प्रायिकता एंव प्रायिकता बंटन

Ex 16.1

प्रश्न 1. यदि P(A) =$\frac{7}{13}$, P(B) = $\frac{9}{13}$ और P(A∩B) =$\frac{4}{13}$ हो, तो $P(\frac{A}{B})$ ज्ञात करो।

हल : हम जानते हैं कि

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{4/13}{9/13} = \frac{4}{9}$$

प्रश्न 2. यदि P(B) = 0.5 और P(A∩B) = 0.32 हो तो $P(\frac{A}{B})$ ज्ञात करो।

हल :

$$\because \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0{\cdot}32}{0{\cdot}5} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

प्रश्न 3. यदि 2P(A) = P(B) =$\frac{5}{13}$ और $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$ हो तो P(A∪B) ज्ञात करो।

हल :

$$\because \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{2}{13}$$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{26} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13}$$

$$= \frac{5 + 10 - 4}{26} = \frac{11}{26}$$

प्रश्न 4. यदि P(A) = 0.6, P(B) = 0.3 और P(A∩B) = 0.2 हो तो $P(\frac{A}{B})$ तथा $P(\frac{B}{A})$ ज्ञात करो।

हल :

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0\cdot2}{0\cdot3} = \frac{2}{3}$$

तथा $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0\cdot2}{0\cdot6} = \frac{1}{3}$$

प्रश्न 5. यदि P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 और $P(\frac{B}{A})$ = 0.4 हो तो ज्ञात करो

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iii) $P(A \cup B)$

हल :

(i) $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$\Rightarrow$ $$P(A \cap B) = P\left(\frac{B}{A}\right) \cdot P(A)$$

$$= 0\cdot4 \times 0\cdot8$$

$$= 0\cdot32$$

(ii) $$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0\cdot32}{0\cdot5} = \frac{32}{50} = 0\cdot64$$

$$= 0\cdot64$$

(iii) P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
= 0.8 + 0.5 – 0.32
= 1.3 – 0.32
= 0.98

प्रश्न 6. एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि दोनों बच्चों में से कम से कम एक बच्च लड़का है तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : एक परिवार वमें कम से कम एक बच्चा लड़का होने के लिए
A = {BB, BG, GB}

दोनों बच्चे लड़का होने के लिये
B = {B, B}
प्रतिदर्श समष्टि S = {BB, BG, GB, GG}
∴ A∩B = {B, B}
∴ n(A) = 3

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{4}$$

$$n(B) = 1$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$n(A \cap B) = 4$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{अत:} \quad P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

प्रश्न 7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया हैं। इस प्रयोग से संबंधित घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है तो $P(\frac{A}{B})$ ज्ञात कीजिए।

(i) A : एक सिक्के पर पट प्रकट होता है; B : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।
(ii) A : कोई पट प्रकट नहीं होता है; B : कोई चिंत प्रकट नहीं होता

हल : (i) दो सिक्कों की एक बार उछालने की समष्टि
S = {HH, HT, TH, TT}
A = एक सिक्के पर पट प्रकट होता है
= {TH, HT}
तथा B = एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।
= {HT, TH}
∴ A∩B = {HT, TH}
∴ n(A∩B) = 2

n(S) = 4

$$\therefore \quad P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

(ii) A = कोई पट प्रकट नहीं होता है

$= \{HH\}$

B = कोई चित प्रकट नहीं होता है

$= \{TT\}$

$$\therefore \quad A\cap B = \phi$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) = 0$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0$$

प्रश्न 8. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया सीधी रेखा में खड़े है। इससे सम्बद्ध घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाष्नित किया गया है तो $P(\frac{A}{B})$ ज्ञात करो यदि
A : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है, B : पिता मध्य में खड़े है।

हल : माना माता (M), पिता (F) तथा पुत्र S यादृच्छया खड़े हैं।
∴ तीनों के खड़े होने की कुल विधियाँ = 3
A = पुत्र एक सिरे पर खड़ा है = 3 x 2 x 1 = 6
A = {(SMF), (SFM), (FMS), (MFS)}
B = पिता मध्य में खड़े हैं।
= {(M, F, S), (S, F, M)}

∴A∩B = {(M, F, S), (S, F, M)}

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{2}{\lfloor 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

तथा $$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad P = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1/3}{1/3} = 1$$

प्रश्न 9. एक न्याय्य पासे को उछाला गया है। घटनाओं A = {1, 3, 5}, B = {2, 3} और C = {2, 3, 4, 5} के लिये निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ **और** $P\left(\frac{B}{A}\right)$

(ii) $P\left(\frac{A}{C}\right)$ **और** $P\left(\frac{C}{A}\right)$

(iii) $P\left[\frac{(A \cup B)}{C}\right]$ **और** $P\left[\frac{(A \cap B)}{C}\right]$

हल : (i) पासे को उछालने पर कुल परिणाम = 6

A = {1, 3, 5}, B = {2, 3}

∴ A∩B = {3}

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

तथा $$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

तथा $$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}$$

तथा $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

(ii) दिया है : A = {1, 3, 5}, B = {2, 3, 4, 5}
∴ A∩C = {3, 5}

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

तथा $$P\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

(iii) दिया है, A = {1, 3, 5}, B = {2, 3}, C = {2, 3, 4, 5}
∴ A∩C = {3, 5}, B∩C = {2, 3}, A∩B = {3}
(A∩B)∩C = {3}

$$P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P[(A \cap B) \cap C] = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\left(\frac{A \cup B}{C}\right) = P\left(\frac{A}{c}\right) + P\left(\frac{B}{C}\right) - P\left[\frac{A \cap B}{C}\right]$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P[(A \cap B) \cap C]}{P(C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2+2-1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3 \times 3}{2 \times 6} = \frac{3}{4}$$

$$P\left(\frac{A \cap B}{C}\right) = \frac{P[(A \cap B) \cap C]}{P(C)} = \frac{1/6}{2/3}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 10. यह दिया गया है कि पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : माना E = विभिन्न संख्या रखता है।
F = योग 4 है = {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}

$$P(E) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(F) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(E \cap F) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(F/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{1/18}{5/6} = \frac{1}{15}$$

प्रश्न 11. एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक लिखकर रखे गये हैं और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया है। इस बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया है। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गये कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तो इस संख्या के सम होने की क्या प्रायिकता

हल : मान लीजिए कि A घटना निकाले गए कार्ड पर सम संख्या है’ और B घटना निकाले गये कार्ड पर संख्या 3 से बड़ी है’ को निरूपित करते हैं। यहाँ हमें P(A/B) ज्ञात करना है।
इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि निम्न है

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
तब A = {2, 4, 6, 8, 10}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
तथा A∩B = {4, 6, 8, 10}

$$\therefore \quad P(A) = \frac{5}{10},\ P(B) = \frac{7}{10} \text{ और } P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

$$\text{अतः} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

प्रश्न 12. एक विद्यालय में 1000 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 430 लड़कियाँ हैं। यह ज्ञात है कि 430 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XI में पढ़ती हैं। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XI में पढ़ता है। यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है।

हल : मान लीजिए A घटना 'यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XI में पढ़ता है और B घटना 'यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी लड़की है' को व्यक्त करते हैं। यहाँ हमें P(A/B) ज्ञात करना है।
अब P(B) = $\frac{430}{1000}$= 0.43
यहाँ 10% लड़कियाँ कक्षा XI में पढ़ती हैं।
∴ कक्षा XI में पढ़ने वाली लड़कियों की संख्या

$$= \frac{430 \times 10}{100} = 43$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{430}{1000} = 0{\cdot}043$$

$$\text{तब} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{100} = \frac{0{\cdot}043}{0{\cdot}43} = 0{\cdot}1$$

प्रश्न 13. एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि घटना 'संख्या 4 का न्यूनतम एक बार प्रकट होना' और B दोनों पासों पर प्रकट संख्याओं का योग 6 होने के दर्शाते हैं,
तब A = {{4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)
और B = {{1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1}}

हम जानते हैं कि

$$P(A) = \frac{11}{36} \quad \text{(क्योंकि अनुकूल परिणाम } 6 \times 6 = 36)$$

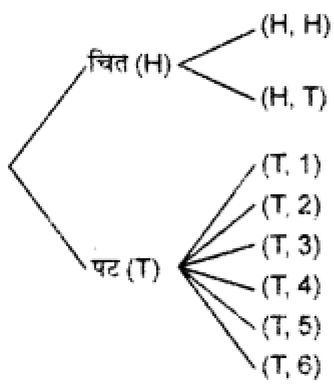
$$P(B) = \frac{5}{36} \text{ तथा } (A \cap B) = \{(2, 4), (4, 2)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$\text{अत: वांछित प्रायिकता } P(A.B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

प्रश्न 14. एक सिक्के को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो सिक्के को पुनः उछालिए परंतु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो, तो एक पासा फेंकिए। यदि घटना 'कम से कम एक पट प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है, तो घटना 'पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

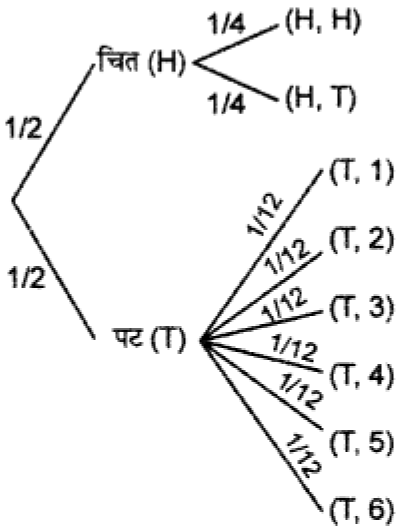
हल : परीक्षण की परिणामों को निम्न चित्र में व्यक्त किया जा सकता है इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है :



S = {(H, H), (H, T), T(, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (7, 5), (7, 6)}
जहाँ (HH) दर्शाता है कि दोनों उछालों पर चित प्रकट हुआ है तथा (T, i) दर्शाता है कि पहली उछाल पर प्रकट हुआ है और पासे को फेंकने पर i प्रकट हुई है।
अत: 8 मौलिक घटनाओं (H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6) की क्रमशः प्रायिकताएँ

$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$ हैं।

जैसा कि पाश्र्व चित्र में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि B घटना 'न्यूनतम एक पट प्रकट होना' और A घटना 'पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना' को दर्शाते हैं।



तब B = {(H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)}

∴ P(B) = P[{(H, T}}] + P[(T, 1)}} + P[{T, 5)}] + P[{(T, 6}}]

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{3}{4}$$

और $P(A \cap B) = P[\{(T, 5)\}] + P[\{(T, 6)\}]$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

अतः $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$

Ex 16.2

प्रश्न 1. यदि दो घटनाएँ A तथा B इस प्रकार से है कि P(A) =$\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{1}{2}$ तथा P(A∩B) = $\frac{1}{8}$ तो $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ज्ञात करो।

हल : दिया है,

$$P(A) = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ से}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{8-5}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

प्रश्न 2. यदि P(A) = 0.6, P(B) = p में P(A∩B) = 0.2 तथा A और B स्वतन्त्र घटनाऐ है तब p का मान ज्ञात करो।

हल : दिया है

P(A) = 0:6

P(B) = p

P(A∩B) = 0.2

∵ A और B स्वतंत्र घटनायें हैं।

अतः P(A∩B) = P(A).P(B)

0.2 = 0.6×p

$$\Rightarrow \quad p = \frac{0\cdot 2}{0\cdot 6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{3}$$

प्रश्न 3. यदि A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तथा P(A) = 0.3 व P(B) = 0.4 तब ज्ञात करो

(i) P(A∩B)
(ii) P(A∪B)
(iii) $P(\frac{A}{B})$
(iv) $P(\frac{B}{A})$

हल : (i) दिया है :
P(A) = 0.3
P(B) = 0.4
जब A और B स्वतंत्र घटनायें हैं तो
P(A∩B) = P(A).P(B)
= 0.3 × 0.4
= 0.12

(ii) P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
= 0.3 + 0.4 – 0.12
= 0.7 – 0.12
= 0.58

(iii) $$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{\cdot}12}{0{\cdot}4}$$

$$= \frac{12}{40} = 0{\cdot}3$$

(iv) $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{\cdot}12}{0{\cdot}3}$$

$$= \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0{\cdot}4$$

प्रश्न 4. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ है जहाँ P(A) = 0.3, P(B) = 0.6 तब ज्ञात करो

(i) P(A∩B)
(ii) $P\left(A \cup \overline{B}\right)$
(iii) P(A∪B)
(iv) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

