40)$$

તંત્રમાં વિભિન્ન માત્રાના અવમંદનની હાજરીમાં દોલકનો સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર, ચાલક બળ (driving force)ની કોણીય આવૃત્તિ પર કેવી રીતે આધાર રાખે છે તે આકૃતિ (14.21)માં દર્શાવ્યું છે. તે નોંધવું રહ્યું કે જ્યારે $\omega_d / \omega = 1$ ત્યારે તમામ કિસ્સાઓમાં કંપવિસ્તાર સૌથી મોટો હોય છે. આ આકૃતિના વક્રો દર્શાવે છે કે જેમ અવમંદન નાનું તેમ અનુનાદ (resonance) શિખરો ઊંચાં અને સાંકડા હોય છે.



આકૃતિ **14.21** આ આલેખ સમીકરણ (14.41)ને રેખાંકિત કરે છે. અવમંદન વધતાં અનુનાદ કંપવિસ્તાર ($\omega = \omega_d$) ઘટે છે.

જો આપણે ચાલક બળની આવૃત્તિને બદલતાં જઈએ તો જ્યારે તે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ બરાબર થાય ત્યારે કંપવિસ્તાર અનંત તરફ જાય છે. પરંતુ આ શૂન્ય અવમંદનનો આદર્શ કિસ્સો છે, જે એક વાસ્તવિક પ્રણાલીમાં ક્યારેય શક્ય નથી કારણ કે અવમંદન સંપૂર્ણપણે શૂન્ય ક્યારેય ના હોઈ શકે. તમે હીંચકામાં અનુભવ કર્યો હોવો જોઈએ કે જ્યારે તમારા ધક્કાનો સમય હીંચકાના આવર્તકાળ સાથે સુમેળ સાધે છે ત્યારે તમારો હિંચકો મહત્તમ કંપવિસ્તારને પ્રાપ્ત કરે છે. આ કંપવિસ્તાર મોટો હોય છે, પરંતુ અનંત નથી, કારણ કે હંમેશાં તમારા હીંચકામાં કંઈક અંશે અવમંદન હોય જ છે જે હવે પછી (b)માં સ્પષ્ટ થશે.

(b) ચાલક આવૃત્તિ એ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીક હોય : (Driving Frequency Close to Natural Frequency) : જો ω_d એ ωની ખૂબ જ નજીકની હોય તો, $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ એ $\omega_d b$ કરતાં ઘણું ઓછું હશે, bના કોઈ પણ વાજબી મૂલ્ય માટે પછી સમીકરણ (14.39)

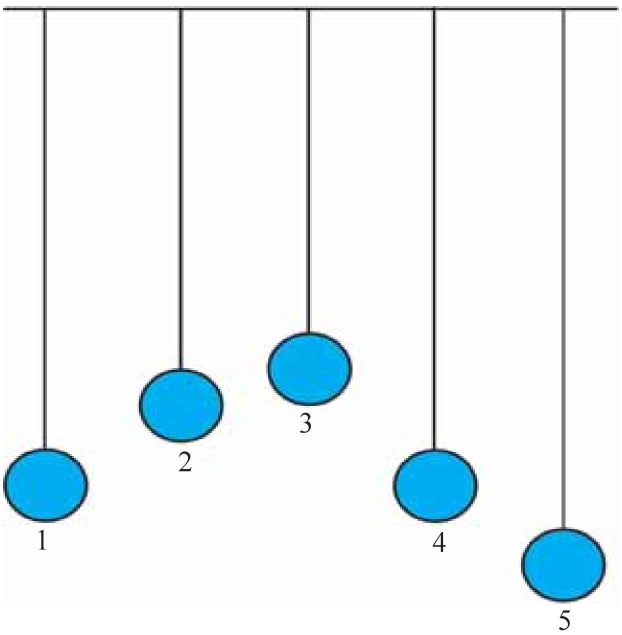
$$A = \frac{F_0}{\omega_d b} \quad (14.41)$$

થશે. આ સ્પષ્ટ કરે છે કે આપેલ ચાલક બળની આવૃત્તિ માટે મહત્તમ શક્ય કંપવિસ્તાર એ ચાલક આવૃત્તિ અને અવમંદન દ્વારા અંકુશિત છે અને તે ક્યારેય અનંત થતો નથી. જ્યારે ચાલક બળની આવૃત્તિ એ દોલકની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીક હોય ત્યારે કંપવિસ્તારમાં થતાં વધારાની ઘટનાને **અનુનાદ (Resonance)** કહેવામાં આવે છે.

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે કેટલીયે ઘટના અનુભવીએ છીએ જેમાં અનુનાદ સામેલ છે. હીંચકાનો અનુભવ એ અનુનાદનું

સારું ઉદાહરણ છે. તમને કદાચ સમજાયું હશે કે હીંચકાને વધુ ઊંચાઈ પર ઝૂલવવાનું કૌશલ્ય એ હીંચકાની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સાથે જમીન જોર લગાડવાના લયના સુમેળમાં રહેલું છે.

આ મુદ્દાને વધુ સમજાવવા માટે ચાલો આકૃતિ 14.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક જ દોરડાથી લટકાવેલ જુદી-જુદી પાંચ લંબાઈના સાદા લોલકોના સમૂહને ધ્યાનમાં લઈએ. લોલક 1 અને 4 સમાન લંબાઈના છે અને અન્યની લંબાઈ અલગ અલગ છે. હવે ચાલો લોલક 1ને ગતિમાં લાવીએ. આ લોલકની ઊર્જાએ સંબંધિત-(કનેક્ટીંગ)-દોરી મારફતે અન્ય લોલકોમાં તબદીલ થશે અને તેઓ દોલન શરૂ કરે છે. આ સંબંધિત-દોરી દ્વારા ચાલક બળ પ્રદાન કરવામાં આવે છે. આ બળની આવૃત્તિ એવી આવૃત્તિ છે કે જેની સાથે લોલક-1 દોલન કરે છે. જો આપણે લોલકો 2, 3 અને 5ની પ્રતિક્રિયાનું અવલોકન કરીએ, તો સૌપ્રથમ તેઓ તેમના દોલનની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ અને વિવિધ કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો શરૂ કરે છે. પરંતુ આ ગતિ ધીમે ધીમે ક્ષય પામે છે અને કાયમ રહેતી નથી. દોલનની તેમની આવૃત્તિઓ



આકૃતિ **14.22** *એક જ આધાર પરથી લટકાવેલા જુદી જુદી લંબાઈનાં પાંચ સાદાં લોલકો*

ધીમે ધીમે બદલાય છે અને છેવટે તેઓ લોલક 1ની આવૃત્તિ એટલે કે ચાલક બળની આવૃત્તિ સાથે પણ વિવિધ કંપવિસ્તારો સાથે દોલન કરે છે, તેઓ નાના કંપવિસ્તાર સાથે દોલન કરે છે. લોલક 4ની પ્રતિક્રિયા લોલકોના આ જૂથથી વિરુદ્ધ છે. તે લોલક 1ની સમાન આવૃત્તિ સાથે દોલન કરે છે અને તેનો કંપવિસ્તાર ધીમે ધીમે વધે છે અને તે ખૂબ જ મોટો બને છે. આ એક અનુનાદ જેવો પ્રતિભાવ જોવા મળે છે. કારણ કે આમાં અનુનાદ માટેની શરત સંતોષાય છે, એટલે કે પ્રણાલીની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ એ ચાલક બળની આવૃત્તિ સાથે એકરૂપ થાય છે. તેથી આમ બને છે.

આપણે અત્યાર સુધી એવી જ દોલિત પ્રણાલીઓ લીધી હતી કે જેમને એક જ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ હોય. સામાન્ય રીતે, પ્રણાલી એક કરતાં વધુ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ ધરાવતી હોય છે. આવી પ્રણાલીઓનાં ઉદાહરણો (કંપન કરતા તાર, હવાનો સ્તંભ વગેરે) તમે હવે પછીના પ્રકરણમાં જોશો. કોઈ પણ યાંત્રિક માળખું, જેમકે એક બિલ્ડિંગ, એક બ્રિજ, કે એક હવાઈ જહાજને એક કરતાં વધારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ હોવાની શક્યતા છે. કોઈ એક બાહ્ય આવર્ત બળ અથવા વિક્ષેપ એ આ પ્રણાલીને પ્રણોદિત દોલનમાં મૂકશે. જો આકસ્મિક રીતે, પ્રણોદિત આવૃત્તિ ω_d એ આ પ્રણાલીની કોઈ એક પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીકની હશે, તો દોલનોનો કંપવિસ્તાર વધારે વધશે (અનુનાદ - resonance) અને શક્ય નુકસાનમાં પરિણમે. આ જ કારણથી પુલ પસાર કરતી વખતે સૈનિકો કૂચભંગ કરે છે. આ જ કારણોસર, ભૂકંપમાં એ અસરગ્રસ્ત વિસ્તારના દરેક મકાનો કે જે સમાન મજબૂતાઈ અને માલસામાનનાં બનેલા હોય તોપણ તેને સમાન ક્ષતિ પહોંચતી નથી. મકાનની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ એ તેની ઊંચાઈ અને અન્ય પરિબળો અને બિલ્ડિંગ મટિરિયલ્સની પ્રકૃતિ પર આધારિત છે. જેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સેસમીક (ભૂકંપનાં) તરંગોની આવૃત્તિની નજીકની હોય તેને વધુ નુકસાન થવાની શક્યતા છે.

સારાંશ

1. પોતાને પુનરાવર્તન કરવાની ગતિને આવર્તગતિ કહેવાય છે.
2. આવર્તકાળ T એ એક સંપૂર્ણ કંપન અથવા એક ચક્ર માટે જરૂરી સમય છે. તે આવૃત્તિ સાથે

   $$T = \frac{1}{\upsilon}$$

   વડે સંબંધિત છે.

આવર્ત અથવા દોલન ગતિની આવૃત્તિ એ એકમ સમય દીઠ દોલનોની સંખ્યા છે. SI માં તે heartzમાં માપવામાં આવે છે.

$$1 \text{ heartz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ દોલન પ્રતિ સેકન્ડ} = 1 \text{ s}^{-1}$$

3. સરળ આવર્તગતિ (સ.આ.ગ./SHM)માં તેના સંતુલન સ્થાનથી કણનું સ્થાનાંતર $x(t)$ને નીચેનાં સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \text{ (સ્થાનાંતર)}$$

જેમાં A એ સ્થાનાંતરનો કંપવિસ્તાર છે. રાશિ $(\omega t + \phi)$ એ ગતિની કળા છે અને ϕ એ કળા-અચળાંક છે. કોણીય આવૃત્તિ ω, એ આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ સાથે

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ (કોણીય આવૃત્તિ)}$$

વડે સંબંધિત છે.

4. સરળ આવર્તગતિ એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિનો વર્તુળના વ્યાસ પરનો પ્રક્ષેપ છે.

5. સમયના વિધેય તરીકે સ.આ.ગ. દરમ્યાન કણનો વેગ અને પ્રવેગ નીચે મુજબ છે :

$$\upsilon(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \text{ (વેગ)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$
$$= -\omega^2 x(t) \text{ (પ્રવેગ)}$$

આ રીતે આપણે કહી શકીએ છીએ કે, સરળ આવર્તગતિ કરતાં પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ બંને આવર્ત વિધેયો છે, કે જેમનો અનુક્રમે વેગ કંપવિસ્તાર $\upsilon_m = \omega A$ અને પ્રવેગ કંપવિસ્તાર $a_m = \omega^2 A$ છે.

6. સરળ આવર્તગતિ દરમ્યાન લાગતું બળ એ સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે અને હંમેશાં ગતિના મધ્યમાન સ્થાન તરફ હોય છે.

7. સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણને કોઈ પણ સમયે ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ અને સ્થિતિઊર્જા $U = \frac{1}{2} kx^2$ હોય છે. જો કોઈ પણ ઘર્ષણ હાજર ન હોય, તો K અને U સમય સાથે બદલાતાં હોવા છતાં પ્રણાલીની યાંત્રિકઊર્જા $E = K + U$ હંમેશાં અચળ રહે છે.

8. $F = -k\,x$ દ્વારા આપવામાં આવેલા હૂકના નિયમ મુજબ પુનઃસ્થાપક બળની અસર હેઠળ m દ્રવ્યમાનનું કણ એ સરળ આવર્તગતિ કરે છે જેના માટે,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (કોણીય આવૃત્તિ)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ (આવર્તકાળ)}$$

આવી પ્રણાલીને રેખીય દોલક પણ કહેવાય છે.

9. નાના ખૂણાઓ સુધી ઝૂલતાં સાદા લોલકની ગતિ લગભગ સરળ આવર્ત છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ છે :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. વાસ્તવિક દોલિત તંત્રમાં યાંત્રિકઊર્જા દોલનો દરમિયાન ઘટે છે કારણ કે બાહ્ય બળો, જેમકે ઘર્ષણ, દોલનોને અવરોધે છે અને યાંત્રિકઊર્જાનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે. ત્યારે વાસ્તવિક દોલક અને તેની ગતિને અવમંદિત હોવાનું કહેવાય છે. જો અવમંદન બળ $F_d = -b\upsilon$ દ્વારા આપવામાં આવે, જ્યાં υ એ દોલકનો વેગ છે અને b એ અવમંદન અચળાંક હોય, તો દોલકનું સ્થાનાંતર

$x(t) = A\ e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$ હશે.
જ્યાં ω' અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ જેને

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

વડે આપવામાં આવે છે.
જો અવમંદન અચળાંક નાનો હોય તો $\omega' \approx \omega$ જ્યાં ω એ અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ છે. અવમંદિત દોલકની યાંત્રિકઊર્જા Eને

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-bt/m}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

11. ω પ્રાકૃતિક કોણીય આવૃત્તિવાળી દોલન પ્રણાલી પર ω_d કોણીય આવૃત્તિવાળું કોઈ બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે, તો આ પ્રણાલી કોણીય આવૃત્તિ ω_dથી દોલન કરશે. આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર સૌથી મહત્તમ હશે જ્યારે $\omega_d = \omega$ હોય તે અનુનાદની શરત છે.

ભૌતિકરાશિ (Physical Quantity)	પ્રતિક (Symbol)	પરિમાણ (Dimensions)	એકમ (Unit)	નોંધ (Remarks)
આવર્તકાળ (Period)	T	$[T]$	s	પોતાને પુનરાવર્તન કરવાનો ગતિનો લઘુતમ સમય
આવૃત્તિ (Frequency)	ν (અથવા f)	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
કોણીય આવૃત્તિ (Angular Frequency)	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\omega = 2\pi\nu$
કળા-અચળાંક (Phase Constant)	ϕ	પરિમાણરહિત (Dimensionless)	rad	સ.આ.ગ.માં સ્થાનાંતરની કળાનું પ્રારંભિક મૂલ્ય
બળ-અચળાંક (Force Constant)	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	સરળ આવર્તગતિ $F = -k\,x$

વિચારવા લાયક મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. આવર્તકાળ T તે એવો લઘુતમ સમય છે કે ત્યાર બાદ ગતિ પોતે પુનરાવર્તન કરે છે. આમ, ગતિ nT પછી જ પુનરાવર્તન કરે છે જ્યાં, n એક પૂર્ણાંક છે.

2. દરેક આવર્તગતિ સરળ આવર્તગતિ નથી. જે આવર્તગતિ બળના નિયમ $F = -k\,x$ દ્વારા સંચાલિત હોય તે જ માત્ર સરળ આવર્ત ગતિ છે.

3. વ્યસ્ત-વર્ગ નિયમ બળ (ગ્રહોની ગતિમાં) ઉપરાંત દ્વિ-પરિમાણોમાં સરળ આવર્તબળ $-m\omega^2 r$ ને કારણે વર્તુળમય ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. બીજા કિસ્સામાં, બે લંબવત દિશામાં (x અને y) ગતિની કળાઓ $\omega/2$ જેટલી અલગ હોવી જોઈએ. આમ, કોઈ એક કણ કે જેની પ્રારંભિક સ્થિતિ (o, A) અને વેગ (ωA, 0) હોય તેના પર $-m\omega^2 r$ બળ લગાડતા તે A ત્રિજ્યાના એક વર્તુળમાં નિયમિત રીતે ગતિ કરે છે.

4. આપેલ ω ની રેખીય સરળ આવર્તગતિ માટે બે યાદૃચ્છિક પ્રારંભિક શરતો જરૂરી છે અને ગતિ સંપૂર્ણપણે નક્કી કરવા માટે તે પર્યાપ્ત છે. આ પ્રારંભિક શરત : (i) પ્રારંભિક સ્થિતિ અને પ્રારંભિક વેગ અથવા (ii) કંપવિસ્તાર અને કળા અથવા (iii) ઊર્જા અને કળા હોઈ શકે છે.