हल : दिया है :
P(A) = 0.3
P(B) = 0.6

(i) P(A∩B) = P(A) x P(B)
= 0.3 x 0.6
= 0.18

(ii) $P\left(A \cup \overline{B}\right)$
= P(A) – P(A∩B)
= 0.3 – 0.18
= 0.12

(iii) P(A∪B)
= P(A) + P(B) – P(A∩B)
= 0.3 + 0.6 – 0.18
= 0.90 – 0.18
= 0.72

(iv) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$
= $P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right)$
= [1 – P(A)][1 – P(B)]
= [1 – 0.3] [1 – 0.6]
= 0.7 x 0.4
= 0.28

प्रश्न 5. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काली गेंदे है। यदि चार गेंदों को एक-एक कर बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाये तो सभी गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : दिया है :
सफेद गेंद = 5
लाल गेंद = 7
काली गेंद = 8
कुल गेंदों की संख्या = 5 +7+ 8 = 20
अतः पहली सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{^5C_1}{^{20}C_1} = \frac{5}{20} \qquad [\because {}^nC_1 = n]$$

$$= \frac{1}{4}$$

दूसरी सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{^4C_1}{^{19}C_1}$

(∵ गेंदें प्रतिस्थापित नहीं की जाती है) $= \frac{4}{19}$

तीसरी सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{^3C_1}{^{18}C_1}$

$$= \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

चौथी गेंद सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{^2C_1}{^{17}C_1} = \frac{2}{17}$

∴ चारों गेंद सफेद होने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{17}$$

$$= \frac{1}{969}$$

प्रश्न 6. यदि एक पासे को तीन बार उछाला जाये तो कम से कम एक विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : एक पासे पर सम संख्या 2, 4, 6 तीन तरीकों से आ सकती है।
एक पासे के उछालने पर प्रतिदर्श परिणाम
= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
∴ सम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
∴ एक सम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$
∴ तीनों बार पासों पर सम संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

अतः तीनों बार पासों को उछालने पर कम से कम एक विषय संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{8}$
$= \frac{7}{8}$

प्रश्न 7. 52 पत्तों की गड्डी में यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किये दो पत्ते निकले गये है। इन दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : ताश के 52 पत्तों में से काले रंग के पत्तों की संख्या = 26 है।
∴ एक काला पत्ता निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{^{26}C_1}{^{52}C_1}$$

एक पत्ता खींचने के बाद गड्डी में 51 पत्ते बचते हैं जिनमें 25 काले है।
तथा दूसरा काला पत्ता निकालने की प्रायिकता बिना प्रतिस्थापन किये

$$= \frac{^{25}C_1}{^{51}C_1}$$

अतः दोनों काले रंग के पत्ते होने की प्रायिकता

$$= \frac{^{26}C_1}{^{52}C_1} \times \frac{^{25}C_1}{^{51}C_1} \qquad [\because nC_1 = n]$$

$$= \frac{26}{52} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

प्रश्न 8. दो सिक्कों को उछाला गया है। दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात करो जबकि यह ज्ञात है कि कम से कम एक चित्त आ चुका है।

हल : दो सिक्कों के उछालने पर संम्भावित विधियाँ
{HH, HT, TH, TT} = 4
∵एक चित्त कम से कम आ चुका है, अत: शेष विधियाँ
= 4 – 1 = 3
दोनों चित्त आने की विधियाँ = 1
अतः दोनों चित्त आने की प्रायिकता = $\frac{1}{3}$

प्रश्न 9. एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी का 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबर पढ़ते है। एक छात्र को यादृच्छया चुना जाता है

(i) प्रायिकता ज्ञात करो कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।
(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
(iii) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढ़ने वाली होने के प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : (i) माना छात्रावास में छात्राओं के हिंदी और अंग्रेजी के अखबार पढ़ने की घटनाओं को क्रमशः H तथा E से निरूपित करते हैं, अतः

$$P(H) = \frac{60}{100} = 0\cdot6$$

$$P(E) = \frac{400}{100} = 0\cdot4$$

तथा $$P(H \cap E) = \frac{20}{100} = 0\cdot2$$

छात्रा के कम से कम एक अखबार पढ़ने की प्रायिकता
= P(H∪E)
∴ P(H∪E) = P(H) + P(E) – P(H∩E)
= 0.6 + 0.4 – 0.2
= 0.8
अत: छात्रा के न तो हिंदी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ने की प्रायिकता
= 1 – P(H∪E)
= 1 – 0.8
= 0.2
= 20%
स्पष्ट है कि 20% छात्र अखबार नहीं पढ़ते हैं।
∴ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{20}{100}$
= $\frac{1}{5}$

(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{E}{H}\right) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$$

$$= \frac{0\cdot2}{0\cdot6} = \frac{1}{3}$$

(iii) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{H}{E}\right) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{0\cdot2}{0\cdot4} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 10. A, किसी पुस्तक की 90% समस्याओं को तथा B, उसी पुस्तक की 70% समस्याओं को हल कर सकता है। पुस्तक से यादृच्छया चयनित किसी समस्या का उनमें से कम से कम एक के द्वारा हल किए जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना

$$P(A) = \frac{90}{100},\ P(B) = \frac{70}{100}$$

∴ कम से कम एक के द्वारा हल किये जाने की प्रायिकता

$$= P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(AB)$$

$$= P(\bar{A}) \times P(B) + P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) + P(A) \times P(B)$$

$$= [1 - P(A)] \times P(B) + P(A)\ [1 - P(B)] + P(A) \times P(B)]$$

$$= \left(1 - \frac{9}{10}\right) \times \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) + \frac{9}{10} \times \frac{7}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{7}{10}$$

$$= \frac{7}{100} + \frac{27}{100} + \frac{63}{100}$$

$$= \frac{97}{100} = 0{\cdot}97$$

प्रश्न 11. तीन विद्यार्थियों को गणित की एक समस्या को हल करने के लिये दिया गया। इन विद्यार्थियों के द्वारा समस्या को हल करने की प्रायिकता क्रमशः$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ व $\frac{1}{4}$ है। समस्या के हल हो जाने की क्या प्रायिकता है?

हल : प्रश्न तभी हल होगा जबकि तीनों में से कम से कम कोई एक छात्र हल कर सके।
एक विद्यार्थी के हल करने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$
अतः इस विद्यार्थी के हल न करने की प्रायिकता = $1 - \frac{1}{2}$
= $\frac{1}{2}$
दूसरे विद्यार्थी के हल न करने की प्रायिकता
= $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
इसी प्रकार तीसरे विद्यार्थी के न हल कर पाने की प्रायिकता
= $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
∴ तीनों में से किसी के भी प्रश्न हल न कर सकने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

∴ कम से कम एक विद्यार्थी द्वारा हल करने की प्रायिकता
$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

प्रश्न 12. एक थैले में 5 सफेद तथा 3 काली गेंदे है। थैले में से 4 गेंदे उत्तरोतर बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती है। इन गेंदों के एकान्तरतः विभिन्न रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : कुल गेंदों की संख्या = 5 + 3 = 8
पहली सफेद गेंद होने की प्रायिकता = $\frac{5}{8}$
अब शेष गेंदों की संख्या = 8 – 1 = 7 जिनमें 4 सफेद और 3 काली गेंदें है अतः
दूसरी गेंद काली होने की प्रायिकता = $\frac{3}{7}$
अब शेष गेंदों की संख्या 7 – 1 = 6 जिनमें 4 सफेद व 2 काली गेंदें है अतः
तीसरी गेंद सफेद होने की प्रायिकता = $\frac{4}{6}$
चौथी गेंद निकालने के लिए शेष गेंदों की संख्या = 6 – 1 = 5
जिनमें 3 सफेद और 2 काली गेंदें हैं अतः
चौथी गेंदें काली होने की प्रायिकता = $\frac{2}{5}$
∵ प्रत्येक बार गेंद निकालने की घटनायें स्वतंत्र है।
अतः विभिन्न रंगों के होने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times 2$$

$$= \frac{1}{14} \times 2 = \frac{1}{7}$$

प्रश्न 13. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकतायें क्रमश$\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ है। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से समस्या को हल करने का प्रयास करते है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) समस्या हल हो जाती है।
(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

हल : A द्वारा समस्या के हल होने की की प्रायिकता
$= P(A) = \frac{1}{2}$
A द्वारा समस्या के हल न होने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

तथा B द्वारा समस्या के हल होने की प्रायिकता

P(B) = $\frac{1}{3}$

B द्वारा समस्या के हल न होने की प्रायिकता

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$
$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

∴ समस्या हल नहीं होती है; की प्रायिकता

$$= 1 - P(\overline{AB})$$
$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

समस्या हल हो जाती है की प्रायिकता

$$P(\bar{A}.\bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B})$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(ii) A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

∴और भी स्वतंत्र हैं।

यहाँ $$P(A) = \frac{1}{2},\ P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$$
$$P(\bar{A}) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3}$$

∴ उनमें से तथ्यत: कोई एक समस्या हल कर देता है, की प्रायिकता

$$= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$$
$$= P(A).P(\bar{B}) + P(\bar{A}).P(B)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ex 16.3

प्रश्न 1. दो थैले I वे II दिए गए है। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदें है जबकि II थैले में 5 लाल और 6 काली गेंदे है। किसी एक थैले में से याद्दच्छया एक गेंद निकाली गई है जोकि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद II थैले से निकाली गई है ?

हल : माना थैले I का E1 से तथा थैले II को E2 से निरूपित किया गया है और लाल रंग की गेंद निकालने की घटना को A से निरूपित करते हैं, तब

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

थैले I में से लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{3}{7}$$

और थैले II में से लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{5}{11}$$

थैले II में से गेंद निकालने की प्रायिकता यदि वह लाल रंग की है

$$= P\left(\frac{E_2}{A}\right)$$

बेज प्रमेय द्वारा

$$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2) \cdot P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1) \times P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2) \times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{11}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{11}}$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{\frac{5}{22}}{\frac{3}{14} + \frac{5}{22}} = \frac{\frac{5}{22}}{\frac{36+35}{154}}$$

$$= \frac{\frac{5}{22}}{\frac{68}{154}} = \frac{5 \times 154}{22 \times 68} = \frac{35}{68}$$

प्रश्न 2. एक डॉक्टर को एक रोगी को देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, या अन्य किसी वाहन से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः$\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ है। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ या $\frac{1}{12}$ है परन्तु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना "डॉक्टर के रोगी के यहाँ देर से आने की घटना E है।
यदि डॉक्टर ट्रेन, बस, स्कूटर या अन्य किसी वाहन से आने की घटनायें . क्रमशः T1, T2, T3 और T4 है तो

दिया है; $P(T_1) = \frac{3}{10}, \ P(T_2) = \frac{1}{5}$

$P(T_3) = \frac{1}{10}$ और $P(T_4) = \frac{2}{5}$

अतः डॉक्टर के ट्रेन द्वारा आने पर देर से पहुँचने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{E}{T_1}\right) = \frac{1}{4}$$

इसी प्रकार $P\left(\frac{E}{T_2}\right) = \frac{1}{3}, P\left(\frac{E}{T_3}\right) = \frac{1}{12}$

$$P\left(\frac{E}{T_4}\right) = 10$$

(अन्य वाहन से आने पर देर नहीं होती है)।
अतः बेज प्रमेय द्वारा

डॉक्टर द्वारा देर से आने पर ट्रेन द्वारा आने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{T_1}{E}\right)$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{T_1}{E}\right) = \frac{P(T_1).P\left(\frac{E}{T_1}\right)}{P(T_1).P\left(\frac{E}{T_1}\right) + P(T_2).P\left(\frac{E}{T_2}\right) + P(T_3)P\left(\frac{E}{T_3}\right) + P(T_4).P\left(\frac{E}{T_4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0}$$

$$= \frac{\frac{3}{40}}{\frac{3}{40} + \frac{1}{15} + \frac{1}{120}} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{9+8+1}{120}}$$

$$= \frac{\frac{3}{40}}{\frac{18}{120}} = \frac{3 \times 120}{40 \times 18} = \frac{1}{2}$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

प्रश्न 3. प्रथम थैले में 3 लाल और 4 काली गेंदे है तथा द्वितीय थैले में 4 लाल और 5 काली गेंद हैं। एक गेंद प्रथम थैले से द्वितीय थैले से द्वितीय थैले में स्थानांतरित की जाती है और तब एक गेंद को द्वितीय थैले से निकाला जाता है। निकाली गई गेंद लाल रंग की प्राप्त होती है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि स्थानांतरित गेंद काली है ?

हल : थैला एक में 3 लाल तथा 4 काली गेंद हैं।
थैला दूसरे में 4 लाल तथा 5 काली गेंद है।
माना घटनायें E1 = थैला एक में से लाल गेंद निकाली गई।
E2 = थैला दूसरे में से काली गेंद निकाली गई।

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{3}{7}$$

$$P(E_2) = \frac{4}{7}$$

एक गेंद स्थानान्तरित करने के बाद दूसरे थैले में से
माना लाल गेंद निकालने की घटना A है।

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{3}{14} + \frac{8}{35}}$$

$$= \frac{\frac{8}{35}}{\frac{15+16}{30}} = \frac{8}{35} \times \frac{70}{31} = \frac{16}{31}$$

प्रश्न 4. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंद है और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदे है। इन दोनों थैले में से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जोकि लाल है। इस बात की प्रायिकता है कि गंद पहले थैले से निकाली गई है ?

हल : माना पहले थैले को चुनने की घटना को E1 से और दूसरे थैले को चुनने की घटना को E2 से व्यक्त करते हैं।
लाल गेंद निकालने की घटना को A से दर्शाते हैं।
∴ एक थैले को चुनने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

अर्थात् $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

पहले थैले में 4 लाल तथा 4 काली गेंद है।

∴ इनमें से लाल गेंद चुनने की प्रायिकता $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{1}{2}$$

दूसरे थैले में 2 लाल तथा 6 काली गेंदे हैं।

∴ इनमें से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

अब लाल गेंद पहले थैले से निकाले जाने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2+1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{1 \times 8}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$$

प्रश्न 5. तीन सिक्के दिये गये हैं एक सिक्के के दोनों ओर चित्त है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित्त 75% बार प्रकट होता है। और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया। यदि सिक्के पर चित्त प्रकट हो तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह दोनों ओर चित्त वाला सिक्का है ?

हल : तीनों सिक्कों में से एक सिक्का चुनने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$
यदि तीनों सिक्कों की घटनायें E1, E2 तथा E3 हैं। और चित्त आने की घटना A है।

तो $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

एक सिक्के के दोनों ओर चित्त है।

अर्थात् $P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 1$

दूसरा सिक्का इस प्रकार अभिन्त है कि

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

तथा तीसरा सिक्का इस प्रकार अभिनत है।

अर्थात् $P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{1}{2}$

सिक्के पर चित्त हो और पहला सिक्का हो, की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{E_1}{A}\right)$$

अत: $$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4+3+2}{12}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{9}{12}} = \frac{1\times 12}{3\times 9} = \frac{4}{9}$$

प्रश्न 6. किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है किन्तु 0.5% बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत सूचना देता है यानि व्यक्ति को रोग से ग्रस्ति बताता है। यदि किसी जनसंख्या में 0.1% व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त है तो क्या प्रायिकता है कि कोई यादृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में यह बताया जाता है कि उसे यह रोग है ?

हल : मानो घटनायें E1 = रोग से ग्रस्त रोगी
E2 = रोग से ग्रस्त नहीं रोगी
A = रक्त की जाँच की गई
∴ रोग से ग्रस्त रोगी व्यक्ति की प्रायिकता

$$P(E_1) = 0{\cdot}1\% = \frac{1}{100}$$
$$= 0{\cdot}001$$

'रोग से ग्रस्त नहीं' व्यक्ति की प्रायिकता

$$P(E_2) = 1 - P(E_1)$$

$$= 1 - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{99}{100}$$

$$= 0 \cdot 99$$

उन व्यक्तियों की प्रायिकता जो रोगी है और रक्त की जाँच की गई

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 99\% = \frac{99}{100} = 0 \cdot 99$$

रक्त की जाँच की गई परन्तु रोगी नहीं है की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0 \cdot 05\%$$

$$= \frac{\cdot 05}{100}$$

$$= 0 \cdot 005$$

कोई यदृच्छया चुना गया व्यक्ति रोग से ग्रस्त होता। यदि रक्त की जाँच में रोग पाये जाने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{0 \cdot 001 \times 0 \cdot 99}{0 \cdot 001 \times 0 \cdot 99 + 0 \cdot 999 \times 0 \cdot 05}$$

$$= \frac{0 \cdot 00099}{0 \cdot 00099 + 0 \cdot 004995}$$

$$= \frac{0 \cdot 000990}{0 \cdot 005985} = \frac{990}{5985}$$

$$= \frac{198}{1197} = \frac{22}{133}$$

प्रश्न 7. यह ज्ञात है कि एक महाविद्यालय के छात्रों में से 60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते है। पूर्ववर्ती वर्ष से परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रों में से 30% तथा छात्रावास में नहीं रहने वाले छात्रों में से 20% छात्रों ने A ग्रेड लिया। वर्ष के अन्त में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A ग्रेड मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है ?

हल : माना छात्रावास में रहने वाले और न रहने वाले छात्रों की E1 और E2 हैं।
अतः छात्रावास में रहने वाले छात्रों की प्रायिकता

$$P(E_1) = 60\%$$

$$= \frac{60}{100} = 0{\cdot}6$$

छात्रावासं में न रनहे वाले छात्रों की प्रायिकता

$$P(E_2) = 40\% = \frac{40}{100} = 0{\cdot}4$$

छात्रावास में रहने वाले तथा A ग्रेड लेने वाले छात्रों की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 30\%$$

$$= \frac{30}{100} = 0{\cdot}3$$

छात्रावास में न रहने वाले A ग्रेड लेने वाले छात्रों की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 20\%$$

$$= \frac{20}{100} = 0{\cdot}2$$

छात्रावास में रहने वाले तथा A ग्रेड प्राप्त छात्रों की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{E_1}{A}\right)$$

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{0{\cdot}6 \times 0{\cdot}3}{0{\cdot}6 \times 0{\cdot}3 + 0{\cdot}4 \times 0{\cdot}2}$$

$$= \frac{0{\cdot}18}{0{\cdot}18 + 0{\cdot}08} = \frac{0{\cdot}18}{0{\cdot}26}$$

$$= \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

प्रश्न 8. एक बीमा कंपनी ने 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा किया। स्कुटर चालक, कर चालक तथा ट्रक चालक के दुर्घटना होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01 व 0.15 है। बीमित व्यक्तियों में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : माना "स्कूटर चालक का बीमा होना" की घटना = E1
"कार चालक का बीमा होना" की घटना = E2
तथा "ट्रक चालक की बीमा होना" की घटना = E3
∵ बीमा कम्पनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों तथा 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है।
∴ कुल चालकों की संख्या = 2000 + 4000 + 6000
= 12000
स्कूटर चालकों के बीमा होने की प्रायिकता

$$P(E_1) = \frac{2000}{12000} = \frac{1}{6}$$

कार चालकों के बीमा होने की प्रायिकता

$$P(E_2) = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$$

ट्रक चालकों के बीच होने की प्रायिकता

$$P(E_3) = \frac{6000}{12000} = \frac{1}{2}$$

स्कूटर चालकों के दुर्घटना होने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 0{\cdot}01$$

(जहाँ दुर्घटनाओं की घटना A से निरूपित है)

कार चालकों के दुर्घटना होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0{\cdot}03$$

ट्रक चालकों के दुर्घटना होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{A}{E_3}\right) = 0{\cdot}15$$

अत: बीमा कृत चालकों में से एक दुर्घटना ग्रस्त हो जाता है।
उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right)=\frac{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)+P(E_3).P\left(\frac{A}{E_3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times 0{\cdot}01}{\frac{1}{6}\times 0{\cdot}01+\frac{1}{3}\times 0{\cdot}03+\frac{1}{2}\times 0{\cdot}15}$$

$$=\frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}01+0{\cdot}06+0{\cdot}45}$$

$$=\frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}52}=\frac{1}{52}$$

प्रश्न 9. एक बहुविकल्पीय प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। माना कि विद्यार्थी के प्रश्न के उत्तर ज्ञात होने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ तथा अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। यह मानते हुए कि विद्यार्थी के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है, इस बात की क्या प्रायिकता है कि विद्यार्थी प्रश्न का उत्तर जनता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है ?

हल : माना "विद्यार्थी उत्तर जानता है घटना E1 से तथा विद्यार्थी अनुमान लगाता है" घटना E2 से निरूपित की गई है।

अब $P(E_1)=\frac{3}{4}$ तथा $P(E_2)=\frac{1}{4}$

माना'उत्तर सही देने की घटना A है।

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right)=1,\ P\left(\frac{A}{E_2}\right)=\frac{1}{4}$$

∴ अभीष्ट प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right)=\frac{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\times 1}{\frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{12+1}{10}}$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{16}{16} = \frac{12}{13}$$

प्रश्न 10. कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0.25% महिलाओं के बाल सफेद हैं एक सफेद बालों वाले व्यक्ति को यादृच्छया चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की प्रायिकता है? यह मानते हुए कि पुरुषों तथा महिलाओं की संख्या समान है।

हल : दिया है :
महिलाओं और पुरुषों की संख्या समान है।
माना घटनाएँ E1 = पुरुषों का होना ।
E2 = महिलाओं का होना
A = सफेद बाल होना

एक पुरुष चुनने की प्रायिकता $P(E_1) = \frac{1}{2}$

एक महिला चुनने की प्रायिकता $P(E_2) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 5\% = \frac{5}{100} = 0\cdot05$$

0·25% महिलाओं के बाद सफेद हैं।

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0\cdot25\% = \frac{25}{100} = 0\cdot25$$

अब

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)+P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 0\cdot05}{\frac{1}{2}\times 0\cdot05+\frac{1}{2}+0\cdot0025}$$

$$= \frac{0\cdot05}{0\cdot05+0\cdot0025}$$

$$= \frac{0.05}{0.525} = \frac{500}{525}$$

$$= \frac{20}{21}$$

प्रश्न 11. दो दल एक निगम के निदेशक मंडल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में है। पहले तथा दुसरे दल के जीतने की प्रायिकताओं क्रमशः 0.6 व 0.4 है। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नये उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। प्रायिकता ज्ञात करो कि नया उत्पाद दूसरे दल द्वारा प्रारंभ किया गया था।

हल : माना घटनायें

E1 = पहले दल की जीत

E2 = दूसरे दल क जीत

= पहला दल नया उत्पादन प्रारम्भ करेगा।

= दूसरा दल नया उत्पादन प्रारम्भ करेगा।

दिया है : पहले दल के जीतने की प्रायिकता = P(E1) = 0.6

दूसरे दल के जीतने की प्रायिकता = P(E2) = 0.4

पहला दल जीतता है तो एक नये उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 0.7$$

दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0.3$$

अब नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारम्भ किये जाने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.3}{0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3} = \frac{0.12}{0.42 + 0.12}$$

$$= \frac{0.12}{0.54} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$$

प्रश्न 12. माना कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 का अंक प्राप्त होता है तो वह सिक्के का तीन बार उछालती है। और चितों की संख्या नोट करती है यदि उसे 1, 2, 3 या 4 का अंक प्राप्त होता है तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती हैं कि उस पर

चित्त या पक्ष प्राप्त हुआ। यदि उसे तथ्यतः एक चित्त प्राप्त होता है तो उसके द्वारा उछाले गये पसे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है ?

हल : एक पासे को उछालने से 6(1, 2, 3, 4, 5, 6) परिणाम प्राप्त होते हैं।
माना घटनाएं E1 = 5 या 6 का प्राप्त होना
E2 = 1, 2, 3, 4 का प्राप्त होना
A = सिक्का उछालने का चित्त प्राप्त होना।
5 या 6 की संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

1, 2, 3, 4 संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता

$$P(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

जब वह 5 या 6 प्राप्त करती है तब वह सिक्का तीन बार उछालती
(HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT)
एक चित्त प्राप्त होने के तरीके (HTT, THT, TTH) यानी तीन तरीके। एक चित्त प्राप्त होने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{8}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{3}{8}$$

जब वह 1, 2, 3, 4 प्राप्त करती है तब वह एक सिक्के की एक बार उछालती है।

$\therefore$ एक चित्त प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

अर्थात् $\quad P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{1}{2}$

यदि उसे ठीक एक चित्त प्राप्त होता है तो उसके द्वारा उछाले गये। पासों पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{3\times 8}} = \frac{3\times 8}{11\times 3} = \frac{8}{11}$$

प्रश्न 13. 52 पत्तों की एक भाँति फैंटी गई गड्डी में एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं नो ईंट के पत्ते है। खो गये पत्ते के ईट का पत्ता होने की क्या प्रायिकता है?