5. ઉપર્યુક્ત મુદ્દા 4 પરથી, જો કંપવિસ્તાર અથવા ઊર્જા આપેલ હોય, તો પ્રારંભિક સ્થિતિ અથવા પ્રારંભિક વેગ દ્વારા ગતિની કળાઓ શોધવામાં આવે છે.

6. એ જરૂરી નથી કે યદૃચ્છ કંપવિસ્તારો અને કળાઓ સાથેની બે સરળ આવર્તગતિનું સંયોજન આવર્ત જ હોય. જો એક ગતિની આવૃત્તિ એ અન્યની આવૃત્તિનો એક પૂર્ણાંક ગુણાંક હોય, ત્યારે જે-તે આવર્ત થાય છે. જોકે, આવર્તગતિ હંમેશાં યોગ્ય કંપવિસ્તાર સાથેની અનંત આવર્તગતિઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય છે.

7. સ.આ.ગ.નો આવર્તકાળ એ કંપવિસ્તાર અથવા ઊર્જા અથવા કળા-અચળાંક પર આધાર રાખતો નથી. જે ગુરુત્વાકર્ષણ (કૅપ્લરનો ત્રીજા નિયમ) હેઠળ ગ્રહોની ભ્રમણ કક્ષાના આવર્તકાળ સાથે વિરોધાભાસ દર્શાવે છે.

8. એક સાદા લોલકની ગતિ નાના કોણીય સ્થાનાંતર માટે સરળ આવર્ત છે.

9. કણની ગતિને સરળ આવર્ત થવા માટે તેના સ્થાનાંતર xને નીચેનાં સ્વરૂપોમાંથી કોઈ પણ એક રૂપમાં જ દર્શાવવા જોઈએ :

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$x = A \cos (\omega t + \alpha)$, $x = B \sin (\omega t + \beta)$

આ ત્રણ સ્વરૂપો સંપૂર્ણપણે સમતુલ્ય છે. (કોઈ પણ એકને અન્ય બે સ્વરૂપોના પદમાં વ્યક્ત કરી શકાય છે.)

આ રીતે અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ [સમીકરણ (14.31)] એ ખરા અર્થમાં સરળ આવર્ત નથી. તે આશરે માત્ર $2m/b$ કરતાં ઘણા ઓછા સમય અંતરાલો માટે જ સરળ છે, જ્યાં b એ અવમંદન અચળાંક છે.

10. બળપ્રેરિત (પ્રણોદિત) દોલનોમાં સ્થાયી અવસ્થાની ગતિ (મુક્ત દોલનો નાશ પામે પછી) એક સરળ આવર્તગતિ છે, જેની આવૃત્તિ એ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω નથી હોતી પણ તે પ્રણોદિત દોલન ઉત્પન્ન કરતાં બાહ્ય બળની આવૃત્તિ ω_d છે.

11. શૂન્ય અવમંદનની આદર્શ સ્થિતિમાં અનુનાદ પર સરળ આવર્તગતિના કંપવિસ્તાર અનંત હોય છે. આ કોઈ સમસ્યા નથી કારણ કે તમામ વાસ્તવિક પ્રણાલીઓમાં જોકે નાનું પણ થોડુંક તો અવમંદન હોય જ છે.

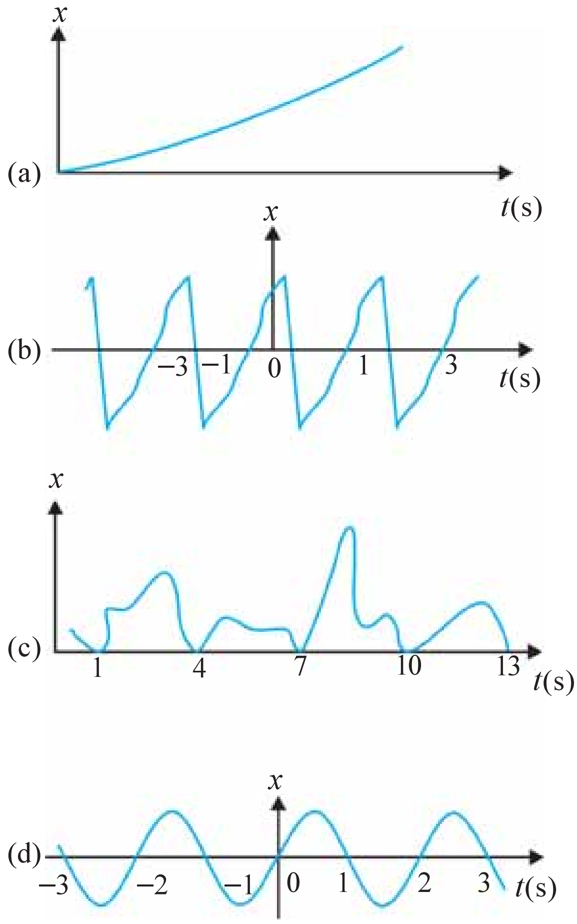
12. પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનમાં, કણની આવર્તગતિની કળા પ્રણોદિત બળની કળાથી અલગ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

14.1 નીચેનામાંથી કયાં ઉદાહરણો આવર્તગતિ દર્શાવે છે ?
(a) એક તરવૈયો એક નદીના એક કિનારેથી બીજા કિનારે અને ત્યાંથી પરતની સફર પૂર્ણ કરે છે.
(b) એક મુક્ત રીતે લટકાવેલ ગજિયા ચુંબકને તેની N–S દિશામાંથી સ્થાનાંતર આપી અને મુક્ત કરવામાં આવે છે.
(c) તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હાઇડ્રોજન પરમાણુ
(d) એક ધનુષમાંથી છોડેલું તીર

14.2 નીચેનામાંથી કયાં ઉદાહરણો એ (લગભગ) સરળ આવર્તગતિ દર્શાવે છે અને કયા જે આવર્ત દર્શાવે છે પરંતુ સરળ આવર્તગતિ દર્શાવતા નથી ?
(a) પૃથ્વીની ધરીને અનુલક્ષીને તેનું ભ્રમણ
(b) U-ટ્યૂબમાં દોલિત પારાના સ્તંભની ગતિ
(c) એક બૉલબૅરિંગને એક લીસી વક્ર વાટકીની અંદર સૌથી નિમ્નતમ બિંદુથી થોડાક ઉપરના બિંદુ પરથી છોડી દેવામાં આવે ત્યારની ગતિ
(d) તેની સંતુલન સ્થિતિને અનુલક્ષીને બહુપરમાણ્વિક અણુના સામાન્ય કંપનો

14.3 આકૃતિ 14.23 એ કોઈ કણની રેખીય ગતિ માટે x-t ના ચાર આલેખોને દર્શાવે છે. કયા આલેખો આવર્તગતિ દર્શાવે છે ? ગતિનો આવર્તકાળ (આવર્તગતિના કિસ્સામાં) શું છે ?



આકૃતિ **14.23**

14.4 નીચેના સમયનાં વિધેયોમાંથી કયા (a) સરળ આવર્તગતિ (b) આવર્ત પરંતુ સરળ આવર્તગતિ ન હોય અને (c) બિનઆવર્તગતિ દર્શાવે છે ? આવર્તગતિના દરેક કિસ્સામાં આવર્તકાળ આપો. (કોઈ ધન અચળાંક ω માટે) :

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos (\pi/4 - 2\omega t)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp (-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 એક કણ 10 cm દૂર એવાં બે બિંદુઓ, A અને Bની વચ્ચે રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરે છે. A થી Bની દિશાને ધન લો અને વેગ, પ્રવેગ અને બળની સંજ્ઞા આપો. જ્યારે તે કણ

(a) A છેડા પર હોય

(b) B છેડા પર હોય

(c) ABના મધ્યબિંદુ પર A તરફ જતી દિશામાં

(d) B થી 2 cm દૂર Aની તરફ જતાં

(e) A થી 3 cm દૂર B તરફ જતાં અને

(f) B થી 4 cm દૂર A તરફ જતાં

14.6 કણના પ્રવેગ a અને સ્થાનાંતર x વચ્ચેના નીચેના સંબંધોમાંથી કયા સરળ આવર્તગતિ ધરાવે છે ?

(a) $a = 0.7x$

(b) $a = -200x^2$

(c) $a = -10x$

(d) $a = 100x^3$

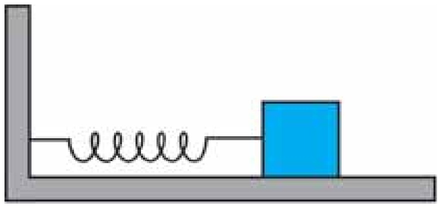
14.7 સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની ગતિને સ્થાનાંતર વિધેય

$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$ દ્વારા વર્ણવવામાં આવે છે.

જો કણનું પ્રારંભિક ($t = 0$) સ્થાન 1 cm હોય અને તેનો પ્રારંભિક વેગ ω cm/s હોય, તો તેનો કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા શોધો. કણની કોણીય આવૃત્તિ એ π s^{-1} છે. જો cosine વિધેયના સ્થાને સ.આ.ગ.ને વર્ણવવા માટે આપણે sine વિધેય $x = B \sin (\omega t + \alpha)$ પસંદ કરીએ, તો ઉપર્યુક્ત પ્રારંભિક શરતો સાથે કણનો કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા શું થશે ?

14.8 સ્પ્રિંગ બૅલેન્સમાં જે સ્કેલ છે તે 0 થી 50 kg સુધીનો છે. સ્કેલની લંબાઈ 20 cm છે. આ કાંટા પર લટકાવવામાં આવેલ એક પદાર્થને સ્થાનાંતરિત કરીને મુક્ત કરવામાં આવે છે, તો તે 0.6 sના આવર્તકાળ સાથે દોલિત થાય છે. આ પદાર્થનું વજન કેટલું હશે ?

14.9 આકૃતિ 14.24માં બતાવ્યા પ્રમાણે 1200 N m^{-1}નો સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી એક સ્પ્રિંગને એક સમક્ષિતિજ ટેબલ પર ગોઠવેલ કરેલ છે. આ સ્પ્રિંગના મુક્ત છેડા પર 3 kg જેટલું દ્રવ્યમાન જોડેલ છે. આ દ્રવ્યમાનને એક બાજુ 2.0 cmના અંતર સુધી ખેંચીને મુક્ત કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ **14.24**

(i) દોલનની આવૃત્તિ (ii) દ્રવ્યમાનનો મહત્તમ પ્રવેગ અને (iii) દ્રવ્યમાનની મહત્તમ ઝડપ શોધો.

14.10 સ્વાધ્યાય 14.9માં, ચાલો આપણે જ્યારે સ્પ્રિંગ ખેંચાયેલી ના હોય ત્યારની દ્રવ્યમાનની સ્થિતિને $x = 0$ લઈએ અને ડાબાથી જમણી તરફની દિશાને X-અક્ષની ધન દિશા તરીકે લઈએ. દોલન કરતાં આ દ્રવ્યમાન આપણે જ્યારે સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરીએ ($t = 0$) તે ક્ષણે આ દ્રવ્યમાન

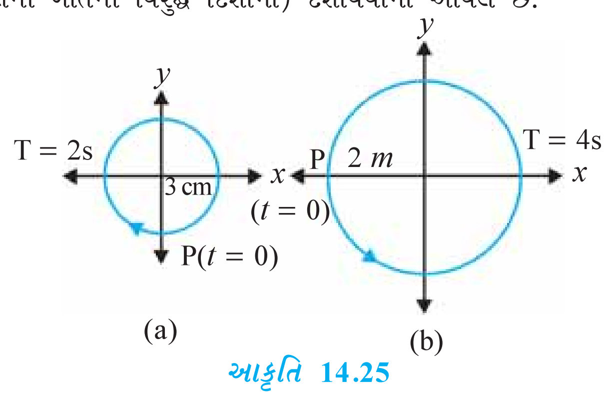
(a) મધ્યમાન સ્થાને

(b) મહત્તમ ખેંચાયેલા સ્થિતિ પર, અને

(c) મહત્તમ સંકોચિત સ્થિતિ પર હોય તે દરેક કિસ્સા માટે xને tના વિધેય તરીકે દર્શાવો.

સ.આ.ગ. માટેનાં આ વિધેયો આવૃત્તિમાં, કંપવિસ્તારમાં અથવા પ્રારંભિક કાળમાં બીજા કરતાં કેવી રીતે અલગ પડે છે ?

14.11 આકૃતિઓ 14.25 બે વર્તુળમય ગતિઓ દર્શાવે છે. પ્રત્યેક આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા, પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ, પ્રારંભિક સ્થિતિ અને પરિભ્રમણ દિશા (એટલે કે ઘડિયાળના કાટાંની ગતિની દિશામાં કે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં) દર્શાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ **14.25**

દરેક કિસ્સામાં, પરિભ્રમણ કરતાં કણ Pના ત્રિજ્યા સદિશના x-પ્રક્ષેપને અનુરૂપ સરળ આવર્તગતિ મેળવો.

14.12 નીચેની પ્રત્યેક સરળ આવર્તગતિ માટે અનુરૂપ સંદર્ભ વર્તુળ દોરો. કણનું પ્રારંભિક (t = 0) સ્થાન, વર્તુળની ત્રિજ્યા અને ભ્રમણગતિ કરતાં કણની કોણીય ઝડપ દર્શાવો. સરળતા માટે ભ્રમણની દિશાને દરેક કિસ્સામાં ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરૂદ્ધની લઈ શકાય છે. (x cmમાં છે અને t એ sમાં છે.)

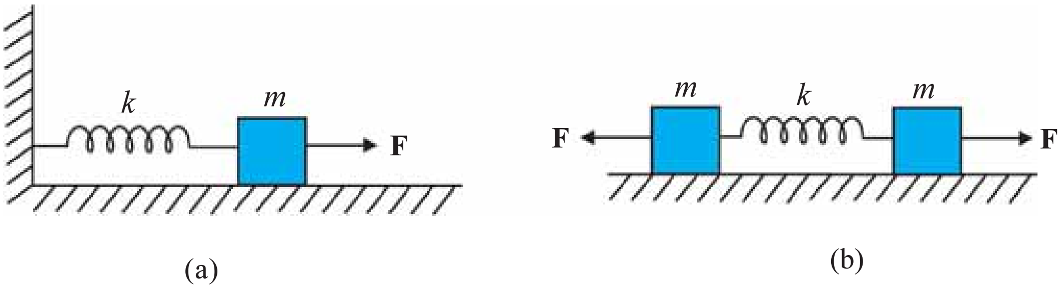
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 આકૃતિ 14.26(a) બતાવે છે કે k બળ-અચળાંકવાળી એક સ્પ્રિંગના એક છેડાને દૃઢ રીતે જકડેલ છે અને તેના મુક્ત છેડા સાથે m દ્રવ્યમાન જોડેલ છે. મુક્ત છેડા પર લગાડવામાં આવતું બળ **F** એ સ્પ્રિંગને ખેંચે છે. આકૃતિ 14.30 (b)માં આ જ સ્પ્રિંગ બંને છેડાથી મુક્ત છે અને એક દ્રવ્યમાન m બંને છેડા પર જોડેલ છે. આકૃતિ 14.26 (b)માંની સ્પ્રિંગના દરેક છેડાને એક સમાન બળ **F** દ્વારા ખેંચવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ **14.26**

(a) આ બે કિસ્સાઓમાં સ્પ્રિંગનું મહત્તમ વિસ્તરણ કેટલું છે ?

(b) જો આકૃતિ (a)માંનું દ્રવ્યમાન અને આકૃતિ (b)નાં બે દ્રવ્યમાનોને જો મુક્ત કરવામાં આવે તો દરેક કિસ્સામાં દોલનોનો આવર્તકાળ કેટલો થશે ?

14.14 એક ઍન્જિનના સિલિન્ડર હેડમાં પિસ્ટન 1.0 mનો સ્ટ્રોક (કંપવિસ્તાર કરતાં બમણી) ધરાવે છે. જો પિસ્ટન 200 rad/mની કોણીય આવૃત્તિ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે તો તેની મહત્તમ ઝડપ કેટલી છે ?

14.15 ચંદ્રની સપાટી પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે પ્રવેગ 1.7 m s^{-2} છે. એક સાદા લોલકનો પૃથ્વીની સપાટી પરનો આવર્તકાળ 3.5 s હોય તો ચંદ્રની સપાટી પર આવર્તકાળ કેટલો હશે ? (પૃથ્વીની સપાટી પર g = 9.8 m s^{-2} છે.)

14.16 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) SHMમાં કણનો આવર્તકાળ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

એ બળ અચળાંક k અને કણનાં દ્રવ્યમાન m પર આધાર રાખે છે.

એક સાદું લોલક લગભગ સ.આ.ગ.માં હોય છે. તેમ છતાં શા માટે લોલકનો આવર્તકાળ એ લોલકનાં દ્રવ્યમાનથી સ્વતંત્ર છે ?