हल : माना घटनायें E1 = खोया हुआ पत्ता ईंट का है।
E2 = खोयो पत्ता ईंट का नहीं है।
यहाँ 52 पत्तों की गड्डी में 13 पत्ते ईंट के हैं।

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{^{13}C_1}{^{52}C_1} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

और यहाँ 39 पत्ते हैं जिसमें ईंट के पत्ते नहीं है।

$$\therefore \quad P(E_2) = \frac{39}{52}$$

$$= \frac{3}{4}$$

(i) जब एक ईंट का पत्ता खो गया हो तब 5 (पत्तों में से 12 पत्ते ईंट के रह जायेंगे।

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}$$

$$= \frac{12\times 12}{51\times 50}$$

यहाँ A खो गये पत्तों को प्रदर्शित करता है।
(ii) जब ईंट के पत्ते खोए नहीं है तब यहाँ 13 ईंट के पत्ते हैं।

∴ दो ईंट के पत्ते खींचने की प्रायिकता

$$P = \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$$

$$= \frac{13 \times 12}{51 \times 50}$$

खो गये पत्ते के ईंट के होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_1) \times P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1) \times P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2) \times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{12 \times 11}{51 \times 50}}{\frac{1}{4} \times \frac{12 + 11}{51 \times 50} + \frac{3}{4} \times \frac{13 \times 12}{51 \times 50}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times 12 \times 11}{\frac{1}{4} \times 12 \times 11 + \frac{3}{4} \times 13 \times 12}$$

$$= \frac{33}{33 + 117} = \frac{33}{150} = \frac{11}{50}$$

प्रश्न 14. एक थैले में 3 लाल और 7 काली गेंदे है। एक-एक करके बिना प्रतिस्थापन के दो गेंदो का यादृच्छया चयन किया गया है। यदि द्वितीय चयनित गेंद लाल प्राप्त हो तो क्या प्रायिकता है कि प्रथम चयनित गेंद भी लाल है ?

हल : माना A = पहली बार में लाल गेंद आने की घटना
और B = दूसरी बार में लाल गेंद आने की घटना
तब P(A∩B) = P(1 लाल और 1 लाल गेंद)

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$P(B) = P($1 लाल और 1 लाल गेंद अथवा 1 काली और 1 लाल गेंद)

$= P($1 लाल और 1 लाल गेंद) $+ P($1 काली और 1 लाल गेंद)

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{6}{90} + \frac{21}{90}$$

$$\Rightarrow \qquad P(B) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \qquad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{15} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{9}$$

Ex 16.4

प्रश्न 1. बताइए कि निम्नलिखित प्रायिकता बंटन में से कौन-से एक यादृच्छिक चर X के लिए संभव है।
(i)

X :	**0**	**1**	**2**
P(X) :	**0.4**	**0.4**	**0.2**

(ii)

X :	**0**	**1**	**2**
P(X) :	**0.6**	**0.1**	**0.2**

(iii)

X :	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P(X) :	**0.1**	**0.5**	**0.2**	**-0.1**	**0.3**

हल : (i) प्रायिकताओं का योग
= 0.4 + 0.4 + 0.2
= 1
अतः दिया गया बंटन प्रायिकता बंटन है।
(ii) प्रायकिताओं का योग = 0.6 + 0.1 + 0.2
= 0.9 ≠ 1
अतः दिया गया बंटन, प्रायिकता बंटन नहीं है।
(iii) यहाँ पर एक प्रायिकता P(3) = – 0:1 है जो ऋणात्मक है।
अतः यह बंटन, प्रायिकता बंटन नहीं है।

प्रश्न 2. दो सिक्कों के युगपत उछाल में चित्तों की संख्या को यादृच्छिक चर X मानते हुए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : X के सम्भव मान 0, 1 या 2 हैं।
अब P(X = 0) = P(कोई चित्त नहीं)
= P(पहली उछल में पट और दूसरी उछल से पट)

= P(पहली उछल में पट), P(दूसरी उछल में पट)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(\text{पहली में चित्त})$$
$$= P(TH \text{ या } HT) = P(TH) + P(HT)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(2 \text{ चित्त}) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

अत:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

पुन: हम देखते हैं कि प्रायिकताओं में से प्रत्येक एक ऋणेत्तर भिन्न (1 से अधिक कभी नहीं) और यह है कि इसका योग

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+2+1}{4}$$
$$= \frac{4}{4} = 1$$

प्रश्न 3. चार खराब संतरे, 16 अच्छे संतरों में भूलवश मिला दिए गए हैं। दो संतरों के निकाल में खराब संतरों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : 16 अच्छे सन्तरों में 4 खराब सन्तरे मिला दिये गये हैं। अतः कुल सन्तरों की संख्या = 4 + 16 = 20
2 खराब सन्तरे चुनने हैं।
∴ एक खराब सन्तरे की प्रायिकता

$$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

∴ एक अच्छा सन्तरा चुनने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

∵ X खराब सन्तरों की संख्या है।

∴ $P(X = 0) = P(\text{GG})$

$$P(X = 1) = \left(\frac{4}{5}\right) \times \frac{15}{19} = \frac{12}{19}$$

$$P(X=1) = \frac{4}{20}\times\frac{16}{19}+\frac{16}{20}\times\frac{4}{19}$$

$$= \frac{16}{95}+\frac{16}{95}=\frac{32}{95}$$

$$P(X=2) = P(BB)$$

$$= \frac{4}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{3}{95}$$

∴ खराब सन्तरों का प्रायिकता बंटन इस प्रकार है—

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

प्रश्न 4. एक कलश में 4 सफेद तथा 3 लाल गेंद हैं। तीन गेंदों के यादृच्छय निकाल में लाल गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : एक कलश में तीन गेंदें निकाली गई हैं। अतः
प्रतिदर्श = S {RRR, RRW, RWR, WRR, RWW, WRW, WWR WWW}
R लाल तथा W सफेद गेंद को व्यक्त करते हैं।
माना X लाल गेंदों की संख्या है। अत: X के सम्भव 3, 2, 1, 2, 1, 0 अथवा 0, 1, 2, 3 है।
∴P(X = 0) = P(कोई लाल नहीं)
= P(WWW)

$$= \frac{4}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5} \quad \because P(R) = \frac{3}{7},\ P\left(W=\frac{4}{7}\right)$$

$$= \frac{4}{35}$$

P(X = 1) = P(RWW, WRW, WWR)
= P(RWW) P(WRW) + P(WWR)

$$= \frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{6}{35}+\frac{6}{35}+\frac{6}{35}=\frac{18}{35}$$

P(X = 2) = P(RRW, ROR, WRR)

= P(RRW) + P(RWR) + P(WRR)

$$= \frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$$

$$= \frac{4}{35}+\frac{4}{35}+\frac{4}{35}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = R(RRR)$$

$$= \frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$$

अत: प्रायिकता बंटन निम्न हैं :

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

प्रश्न 5. 10 वस्तुओं के ढेर में 3 वस्तुएँ त्रुअपिर्ण है। इस ढेर में से 4 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श खराब वस्तुओं की संख्या को यादृच्छिक चर X द्वारा निरूपित किया जता है। ज्ञात कीजिए

(i) X का प्रायिकता बंटन
(ii) P(X ≤ 1)
(iii) P(X < 1)
(iv) P(0 < X < 2)

हल : दिया है : 10 वस्तुओं के ढेर में 3 खराब है।
अतः अच्छी वस्तुएँ = 10 – 3 = 7
माना X खराब वस्तुओं की संख्या प्रदर्शित करता है। स्पष्ट है कि X के मान 0, 1, 2, 3 होंगे।
P(X = 0) = P(GGGG)
= P(अच्छी वस्तुएँ)

$$= \frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{6}$$

P(X = 1) = P(एक खराब तीन अच्छी)
= P(BGGG) + P(GBGG) + P(GGBG) + P(GGGB)

$$= \frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}$$

$$+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

P(X = 2) = P(दो खराब दो अच्छी)
= P(BBGG) + P(BGGB) + P(GBBG)

$$= \frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}$$

$$= \frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

P(X = 3) = P(BBBG) + P(BGBB) + P(BBGB) + P(GBBB)

$$= \frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{1}{7}$$

$$+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}+\frac{1}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}$$

$$= \frac{1}{120}+\frac{1}{120}+\frac{1}{120}+\frac{1}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

∴ प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

(i)

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(ii) $P(x \le 1) = \frac{2}{3}\ \left(\because 1/6 + /2 = \frac{2}{3}\right)$

(iii) $P(x < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{6}$

(iv) $P(0 < X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

प्रश्न 6. एक पासो को इस प्रकार भारित किया गया है कि पासे पर सम संख्या आने की संभावना विषम संख्या आने की अपेक्षा दुगुनी है। यदि पासे को बार उछाला गया है, तब दोनों उछालों में पूर्ण वर्गों को याद्दच्छिक चर X मानते हुए प्रायकिता बंटन ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है X पूर्ण वर्गों की संख्या व्यक्त करता है।
एक पासे को उछालने पर समष्टि = {1, 2, 3, 4, 5, 6}।
एक पासे पर पूर्ण योग प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{2}{6}$
∴ पासे पर पूर्ण वर्ग प्राप्त न होने की प्रायिकता = $1-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}$
जब दो बार उछाला जाता है तो n(S) = 36

∴ P(X = 0) = 8 (कोई पूर्ण वर्ग नहीं)

$$= \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

$P(X = 1) = P($एक पूर्ण वर्ग होना, एक न होना$)$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$P(X = 2) = P($दोनों पूर्ण वर्ग होना$)$

$$\therefore P(X = 2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

∴ प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार हैं :

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

प्रश्न 7. एक कलश में 4 सफेद तथा 6 लाल गेंद है। इस कलश में से चार गेंदे यादृक्ष्छया निकाली जाती है। सफेद गेंदों की संख्य का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : माना X सफेछ गेंद व्यक्त करता है। अतः कुल 4 + 6 = 10 से चार गेंद यादृच्छया निकालने पर X के मान 0, 1, 2, 3, 4 होंगे।

∴ P(X = 0) = P(सभी लाल गेंद)

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

P(X = 1) = P(एक सफेद और 3 लाल गेंद)

= P(WRRR, RWRR, RRWR, RRRW)

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$$

$$+ \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7}$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} = \frac{8}{21}$$

P(X = 2) = P(दो सफेद दो लाल)

= P(WWRR, WRWR, WRRW, RRWW)

$$= \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}$$

$$+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}$$

$$= \frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{4}{14}$$

P(X= 3) = P(तीन सफेद 1 लाल)

= P(WWWR, WWRW, WRWW, RWWW)

$$= \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{6}{7}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}$$

$$+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}$$

$$= \frac{1}{35}+\frac{1}{35}+\frac{1}{35}+\frac{1}{35}=\frac{4}{35}$$

P(X = 4) = P(WWWW)

$$= \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{210}$$

अत: अभीष्ट प्रायकिता बंटन इस प्रकार है :

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

प्रश्न 8. पासों में एक जोड़े को तीन बार उछालने पर टिकों (doubleth) की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : माना X टिट्कों (doubleth) की संख्या है।

अतः X के मान 0, 1, 2, 3 होंगे।

एक उछाल में पासों के एक जोड़े पर प्राप्त होने वाले टिट्कों (doubleth) का समुच्चय

= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

एक जोड़ा पांसों उछालने की सम्भाविति विधियाँ

= 6 x 6 = 36

अतः एक उछाल में एक जोड़े पर एक टिट्क (doubleth) आने की

प्रायिकता = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

अतः एक जोड़े पर एक टिट्क न आने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

अब $P(X = 0) = P($टिट्कों के न होने की संख्या$)$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$P(X = 1) = P(1$ टिट्क होने और 2 न होने$)$

$$= {}^3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{6} = \frac{75}{216}$$

$P(X = 2) = P(2$ होने और 1 न होने$)$

$$= {}^3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$P(X = 3) = P(3$ होने$)$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

अतः प्रायिकता बंटन इस प्रकार

प्रश्न 9. पासों के युग्म को उछाला जाता है। माना यादृच्छिक चर। X, पासों पर प्राप्त अंकों के योग को निरूपित करता है। चर X का माध य ज्ञात कीजिए।