(b) નાના કોણનાં દોલનો માટે સાદા લોલકની ગતિ લગભગ સરળ આવર્ત છે. કંપનના મોટા ખૂણા માટે વધુ સંલગ્ન વિશ્લેષણ બતાવે છે કે T એ $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ થી મોટો છે. આ પરિણામને સમજવા માટે કોઈ ગુણાત્મક દલીલ વિચારો.

(c) હાથ પર કાંડા ઘડિયાળ પહેરેલ માણસ એક ટાવરની ટોચ પરથી નીચે પડે છે. શું આ ઘડિયાળ મુક્ત પતન દરમિયાન સાચો સમય બતાવશે ?

(d) ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ મુક્ત પતન કરતાં કૅબિનમાં જડિત કરેલ સાદા લોલકના દોલનની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

14.17 l લંબાઈનાં અને M દ્રવ્યમાનનો બૉબ ધરાવતાં એક સાદા લોલકને કારમાં લટકાવવામાં આવે છે. આ કાર નિયમિત ગતિ સાથે R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર ગતિ કરી રહી છે. જો લોલક તેની સંતુલન સ્થાનને અનુલક્ષીને ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં નાનાં દોલનો કરે, તો તેનો આવર્તકાળ શું હશે ?

14.18 A પાયાનું ક્ષેત્રફળ અને h ઊંચાઈનો કૉર્કનો એક નળાકાર ટુકડો ρ_l ઘનતા ધરાવતાં પ્રવાહીમાં તરે છે. આ કૉર્કને સહેજ ડુબાડીને પછી મુક્ત કરવામાં આવે છે. બતાવો કે આ કૉર્ક ઉપર-નીચે સરળ આવર્તદોલનો કરશે જેનો આવર્તકાળ હશે,

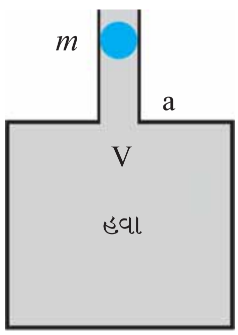
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_1 g}}\ .$$

જ્યાં ρ એ કૉર્કની ઘનતા છે. (પ્રવાહીની સ્નિગ્ધતાને કારણે થતાં અવમંદનો અવગણો.)

14.19 પારો ધરાવતી એક U-ટ્યૂબનો એક છેડો એક શોષક (સક્શન) પંપ અને બીજો છેડો વાતાવરણમાં છે. બે કૉલમ વચ્ચે નાનો દબાણ તફાવત જાળવવામાં આવે છે. બતાવો કે, જ્યારે સક્શન પંપ દૂર કરવામાં આવે છે, તો U-ટ્યૂબમાં પારાનો સ્તંભ સરળ આવર્તગતિ કરે છે.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

14.20 V કદની એક ચેમ્બરની ગ્રીવાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ a છે જેમાં m દ્રવ્યમાનનો એક બૉલ ફિટ (ચુસ્ત) થઈ જાય છે અને કોઈ પણ ઘર્ષણ વિના ઉપર-નીચે ગતિ કરી શકે છે. (આકૃતિ 14.33) એમ બતાવો કે બૉલને થોડોક નીચે દબાવીને મુક્ત કરતાં તે સ.આ.ગ. કરે છે. હવાના દબાણ-કદ બદલાવને સમતાપી (Isothermal) ગણીને દોલનોના આવર્તકાળ માટેનું સૂત્ર મેળવો. (જુઓ આકૃતિ 14.27).



આકૃતિ **14.27**

14.21 3000 kgના વાહનમાં તમે સવારી કરી રહ્યાં છો. એમ ધારીને કે તમે તેની સસ્પેન્શન સિસ્ટમનાં દોલનોની લાક્ષણિકતાની તપાસ કરી રહ્યાં છો. આ સસ્પેન્શન 15 cm દબાય છે જ્યારે સમગ્ર વાહન તેના પર મૂકવામાં આવે છે. ઉપરાંત એક સંપૂર્ણ દોલન દરમિયાન કંપવિસ્તારમાં 50 % જેટલો ઘટાડો થાય છે. (a) સ્પ્રિંગ-અચળાંક k અને (b) દરેક પૈડું 750 kgને આધાર આપે છે. એમ ધારીને સ્પ્રિંગ અને એક પૈડાંના આંચકા-શોષક તંત્ર માટે અવમંદન અચળાંક b શોધો.

14.22 બતાવો કે રેખીય સ.આ.ગ.માં કણના દોલનની કોઈ પણ અવધિ માટે સરેરાશ ગતિઊર્જા એ તે જ અવધિ માટેની સરેરાશ સ્થિતિઊર્જાને સમાન હોય છે.

14.23 10 kg દ્રવ્યમાનની એક વર્તુળાકાર તક્તી તેના કેન્દ્રથી જોડેલ તાર દ્વારા લટકાવવામાં આવેલ છે. આ તક્તીને ઘુમાવીને તારમાં વળ ચડાવી તેને મુક્ત કરવામાં આવે છે. આ વળ (ટૉર્શનલ) દોલનોનો આવર્તકાળ 1.5 s છે. આ તક્તીની ત્રિજ્યા 15 cm છે. આ તારનો ટૉર્શનલ સ્પ્રિંગ-અચળાંક નક્કી કરો. (α એ ટૉર્શનલ સ્પ્રિંગ-અચળાંક છે જે સંબંધ $J = -\alpha\theta$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. જ્યાં J પુનઃસ્થાપક બળ-યુગ્મ અને θ એ વળ-કોણ છે.)

14.24 એક પદાર્થ 5 cmના કંપવિસ્તાર અને 0.2 sના આવર્તકાળ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે. જ્યારે સ્થાનાંતર (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm હોય, ત્યારે પદાર્થના પ્રવેગ અને વેગ શોધો.

14.25 કોઈ એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ દ્રવ્યમાન સમક્ષિતિજ સમતલમાં કોણીય વેગ ω સાથે ઘર્ષણ કે અવમંદનરહિત દોલનો માટે મુક્ત છે. તેને $t = 0$ એ, x_0 અંતર સુધી ખેંચવામાં આવે છે અને કેન્દ્ર તરફ υ_0 વેગથી ધક્કો મારવામાં આવે છે. પ્રાચલો ω, x_0 અને υ_0નાં પદમાં પરિણામી દોલનોના કંપવિસ્તાર નક્કી કરો. (**સૂચન :** સમીકરણ $x = a\cos(\omega t + \theta)$ સાથે શરૂઆત કરો અને નોંધ કરો કે, પ્રારંભિક વેગ ઋણ છે.)

પ્રકરણ 15

તરંગો (WAVES)

15.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

અગાઉના પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર દોલનો કરતા પદાર્થોની ગતિનો વિચાર કર્યો. તંત્ર કે જે આવા પદાર્થોનો સમૂહ છે તેમાં શું થાય છે ? કોઈ દ્રવ્ય માધ્યમ આનું ઉદાહરણ પૂરું પાડે છે. અત્રે, સ્થિતિસ્થાપક બળો આવાં ઘટકોને એકબીજા સાથે જોડી(બાંધી) રાખે છે તેથી એકની ગતિ બીજાને અસર કરે છે. જો તમે એક લખોટીને શાંત પાણીવાળા તળાવમાં ધીમેથી નાખો તો પાણીની સપાટી વિક્ષુબ્ધ થાય છે. વિક્ષોભ એક જ સ્થાને મર્યાદિત રહેતો નથી, પરંતુ બહાર તરફ વર્તુળાકાર સાથે પ્રસરણ પામે છે. જો તમે પાણીમાં સતત લખોટીઓ નાખતા રહો તો, જે સ્થાને પાણીમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન થયો છે તે સ્થાનેથી વર્તુળો ઝડપથી બહાર તરફ ગતિ કરતાં દેખાશે. આનાથી એવું લાગે છે કે વિક્ષોભના બિંદુથી બહાર તરફ પાણી ગતિ કરી રહ્યું છે. જો તમે આ વિક્ષુબ્ધ સપાટી પર થોડા બૂચના ટુકડાઓ મૂકો તો એવું દેખાય છે કે બૂચના ટુકડાઓ ઊંચે-નીચે ગતિ કરે છે પરંતુ વિક્ષોભના કેન્દ્રથી દૂર જતા નથી. આ દર્શાવે છે કે વર્તુળો સાથે પાણીનો જથ્થો બહાર તરફ વહન પામતો નથી પરંતુ ગતિમાન વિક્ષોભ ઉત્પન્ન થયેલ છે તેમ લાગે છે. તેવી જ રીતે, જ્યારે આપણે બોલીએ છીએ ત્યારે ધ્વનિ આપણાથી બહાર અને દૂર તરફ ગતિ કરે છે; પરંતુ માધ્યમના એક ભાગથી બીજા ભાગ તરફ હવા જતી નથી. હવામાં ઉત્પન્ન કરેલા વિક્ષોભો બહુ સ્પષ્ટ જણાતા નથી અને આપણા ફક્ત કાન કે માઇક્રોફોન તેમની પરખ કરી શકે છે. આવી ભાત (Pattern) કે જે સમગ્રપણે દ્રવ્યના વાસ્તવિક સ્થાન-ફેર કે વહન વિના ગતિ કરે છે તેમને **તરંગો** કહે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આવા તરંગોનો અભ્યાસ કરીશું.

તરંગો ઊર્જાનું વહન કરે છે અને વિક્ષોભની ભાત (વિક્ષોભનો પ્રકાર) જે માહિતી ધરાવે છે તે એકથી બીજા બિંદુએ પ્રસરણ પામે છે. આપણી માહિતી આપ-લેની સમગ્ર પદ્ધતિ મુખ્યત્વે તરંગો દ્વારા સંકેતોના પ્રસરણ પર આધારિત છે. બોલવું એટલે હવામાં ધ્વનિતરંગો ઉત્પન્ન કરવા અને સાંભળવું એટલે તે તરંગોની પરખ કરવી (Detection). ઘણી વાર, માહિતીની આપ-લેની પદ્ધતિમાં જુદા જુદા પ્રકારના તરંગો સંકળાયેલા હોય છે. દાખલા તરીકે, ધ્વનિતરંગોને પ્રથમ વિદ્યુતપ્રવાહ સંકેત (Signal)માં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે, જે બદલામાં એક વિદ્યુત-ચુંબકીય તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તેને એક ઑપ્ટિકલ કેબલ અથવા

સેટેલાઇટ મારફતે પ્રસારિત કરાય છે. મૂળ સંકેતની પરખમાં આ જ બધાં પદ વિરુદ્ધ ક્રમમાં થતાં હોય છે.

બધા જ તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર હોતી નથી. આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રકાશના તરંગો શૂન્યાવકાશમાંથી પસાર થઈ શકે છે. આપણાથી સેંકડો પ્રકાશવર્ષ (Light Years) દૂર રહેલા તારાઓ દ્વારા ઉત્સર્જિત પ્રકાશ, તારાઓ વચ્ચેના અવકાશ કે જે વ્યાવહારિક રીતે શૂન્યાવકાશ જ છે, તેમાંથી પસાર થઈને આપણને પહોંચે છે.

દોરી પરના તરંગો, પાણી પરના તરંગો, ધ્વનિતરંગો, સેસ્મિક (ભૂકંપના) તરંગો વગેરે જેવા તરંગોનો ખૂબ જાણીતો પ્રકાર યાંત્રિકતરંગો તરીકે ઓળખાય છે. આ તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર છે. તેઓ શૂન્યાવકાશમાં થઈને પ્રસરી શકતા નથી. તેઓમાં ઘટક કણોના દોલનો થતાં હોય છે અને તેઓ માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો પર આધારિત છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો કે જેમના વિશે તમે ધોરણ XIIમાં ભણશો તે એક જુદા પ્રકારના તરંગો છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમ હોવું જરૂરી નથી. તેઓ તો શૂન્યાવકાશમાં થઈને પણ ગતિ કરી શકે છે. પ્રકાશ, રેડિયોતરંગો, X કિરણો એ બધા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો છે. શૂન્યાવકાશમાં બધા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની ઝડપ એકસરખી c છે. જેનું મૂલ્ય

$$c = 299,\ 792,\ 458\ \mathrm{m\ s^{-1}}\ \text{છે.} \qquad (15.1)$$

એક ત્રીજા પ્રકારના તરંગોને દ્રવ્ય-તરંગો (Matter Waves) કહે છે. તેઓ દ્રવ્યનાં ઘટકો : ઇલેક્ટ્રૉન્સ, પ્રોટોન્સ, ન્યુટ્રૉન્સ, પરમાણુઓ અને અણુઓ સાથે જોડાયેલ છે. તેઓ, કુદરતના ક્વૉન્ટમ મિકેનિકલ વર્ણનમાં ઉદ્ભવે છે, જે તમે આગળના અભ્યાસોમાં શીખશો. યાંત્રિક અથવા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો કરતાં વૈચારિક રીતે તેઓ વધુ અમૂર્ત (Abstract) હોવા છતાં, આધુનિક ટેક્નોલૉજીમાં મૂળભૂત એવી રચનાઓમાં તેઓના ઉપયોગ જણાયા છે : ઇલેક્ટ્રૉન સાથે સંકળાયેલ દ્રવ્ય-તરંગોનો ઉપયોગ ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે યાંત્રિકતરંગો કે જેઓને પ્રસરવા માટે દ્રવ્ય માધ્યમની જરૂર છે, તેમનો અભ્યાસ કરીશું. કલા અને સાહિત્ય પર તરંગોની સૌંદર્યલક્ષી/કલાત્મક અસર ઘણા પ્રાચીન સમયથી જોવા મળી છે, છતાં તરંગગતિનું સૌપ્રથમ વૈજ્ઞાનિક વિશ્લેષણ સત્તરમી સદી જેટલું જૂનું છે. તરંગગતિના ભૌતિકવિજ્ઞાન સાથે સંકળાયેલા કેટલાક પ્રખ્યાત વૈજ્ઞાનિકોમાં ક્રિશ્ચિયન હાઇગેન્સ (Christian Huygens, 1629-1695), રૉબર્ટ હૂક અને આઇઝેક ન્યૂટન છે. તરંગોના ભૌતિકવિજ્ઞાનની સમજણ, સ્પ્રિંગ સાથે બાંધેલ દળોનાં દોલનોના ભૌતિકવિજ્ઞાન અને સાદા લોલકના ભૌતિકવિજ્ઞાનને અનુસરે છે. સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોમાં તરંગો પ્રસંવાદી (Harmonic) દોલનો સાથે ગાઢ રીતે સંબંધિત છે. (ખેંચાયેલી દોરી, ગૂંચળાવાળી સ્પ્રિંગ, હવા વગેરે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમનાં ઉદાહરણ છે). આપણે આવો સંબંધ સરળ ઉદાહરણો દ્વારા દર્શાવીશું.

આકૃતિ 15.1માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજા સાથે જોડાયેલી સ્પ્રિંગોના સમૂહનો વિચાર કરો. જો એક છેડે સ્પ્રિંગને એકાએક ખેંચીને છોડી દેવામાં આવે તો વિક્ષોભ બીજા છેડા સુધી ગતિ કરે છે. આમાં શું થયું હશે ?

આકૃતિ **15.1** *એકબીજા સાથે જોડાયેલી સ્પ્રિંગોનો સમૂહ. A છેડો એકાએક ખેંચવામાં આવે છે તેથી ઉદ્ભવતો વિક્ષોભ પછી બીજા છેડા સુધી ગતિ કરે છે.*

પ્રથમ સ્પ્રિંગ તેની સંતુલન લંબાઈમાંથી વિક્ષોભિત/ચલાયમાન થઈ છે. બીજી સ્પ્રિંગ પ્રથમ સાથે જોડાયેલી હોવાથી તે પણ ખેંચાય છે કે સંકોચાય છે અને આ રીતે પ્રક્રિયા આગળ વધે છે, વિક્ષોભ એક છેડેથી બીજા છેડે જાય છે, પરંતુ દરેક સ્પ્રિંગ તેના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ નાનાં દોલનો કરે છે. આ પરિસ્થિતિના વ્યાવહારિક ઉદાહરણ તરીકે એક રેલવે સ્ટેશન પર સ્થિર ઊભેલી ટ્રેનનો વિચાર કરો. ટ્રેનના જુદા જુદા ડબાઓ એકબીજા સાથે સ્પ્રિંગ કપલિંગ દ્વારા જોડાયેલા છે. જ્યારે એક છેડે ઍન્જિન જોડાય છે ત્યારે તે તેની બાજુના ડબાને ધક્કો લગાડે છે આ ધક્કો એક ડબાથી બીજા ડબા તરફ પ્રસરે છે, પણ આખી ટ્રેન સમગ્ર રીતે સ્થાનાંતર કરતી નથી.

હવે આપણે હવામાંથી ધ્વનિતરંગોનું પ્રસરણ વિચારીએ. હવામાં જેમ જેમ તરંગ પસાર થતું જાય તેમ તેમ તે હવાના નાના વિભાગને સંકોચિત કરે છે કે વિસ્તારિત કરે છે. આનાથી તે વિભાગની ઘનતામાં ફેરફાર દા.ત., $\delta\rho$ થાય છે. આ ફેરફારથી તે વિભાગમાં દબાણમાં ફેરફાર δP થાય છે. દબાણ એ એકમ ક્ષેત્રફળ પરનું બળ છે તેથી સ્પ્રિંગની જેમ જ, વિક્ષોભને સમપ્રમાણમાં હોય તેવું એક પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્ભવે છે. આ કિસ્સામાં સ્પ્રિંગના વિસ્તરણ કે સંકોચન સાથે સામ્ય ધરાવતી રાશિ એ ઘનતામાં ફેરફાર છે. જો વિભાગનું સંકોચન થયું હોય, તો તે વિભાગમાંના અણુઓ ઠાંસીને ભરાય છે (Packed) અને તેઓ બાજુના વિભાગ તરફ બહાર ધકેલાવાનું વલણ ધરાવે છે. આમ થાય ત્યારે બાજુના વિભાગમાં ઘનતા વધે છે અથવા બાજુના વિભાગમાં સંઘનન (Compression) ઉત્પન્ન થાય છે. પરિણામે પ્રથમ વિભાગમાંની હવા વિઘનન (Rarefaction) અનુભવે છે. જો કોઈ વિભાગ પ્રમાણમાં વિઘનન ધરાવતો હશે તો આસપાસની હવા તેમાં ધસી જશે અને વિઘનનને બાજુના વિભાગમાં ખસેડી દેશે. આમ સંઘનન અને વિઘનન એક વિભાગથી બીજા વિભાગ તરફ ગતિ કરે છે અને વિક્ષોભનું હવામાં પ્રસરણ શક્ય બનાવે છે.

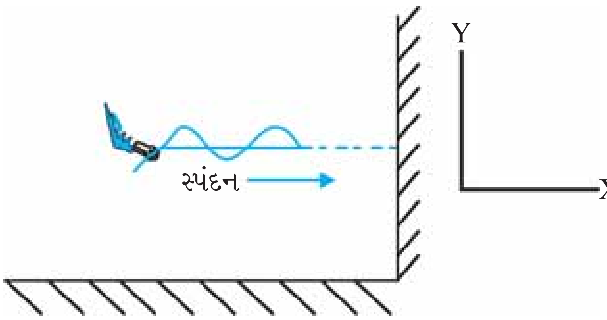
ઘન પદાર્થોમાં આવા જ તર્ક લગાડી શકાય. સ્ફટિકમય ઘન પદાર્થમાં પરમાણુઓ કે પરમાણુના સમૂહો આવર્ત લેટિસમાં ગોઠવાયેલા હોય છે. આમાં, દરેક પરમાણુ કે પરમાણુ-સમૂહ, આસપાસના પરમાણુઓ દ્વારા લાગતાં બળોને લીધે, સંતુલનમાં હોય છે. બીજા પરમાણુઓને સ્થિર રાખીને એક પરમાણુને સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે ત્યારે, સ્પ્રિંગની જેમ જ પુનઃસ્થાપક બળો ઉદ્ભવે છે. આથી આપણે લેટિસમાંના પરમાણુઓને અંત્યબિંદુઓ તરીકે અને તેમની જોડ વચ્ચે સ્પ્રિંગ હોય તેમ ગણી શકીએ છીએ.

આ પ્રકરણના હવે પછીના વિભાગોમાં આપણે તરંગોના કેટલાક લાક્ષણિક ગુણધર્મોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 લંબગત અને સંગત તરંગો (TRANSVERSE AND LONGITUDINAL WAVES)

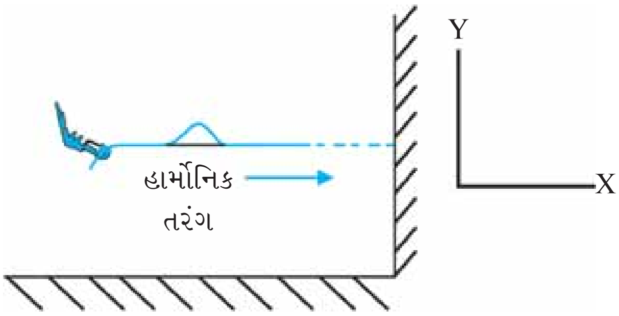
આપણે જોયું કે યાંત્રિક તરંગોની ગતિ માધ્યમના ઘટક કણોનાં દોલનો સાથે સંકળાયેલ છે. જો માધ્યમના ઘટક કણો, તરંગની પ્રસરણ દિશાને લંબરૂપે દોલનો કરતા હોય, તો આપણે તે તરંગને લંબગત (Transverse) તરંગ કહીએ છીએ. જો તેઓ તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર દોલનો કરે તો આપણે તે તરંગને સંગત (Longitudinal) તરંગ કહીએ છીએ.

ઉપર-નીચે એક આંચકો (Jerk) આપવાથી પરિણમેલું એક સ્પંદન (વિક્ષોભ) દોરી પર પ્રસરતું આકૃતિ 15.2માં દર્શાવ્યું છે. જો સ્પંદનના પરિમાણની સરખામણીએ દોરી ખૂબ લાંબી



આકૃતિ 15.2 *જ્યારે સ્પંદન તણાવવાળી દોરીની લંબાઈને સમાંતર (X-દિશામાં) ગતિ કરે છે, ત્યારે દોરીના ખંડ ઉપર નીચે (Y-દિશામાં) દોલનો કરે છે. આ લંબગત તરંગનું ઉદાહરણ છે.*

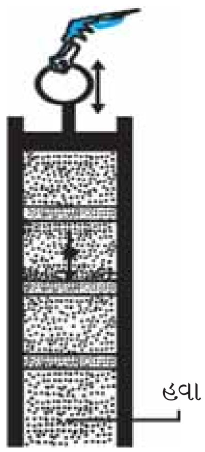
હોય તો બીજા છેડે પહોંચતાં અગાઉ સ્પંદન મંદ પડી જશે અને તે છેડા પરથી થતું પરાવર્તન અવગણી શકાય છે. આકૃતિ 15.3 આવી પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે, પરંતુ આ વખતે બાહ્ય પરિબળ દોરીના એક છેડે સતત આવર્ત Sinusoidal (સાઈન્યુસોઈડલ, Sine પ્રકારનું, જયાવર્તી) આંચકા ઉપર-નીચે આપે છે. બંને કિસ્સામાં દોરીના ખંડ જ્યારે સ્પંદન કે તરંગ, તેમનામાંથી પસાર થાય ત્યારે તેમના સરેરાશ સંતુલન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરે છે. આ દોલનો, દોરી પર તરંગ-ગતિની દિશાને લંબરૂપે છે. આથી



આકૃતિ 15.3 *તણાવવાળી દોરી પર ગતિ કરતું હાર્મોનિક (પ્રસંવાદી Sinusoidal) તરંગ, લંબગત તરંગનું ઉદાહરણ છે. તરંગના વિસ્તારમાંનો દોરીનો ખંડ તેના સંતુલન સ્થાનની આસપાસ તરંગ-પ્રસરણની દિશાને લંબરૂપે દોલનો કરે છે.*

આપણે તરંગને બે રીતે જોઈ શકીએ. આપણે સમયની કોઈ ક્ષણને નિશ્ચિત (Fix) કરીને તરંગને અવકાશમાં ચિત્રિત કરીએ. આના પરથી આપણને આપેલી ક્ષણે સમગ્રપણે અવકાશમાં તરંગનો આકાર મળે છે. બીજી રીતે, એક સ્થાન (Location) નિશ્ચિત કરીએ (એટલે કે દોરીના એક ખાસ વિભાગ પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ) અને સમય સાથે તેની દોલન ગતિનું નિરીક્ષણ કરીએ.

આકૃતિ 15.4 ધ્વનિતરંગના પ્રસરણના ખૂબ જાણીતા ઉદાહરણમાં સંગતતરંગની પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે. હવાભરેલી લાંબી પાઈપના એક છેડે પિસ્ટન રહેલો છે. એકાએક એક ધક્કો આગળ લગાવી પાછો ખેંચતાં, એક સંઘનન (વધારે ઘનતા) અને વિઘનન (ઓછી ઘનતા)નું સ્પંદન (Pulse) માધ્યમ (Air)માં ઉત્પન્ન થાય છે. જો પિસ્ટનને ધકેલવાનું-ખેંચવાનું સતત અને આવર્ત Sinusoidal હોય તો, Sinusoidal



આકૃતિ 15.4 *હવાભરેલી નળીમાં પિસ્ટનને ઉપર-નીચે ધકેલી ઉત્પન્ન કરેલું સંગતતરંગ (ધ્વનિ). હવાનો એક કદ-ખંડ તરંગ-પ્રસરણની દિશાને સમાંતર દોલનો કરે છે.*

તરંગ ઉત્પન્ન થશે, જે પાઈપની લંબાઈને સમાંતર હવામાં પ્રસરણ પામશે. આ સ્પષ્ટ રીતે, સંગતતરંગનું ઉદાહરણ છે.

ઉપર વિચારેલા, લંબગત કે સંગતતરંગો, પ્રગામી તરંગો છે કારણ કે તેઓ માધ્યમના એક ભાગથી બીજા ભાગ સુધી પ્રસરે છે. અગાઉ આપણે નોંધ્યું તે મુજબ દ્રવ્ય માધ્યમ સમગ્રપણે ગતિ કરતું નથી. દાખલા તરીકે કોઈ ઝરણું સમગ્રપણે પાણીની ગતિ દર્શાવે છે. જ્યારે પાણીની સપાટી પરના તરંગમાં વિક્ષોભ જ ગતિ કરે છે, પણ સમગ્રપણે પાણી નહિ. તેવી જ રીતે પવન (સમગ્ર પણે હવાની ગતિ)ને ધ્વનિતરંગ કે જે વિક્ષોભ (દબાણ ઘનતામાં)ની હવામાંની (સમગ્રપણે હવાના માધ્યમની ગતિ સિવાયની) ગતિ છે તેની સાથે ગૂંચવવી ન જોઈએ.

યાંત્રિકતરંગો માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો સાથે સંબંધ ધરાવે છે. લંબગત તરંગમાં, માધ્યમનાં ઘટકો, તરંગની ગતિને લંબરૂપે દોલનો કરે છે, જેનાથી આકારના ફેરફારો ઉદ્ભવે છે. એટલે કે માધ્યમનો દરેક ખંડ આકાર પ્રતિબળ અનુભવે છે. ઘન પદાર્થો અને દોરીઓને આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક હોય છે એટલે કે તેઓ આકાર પ્રતિબળને સહન કરે છે (Sustain). તરંગોને પોતાનો કોઈ આકાર હોતો નથી–તેઓ આકાર પ્રતિબળને તાબે થઈ જાય છે. આ કારણથી લંબગત તરંગો ઘન પદાર્થો અને દોરી (તણાવ હેઠળ)માં શક્ય બને છે પરંતુ તરલોમાં નહિ. આમ છતાં, ઘન અને તરલોને કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (bulk modulus) હોય છે, એટલે કે તેઓ દાબીય પ્રતિબળ (Compressive Stress) સહન કરે છે. સંગતતરંગોમાં દાબીય પ્રતિબળ (દબાણ) સંકળાયેલ હોવાથી તેઓ ઘન અને તરલોમાં થઈને પ્રસરણ પામી શકે છે. આમ સ્ટીલનો સળિયો કદ અને આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંકો બંને ધરાવતો હોવાથી લંબગત તેમજ સંગતતરંગોનું વહન કરી શકે છે. પરંતુ હવા ફક્ત સંગતતરંગોનું પ્રસરણ કરી શકે છે. જ્યારે સ્ટીલના સળિયા જેવું માધ્યમ લંબગત અને સંગત બંને તરંગોનું પ્રસરણ કરે છે, ત્યારે તેમની ઝડપ જુદી જુદી હોઈ શકે છે કારણ કે તેઓ જુદા જુદા સ્થિતિસ્થાપક અંકોથી ઉદ્ભવે છે.

ઉદાહરણ 15.1 તરંગગતિનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં તરંગગતિ, લંબગત, સંગત કે બંનેનું સંયોજન છે તે જણાવો.

(a) લાંબી (સંગત) સ્પ્રિંગમાં સ્પ્રિંગનો એક છેડો બાજુમાં સ્થાનાંતરિત કરતાં ઉદ્ભવતી વળ (Kink)ની ગતિ

(b) પ્રવાહીભરેલા નળાકારમાં પિસ્ટનને આગળ-પાછળ ખસેડતાં ઉદ્ભવતા તરંગો

(c) પાણીમાં તરતી મોટરબોટથી ઉદ્ભવતા તરંગો

(d) કંપન કરતા ક્વાર્ટ્ઝ સ્ફટિકથી હવામાં ઉદ્ભવતાં અલ્ટ્રાસોનિક (પરાશ્રાવ્ય) તરંગો

ઉકેલ

(a) લંબગત અને સંગત

(b) સંગત

(c) લંબગત અને સંગત

(d) સંગત

15.3 પ્રગામી તરંગમાં સ્થાનાંતર સંબંધ (DISPLACEMENT RELATION IN A PROGRESSIVE WAVE)

પ્રગામી તરંગના ગાણિતિક વર્ણન માટે આપણને સ્થાન x અને સમય t એ બંનેના વિધેયની જરૂર પડે છે. આવા વિધેય દ્વારા દરેક ક્ષણે તરંગનો તે ક્ષણે આકાર દર્શાવવો જોઈએ. વળી તેણે દરેક આપેલ સ્થાને માધ્યમના ઘટકની ગતિ દર્શાવવી જોઈએ. જો આપણે આકૃતિ 15.3માં દર્શાવ્યા મુજબના Sinusoidal (Sine આકારના) પ્રગામી તરંગને રજૂ કરવા માંગતા હોઈએ તો અનુરૂપ વિધેય પણ Sinusoidal (Sine પ્રકારનું) હોવું જોઈએ. સગવડ ખાતર, આપણે તરંગને લંબગત લઈશું જેથી માધ્યમનાં ઘટકોનાં સ્થાન x વડે દર્શાવાય તો, સંતુલન સ્થાનમાંથી સ્થાનાંતર y વડે દર્શાવી શકાય. આ રીતે પ્રગામી Sinusoidal (Sine આકારનું) તરંગ

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.2)$$

વડે રજૂ કરાય છે. Sine વિધેયના પક્ષ અથવા કોણાંક (Argument)માં રહેલા પદ ϕ ને સમતુલ્ય અર્થ એ છે કે, આપણે Sine અને Cosine વિધેયોના નીચેનાં રેખીય સંયોજનોનો વિચાર કરીએ છીએ :

$$y(x, t) = A\sin(kx - \omega t) + B\cos(kx - \omega t) \quad (15.3)$$

સમીકરણ (15.2) અને (15.3) પરથી

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ and } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

સમીકરણ (15.2) Sinusoidal તરંગ કેમ દર્શાવે છે તે સમજવા, એક નિશ્ચિત ક્ષણ $t = t_0$ લો. આથી સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયનો કોણાંક (Argument) એ માત્ર kx + અચળ છે. આમ કોઈ નિશ્ચિત ક્ષણે, xના વિધેય તરીકે તરંગનો આકાર Sine તરંગ છે. તે જ રીતે કોઈ નિશ્ચિત સ્થાન, દા.ત., $x = x_0$ લો. આમાં સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયનો કોણાંક (Argument), અચળ-ωt છે. આમ કોઈ નિશ્ચિત સ્થાને સ્થાનાંતર y, Sinusoidal રીતે સમય સાથે બદલાય છે. એટલે કે જુદાં-જુદાં સ્થાને માધ્યમનાં ઘટકો સાદી પ્રસંવાદી ગતિ/સરળ આવર્ત ગતિ કરે છે. અંતે, જેમ t વધે તેમ ધન દિશામાં x વધવું જોઈએ, જેથી $kx - \omega t + \phi$ અચળ રાખી શકાય. આમ સમીકરણ (15.2) x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતા Sinusoidal (પ્રસંવાદી, Harmonic) તરંગને રજૂ કરે છે. બીજી બાજુ,

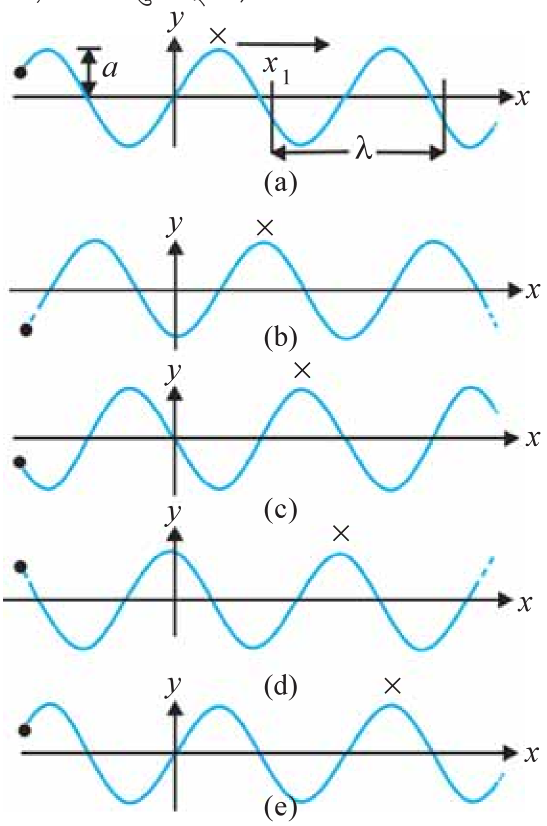
$$y(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \phi) \qquad (15.4)$$

વિધેય, x-અક્ષની ઋણ દિશામાં ગતિ કરતા તરંગને રજૂ કરે છે. આકૃતિ (15.5)માં સમીકરણ 15.2માં આવતી વિવિધ ભૌતિકરાશિઓનાં નામ આપેલ છે.