हल : जब दो पासे फेंके जाते हैं, तब परिणामों की संख्या
= 6 x 6
= 36
P(X = 2) = P(1, 1) = $\frac{1}{36}$
P(X = 3) = P[(1, 2), (2, 1)] = $\frac{2}{36}$
P(X = 4) = P[(1, 3), (2, 2), (3, 1)] = $\frac{3}{36}$

P(X = 5) = P[(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)] = $\frac{4}{36}$
P(X = 6) = P[(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)] = $\frac{5}{36}$
P(X = 7) = P[(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)] = $\frac{6}{36}$
P(X = 8) = P[(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)] = $\frac{5}{36}$
P(X = 9) = P[(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)] = $\frac{4}{36}$
P(X = 10) = P[(4, 6), (5, 5), (6, 4)] = $\frac{3}{36}$
P(X = 11) = P[(5, 6), (6, 5)] = $\frac{2}{36}$
P(X = 12) = P[(6, 6)] = $\frac{1}{36}$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$p = p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{252}{36}$

$$\therefore \text{ चर } X \text{ का माध्य} = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} = \frac{252}{36 \times 1} = 7$$

प्रश्न 10. एक अनभिनत पासो को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का प्रसारण ज्ञात कीजिए।

हल : माना परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
X पासे पर प्रकट संख्या को व्यक्त करता है। तब X एक याद्दच्छिक चर है जो 1, 2, 3, 4, 5 या 6 मानते हैं।
साथ ही P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = $\frac{1}{6}$
∴ X का प्रायिकता बंटन निम्न है।

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\Sigma X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$
$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6}$$
$$\Sigma X_i^2 = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + \frac{6^2}{6}$$

$$= \frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{4^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{6^2}{6}$$

$$= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

अतः $\quad$ प्रसरण $= \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} + \frac{441}{36} = \frac{546-441}{36}$$

$$= \frac{105}{36} = \frac{35}{12}.$$

प्रश्न 11. एक बैठक में 70% सदस्यों ने किसी प्रस्ताव का पक्ष लिया और 30% सदस्यों ने विरोध किया। बैठक में सक एक सदस्य को यादृच्छया चुना गया और माना X = 0, यदि उस चयनित सदस्य ने प्रस्ताव का विरोध किया हो तथा X = 1, यदि सदस्य प्रस्ताव के पक्ष में हो तब X का माध्य तथा प्रसारण ज्ञात कीजिए।

हल : X = 1 पर किसी प्रस्ताव का पक्ष करने वाले सदस्यों की प्रायकिता = 70% = $\frac{70}{100}$= 0.70

X = 0 पर सिकी प्रस्ताव का विरेध करने वाले सदस्यों की प्रायिकता = 30% = $\frac{30}{100}$ = 0:30

∴ प्रायिकता बंटन इस प्रकार है।

X	0	1
$P(X)$	0·30	0·70

$\Sigma X = Sp_ix_i = 0 \cdot 30 \times 0 + 0 \cdot 70 \times 1 = 0 \cdot 70$

$\Sigma X^2 = \Sigma p_i x_i^2 = 0 \cdot 3 \times 0 + 0 \cdot 7 \times 1^2$

$= 0 + 0 \cdot 7 = 0 \cdot 7$

अतः $\quad$ माध्य $= \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} = \frac{0 \cdot 7}{1} = \frac{7}{10}$

प्रसरण $= \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2$

$= 0 \cdot 7 - (0 \cdot 7)^2$

$= 0 \cdot 7 - 0 \cdot 49$

$= 0 \cdot 21 = \frac{21}{100}$

अतः माध्य $= \frac{7}{10}$, प्रसरण $= \frac{21}{100}$.

प्रश्न 12.ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोतर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। बादशाहों की संख्या का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करो।

हल : ताश की एक गड्डी में से यादृच्छया दो पत्ते खींचे जाते हैं।
दोनों पत्तों के बादशाह न होने पर कुल विधियाँ

$$= {}^{48}C_2 = \frac{48 \times 47}{2} = 1128$$

52 पत्तों में से 2 पत्ते खीचे जा सकते हैं $= {}^{52}C_2$

$$= \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51 = 1326$$

$\therefore$ बादशाह न खींचने की प्रायिकता $= \frac{1128}{1326}$

${}^4C_1 \times {}^{48}C_1$ में एक बादशाह होने और बादशाह न होने की विधियाँ
$= {}^4C_1 \times {}^{48}C_1$
$= 4 \times 48 = 192$

दो बादशाहों को खींचने की विधियाँ $= {}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

$\therefore$ प्रायिकता $= \frac{6}{1326}$

$\therefore$ प्रायिकता बंटन इस प्रकार हैं :

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1128}{1326}$	$\frac{192}{1326}$	$\frac{6}{1326}$

$\therefore \quad \Sigma(X) = \Sigma p_i X_i$

$$= 0 \times \frac{1128}{1326} + 1 \times \frac{192}{1326} + \frac{2 \times 6}{1326}$$

$$= \frac{204}{1326} = \frac{34}{221}$$

प्रसरण $= \Sigma(X)^2 - (\Sigma X)^2 = \Sigma(X_2 P_2) - (\Sigma p_i X_0)^2$

$$= \left(\frac{36}{221}\right) - \left(\frac{34}{221}\right)^2$$

$$= \frac{36}{221} - \frac{34 \times 34}{(221)^2}$$

$$= \frac{36 \times 221 - 34 \times 34}{(221)^2}$$

$$= \frac{7956 - 1156}{(221)^2} = \frac{6800}{(221)^2}$$

माध्य $= \frac{34}{221}$, प्रसरण $= \frac{6800}{(221)^2}$

मानक विचलन $= \sqrt{\text{प्रसरण}}$

$$= \sqrt{\frac{6800}{(221)^2}} = \frac{82{\cdot}46}{221} = 0{\cdot}37$$

Ex 16.5

प्रश्न 1. यदि एक न्यायय सिक्के को 10 बार उछाला गया हो तो निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात करो :

(i) तथ्यतः छः चित
(ii) कम से कम छः चित
(iii) अधिकतम छः चित।

हल : (i) एक सिक्के को बार-बार उछालना बरनौली परीक्षण होता है। 10 परीक्षणों में चित्तों की संख्या X मानते हैं।

$\therefore$ X बंटन में $n = 10$ और $p =$

$\therefore \quad P(X = x) = {}^nC_2\, q^{n-x} p^x$

यहाँ $n = 10, p = \frac{1}{2}, \; q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \qquad P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$= {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

अब (1) p(ठीक 6 : चित्त) $= p(X = 6)$

$$= {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{\lfloor 10}{\lfloor 6 \lfloor 4} = \frac{105}{512}$$

(ii) P(कम से कम 6 चित्त) = p(X ≥ 6)
= p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)

$$= {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+ {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left[\frac{\lfloor 10}{\lfloor 6 \times \lfloor 4} + \frac{\lfloor 10}{\lfloor 7 \times \lfloor 3} + \frac{\lfloor 10}{\lfloor 8 \times \lfloor 12} + \frac{\lfloor 10}{\lfloor 9 \times \lfloor 7} + \frac{\lfloor 10}{\lfloor 10}\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{193}{512}$$

(iii) P(अधिकतम छः चित्त) = p(X ≤ 6)
= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} [1 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 + {}^{10}C_5 + {}^{10}C_6]$$

$$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}.$$

प्रश्न 2. एक कलश में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काली गेंदे। यदि चार गेंदे एक-एक करके प्रतिस्थापन सहित निकाली जाती है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि

(i) सभी सफेद गेंद हो
(ii) केवल तीन गेंदे हो
(ii) कोई भी सफेद गेंद नहीं हो
(iv) कम से कम तीन सफेद हो।

हल : (i) गेंदों की कुल संख्या = 5 + 7 + 8 = 20
सफेद गेदों की संख्या = 5

एक बार में सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

चूँकि सभी घटनायें स्वतंत्र है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(ii) पहली बार सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$

$$= 3C_1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

(iii) p(कोई भी सफेद गेंद नहीं)
अतः अन्य गेंदों की संख्या = 7 + 8 = 15

$\therefore$ एक अन्य रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता = $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ उत्तरोत्तर चार अन्य रंग की गेदों की प्रायिकता

$$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

(iv) p(कम से कम 3 गेंद सफेद) = p(चार) – p(तीन गेंद सफेद)

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{3}{(4)^4} = \frac{1}{(4)^4} + \frac{3}{(4)^3}$$

$$= \frac{13}{(4)^3}$$

प्रश्न 3. एक बाधा दौड़ में एक खिलाड़ी को 10 बाधाएँ पार करनी हैं। खिलाड़ी के द्वारा प्रत्येक बाधा को पार करने की प्रायिकता $\frac{5}{6}$ है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह 2 कम बाधाओं को गिरा देगा (पार नहीं कर पाएगा?

हल : कुल बाधाओं की संख्या = 10
⇒ n = 10
बाधा को पार करने की प्रायिकता = p = $\frac{5}{6}$
बाधा पार न करन की प्रायकिता = $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$
= q
p(दो से कम बाधाओं को पार न करना)

$$= p^{10} + p^9$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + {}^{10}C_9 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{1}{6}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^9 \left[\frac{5}{6} + 10 \times \frac{1}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{15}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{5}{6} = 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$= \frac{5^{10}}{2 \times 6^9}$$

प्रश्न 4. पाँच पासों को एक साथ फेंका गया है। यदि एक पासे पर सम अंक आने को सफलता माना जाये तो अधिकतम 3 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : एक पासे को फेंकने पर
S = {1, 2, 3, 4, 5}
∴ n(S) = 6
माना A एक सम संख्या निरूपित करता है।
∴ A = {2, 4, 6}
n(A) = 3

$$\therefore \quad p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अत: $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

p(अधिकतम 3 सफलतायें) $= p(X \leq 3)$

$$= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + {}^5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}^5C_6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right) + {}^5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 {}^5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 [1 + {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left[1 + 5 \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 [1 + 5 + 10 + 10]$$

$$= 26 \times \frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}.$$

प्रश्न 5. 10% खराब अंडों वाले एक ढेर से 10 अंडे उत्तरोत्तर प्रतिस्थापन के साथ निकाले गऐ है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि 10 अंडों के प्रतिदर्श में कम से कम खाब अंडा है।

हल : खराब अंडों की प्रयिकता = 10%

$$p = \frac{10}{100}$$

$$p = \frac{1}{10}$$

∴ (अच्छे अंडों की प्रायिकता = q)

$$\therefore \quad q = 1 - p$$

$$= 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$$

10 अंडों के नमूने में कम से कम एक अंडा खराब होने की प्रायिकता
= p(1) + p(2) + p(3) +...
= p(0) + p(1) + p(2) +...+ p(10) – p(0)
= [p(0) + p(1) + p(2) +...+ p(10)] – p(0)
= 1 – p(0)

$$= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$$

प्रश्न 6. एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है, जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की $\frac{1}{100}$ प्रायिकता है। इस बात की क्या प्रायिकता हैं कि वह

(i) कम से कम एक बार
(ii) तथ्यतः एक बार
(iii) कम से कम दो बार इनाम जीत लेगा।

हल :

∴ प्रत्येक टिकट जीतने की प्रायिकता = $\frac{1}{100}$
प्रत्येक टिकट हारने की प्रायिकता = $1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$
(i) कम से कम एक बार जीतने की प्रायिकता

$$= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50} = 1-(0\cdot99)^{50}$$

(ii) तथ्यतः एक बार जीतने की प्रायिकता

$$= {}^{50}C_1\left(\frac{99}{100}\right)^{50-1}\left(\frac{1}{100}\right)^{1}$$

$$= \frac{50}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49} = \frac{1}{2}(0\cdot99)$$

(iii) कम से कम दो बार जीतने की प्रायिकता
= p(2) + p(3) +…+ p(50)
= [p(0) + p(1) + p(2) +…+ p(50)] – p(0) – p(1)
= 1 – [p(0) + p(1)]

$$= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50} - {}^{50}C_1\left(\frac{99}{100}\right)^{49}\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{49}\left[\frac{99}{100}+\frac{50}{100}\right]$$

$$= 1-\frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$

प्रश्न 7. किसी कारखाने में बने एक बल्ब की 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता 0.05 हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से

(i) एक भी नहीं
(ii) एक से अधिक नहीं
(iii) एक से अधिक
(iv) कम से कम एक 150 दिनों से उपयोग के बाद फ्यूज हो जायेंगे।

हल : बल्ब के 150 दिनों बाद फ्यूज होने की प्रायिकता $p = 0.05$
बल्ब के 150 दिनों बाद फ्यूज न होने की प्रायिकता
$q = 1 - p = 1 - 0.05 = 0.95$

(i) P(एक भी बल्ब फ्यूज न हो) = $P_{(x = 0)} = (0.95)^5$

(ii) P(एक से अधिक न हो) = P(o) + P(1)
$= (0.95)^5 + {}^5C_1 (0.95) (0.05)$
$= (0.95)^4 [0.95 + 5 \times 0.05] = (0.95)^4 [0.95 + 0.25]$
$= (0.95)^4 \times 1.2$
$= 1.2(0.95)^4$

(iii) P(एक से अधिक) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)
= P(o) + (1) + (2) + P(3) + P(4) + (5) – [P(o) + P(1)]
$= 1 - (0.95)^4 \times 1.2$ [भाग (ii) से]

(iv) P(कम से कम एक) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)
= P(o) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) – P(o)
$= 1 - (0.95)^5$ [भाग (i) से]

प्रश्न 8. एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न है जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर है जिनमें से केवल एक ही सही उत्तर हैं इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा?