$y(x, t)$	= સ્થાન x અને સમય tના વિધેય તરીકે સ્થાનાંતર
a	= તરંગનો કંપ-વિસ્તાર
ω	= તરંગની કોણીય આવૃત્તિ
k	= કોણીય તરંગ-સંખ્યા
$kx - \omega t + \phi$	= x સ્થાને, t સમયે કળા
ϕ	= પ્રારંભિક કળા એટલે કે $x = 0$ આગળ $t = 0$ સમયે કળા

આકૃતિ 15.5 *સમીકરણ 15.2માં પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓના અર્થ*

એક સમાન સમયગાળાથી જુદા પડતા જુદા જુદા સમય માટેના સમીકરણ 15.2ના આલેખ આકૃતિ 15.6માં દર્શાવ્યા છે. તરંગમાં શૃંગ (Crest) એ મહત્તમ ધન સ્થાનાંતરનું બિંદુ અને ગર્ત (Trough) એ મહત્તમ ઋણ સ્થાનાંતરનું બિંદુ છે. તરંગ કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોવા માટે આપણે આપણું ધ્યાન એક શૃંગ પર કેન્દ્રિત કરીને તે સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોઈએ. આકૃતિમાં આને શૃંગ પર દોરેલી ચોકડી (×) વડે દર્શાવેલ છે. તે જ રીતે આપણે નિશ્ચિત સ્થાને (દા. ત., x-અક્ષનું ઉદ્‌ગમ) માધ્યમના કોઈ ખાસ ઘટકની



આકૃતિ 15.6 *જુદા જુદા સમયે x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતું હાર્મોનિક તરંગ*

ગતિ જોઈ શકીએ. આ ઘાટા ટપકા (•) વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 15.6માંના આલેખો દર્શાવે છે કે સમય સાથે, ઉદ્‌ગમ આગળનું ઘાટું ટપકું (•) આવર્ત રીતે ગતિ કરે છે. એટલે કે તરંગ જેમ આગળ વધે તેમ ઉદ્‌ગમ આગળનો કણ તેના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલન કરે છે. આ બાબત બીજા કોઈ પણ સ્થાન માટે પણ સાચી છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ કે ઘાટા ટપકાએ (•) એક પૂર્ણ આંદોલન પૂર્ણ કર્યું હોય તે દરમિયાન શૃંગ પણ આગળ તરફ અમુક અંતર સુધી ગતિ કરી ગયું છે.

આકૃતિ 15.6માંના આલેખોનો ઉપયોગ કરીને હવે આપણે સમીકરણ 15.2ની કેટલીક રાશિઓની વ્યાખ્યા આપીએ.

15.3.1 કંપવિસ્તાર અને કળા (Amplitude and Phase)

સમીકરણ (15.2)માં, Sine વિધેયનું મૂલ્ય 1 અને −1ની વચ્ચે બદલાતું હોવાથી; સ્થાનાંતર $y(x, t)$ એ a અને $-a$ની વચ્ચે બદલાય છે. આપણે aને ધન અચળાંક વ્યાપકતાના કોઈ નુકસાન વિના લઈ શકીએ છીએ. આ રીતે a માધ્યમના કોઈ ઘટકનું તેના સંતુલન સ્થાનથી મહત્તમ સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. એ નોંધો કે સ્થાનાંતર y ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે પણ a ધન છે. તેને તરંગનો **કંપવિસ્તાર** કહે છે.

સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયના કોણાંક (Argument) તરીકે આવતી રાશિ $(kx - \omega t + \phi)$ તરંગની કળા કહેવાય છે. આપેલા કંપવિસ્તાર a માટે, કળા, કોઈ પણ સ્થાને અને કોઈ પણ સમયે તરંગનું સ્થાનાંતર નક્કી કરે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે, $x = 0$ અને $t = 0$ માટે કળા ϕ છે. આથી ϕને મૂળ કળા (કોણ) કહે છે. X-અક્ષ પર ઉદ્‌ગમની અને પ્રારંભિક સમયની યોગ્ય પસંદગી દ્વારા $\phi = 0$ મળી શકે છે. આથી ϕને પડતો મૂકવામાં આવે એટલે કે સમીકરણ (15.2)ને $\phi = 0$ સાથે લખીએ તો વ્યાપકતાનું કોઈ નુકસાન થતું નથી.

15.3.2 તરંગલંબાઈ અને કોણીય તરંગ-સંખ્યા (Wavelength and Angular Wave Number)

એકસમાન કળા ધરાવતાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના લઘુતમ અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ કહે છે અને તેને સામાન્ય રીતે λ દ્વારા દર્શાવાય છે. સરળતા ખાતર, આપણે સમાન કળાવાળાં બિંદુઓ તરીકે શૃંગો અથવા ગર્તોને પસંદ કરી શકીએ. એ રીતે, તરંગમાં બે ક્રમિક શૃંગ કે બે ક્રમિક ગર્ત વચ્ચેનું અંતર તરંગલંબાઈ છે. સમીકરણ (15.2)માં $\phi = 0$ લેતાં, $t = 0$ સમયે સ્થાનાંતર

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (15.5)$$

પરથી મળે છે. Sine વિધેય દર 2π જેટલા કોણના તફાવતે તેના મૂલ્યનું પુનરાવર્તન કરતું હોવાથી,

$$\sin kx = \sin(kx + 2n\pi) = \sin k\left(x + \frac{2n\pi}{k}\right)$$

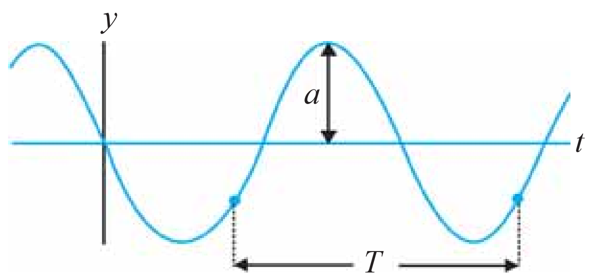
એટલે કે x અને $x + \frac{2n\pi}{k}$ આગળનાં બિંદુઓ આગળ સ્થાનાંતર સમાન છે, જ્યાં $n = 1, 2, 3, ...$ એકસમાન સ્થાનાંતર ધરાવતાં બિંદુઓ વચ્ચેનું લઘુતમ સ્થાનાંતર $n = 1$ લેવાથી મળે છે.

આ રીતે $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ અથવા $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (15.6)

મળે છે. k એ કોણીય તરંગસંખ્યા અથવા પ્રસરણ (Propagation) અચળાંક છે. તેનો SI એકમ radian per metre અથવા rad m^{-1} છે.*

15.3.3 આવર્તકાળ, કોણીય આવૃત્તિ અને આવૃત્તિ (Period, Angular Frequency and Frequency)

આકૃતિ 15.7 ફરી વાર એક Sinusoidal આલેખ દર્શાવે છે. તે આપેલી ક્ષણે તરંગનો આકાર દર્શાવતું નથી પણ (કોઈ નિશ્ચિત સ્થાને) માધ્યમના કોઈ ખંડનું સમયના વિધેય તરીકે સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. સરળતા ખાતર આપણે સમીકરણ (15.2)ને $\phi = 0$ સાથે લઈને ખંડની ગતિ $x = 0$ આગળ નિહાળીએ છીએ.



આકૃતિ 15.7 *નિશ્ચિત સ્થાને રહેલ દોરીનો ખંડ જ્યારે તરંગ તેના પરથી પસાર થાય ત્યારે સમય સાથે કંપવિસ્તાર a અને આવર્તકાળ T સાથે દોલનો કરે છે.*

આ રીતે આપણને

$$y(0, t) = a \sin(-\omega t)$$
$$= -a \sin \omega t$$

મળે. તરંગના દોલનનો આવર્તકાળ એ તેના કોઈ ખંડ (વિભાગ)ને એક દોલન પૂર્ણ કરતાં લાગતો સમય છે. એટલે કે

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega(t + T)$$
$$= -a \sin (\omega t + \omega T)$$

sin વિધેય 2π અંતરાલે પુનરાવર્તન પામતું હોવાથી,

$$\omega T = 2\pi \text{ અથવા } \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (15.7)$$

ωને તરંગની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે તેનો SI એકમ rad s^{-1} છે. આવૃત્તિ ν એ એક સેકન્ડમાં થતાં દોલનોની સંખ્યા છે. આથી,

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (15.8)$$

νને સામાન્ય રીતે hertz (Hz)માં માપવામાં આવે છે. ઉપરની ચર્ચામાં, હંમેશાં દોરી પર પ્રસરતા તરંગનો અથવા લંબગત તરંગના સંદર્ભનો ઉલ્લેખ કરેલ છે. સંગત તરંગમાં માધ્યમના કોઈ ખંડનું સ્થાનાંતર તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર હોય છે. સમીકરણ (15.2)માં, સંગતતરંગ માટે સ્થાનાંતર વિધેય

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \qquad (15.9)$$

તરીકે લખાય છે, જ્યાં $s(x, t)$ એ માધ્યમના x-સ્થાને આવેલ ખંડનું t સમયે, તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર એવું સ્થાનાંતર છે. સમીકરણ (15.9)માં a એ સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર છે. બીજી રાશિઓના અર્થ લંબગત તરંગમાં હતા તે જ છે. સિવાય કે સ્થાનાંતર વિધેય $y(x, t)$ને સ્થાને વિધેય $s(x, t)$ આવે છે.

ઉદાહરણ 15.2 એક દોરી પર પ્રસરતું તરંગ

$y(x, t) = 0.005 \sin (80.0\, x - 3.0\, t)$

વડે દર્શાવાય છે, જેમાં સંખ્યાત્મક અચળાંકો SI એકમોમાં (0.005 m, 80.0 rad m^{-1} અને 3.0 rad s^{-1}) છે. તરંગના (a) કંપવિસ્તાર (b) તરંગલંબાઈ (c) આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ શોધો. $x = 30.0$ cm અંતરે અને $t = 20$ s સમયે તરંગનું સ્થાનાંતર y શોધો.

ઉકેલ આ સ્થાનાંતર સમીકરણને, સમીકરણ (15.2)

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

સાથે સરખાવતાં,

(a) તરંગનો કંપવિસ્તાર 0.005 m = 5 mm

(b) કોણીય તરંગસંખ્યા $k = 80.0\ m^{-1}$ અને કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 3.0\ s^{-1}$ મળે છે. તરંગલંબાઈ λના k સાથેના

* *અત્રે 'Radian' પડતો મૂકીને એકમોને માત્ર m^{-1} તરીકે લખી શકાય. આમ k, એકમ અંતરમાં સમાવી શકાતા તરંગોની સંખ્યાના 2π ગણું મૂલ્ય (એટલે કે કુલ કળા-તફાવત) દર્શાવે છે. તેના SI એકમ m^{-1} છે.*

સંબંધ (સમીકરણ 15.6) પરથી

$\lambda = 2\pi / k$

$= \dfrac{2\pi}{80.0\text{m}^{-1}}$

$= 7.85$ cm

(c) T અને ω વચ્ચેના સંબંધ

$T = 2\pi / \omega$ પરથી

$T = \dfrac{2\pi}{3.0\ \text{s}^{-1}}$

$= 2.09$ s

અને આવૃત્તિ $\nu = 1/T = 0.48$ Hz

$x = 30.0$ cm આગળ $t = 20$ s સમયે સ્થાનાંતર

$y = (0.005\ \text{m}) \sin (80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$

$= (0.005\ \text{m}) \sin (-36)$

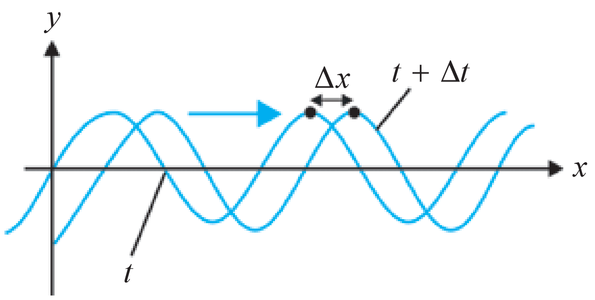
$= (0.005\ \text{m}) \sin (-36 + 12\pi)$

$= (0.005\ \text{m}) \sin (1.699)$

$= (0.005\ \text{m}) \sin (97^{\circ}) \simeq 5$ mm ◀

15.4 પ્રગામી તરંગની ઝડપ (THE SPEED OF A TRAVELLING WAVE)

પ્રગામી તરંગની પ્રસરણની ઝડપ શોધવા માટે આપણે તરંગ પરના (કળાના કંઈક લાક્ષણિક મૂલ્ય ધરાવતા) નિશ્ચિત બિંદુ પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ અને તે બિંદુ સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોઈએ. તરંગના શૃંગની ગતિનું નિરીક્ષણ કરવાનું સગવડભર્યું છે. આકૃતિ 15.8 જેમની



આકૃતિ 15.8 *હાર્મોનિક તરંગ t થી t + Δt સમયે આગળ વધે છે, જ્યાં Δt નાનો સમયગાળો છે. તરંગભાત સમગ્રપણે જમણી બાજુ ખસે છે. તરંગનું શૃંગ (અથવા કોઈ નિશ્ચિત કલા ધરાવતું બિંદુ) જમણી તરફ Δt સમયમાં Δx અંતર ખસે છે.*

વચ્ચે અલ્પ સમયગાળો Δt હોય તેવી બે ક્ષણે તરંગનો આકાર દર્શાવે છે. આખી તરંગભાત Δx જેટલું અંતર જમણી બાજુ (ધન x-દિશામાં) ખસેલી દેખાય છે. ખાસ તો, ટપકા (•) વડે દર્શાવેલું શૃંગ Δt સમયમાં Δx અંતર ખસેલું છે. એટલે તરંગની ઝડપ $\Delta x/\Delta t$ છે. આપણે આવું ટપકું બીજી કોઈ પણ કળા ધરાવતા બિંદુ પર મૂકી શકીએ. તે આટલી જ ઝડપ vથી ગતિ કરશે. (નહિ તો તરંગભાત એકસરખી રહેશે નહિ). અચળ કળા ધરાવતા બિંદુની ગતિ

$$kx - \omega t = \text{અચળ} \tag{15.10}$$

દ્વારા અપાય છે.

આમ, જેમ સમય t બદલાય છે તેમ નિશ્ચિત કળા ધરાવતા બિંદુનું સ્થાન એવી રીતે બદલાવું જોઈએ કે કળા અચળ રહે.

આમ, $kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega\ (t + \Delta t)$

અથવા $k\ \Delta x - \omega\ \Delta t = 0$

Δx, Δtને અત્યંત સૂક્ષ્મ લેતાં,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon \tag{15.11}$$

ωના T સાથેના તથા kના λ સાથેના સંબંધ પરથી

$$\upsilon = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{15.12}$$

મળે. બધા પ્રગામી તરંગો માટે વ્યાપક એવું સમીકરણ (15.12) દર્શાવે છે કે માધ્યમના કોઈ ઘટકને એક દોલન પૂર્ણ કરવા જે સમય લાગે તે દરમિયાન તરંગભાત એક તરંગલંબાઈ જેટલું અંતર કાપે છે. આપણે એ નોંધવું જોઈએ કે, યાંત્રિક તરંગની ઝડપ માધ્યમના જડત્વીય (દોરીની રેખીય દળ ઘનતા, વ્યાપક રૂપે દળ ઘનતા) અને સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો (રેખીય માધ્યમ માટે યંગ મોડ્યુલસ/આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક, કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક) દ્વારા નક્કી થાય છે. માધ્યમ ઝડપ નક્કી કરે છે, ત્યાર બાદ સમીકરણ (15.12), આપેલ ઝડપ માટે તરંગલંબાઈનો આવૃત્તિ સાથેનો સંબંધ નક્કી કરે છે. અલબત્ત, અગાઉ નોંધ્યું તે પ્રમાણે, એક જ માધ્યમમાં જેમના વેગ જુદાં-જુદાં હોય તેવા લંબગત અને સંગત એમ બંને તરંગોને માધ્યમ પસાર થવા દે છે. હવે પછી આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક માધ્યમમાં યાંત્રિકતરંગોની ઝડપનાં વિશિષ્ટ સૂત્રો મેળવીશું.