हल : तीन सम्भावित उत्तरों में से एक उत्तर सही है।
सही उत्तर की प्रायिकता = $p = \frac{1}{3}$
∴ गलत उत्तर की प्रायिकता = $q = 1 - p$
$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

चार या अधिक प्रश्नों में सही उत्तर की प्रायिकता

$$= p(4) + p(5)$$
$$= {}^5C_4\, p^4.q + {}^5C_5\, p^5$$
$$= 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^5$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^5 (10 + 1)$$
$$= \frac{11}{3^5} = \frac{11}{243}.$$

प्रश्न 9. एक सत्य-असत्य प्रकार के 20 प्रश्नों वाली परीक्षा में माना एक विद्यार्थी एक न्यायय एक सिक्के को उछालकार प्रश्न का उत्तर निर्धारित करता है। यदि पासे पर चित प्रकट हो, तो वह प्रश्न का उत्तर 'सत्य' देता है और यदि पट प्रकट हो, तो 'असत्य' लिखता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह कम से कम 12 प्रश्नों का सही उत्तर देता है।

हल : p(सिक्का उछालने पर चित आता है)
$p = \frac{1}{2}$
p (सिक्का उछालने पर चित नहीं आता है)
q = 1 – p

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

अतः सत्य उत्तर लिखने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

तथा असत्य उत्तर लिखने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

p(कम से कम 12 प्रश्नों के उत्तर सत्य है)
$= p(12) + p(13) + p(14) + p(15) + p(16 + p(17) + p(18)$
$= {}^{20}C_{12} + {}^{20}C_{13} + {}^{20}C_{14} + {}^{20}C_{16} + {}^{20}C_{17} + ... + {}^{20}C_{20}$

प्रश्न 10. एक थैले में 10 गेंदें हैं जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से अंक लिखा है। यदि थैले से 4 गेंदें उत्तरोत्तर पुनः वापस रखते हुए निकाली जाती है, तो इसी क्या प्रायिकता है कि उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 नहीं लिखा हो?

हल : एक थैले में 10 गेंदें हैं जिन पर 0 से 9 तक अंकों में से एक अंक लिखा है।
0 अंक वाली एक गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता
p = $\frac{1}{10}$= 0.1
गेंद पर 0 न लिखा होने की प्रायिकता
q = 1 – p
= 1 – 0.1
= 0.9
अब 4 गेंद निकाली गई हैं।
उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 लिखा होने की प्रायिकता

$$= (0{\cdot}9)4 = \left(\frac{9}{10}\right)^4$$

प्रश्न 11. 52 ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोतर प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) सभी 5 पत्ते हुकुम के हो ?
(ii) केवल 3 पत्ते हुकुम के हो ?
(iii) एक भी पत्ता हुकुम का नहीं हो ?

हल : एक ताश की गड्डी में कुल 52 पत्ते है उनमें से 13 पत्ते हुकुम के हैं।
एक हुकुम का पत्ता खचने की प्रायिकता

$$P = \frac{^{13}C_1}{^{52}C_1}$$

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

एक हुकुम का पत्ता न खींचने की प्रायिकता
q = 1 – p
(i) P(सभी 5 पत्ते हुकुम के हों)

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

(ii) P(केवल 3 पत्ते हुकुम के हों)

$$= {}^5C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= {}^5C_3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{64}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{64}$$

$$= \frac{10 \times 9}{16 \times 64}$$

$$= \frac{45}{8 \times 64} = \frac{45}{512}$$

(iii) P(एक भी पत्ता हुकुम का नहीं है)

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$= \frac{243}{1024}$$

प्रश्न 12. माना चर X का बंटन B(6, $\frac{1}{2}$) द्विपद बंटन हैं सिद्ध करो कि X = 3 अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है।

हल : दिया है, B(6, $\frac{1}{2}$) द्विपद बंटन है।

$$\therefore B\left(6, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6$$

$$\because \qquad p = \frac{1}{2},\ q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6 = {}^6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}^6C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 [{}^6C_0 + {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 [{}^6C_0 + {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_2 + {}^6C_1 + {}^6C_0]$$

$$[\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$$

उपर्युक्त से ${}^6C_0$, ${}^6C_1$, ${}^6C_2$, ${}^6C_3$ में उच्चतम मान ${}^6C_3$ है।

इस प्रकार ${}^6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = P(X = 3)$ अधिकतम होगा।

अत: $P(X = 3)$ अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है।

प्रश्न 13. पासों के एक जोड़ को 4 बार उछाला जाता है। यदि पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक होना सफलता मानी जाए तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : पासे के एक जोड़ को उछालने पर
n(S) = 6 x 6
= 36
1 जोड़ पासे से 6 द्विक बन सकते हैं।
[(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)]

∴ पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक प्राप्त होने की प्रायिकता

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

तथा द्विक प्राप्त न होने की प्रायिकता

$$q = 1 - p$$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

पासे के जोड़े को चार बार उछला जाता है।

$\therefore \quad n = 4$

$\therefore$ r सफलताओं की प्रायिकता $= {}^4C_r\, q^{4-r}\, p^r$

$\therefore$ 2 सफलताओं की प्रायिकता $= {}^4C_2\, q^2 p^2$

$$= {}^4C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{25}{36} \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{25}{6 \times 36} = \frac{25}{216}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. दो घटनाएँ A तथा B परस्पर स्वतंत्र कहलाती है यदि

(a) P(P(A)) = P(B)
(b) P(A) + P(B) = 1
(c) P($\overline{AB}$) = [1 – P(A)] [1 – P(B)]
(d) A और B परस्पर अपवर्जी है।

हल : उत्तर (c) सही है क्योंकि
दिया है A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।
अतः P(A) = 1 – P($\overline{A}$)
तथा P(B) = 1 – P($\overline{B}$)
∵ P($\overline{AB}$) = P($\overline{A}$) x P($\overline{B}$)
= [1 – P(A)][1 – P(B)]

प्रश्न 2. पासों के एक जोड़े को उछालने पर प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य अंक प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है ?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 0

(c) $\frac{1}{36}$ (d) $\frac{1}{12}$

हल : एक पासे पर सम अभाज्य संख्या 2 प्राप्त करने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$
दूसरे पासे पर सम अभाज्य संख्या 2 प्राप्त करने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$
अतः पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या 2 आने की प्रायिकता
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
अत: विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 3. यदि A और B ऐसी घटनाएँ है कि A⊂B तथा P(B) ≠ 0 तब निम्न में से कौन-सा कथन सत्य है।

(i) $P\left(\frac{A}{B}\right) < P(A)$ (ii) $\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$

(iii) $P\left(\frac{A}{B}\right) = P\frac{(B)}{(A)}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

हल :

∵ A⊂C = A∩B
= P(A ∩ B)
= P(A)

$$\therefore \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(B)}$$

किन्तु $\quad P(B) \leq 1$

$$\therefore \quad \frac{1}{P(B)} \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$$

अत: विकल्प (iii) सही है।

प्रश्न 4. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते याद्दच्छया निकाले जाते हैं। माना याद्दच्छिक चर X, इक्कों की संख्या को निरूपति करता है, तब X का माध्य ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{5}{13}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{37}{221}$ (iv) $\frac{2}{13}$

हल : ताश की एक गड्डी में से यद्दच्छया दो पत्ते खीचे जाते हैं।
दोनों पत्त इक्के न होने की कुल विधियाँ

$$= {}^{48}C_2 = \frac{48 \times 47}{2} = 1128$$

52 पत्तों में से 2 पत्ते खींचे जा सकने की विधियाँ

$$= {}^{52}C_2 = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$$

$\therefore$ इक्का न खींचने की प्रायिकता $= \frac{1128}{1326}$

दूसरे ${}^{4}C_1 \times {}^{48}C_1$ में एक इक्का और एक इक्का न होने की विधियाँ $= {}^{4}C_1 \times {}^{48}C_1 = 4 \times 48 = 192$

$\therefore$ एक इक्का होने और एक इक्का न होने की प्रायिकता $= \frac{192}{1326}$

तीसरे दो इक्कों की संख्या प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{6}{1326}$

$\therefore$ प्रायिकता बंटन

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1128}{1326}$	$\frac{192}{1326}$	$\frac{6}{1326}$

$$\therefore \quad \Sigma X_i = \Sigma p_i x_i$$

$$= \frac{1128}{1326} \times 0 + \frac{192}{1326} \times 1 + \frac{6}{1326} \times 2$$

$$= \frac{192}{1326} + \frac{12}{1326}$$

$$= \frac{192+12}{1326}$$

$$= \frac{204}{1326} = \frac{2}{13}$$

अतः सही विकल्प (iv) है।

प्रश्न 5. एक यादृच्छिक चर X मान 0, 1, 2, 3 ग्रहण करता है। चर X का माध्य 1.3 हैं। यदि P(x = 3) = 2P(X = 1) तथा P(X = 2) = 0.3 हो, तो P(X = 0) है।

(i) 0.2
(ii) 0.4
(iii) 0.3
(iv) 0.1

हल : माना P(X = 3) = 2p(X = 1) = p

अतः p(X = 0) = x हैं।

बारम्बारता बंटन इस प्रकार होगा।

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$2p$

$$\therefore \qquad \Sigma X_i = \text{माध्य} = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}$$

$$\Rightarrow \qquad 1\cdot3 = \frac{x \times 0 + 1 \times 1 \times p + 2 \times 0\cdot3 + 3 \times 2p}{1}$$

⇒ 1.3 = 0 + p + 0.6 + 6p
⇒ 7p + 0.6 = 1.3
⇒ 7p = 1.3 – 0.6
⇒ 7p = 0.7
⇒ p = $\frac{0.7}{7}$= 0.1
चूँकि x + 2 + 0.3 + 2p = 1
∴ x = 1 – 0.3 – 3 x 0.1
= 1 – 0.6
= 0.4
∴ P(X = 0) = x = 0.4
अतः सही विकल्प (ii) है।

प्रश्न 6. एक छात्रा के धावक होने की प्रायिकता है। 5 छात्राओं में से 4 छात्राओं की धावक होने की प्रायिकता है :

(i) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)$ **(i)** $^5c_4\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$

(iii) $^5c_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)$ **(d) इनमें से कोई नहीं**

हल : एक छात्रा के धावक होने की प्रायिकता = $\frac{4}{5}$
∴ एक छात्रा के धावक न होने की प्रायिकता = $1 - \frac{4}{5}$
= $\frac{1}{5}$
∴ छात्राओं के धावक होने की प्रायिकता बंटन
= $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)^5$
∴ 4 छात्राओं के धावक होने की प्रायिकता

$= {}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)$

$= {}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)$

अत: सही विकल्प (iii) है।

प्रश्न 7. एक बक्से में 100 वस्तुएँ है जिसमें से 10 खराब हैं। 5 वस्तुओं के नमूने में से, किसी भी वस्तु के खराब नहीं होने का प्रायिकता

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **(ii)** 10^{-1}

(iii) $\frac{9}{10}$ **(iv)** $\left(\frac{9}{10}\right)^5$

हल : बक्से में वस्तुओं की संख्या = 100

खराब चीजों की संख्या = 10

∴ चीजों खराब होने की प्रायिकता = $\frac{10}{100}$

= $\frac{1}{10}$

∴ चीजे खराब न होने की प्रायिकता = $1 - \frac{1}{10}$

= $\frac{9}{10}$

∴ 5 वस्तुओं के नमूने में से किसी भी वस्तु के खराब न होने की प्रायिकता

= $\left(\frac{9}{10}\right)^5$

अतः सही विकल्प (iv) है।

प्रश्न 8. एक दंपति के दो बच्चे है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) दोनों बच्चे लड़के है, यदि यह ज्ञात है कि बड़ा लड़का है।
(ii) दोनों बच्चे लड़कियाँ है, यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।
(iii) दोनों बच्चे लड़के है, यदि यह ज्ञात है कि कम से कम एक बच्चा लड़का है।

हल : (i) S= {MM, MF, FM, FF} = 4

A = दोनों बच्चे लड़के हैं।

= {M, M}

B = बड़ा बच्चा लड़का है।

= {MM, MF}

∴ A∩B = {M, M}

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

तथा $$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

P(दोनों बच्चे लड़के है, यदि बड़ा बच्चा लड़का है)

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(ii) माना A = दोनों बच्चे लड़की हैं।
= {FF}

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

B = **बड़ा बच्चा लड़की है**

$$= \{FF, FM\}$$

$$\therefore \quad A \cap B = \{FF\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

तथा $$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

P(दोनों बच्चे लड़की है यदि बड़ा बच्चा लड़की है)

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

(iii) माना A = दोनों बच्चे लड़के हैं।
= {MM}
B = कम से कम एक बच्चा लड़का है।

= {MF, FM, MM}
∴ A∩M = {MM}

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

प्रश्न 9. 1 से 11 तक के पूर्णाकों में से याद्दच्छया दो पूर्णाकों को चुना गया है। दोनों पूर्णाकों के विषय होने की प्रायिकता ज्ञात करो यदि यह ज्ञात है कि दोनों प्रर्णाकों का योग सम है।

हल : 1 से 11 तक की संख्याओं में 3 सम संख्यायें तथा 6 विषम संख्यायें हैं।
माना A = 1 से 11 तक पूर्णांकों में दो विषय संख्यायें चुनने की । घटना
B = दो संख्यायें चुनने की घटना जिनका योग सम हो

$n(A)$ = 6 विषम संख्याओं में से 2 विषम संख्याओं के चुनने की विधियाँ = $^6C_2$

$n(B)$ = 1 से 11 तक की संख्याओं में से 2 संख्यायें चुनने की घटना जिनका योग सम हो = $^5C_2 + {}^5C_2$

∴ $n(A \cap B)$ = दो विषम संख्यायें चुनने के तरीके जिनका योग सम हो = $^6C_2$

माना प्रतिदर्श समष्टि S है तो

$n(S)$ = 11 संख्याओं में से 2 संख्यायें चुनने की विधियाँ

$= {}^{11}C_2$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}^6C_2}{{}^{11}C_2}$$

$$= \frac{\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 6-2}}{\frac{\lfloor 11}{\lfloor 2 \lfloor 11-2}} = \frac{\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4}}{\frac{\lfloor 11}{\lfloor 9}}$$

$$= \frac{\lfloor 6 \times \lfloor 9}{\lfloor 4 \times \lfloor 11} = \frac{6 \times 5 \times \lfloor 4 \times \lfloor 9}{\lfloor 4 \times 11 \times 10 \times \lfloor 9}$$

$$= \frac{3}{11}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{{}^5C_2 + {}^6C_2}{{}^{11}C_2}$$

$$= \frac{\frac{5 \times 4 \times \lfloor 3}{2 \times 1 \times \lfloor 3} + \frac{6 \times 5 \times \lfloor 4}{2 \times \lfloor 4}}{\frac{11 \times 10 \times \lfloor 9}{2 \times 1 \times \lfloor 9}}$$

$$= \frac{10+15}{55} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{{}^6C_2}{{}^{11}C_2} = \frac{3}{11}$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{3/11}{5/11} = \frac{3}{5}$$

प्रश्न 10. एक आण्विक संरचना के दो सहायक निकाय A तथा B है। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात है –

P(A का असफल होना) = 0.2
P(केवल B का असफल होना) = 0.15
P(A तथा B का असफल होना) = 0.15

(i) A के असफल होने की प्रायिकता जबकि B असफल हो चुका हो।
(ii) केवल A के असफल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : माना घटनाएँ A असफल तथा B असफल क्रमशः $\overline{A}$ और $\overline{B}$ से प्रदर्शित हैं। तब हम पाते हैं कि = 0.2 तथा P(A तथा B सफल)

$= 0{\cdot}15$ अर्थात् $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{\cdot}15$

$\therefore$ $P(\overline{B}$ अकेला असफल$) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{\cdot}15$

अब $\quad 0{\cdot}15 = P(\overline{B}) - 0{\cdot}15$

$\Rightarrow \quad P(\overline{B}) = 0{\cdot}30$

(i) $P(A$ असफल$/B$ असफल हो चुकी है$)$

$$= P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(B)} = \frac{0{\cdot}15}{0{\cdot}30} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$$

(ii) $P(\overline{A}$ अकेला A असफल$) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{\cdot}20$
$- 0{\cdot}15 = 0{\cdot}05$

प्रश्न 11. माना A तथा B दो स्वतन्त्र घटनाएँ है। इन दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता है $\frac{1}{8}$ तथा नहीं घटित होने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।
P(A) तथा P(B) ज्ञात कीजिए।

हल : माना P(A) = x
और P(B) = y
दिया है : A और B स्वतंत्र घटनायें हैं अतः
P(A ∩ B) = P(A) × P(B)

$$\frac{1}{8} = xy \quad \ldots(1)$$

और $\quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P($दोनों के घटित नहीं होने की$)$

$$= \frac{3}{8}$$

$\because$ A और B स्वतंत्र घटनायें हैं अत: और भी स्वतंत्र घटनायें है।

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{8} = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{8} = (1 - x)\,(1 - y) \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) से,

$$xy = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ $$y = \frac{1}{8x}$$

y का यह मान समी. (2) में रखने पर

$$1 - x - y + xy = \frac{3}{8}$$

$$1 - x - \frac{1}{8x} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$8(x - x^2) - 1 + x = 3x$

$8x - 8x^2 - 1 + x = 3x$

$8x^2 - 6x + 1 = 0$

$8x^2 - 4x - 2x + 1 = 0$

$4x(2x - 1) - 1(2x - 1) = 0$

$(2x - 1)(4x - 1) = 0$

$2x - 1 = 0$

$\therefore$ $$x = \frac{1}{2}$$

यदि $$4x - 1 = 0$$

$\therefore$ $$x = \frac{1}{4}$$

समी. (1) से जब $x = \frac{1}{2}$ तो

$$y = \frac{1}{8x} = \frac{1}{8 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

तथा जब $x = \frac{1}{4}$ हो तो

$$y = \frac{1}{8 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

अतः $P(A) = \frac{1}{2}$ तो $P(B) = \frac{1}{4}$

या $P(A) = \frac{1}{4}$ तो $P(B) = \frac{1}{2}$

प्रश्न 12. अनिल 60% स्थितियों में सत्य कहता है तथा आनन्द 90% स्थितियों में सत्य कहता है। किसी कथन पर उनके एक दुसरे से विरोधाभासी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

P(दोनों में विरोधाभाष हो)

$$= P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$$

$$= P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{3}{50} + \frac{18}{50}$$

$$= \frac{21}{50} = 0{\cdot}42$$

प्रश्न 13. तीन व्यक्ति A, B वे C बारी-बारी से एक सिक्का उछालत है। जिसके पहले चित आता है वही जीतता है। यह मानते हुए कि खेल अनिश्चित काल तक जारी रहता है। यदि A खेलना आरंभ करता हो तो उनकी जीत की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

हल : एक सिक्के को उडालने पर चित्त आने की सम्भावना = $\frac{1}{2}$

∵ A खेलना प्रारम्भ करता है अतः A क्रमश: पहले, चौथे, साँतवे...........उछाल पर जीत सकता है।

अतः A के जीतने की सम्भावनायें

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{2} \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} \quad \left[\because \text{ गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग} = \frac{a}{1 - r^n}\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\times\frac{8}{7} = \frac{4}{7}$$

B के जीतने की सम्भावनायें

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}$$

C के जीतने की सम्भावनायें

$$= 1-\left(\frac{4}{7}+\frac{2}{7}\right) = 1-\frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ की प्रायिकता} = \frac{4}{7} \\ B \text{ की प्रायिकता} = \frac{2}{7} \\ C \text{ की प्रायिकता} = \frac{1}{7} \end{array}\right\}$$

प्रश्न 14. अगले 25 वर्षों में एक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता है तथा उकसी पत्नि के उन्हीं 25 वर्षों जीवित रहने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है। प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए जबकि

(i) दोनों 25 वर्ष तक जीवित रहे।
(ii) दोनों में से कम से कम एक 25 वर्षों तक जीवित रहे।
(iii) केवल पत्नि 25 वर्ष तक जीवित रहे।

हल : माना व्यक्ति के 25 साल तक जीवित रहने की घटना A तथा पत्नी के 25 साल तक जीवित रहने की घटना B है।
अतः स्पष्ट है कि दोनों घटनायें स्वतंत्र हैं।
अत: (i) दोनों के 25 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता
$= P(A \cap B)$

$\because$ P(A ∩ B) = P(A).P(B)

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

(ii) कम से कम एक के 25 साल तक जीवित रहने की प्रायिकता

$$= P(A \cup B)$$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{16 + 15 - 12}{20} = \frac{19}{20}$$

(iii) केवल पत्नी के जिन्दा होने की प्रायिकता

$$= P(\bar{A}) \times P(B)$$

$$= [1 - P(A)] \times P(B)$$

$$= \left[1 - \frac{4}{5}\right] \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$$

प्रश्न 15. बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़की और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के तथा 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह में से यादृच्छया एक बच्चे का चयन किया जाता है। इस प्रकार चुने गए तीनों बच्चों में 1 लड़की तथा 2 लड़कों के होने कि प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना बच्चों के तीन समूह क्रमशः A, B और C हैं। अतः एक लड़की तथा 2 लड़के यादृच्छया निम्न तरीकों से चुने जा सकते हैं :

(i) समूह A से एक लड़का, समूह B से एक लड़का तथा समूह C से एक लड़की।
अतः इस घटना की प्रायिकता

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$$

(ii) समूह A से 1 लड़का, समूह B से एक लड़की और समूह C से 1 लड़का।
अतः इस घटना की प्रायिकता

$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{32}$

(iii) समूह A से 1 लड़की, समूह B से एक लड़का और समूह C से 1 लड़का।
अतः इस घटना की प्रायिकता

$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{9}{32}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता

$= \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32}$

$= \frac{1+3+9}{32}$

$= \frac{13}{32}$

प्रश्न 16. प्रथम थैले में 3 काली और 4 सफेद गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 3 सफेद गेंद है। एक अनमिनत पासे को उछाला जाता है। यदि पासे पर 1 या 3 का अंक प्रकट होता है तब प्रथम थैले में से एक गेंद निकाली जाती है तथा यदि अन्य अंक प्रकट होता है। तब द्वितीय थैले में से एक गेंद निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात करो।।

हल : पहले थैले में गेंदों की कुल संख्या 3 + 4 = 7, जिनमें 3 काली तथा 4 सफेद हैं।
तथा दूसरे थैले में गेंदों की कुल संख्या 4 + 3 = 7, जिनमें 4 काली तथा 3 सफेद हैं।
पास को उछालने पर कुल परिणाम
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
माना अंक 1 तथा 3 आने की घटना = E1
तब, P(E1) = $\frac{2}{6}$
तथा अंक 2, 4, 5, 6 आने की घटना = E2
तब, P(E2) = $\frac{4}{6}$

माना काली गेंदे आने की घटना B है तब

$$P(B) = P(E_1) \cdot P\left(\frac{B}{E_1}\right) + P(E_2) \cdot P\left(\frac{B}{E_2}\right)$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{7}$$

[$P = \left(\frac{B}{E_1}\right)$ (पहले थैले से काली गेंद निकालने की प्रायिकता

इसी प्रकार $P\left(\frac{B}{E_2}\right) = \frac{4}{7}$]

$$= \frac{6}{42} + \frac{16}{42} = \frac{22}{42}$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $\frac{11}{21}$ है।