15.4.1 તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ (Speed of A Transverse Wave on Stretched String)

જ્યારે માધ્યમમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે ત્યારે તેમાં ઉદ્ભવતા પુનઃસ્થાપક બળ અને માધ્યમના જડત્વીય ગુણધર્મ (દળ ઘનતા) દ્વારા યાંત્રિક તરંગની ઝડપ નક્કી થાય છે. ઝડપને પ્રથમ પરિબળ (પુનઃસ્થાપક બળ) સાથે સમપ્રમાણનો અને બીજા પરિબળ (જડત્વ) સાથે વ્યસ્ત પ્રમાણનો સંબંધ હશે તેવું અપેક્ષિત છે. દોરી પરના તરંગો માટે પુનઃસ્થાપક બળ તણાવ T દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. આ કિસ્સામાં જડત્વીય

ગુણધર્મ રેખીય દળ ઘનતા μ છે, જે દોરીના દળ m ભાગ્યા તેની લંબાઈ L જેટલી છે. ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને દોરી પરના તરંગની ઝડપનું સચોટ સૂત્ર મેળવી શકાય, પરંતુ આ તારવણી કરવાનું આ પુસ્તકની મર્યાદા બહારનું છે. આથી, આપણે પારિમાણિક વિશ્લેષણનો ઉપયોગ કરીશું. આપણે એ તો જાણીએ જ છીએ કે એકલા પારિમાણિક વિશ્લેષણથી કદી સચોટ સૂત્ર મેળવી શકાતું નથી. પારિમાણિક વિશ્લેષણમાં પરિમાણરહિત એક અચળાંક હંમેશાં નક્કી કરવાનો બાકી રહેતો જ હોય છે.

μનાં પરિમાણ $[ML^{-1}]$ છે અને Tનાં પરિમાણ બળ જેવાં એટલે કે $[MLT^{-2}]$ છે. આપણે આ બંનેને ઝડપનાં પરિમાણ $[LT^{-1}]$ મેળવવા માટે સંયોજિત કરવાં પડશે. સાદા નિરીક્ષણથી જણાય છે કે T/μ રાશિને પ્રસ્તુત પરિમાણ છે.

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

આમ જો T અને μ એ જ માત્ર પ્રસ્તુત રાશિઓ છે તેમ ધારી લઈએ તો

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.13)$$

જ્યાં C એ પારિમાણિક વિશ્લેષણનો અનિર્ણિત અચળાંક છે. સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. ખેંચાયેલી દોરી પરના લંબગત તરંગની ઝડપ

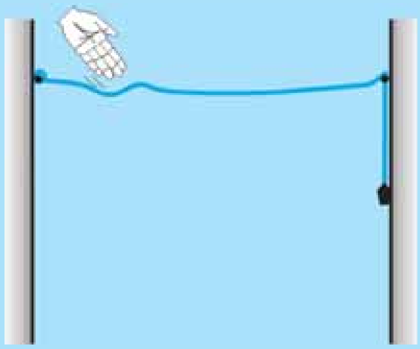
$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.14)$$

પરથી મળે છે. અગત્યના મુદ્દાની નોંધ લઈએ કે ઝડપ v માત્ર માધ્યમના ગુણધર્મો T અને μ પર જ આધારિત છે. (T એ બાહ્ય બળને લીધે ઉદ્ભવતો ખેંચાયેલી સ્પ્રિંગનો ગુણધર્મ છે). તે તરંગની પોતાની તરંગલંબાઈ કે આવૃત્તિ પર આધારિત નથી. આગળ ઉપર ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તમે એવા તરંગો વિશે જાણશો જેમની ઝડપ તરંગની આવૃત્તિથી સ્વતંત્ર હોતી નથી. λ અને υ એ બે પ્રાચલોમાંથી વિક્ષોભનું ઉદ્ગમ, ઉદ્ભવેલા તરંગની આવૃત્તિ નક્કી કરે છે. માધ્યમમાં તરંગની આપેલ ઝડપ અને આવૃત્તિ પરથી સમીકરણ (15.12) દ્વારા તરંગલંબાઈ

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \text{ મુજબ નક્કી થાય છે.} \qquad (15.15)$$

ઉદાહરણ 15.3 એક સ્ટીલના તારની લંબાઈ 0.72 m અને તેનું દળ 5.0×10^{-3} kg છે. જો તાર 60 Nના તણાવ હેઠળ હોય, તો તાર પર લંબગત તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ?

દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન)નું પ્રસરણ



એક દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન)ની ગતિ તમે સરળતાથી જોઈ શકો છો. તમે દૃઢ સીમા આગળથી તેનું પરાવર્તન પણ જોઈ શકો છો અને તેનો વેગ માપી શકો છો. તમને 1 થી 3 cm વ્યાસનું દોરડું. બે હૂક અને કેટલાંક વજનોની જરૂર પડશે. તમે આ પ્રયોગ તમારા વર્ગખંડમાં કે પ્રયોગશાળામાં કરી શકો છો.

1 થી 3 cm વ્યાસનું લાંબું દોરડું અથવા જાડી દોરી લો અને તેને ઓરડા કે પ્રયોગશાળામાંની સામસામી દીવાલ પરના હૂક સાથે બાંધો. એક છેડાને હૂક પરથી પસાર કરીને તેની સાથે (લગભગ 1 થી 5 kg) વજન લટકાવો. દીવાલો લગભગ 3 થી 5 m અંતરે હોઈ શકે.

એક લાકડી કે સળિયો લઈ, એક છેડા પાસેના બિંદુએ અથડાવો. આનાથી દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન) ઉત્પન્ન થાય છે જે હવે તેના પર ગતિ કરે છે. તમે તેને છેડા પર પહોંચતો અને પાછો પરાવર્તિત થતો જોઈ શકો છો. તમે આપાત વિક્ષોભ અને પરાવર્તિત વિક્ષોભ વચ્ચે કળા સંબંધ ચકાસી શકો છો. વિક્ષોભ સંપૂર્ણ વિલાઈ જાય તે પહેલાંનાં બે કે ત્રણ પરાવર્તનો તમે સરળતાથી જોઈ શકશો. તમે એક અટક-ઘડી (Stop Watch) લઈને દીવાલો વચ્ચેનું અંતર કાપતાં વિક્ષોભને લાગેલો સમય શોધી શકો છો અને આ પરથી તેનો વેગ માપી શકો છો. તેને સમીકરણ (15.14)થી મળેલ વેગ સાથે સરખાવો.

સંગીતના વાજિંત્રની ધાતુની પાતળી દોરી (તાર) પર પણ આવું જ થાય છે. મુખ્ય તફાવત એ છે કે ધાતુની પાતળી દોરીનું એકમ લંબાઈ દીઠ ઓછું દળ હોવાથી, તેના પર જાડા દોરડાની સરખામણીએ વેગ વધુ હોય છે. જાડા દોરડા પર ઓછા વેગને લીધે આપણે ગતિને જોઈ શકીએ છીએ અને સારી રીતે માપન કરી શકીએ છીએ.

ઉકેલ તારનું એકમ લંબાઈ દીઠ દળ

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\text{kg}}{0.72\text{m}}$$

$$= 6.9 \times 10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$$

તણાવ $T = 60$ N

તાર પર તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \text{N}}{6.9\times10^{-3}\text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

15.4.2 સંગત તરંગની ઝડપ (ધ્વનિની ઝડપ) (Speed of Longitudinal Wave - Speed of Sound)

સંગત તરંગમાં માધ્યમનાં ઘટકો તરંગની પ્રસરણ દિશામાં આગળ-પાછળ દોલનો કરતાં હોય છે. આપણે અગાઉ જોયું જ છે કે ધ્વનિતરંગો હવાના નાના કદ ખંડોના સંઘનન અને વિઘનનના રૂપમાં ગતિ કરે છે. જે સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મ, દાબીય વિકૃતિની અસર હેઠળ ઉદ્‌ભવતું પ્રતિબળ નક્કી કરે છે તે માધ્યમનો કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (બલ્ક મોડ્યૂલસ) છે જે

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad (15.16)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે. (જુઓ પ્રકરણ 9.)

અહીં, દબાણ-તફાવત ΔPને લીધે કદ વિકૃતિ $\frac{\Delta V}{V}$ ઉત્પન્ન થાય છે. Bનાં પરિમાણ દબાણ જેવાં જ છે અને SI એકમમાં Pascal (Pa)ના પદમાં લખાય છે. તરંગ-પ્રસરણમાં પ્રસ્તુત એવો જડત્વીય ગુણધર્મ એ દળ ઘનતા ρ છે, તેનાં પરિમાણ $[ML^{-3}]$ છે. સામાન્ય નિરીક્ષણથી જણાય છે કે B/ρનાં પરિમાણ

$$\frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[ML^{-3}]} = [L^2T^{-2}] \qquad (15.17)$$

છે. આમ જો B અને ρને જ પ્રસ્તુત રાશિઓ ગણીએ તો

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.18)$$

જ્યાં, અગાઉની જેમ C એ પારિમાણિક વિશ્લેષણનો અનિર્ણિત અચળાંક છે. સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. આમ માધ્યમમાં સંગત-તરંગ માટેનું વ્યાપક સૂત્ર

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \text{ છે.} \qquad (15.19)$$

કોઈ ઘન સળિયા (Bar) (કે પટ્ટી) જેવા રેખીય માધ્યમ માટે સળિયાનું પાર્શ્વિક (Lateral) વિસ્તરણ અવગણ્ય હોય છે અને આપણે તેને ફક્ત સંગત (પ્રતાન) વિકૃતિ છે તેમ ગણી શકીએ. તે કિસ્સામાં સ્થિતિસ્થાપકતાનો પ્રસ્તુત અંક યંગ મૉડ્યૂલસ છે, તેનાં પરિમાણ પણ બલ્ક મોડ્યૂલસના જેવાં જ છે. આ કિસ્સામાં પારિમાણિક વિશ્લેષણ અગાઉના જેવું જ છે અને તે સમીકરણ 15.18 જેવો સંબંધ આપે છે, જેમાં C એ અનિર્ણિત છે અને સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. આમ કોઈ ઘન પટ્ટીમાં સંગત-તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (15.20)$$

પરથી મળે છે. જ્યાં Y એ પટ્ટીના દ્રવ્યનો યંગ મોડ્યૂલસ છે. કોષ્ટક 15.1 કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિનો વેગ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 15.1 કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિની ઝડપ

માધ્યમ	ઝડપ (m s^{-1})
વાયુઓ	
હવા (0° C)	331
હવા (20° C)	343
હિલિયમ	965
હાઈડ્રોજન	1284
પ્રવાહીઓ	
પાણી (0° C)	1402
પાણી (20° C)	1482
દરિયાનું પાણી	1522
ઘન પદાર્થો	
ઍલ્યુમિનિયમ	6420
તાંબું	3560
સ્ટીલ	5941
ગ્રેનાઇટ	6000
વલ્કેનાઇઝ્ડ રબર	54

ધ્વનિની ઝડપ વાયુઓમાં હોય તે કરતાં પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થોમાં સામાન્ય રીતે વધારે હોય છે. (નોંધો કે ઘન માટે અહીં આપેલ ઝડપ એ સંગત-તરંગોની ઝડપ છે.) આમ થવાનું કારણ એ છે કે, તેમને સંકોચવાનું (Compress) વાયુઓ કરતાં ખૂબ વધારે મુશ્કેલ છે અને તેથી તેમના બલ્ક મોડ્યૂલસનું મૂલ્ય ઘણું મોટું હોય છે. આ બાબત વાયુઓ કરતાં તેમની વધુ ઘનતાની અસરને સરભર (Compensate) કરવા કરતાં પણ વધારે અસર કરે છે.

આપણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ, આદર્શ વાયુ સંનિકટતા સાથે અંદાજી શકીએ. આદર્શ વાયુ માટે દબાણ P, કદ V અને તાપમાન T વચ્ચેનો સંબંધ (જુઓ પ્રકરણ 11.)

$$PV = Nk_BT \qquad (15.21)$$

છે. જ્યાં N એ V કદમાં અણુઓની સંખ્યા છે. k_B બૉલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક અને T વાયુનું તાપમાન (કેલ્વિનમાં) છે. આથી સમતાપી ફેરફાર માટે સમીકરણ (15.21) પરથી

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

અથવા $-\dfrac{\Delta P}{\Delta V / V} = P$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (15.16)માં અવેજ કરતાં

$B = P$ મળે.

આથી સમીકરણ (15.21) પરથી, આદર્શ વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (15.22)$$

પરથી મળે છે. આ સંબંધ સૌપ્રથમ ન્યૂટને આપ્યો હતો અને તેથી તેને ન્યૂટનનું સૂત્ર કહે છે.

▶ *ઉદાહરણ 15.4* પ્રમાણભૂત તાપમાને અને દબાણે હવામાંથી ધ્વનિના વેગનો અંદાજ મેળવો. 1 mole હવાનું દળ 29.0×10^{-3} kg છે.

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ વાયુના 1 moleનું STP એ કદ 22.4 Litre છે. તેથી STP એ હવાની ઘનતા

ρ_0 = (એક મોલ હવાનું દળ/એક મોલ હવાનું STP એ કદ)

$$= \frac{29.0 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

માધ્યમમાંથી ધ્વનિની ઝડપ માટેના ન્યૂટનના સૂત્ર મુજબ, હવામાંથી STP એ ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \left[\frac{1.01 \times 10^5\ \text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \qquad (15.23)$$

કોષ્ટક 15.1માં આપેલ પ્રાયોગિક મૂલ્ય 331 m s^{-1}ની સરખામણીએ સમીકરણ (15.23)માં દર્શાવેલું પરિણામ લગભગ 15 % નાનું છે. આપણે ક્યાં ભૂલ કરી ? જો આપણે ન્યૂટનની મૂળ પૂર્વધારણા તપાસીએ કે જેમાં ધ્વનિતરંગોના માધ્યમમાં પ્રસરણ દરમિયાન દબાણના ફેરફારો સમતાપી (Isothermal) છે, તો આપણને તે સાચી જણાતી નથી. લાપ્લાસે એમ દર્શાવ્યું હતું કે ધ્વનિતરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન દબાણના ફેરફારો એટલા ઝડપી હોય છે કે, ઉષ્માવહનને, તાપમાન અચળ જાળવી રાખવાનો પૂરતો સમય મળતો જ નથી. તેથી આ ફેરફારો સમતાપી નહિ પણ સમોષ્મી (adiabatic) છે. સમોષ્મી ફેરફારો માટે આદર્શ વાયુ

PV^{γ} = અચળ, સમીકરણનું પાલન કરે છે.

$$\therefore\ \Delta(PV^{\gamma}) = 0$$

અથવા $P\,\gamma\,V^{\gamma-1}\,\Delta V + V^{\gamma}\,\Delta P = 0$

આમ, આદર્શ વાયુ માટે સમોષ્મી બલ્ક મોડ્યૂલસ (કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક)

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

$$= \gamma P$$

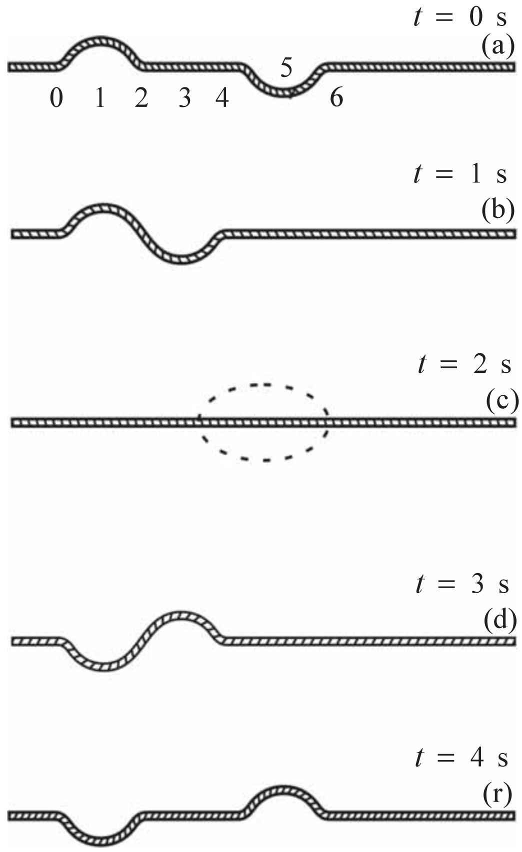
જ્યાં γ એ વાયુની બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓનો ગુણોત્તર C_p/C_v છે. આથી, ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (15.24)$$

સૂત્ર પરથી મળે છે. ન્યૂટનના સૂત્રમાંના આ ફેરફારને **લાપ્લાસનો સુધારો** કહે છે. હવા માટે $\gamma = 7/5$. હવે સમીકરણ (15.24)નો ઉપયોગ, STP એ હવામાંથી ધ્વનિની ઝડપ શોધવા માટે કરીએ તો, મૂલ્ય 331.3 m s^{-1} મળે છે. જે પ્રાયોગિક મૂલ્ય સાથે બંધબેસતું છે. ◀

15.5 તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત (THE PRINCIPLE OF SUPERPOSITION OF WAVES)

જ્યારે બે તરંગ-સ્પંદનો (Wave Pulses) પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં કરતાં એકબીજાને વટાવી જાય (Cross) ત્યારે શું થાય છે ? એવું જણાયું છે કે તરંગ-સ્પંદનો એકબીજાંને વટાવી જાય તે પછી પણ પોતાની ઓળખ (Identity) જાળવી રાખે છે. આમ છતાં, તેઓ સંપાત થયા હોય તે સમય દરમિયાન, તરંગભાત (Wave Pattern), દરેક સ્પંદન કરતાં જુદી હોય છે. જ્યારે સમાન અને વિરુદ્ધ આકારનાં બે સ્પંદનો એકબીજાં તરફ ગતિ કરે ત્યારની પરિસ્થિતિ આકૃતિ 15.9માં દર્શાવી છે. જ્યારે સ્પંદનો સંપાત થાય ત્યારે પરિણામી સ્થાનાંતર દરેક સ્પંદનથી થતા સ્થાનાંતરના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આને તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત કહે છે. આ સિદ્ધાંત મુજબ દરેક સ્પંદન એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જાણે બીજા સ્પંદન હાજર જ નથી. આથી માધ્યમનાં ઘટકો બંનેને લીધે સ્થાનાંતર અનુભવે છે અને સ્થાનાંતર ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સ્થાનાંતર તે બંનેના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આકૃતિ 15.9, જુદા જુદા સમયે તરંગના આકારના આલેખ દર્શાવે છે. આલેખ (c)માંની નાટ્યાત્મક અસરની



આકૃતિ 15.9 *સમાન અને વિરુદ્ધ સ્થાનાંતર ધરાવતાં અને વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં બે સ્પંદનો વક્ર (c)માં સંપાત થતાં સ્પંદનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.*

નોંધ લો. બે સ્પંદનોને લીધે થતાં સ્થાનાંતરોએ એકબીજાને નાબૂદ કર્યા છે અને સમગ્રપણે સ્થાનાંતર શૂન્ય જણાય છે.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને ગણિતીય રીતે રજૂ કરવા માટે ધારો કે $y_1(x, t)$ અને $y_2(x, t)$, માધ્યમમાં બે તરંગ-વિક્ષોભને લીધે મળતાં સ્થાનાંતર છે. જો તરંગો કોઈ વિસ્તારમાં એકસાથે આવી પહોંચે અને તેથી સંપાત થાય તો, પરિણામી સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \tag{15.25}$$

જો બે કે વધુ તરંગો માધ્યમમાં ગતિ કરતાં સંપાત થાય તો પરિણામી તરંગ-આકાર (Wave Form), વ્યક્તિગત તરંગોના તરંગવિધેયોના સરવાળા બરાબર હોય છે. એટલે કે ગતિ કરતા તરંગોનાં તરંગવિધેયો

$y_1 = f_1(x - \upsilon t)$,

$y_2 = f_2(x - \upsilon t)$,

....

....

$y_n = f_n(x - \upsilon t)$

હોય, તો માધ્યમમાં પરિણામી તરંગવિધેય

$$y = f_1(x - \upsilon t) + f_2(x - \upsilon t) + \ldots + f_n(x - \upsilon t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - \upsilon t) \text{ છે.} \tag{15.26}$$

સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત વ્યતીકરણની ઘટનાના પાયામાં રહેલો છે.

સરળતા ખાતર તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતા એક સમાન ω (કોણીય આવૃત્તિ), એક સમાન k (કોણીય તરંગસંખ્યા) અને તેથી સમાન તરંગલંબાઈ λ ધરાવતા બે હાર્મોનિક પ્રગામી તરંગોનો વિચાર કરો. તેમની તરંગ-ઝડપ સમાન હશે. આપણે વધારામાં એવું ધારીએ કે તેમનાં કંપવિસ્તારો સમાન છે અને તેઓ બંને X-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. આ બે તરંગો વચ્ચે માત્ર પ્રારંભિક કળાનો જ તફાવત છે.

સમીકરણ (15.2) મુજબ, આ બે તરંગોને

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \tag{15.27}$$

અને $$y_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{15.28}$$

વડે રજૂ કરી શકાય છે. આથી સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ પરિણામી સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{15.29}$$

$$= a\left[2 \sin\left[\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \phi)}{2}\right]\cos\frac{\phi}{2}\right] \tag{15.30}$$

જ્યાં આપણે $\sin A + \sin B$ માટેના જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સૂત્રનો ઉપયોગ કર્યો છે. આ પરથી આપણને

$$y(x, t) = 2a \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \tag{15.31}$$

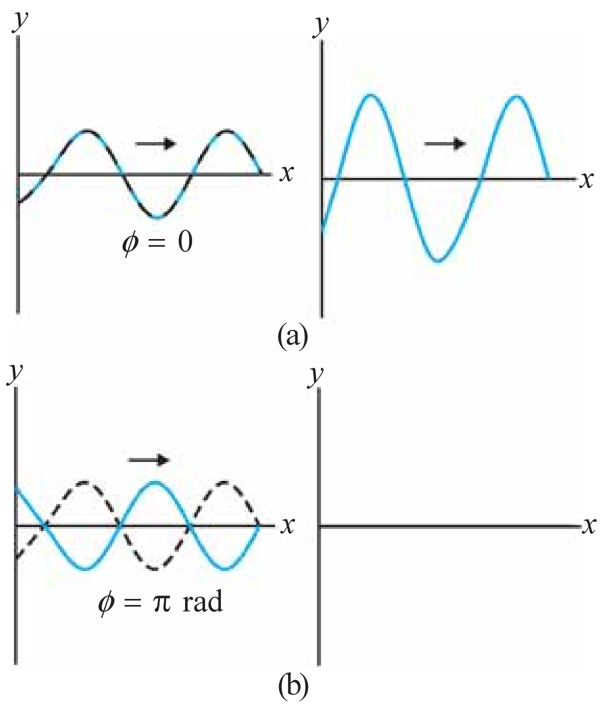
મળે. સમીકરણ (15.31) પણ x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતું પ્રગામી, હાર્મોનિક તરંગ દર્શાવે છે, જેની આવૃત્તિ અને તરંગલંબાઈ મૂળ તરંગો જેટલી જ છે. પરંતુ તેનો પ્રારંભિક કળાકોણ $\frac{\phi}{2}$ છે. એક નોંધપાત્ર બાબત એ છે કે, તેનો કંપવિસ્તાર, બે ઘટક તરંગોના કળા-તફાવત ϕનું વિધેય છે.

$$A(\phi) = 2a \cos\frac{1}{2}\phi \tag{15.32}$$

$\phi = 0$ માટે તરંગો કળામાં હોય છે, તેથી

$$y(x, t) = 2a \sin(kx - \omega t) \tag{15.33}$$

એટલે કે પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર $2a$ છે, જે Aનું મહત્તમ શક્ય મૂલ્ય છે. $\phi = \pi$ માટે, તરંગો પૂરેપૂરા વિરોધી



આકૃતિ **15.10** *સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ સમાન કંપવિસ્તાર અને તરંગલંબાઈ ધરાવતા બે હાર્મોનિક તરંગોનું પરિણામી તરંગ. પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર, કળા-તફાવત ϕ, જે (a) માટે શૂન્ય અને (b) માટે π છે, તેના પર આધારિત છે.*

કળામાં એટલે કે 180^o કળા-તફાવતમાં છે અને પરિણામી તરંગ દરેક સ્થાને બધા સમય માટે શૂન્ય સ્થાનાંતર ધરાવે છે.

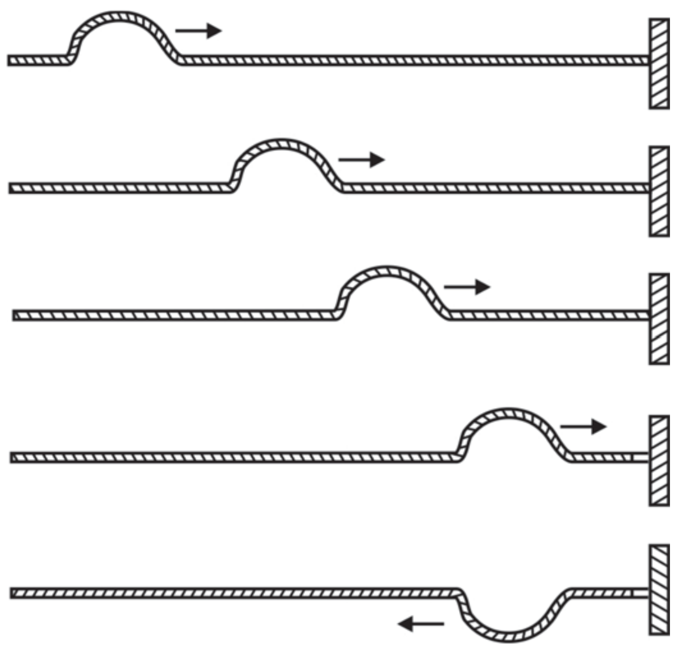
$$y(x, t) = 0 \qquad (15.34)$$

સમીકરણ (15.33) બે તરંગોના સહાયક વ્યતીકરણ (Constructive Interference)ને રજૂ કરે છે, જેમાં પરિણામી તરંગમાં કંપવિસ્તારોનો સરવાળો થાય છે. સમીકરણ (15.34), તેમનું વિનાશક વ્યતીકરણ (Distructive Interference) રજૂ કરે છે, જેમાં પરિણામી તરંગમાં કંપવિસ્તારોની બાદબાકી થાય છે. આકૃતિ 15.10 સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી ઉદ્ભવતા વ્યતીકરણના આ બે કિસ્સાઓ દર્શાવે છે.

15.6 તરંગોનું પરાવર્તન (REFLECTION OF WAVES)

અત્યાર સુધી આપણે અસીમિત માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગોનો વિચાર કર્યો. કોઈ સ્પંદન કે તરંગ જ્યારે કોઈ સીમા પર પહોંચે ત્યારે શું થાય છે ? જો સીમા પાસેનું બીજું માધ્યમ દૃઢ હોય તો સ્પંદન કે તરંગ પરાવર્તન પામે છે. પડઘા પડવાની ઘટના એ દૃઢ સીમા આગળથી થતા પરાવર્તનનું ઉદાહરણ છે. જો સીમા સંપૂર્ણ દૃઢ ન હોય અથવા તે બે જુદાં જુદાં સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોની આંતરસપાટી હોય, તો પરિસ્થિતિ કંઈક અંશે જટિલ (Complicated) છે. આપાત તરંગનો થોડો ભાગ પરાવર્તન પામે છે અને બાકીનો ભાગ બીજા માધ્યમમાં પસાર થાય છે. જો તરંગ બે જુદાં જુદાં માધ્યમોની સીમા પર ત્રાંસી રીતે આપાત થાય તો બીજા માધ્યમમાં પસાર થયેલું તરંગ **વક્રીભૂત (Refracted)** તરંગ કહેવાય છે. આપાત અને વક્રીભૂત તરંગો વક્રીભવનના સ્નેલ (Snell)ના નિયમનું પાલન કરે છે તથા આપાત અને પરાવર્તિત તરંગો પરાવર્તનના સામાન્ય નિયમોનું પાલન કરે છે.

આકૃતિ 15.11માં તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતું અને સીમા આગળથી પરાવર્તિત થતું સ્પંદન દર્શાવ્યું છે. સીમા દ્વારા કોઈ ઊર્જાનું શોષણ થતું નથી એમ ધારીએ તો પરાવર્તિત તરંગનો આકાર આપાત તરંગ જેવો જ છે પરંતુ તે પરાવર્તન વખતે π અથવા 180^oનો કળાનો ફેરફાર અનુભવે છે. આનું કારણ એ છે કે સીમા દૃઢ છે અને વિક્ષોભનું સીમા પર સ્થાનાંતર બધા સમય માટે શૂન્ય થવું જોઈએ. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ આ શક્ય તો જ બને કે જો પરાવર્તિત અને આપાત તરંગો વચ્ચે કળાનો તફાવત π હોય, જેથી પરિણામી સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય. આ તર્ક કોઈ દૃઢ દીવાલ પરની સીમા શરત પર આધારિત છે. આપણે ગતિશાસ્ત્ર પરથી પણ આ જ નિર્ણય પર આવી શકીએ. સ્પંદન જ્યારે દીવાલ પર આવે છે ત્યારે દોરી દીવાલ પર બળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ દીવાલ દોરી પર સમાન અને વિરુદ્ધ બળ લગાડે છે, તેનાથી કળામાં π જેટલો તફાવત ધરાવતું પરાવર્તિત સ્પંદન ઉત્પન્ન થાય છે.



આકૃતિ **15.11** *દૃઢ સીમા આગળથી સ્પંદનનું પરાવર્તન*

બીજી બાજુ, જો સીમાબિંદુ દૃઢ ન હોય પણ ગતિ માટે સંપૂર્ણ મુક્ત હોય, (દોરી, કોઈ સળિયા પર મુક્ત રીતે ખસી શકતી વલય (Ring) સાથે બાંધી હોય તેવો કિસ્સો) તો પરાવર્તિત સ્પંદનના કળા અને કંપવિસ્તાર આપાત સ્પંદનના જેટલા જ હોય છે. આથી સીમા પર પરિણામી મહત્તમ સ્થાનાંતર દરેક સ્પંદનના કંપવિસ્તારથી બમણું હોય છે. અ-દૃઢ સીમાનું ઉદાહરણ એ ઑર્ગન પાઇપનો ખુલ્લો છેડો છે.

ટૂંકમાં, પ્રગામી તરંગ અથવા સ્પંદન દૃઢ સીમા આગળથી પરાવર્તન વખતે π જેટલો કળાનો ફેરફાર અનુભવે છે અને ખુલ્લી સીમા આગળથી પરાવર્તન વખતે કોઈ કળાનો ફેરફાર અનુભવતું નથી. આ બાબતને ગણિતીય રૂપમાં રજૂ કરવા માટે ધારો કે આપાત પ્રગામી તરંગ

$y_i(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$ છે.

દૃઢ સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \pi)$$

$$= -a \sin (kx - \omega t) \qquad (15.35)$$

છે અને ખુલ્લી સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin (kx - \omega t + 0)$$

$$= a \sin (kx - \omega t) \qquad (15.36)$$

એ સ્પષ્ટ છે કે, દૃઢ સીમા આગળ બધા સમયે $y = y_i + y_r = 0$.

15.6.1 સ્થિત તરંગો અને નૉર્મલ મોડ્ઝ (Standing Waves and Normal Modes)

ઉપર આપણે એક સીમા આગળથી પરાવર્તનનો વિચાર કર્યો. પરંતુ કેટલીક જાણીતી પરિસ્થિતિઓ (બંને છેડે જડિત કરેલી દોરી અથવા બંને છેડે બંધ હોય તેવી નળીમાંનો હવાનો સ્તંભ) એવી હોય છે કે જેમાં પરાવર્તન બે કે વધુ સીમાઓ આગળ થતું હોય. દાખલા તરીકે, જમણી બાજુ પ્રસરતું તરંગ એક છેડેથી પરાવર્તન પામશે અને તે બીજા છેડા તરફ જઈ બીજા છેડેથી પરાવર્તન પામશે. જ્યાં સુધી તરંગની એક સ્થાયી (Steady) ભાત (Pattern) રચાય ત્યાં સુધી આવું ચાલ્યા કરશે. આવી તરંગભાતને સ્થિત તરંગ (Standing Wave અથવા Stationary Wave) કહે છે. આ બાબત ગણિતીય રીતે જોવા માટે, x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતા અને સમાન તરંગલંબાઈ અને સમાન કંપવિસ્તાર ધરાવતા x-અક્ષની ઋણ દિશામાં પરાવર્તનથી મળેલા તરંગનો વિચાર કરો. $\phi = 0$ સાથે સમીકરણ (15.2) અને (15.4) પરથી,

$$y_1(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = a \sin (kx + \omega t)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર દોરી પરનું પરિણામી તરંગ,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= a [\sin (kx - \omega t) + \sin (kx + \omega t)]$$

જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સૂત્ર Sin (A + B) + Sin (A − B) = 2 Sin A cosBનો ઉપયોગ કરતાં,

$y(x, t) = 2a \sin kx \cos \omega t$ મળે છે. (15.37)

સમીકરણ (15.37) વડે રજૂ થતા તરંગ અને સમીકરણ (15.2) તથા (15.4) વડે રજૂ થતા તરંગોના પ્રકાર વચ્ચેનો તફાવત નોંધો. kx અને ωt પદો જુદાં જુદાં આવે છે પણ $kx - \omega t$ જેવા સંયોજિત રૂપે આવતાં નથી. આ તરંગનો કંપવિસ્તાર $2a \sin kx$ છે. આમ, આ પ્રકારના તરંગમાં બિંદુએ બિંદુએ કંપવિસ્તાર બદલાય છે. પરંતુ દોરીનો દરેક અંશ (ખંડ) એક સમાન કોણીય આવૃત્તિ ω અથવા આવર્તકાળથી દોલનો કરે છે. તરંગના જુદા જુદા વિભાગોનાં દોલનોની વચ્ચે કોઈ કળા-તફાવત હોતો નથી. દોરી સમગ્રપણે જુદાં જુદાં બિંદુઓએ જુદા જુદા કંપવિસ્તાર સાથે કળામાં દોલનો કરે છે. તરંગ-ભાત (Wave Pattern) જમણી બાજુ કે ડાબી બાજુ ખસતી નથી. આથી તે સ્થિતતરંગ કહેવાય છે. આપેલા સ્થાને કંપવિસ્તાર અમુક નિશ્ચિત હોય છે પણ અગાઉ નોંધ્યું તે મુજબ તે જુદાં જુદાં સ્થાને જુદો જુદો હોય છે. જે બિંદુઓએ કંપવિસ્તાર શૂન્ય (જ્યાં કંઈ ગતિ થતી નથી.) હોય તેમને **નિષ્પંદ બિંદુઓ (Nodes)** કહે છે. જે બિંદુઓએ કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય તે બિંદુઓને **પ્રસ્પંદ બિંદુઓ (Antinodes)** કહે છે. આકૃતિ 15.12, વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે પ્રગામી તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્‌ભવતી સ્થિત તરંગ-ભાત દર્શાવે છે.

સ્થિત તરંગોનું સૌથી મહત્ત્વનું લક્ષણ એ છે કે, સીમા શરતો તંત્રનાં દોલનોની શક્ય આવૃત્તિઓ અને તરંગલંબાઈઓ પર નિયંત્રણ લાદે છે. તંત્ર કોઈ પણ યાદચ્છિક (Arbitrary) આવૃત્તિથી દોલનો કરી શકતું નથી. (હાર્મોનિક પ્રગામી તરંગોથી આ જુદું પડે છે તે જુઓ.) પરંતુ તે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓના ગણ (Set) અથવા દોલનના **નૉર્મલ મોડ્ઝ** (પ્રસામાન્યરીતી દોલનો) દ્વારા લાક્ષણિક બનેલું છે. બંને છેડે જડિત કરેલી દોરી માટે હવે આપણે આવા નૉર્મલ મોડ્ઝ નક્કી કરીશું.

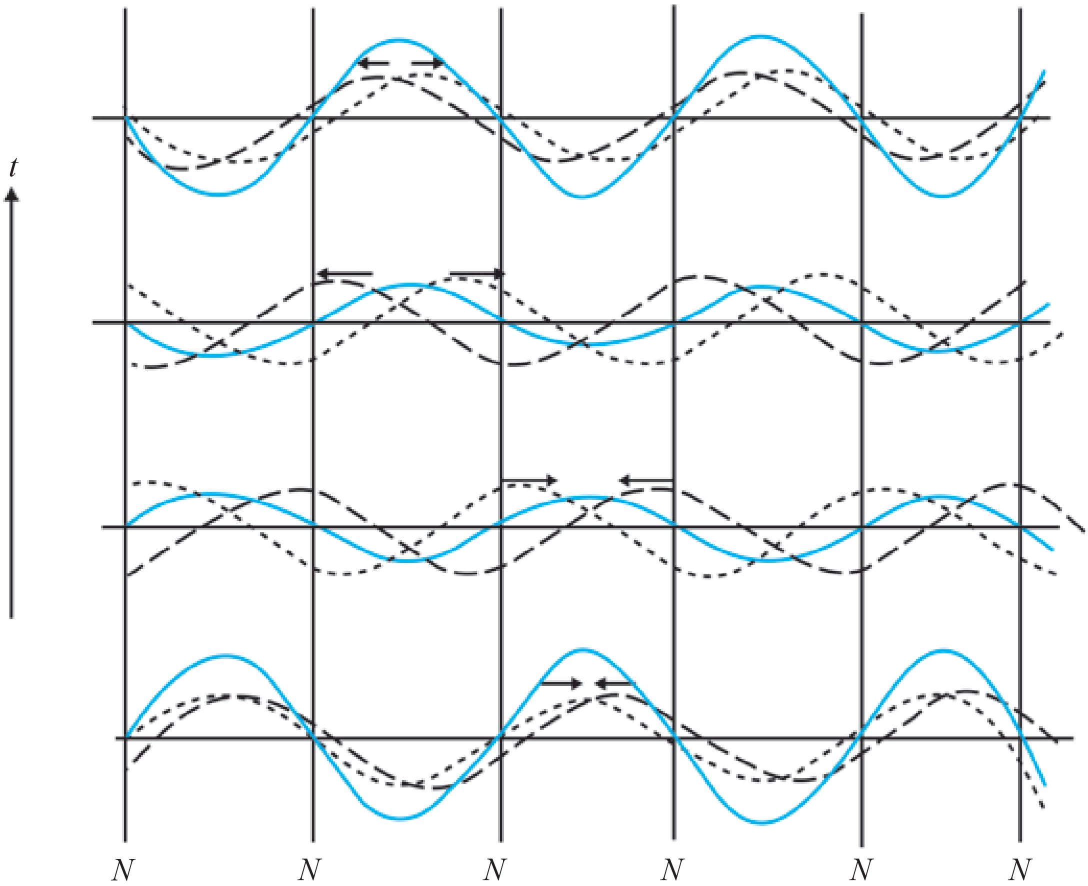
શરૂમાં, સમીકરણ (15.37) પરથી નિષ્પંદ બિંદુઓ (જ્યાં કંપવિસ્તાર શૂન્ય હોય છે.) $\sin kx = 0$ પરથી મળે છે. તે મુજબ

$$kx = n\pi;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ હોવાથી,}$$

$$x = \frac{n\lambda}{2};\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.38)$$

મળે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે કોઈ પણ બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે. તે જ રીતે પ્રસ્પંદ બિંદુઓનાં



આકૃતિ **15.12** *વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે પ્રગામી તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્‌ભવતા સ્થિત તરંગો. શૂન્ય સ્થાનાંતર (નિષ્પંદ બિંદુઓ)નાં સ્થાન બધા જ સમય માટે નિશ્ચિત રહે છે.*

સ્થાન (જ્યાં કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય છે.) sin kxના મહત્તમ મૂલ્ય પરથી મળે છે.

$|\sin kx| = 1$

આ પરથી, $kx = (n + ½)\pi;\ n = 0, 1, 2, 3, ...$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ મૂકતાં,

$$x = (n + ½)\frac{\lambda}{2};\ n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (15.39)$$

મળે છે. કોઈ પણ બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે. બંને છેડે જડિત કરેલી અને તણાવવાળી L લંબાઈની દોરીના કિસ્સાને સમીકરણ (15.38) લાગુ પાડી શકાય છે. એક છેડો $x = 0$ આગળ લેતાં, સીમા શરતો એ છે કે $x = 0$ અને $x = L$ એ નિષ્પંદ બિંદુઓનાં સ્થાનો છે. $x = L$ આગળ નિષ્પંદ બિંદુ હોવાની શરતના પાલન માટે લંબાઈ Lનો λ સાથેનો સંબંધ નીચે મુજબ હોવો જોઈએ :

$$L = n\frac{\lambda}{2};\ n = 1, 2, 3,... \qquad (15.40)$$

આમ, સ્થિર તરંગોની શક્ય તરંગલંબાઈઓ

$$\lambda = \frac{2L}{n};\ n = 1, 2, 3,... \qquad (15.41)$$

સૂત્ર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે અને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ,

$$\nu = \frac{n\upsilon}{2L},\ n = 1, 2, 3 \qquad (15.42)$$

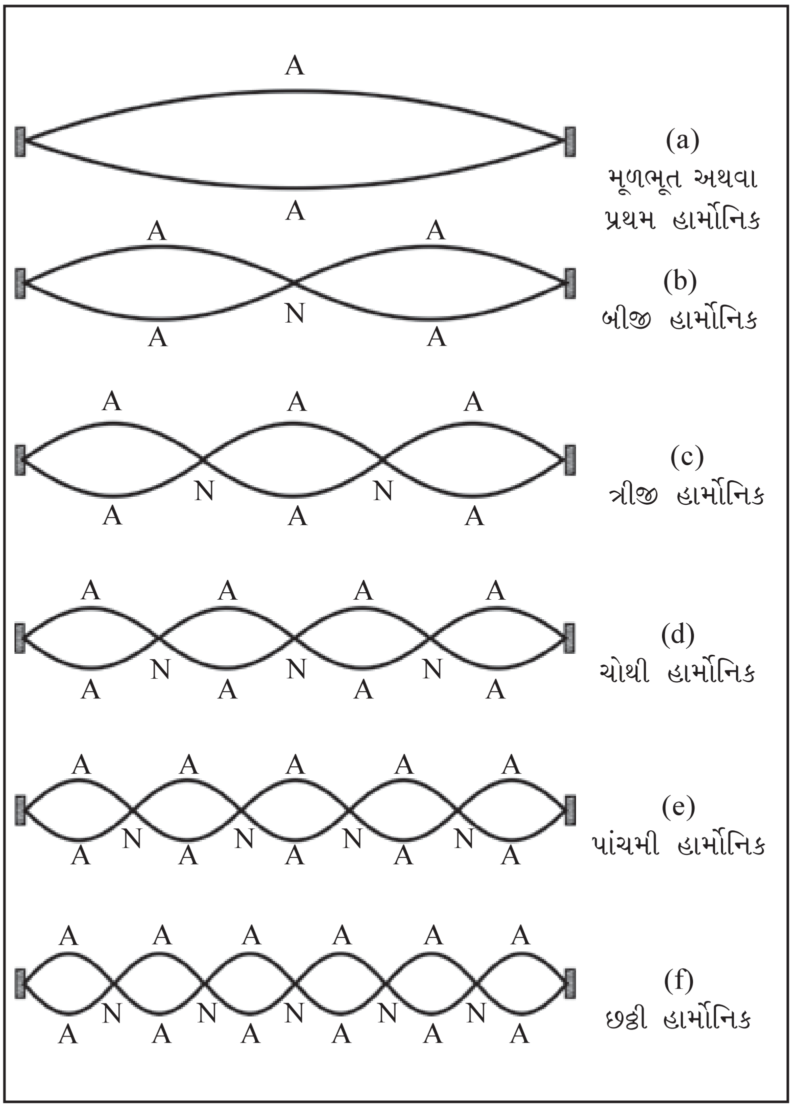
છે. આ રીતે આપણે તંત્રની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ મેળવી છે. આ આવૃત્તિ સાથે થતાં દોલનોને તંત્રના દોલનના નૉર્મલ મોડ્સ કહે છે. તંત્રની શક્ય એવી સૌથી નીચી પ્રાકૃતિક આવૃત્તિને **મૂળભૂત મોડ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે. બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરી માટે સમીકરણ (15.42)માં $n = 1$ને અનુરૂપ તે $\nu = \frac{\upsilon}{2L}$ પરથી મળે છે. અહીં υ એ તરંગની ઝડપ છે, જે માધ્યમના ગુણધર્મો દ્વારા નક્કી થાય છે. $n = 2$થી મળતી આવૃત્તિને દ્વિતીય હાર્મોનિક $n = 3$થી

મળતી આવૃત્તિને તૃતીય હાર્મોનિક વગેરે કહે છે. આપણે વિવિધ હાર્મોનિક્સને $\nu_n (n = 1, 2, 3...)$ સંજ્ઞા દ્વારા દર્શાવી શકીએ.

બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરીના પ્રથમ છ હાર્મોનિક્સ આકૃતિ 15.13માં દર્શાવ્યા છે. દોરી માત્ર આમાંની કોઈ એક આવૃત્તિથી દોલનો કરે તે જરૂરી નથી. સામાન્ય રીતે દોરીનું દોલન જુદા જુદા મોડ્સ સંપાત થયા હોય તેવું હોય છે, જેમાંના કેટલાક મોડ્સ વધુ પ્રબળતાથી અને કેટલાક ઓછી પ્રબળતાથી ઉત્તેજિત થયેલા હોય છે. સિતાર કે વાયોલિન જેવા સંગીતનાં વાજિંત્રો આ સિદ્ધાંત પર રચાયેલ છે. તારને કયા સ્થાનેથી ખેંચવામાં (Plucked) આવે છે અથવા કયા સ્થાને ઘસવામાં આવે છે તે પરથી કયા મોડ્સ બીજાઓ કરતાં વધારે પ્રબળ છે તે નક્કી થાય છે.

હવે આપણે એક છેડો ખુલ્લો અને બીજો બંધ હોય તેવી નળી (Pipe)માં હવાના સ્તંભનાં દોલનોનો વિચાર કરીએ.

અંશતઃ પાણીથી ભરેલી કાચની એક નળી આનું ઉદાહરણ છે. પાણીના સંપર્કમાંનો છેડો નિષ્પંદ બિંદુ છે જ્યારે ખુલ્લો છેડો પ્રસ્પંદ બિંદુ છે. નિષ્પંદ બિંદુ આગળ દબાણના ફેરફારો મહત્તમ હોય છે, પણ સ્થાનાંતર લઘુતમ (શૂન્ય) હોય છે. ખુલ્લા છેડે એટલે કે પ્રસ્પંદ બિંદુ આગળ તેથી ઊલટું દબાણના ફેરફારો લઘુતમ અને સ્થાનાંતર મહત્તમ હોય છે. પાણીના સંપર્કમાંના છેડાને $x = 0$ લેતાં, નિષ્પંદ બિંદુની શરત (સમીકરણ 15.38)નું પાલન થઈ જ જાય છે. જો બીજો છેડો $x = L$ એ પ્રસ્પંદ બિંદુ હોય, તો સમીકરણ (15.39) પરથી,



આકૃતિ **15.13** બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરીના પ્રથમ છ હાર્મોનિક્સ

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ માટે.}$$

આથી શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$$\lambda = \frac{2L}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.43)$$

સૂત્ર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે.

તંત્રનાં નૉર્મલ મોડ્સ-પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\upsilon}{2L}; \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.44)$$

પરથી મળે છે. મૂળભૂત આવૃત્તિ માટે $n = 0$ છે અને તેનું મૂલ્ય $\frac{\upsilon}{4L}$ છે. ઉચ્ચ આવૃત્તિઓ માત્ર **એકી સંખ્યાની હાર્મોનિક્સ** છે, એટલે કે મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી ગુણાંકો : $3\frac{\upsilon}{4L}$, $5\frac{\upsilon}{4L}$, ... વગેરે છે. આકૃતિ 15.14 એક છેડે બંધ અને બીજે છેડે ખુલ્લા હવાના સ્તંભની પ્રથમ છ એકી હાર્મોનિક્સ દર્શાવે છે. બંને છેડે ખુલ્લી હોય તેવી નળી માટે દરેક છેડો પ્રસ્પંદ બિંદુ છે. એ સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે બંને છેડે ખુલ્લો હવાનો સ્તંભ બધી હાર્મોનિક ઉત્પન્ન કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 15.15.)

ઉપર ઉલ્લેખ કર્યો તેવાં તંત્રો, દોરી, હવાનો સ્તંભ-પ્રણોદિત દોલનો પણ અનુભવે છે. (પ્રકરણ 14). જો બાહ્ય આવૃત્તિ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓમાંથી કોઈ એકની નજીક હોય, તો તંત્ર **અનુનાદ (Resonance)** દર્શાવે છે.