प्रश्न 17. किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया हैं वहाँ हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.80 तथा 0.32 है। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : हड़ताल होने की प्रायिकता P(A) = 0.65
हड़ताल न होने की प्रायिकता = 1 – 0.65 = 0.35
माना E समय पर कार्य समाप्त होने की घटना है तब
हड़ताल होने की स्थिति में कार्य पूर्ण होने की प्रायिकता
$P\left(\frac{E}{A}\right) = 0.32$
तथा हड़ताल न होने की स्थिति में कार्य पूर्ण होने की प्रायिकता
$P\left(\frac{E}{\bar{A}}\right) = 0.80$
निर्माण कार्य के समायनुसार पूर्ण होने की प्रायिकता

$$P(E) = P(A) \cdot P\left(\frac{E}{A}\right) + P(\bar{A}) \cdot P\left(\frac{E}{\bar{A}}\right)$$

= 0.65 x 0.32 + 0.35 x 0.80
= 0.208 + 0.280
अतः अभीष्ट प्रायिकता = 0:488 है।

प्रश्न 18. प्रथम थैले में 8 सफेद तथा 7 काली गेंद है जबकि द्वितीय थैले में 5 सफेद और 4 काली गेंदे है। प्रथम थैले में से एक गेंद का यादृच्छया चयन किया जाता है और उसे द्वितीय थैले की गेंदों के

साथ मिला दिया जाता है। तब इसमें से एक गेंद याद्दच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद सफेद है।

हल : दिया है : I में 8 सफेद और 7 काली तथा II में 5 सफेद और 4 काली गेंद है।
एक गेंद याद्दच्छया पहले थैले में दूसरे में रखी जाती है।
अतः एक सम्भावना यह है कि I में से निकाली गेंद माना सफेद
तो I थैले में से सफेद गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{8}{15}$
अब II थैले में सफेद गेंदों की संख्या = 5 + 1 = 6
अतः II में से सफेद गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{6}{10}$
अतः जब ये दोनों घटना साथ-साथ होती है तो
प्रायिकता

$$= \frac{8}{15} \times \frac{6}{10} = \frac{48}{150}$$

दूसरी संभावना यह है कि थैले में से काली गेंद निकाली गई है
तो I थैले में से काली गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{7}{15}$
अब II थैले में काली गेंद की संख्या = 4 + 1 = 5
अत: सफेद गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{5}{10}$
दोनों घटनाओं के एक साथ होने की प्रायिकता

$$= \frac{7}{15} \times \frac{5}{10} = \frac{35}{150}$$

∵ दोनों घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं अत: केवल एक ही घटना हो सकती है।
अतः अभीष्ट प्रायिकता

$$= \frac{48}{150} + \frac{35}{120}$$

$$= \frac{83}{150}$$

प्रश्न 19. एक परीक्षा में एक बहुविकल्पीय प्रश्न जिसके चार विकल्प है का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो अनुमान लगाता है या नकल करता है या प्रश्न का उत्तर जानता है। विद्यार्थी के द्वारा अनुमान लगाने तथा नकल करने की प्रायिकता क्रमशः 1/3 व 1/16 हैं। उसके द्वारा सही उत्तर दिए जाने की प्रायिकता 1/8 है। जबकि यह ज्ञात है कि उसने नकल की है। विद्यार्थी के द्वारा याद्दच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है।

हल : विद्यार्थी के द्वारा अनुमान लगाने की प्रायिकता,
P(A) = $\frac{1}{3}\frac{1}{3}$
तथा विद्यार्थी के द्वारा नकल करने की प्रायिकता
P(B) = $\frac{1}{6}$

विद्यार्थी के द्वारा उत्तर जानने की प्रायिकता,

$$P(C) = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$$

$$= \frac{6-2-1}{6}$$

$$= \frac{6-3}{6}$$

$$= \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

माना E उत्तर के सही होने की घटना है तब

$$P\left(\frac{E}{A}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{E}{B}\right) = \frac{1}{8}$$

तथा $$P\left(\frac{E}{C}\right) = 1$$

विद्यार्थी के द्वारा प्रश्न का उत्तर जानने की प्रायिकता जबकि उसने उत्तर दिया है।

$$P\left(\frac{C}{E}\right) = \frac{P(C)\cdot P\left(\frac{E}{C}\right)}{P(A)\cdot P\left(\frac{E}{A}\right)+P(B)\cdot P\left(\frac{E}{B}\right)+P(C)\cdot P\left(\frac{E}{C}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{29}{48}} = \frac{1}{2}\times\frac{48}{29} = \frac{24}{29}$$

प्रश्न 20. एक पत्र दो शहरों TATANAGAR या CALCUTTA में से किसी एक शहर से आया हुआ है। पत्र के लिफाफे पर केवल दो क्रमागत अक्षर TA दिखाई देते है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्र
(i) CALCUTTA
(ii) TATANAGAR से आया हुआ है।

हल : माना E1 = पत्र Calcutta से आने की घटना
E2 = पत्र Tatanagar से आने की घटना
A = दो क्रमशः लिखे अक्षर TA लिफाफे पर होने की घटना

तब $$P(E_1) = \frac{1}{2},\ P(E_2) = \frac{1}{2}$$

यदि E_1 घटित होती है तब अर्थात् पत्र CALCUTTA से आया है अर्थात्

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{1}{7}$$

[चूँकि *TA* के एक अक्षर मानेंगे कुल अक्षर 7 होंगे]

यदि E_2 घटित होती है अर्थात् पत्र TATANAGAR से आया है, अर्थात्

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{2}{8}$$

अब बेज प्रमेय से

(i) $$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}} = \frac{4}{11}$$

(ii) $$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}} = \frac{7}{11}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता (i) $\frac{4}{11}$ तथा (ii) $\frac{7}{11}$ है।

प्रश्न 21. एक निर्माता के पास तीन यन्त्र संचालक A, 1% त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ उत्पादित करता है, जबकि अन्य दो संचालक B तथा C क्रमशः 5% तथा 7% टिपूर्ण वस्तुएँ उत्पादित करता है। A कार्य पर कुल समय का 50% लगाता है, B कुल समय का 30% तथा C कुल समय का 20% लागत है। यदि एक त्रुटिपूर्ण वस्तु उत्पादित है तो इस की क्या प्रायिकता है यह यंत्र A से उत्पादित है ?

हल : माना E1 = मशीन A द्वारा उत्पादित सामग्री,
E2 = मशीन B द्वारा उत्पादित सामग्री,
E3 = मशीन C द्वारा उत्पादित सामग्री,
तो E1, E2 तथा E3 परस्पर अपवर्जी तथा असंयुक्त घटनाएँ हैं।

तब $P(E_1) = \frac{50}{100}$, $P(E_2) = \frac{30}{100}$ व $P(E_3) = \frac{20}{100}$

माना E : चयनित सामग्री खराब प्राप्त हुई है तब

$P\left(\frac{E}{E_1}\right) = \frac{1}{100}$, $P\left(\frac{E}{E_2}\right) = \frac{5}{100}$ तथा $P\left(\frac{E}{E_3}\right) = \frac{7}{100}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता,

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P\left(\frac{E}{E_1}\right)P(E_1)}{P(E/E_1)P(E_1) + P\left(\frac{E}{E_2}\right)P(E_2) + P\left(\frac{E}{E_3}\right)P(E_3)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{100}\right)\times\left(\frac{50}{100}\right)}{\left(\frac{1}{100}\right)\times\left(\frac{50}{100}\right)+\left(\frac{5}{100}\right)\left(\frac{30}{100}\right)+\left(\frac{7}{100}\right)\left(\frac{20}{100}\right)}$$

$$= \frac{50}{50+150+140} = \frac{50}{340} = \frac{5}{34}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{5}{34}$ है।

प्रश्न 22. किसी यादृच्छिक चर X का प्रायकिता बंटन P(X) निम्न है।

$$P(x) = \begin{cases} k \text{ यदि } x = 0 \\ 2k \text{ यदि } x = 1 \\ 3k \text{ यदि } x = 2 \\ 0 \text{ अन्यथा} \end{cases}$$

(i) k का मान ज्ञात कीजिए।
(ii) P(X < 2), P(X ≤ 2) तथा (X ≥ 2) का मान ज्ञात करो।

हल : 'X' का प्रायिकता बंटन प्रश्नानुसार

X	0	1	2	अन्यथा
$P(X)$	k	$2k$	$3k$	0

(i) जब $\Sigma P(X) = 1$ तो,

$$P(0) + P(1) + P(2) = 1$$

$$\Rightarrow \quad k + 2k + 3k = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{6}$$

(ii) $$P(X < 2) = P(0) + P(1) = k + 2k$$

$$= 3k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$= k + 2k + 3k = 6 \times \frac{1}{6} = 1$$

तथा $$P(X \geq 2) = P(2) = 3k = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 23. एक यादृच्छिक चर X सभी ऋणेतर पूर्णांक मान ग्रहण कर सकता है तथा चर X की मान r के ग्रहण करने की प्रायिकता के समानुपाती है जहाँ 0 < ∝ < 1 तब P(X = 0) ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है

$$P(X=r) \propto \frac{1}{\alpha^r}$$

$$\Rightarrow \quad P(X=r) = k \times \frac{1}{\alpha^r}$$ जहाँ (k कोई नियतांक है)

$$\Rightarrow \quad P(r=0) = k \cdot \frac{1}{\alpha^\circ}$$

$$P(r=1) = \frac{k}{\alpha}$$

$$P(r=2) = \frac{k}{\alpha^2}$$

$$P(r=3) = \frac{k}{\alpha^3}$$

....

....

परन्तु $P(r=0) + P(r=1) + P(r=2) + \ldots = 1$

$$\therefore \quad \frac{k}{\alpha^\circ} + \frac{k}{\alpha} + \frac{k}{\alpha^2} + \ldots = 1$$

$$k\left[1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \ldots\right] = 1$$

$$k\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = 1$$

$$\therefore \quad k = (1-\alpha)$$

$\therefore P(X=r) = k\frac{1}{\alpha^r}$ में k का मान रखने पर

$$P(X=r) = \frac{(1^r - \alpha)}{\alpha^r}$$

$$\therefore \quad P(X=0) = \frac{1-\alpha}{\alpha^\circ}$$

$$\frac{1-\alpha}{1} = 1-\alpha$$

$$\because \quad \alpha^\circ = 1, \ \therefore P(X=0) = 1-\alpha$$

प्रश्न 24.
माना X एक याद्दच्छिक चर है जो मान x1, x2, x3, x4, इस प्रकार ग्रहण करता है कि

2P(X = x1) = 3P(X = x2) = 4P(X = x3) = 5P(X = x4)
चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : 2P(X = x1) = 3P(X = x2) = 4P(X = x3) = 5P(X = x4)
अतः माना
2P(X = x1) = 3P(X = x2) = 4P(X = x3) = 5P(X = x4) = k

$$\Rightarrow \quad P(X = x_1) = \frac{k}{2}$$

$$P(X = x_2) = \frac{k}{3}$$

$$P(X = x_3) = \frac{k}{4}$$

$$P(X = x_4) = \frac{k}{5}$$

$$\Rightarrow P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1$$

$$\therefore \quad \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 1$$

$$\frac{30k + 20k + 15k + 12k}{60} = 1$$

$$\frac{77k}{60} = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{60}{77}$$

$$P(X = x_1) = \frac{k}{2} = \frac{60}{2 \times 77} = \frac{30}{77}$$

$$P(X = x_2) = \frac{k}{3} = \frac{60}{3 \times 77} = \frac{20}{77}$$

$$P(X = x_3) = \frac{k}{4} = \frac{60}{4 \times 77} = \frac{15}{77}$$

$$P(X = x_4) = \frac{k}{5} = \frac{60}{5 \times 77} = \frac{12}{77}$$

∴ प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार है—

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X)$	$\frac{30}{77}$	$\frac{20}{77}$	$\frac{15}{77}$	$\frac{12}{77}$

प्रश्न 25. एक न्याय्य सिक्के को एक चित्त अथवा पाँच पट तक उछाला जाता है। यदि x सिक्के की उछालों की संख्या को निरूपित करता हो तो X का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : x सिक्के की उछालों की संख्या सिक्के को एक चित्त या पाँच पर आने तक उछाला जाता है। अतः स्पष्ट है कि X = 1 पर यदि चित्त आता है तो उछाल बन्द कर दी जायेगी और यदि पट आता है तो दूसरी बार उछाला जायेगा। अतः स्पष्ट है कि यह क्रिया अधिकाधिक 5 पट आने की तक होगी।
∴ X के मान 1, 2, 3, 4 होंगे।
S = H, TH, TTH, TTTH या TTTTH
अतः पहली उछाल पर चित्त या पट आने की प्रायिकता

$$P(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$$

अतः प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार होगा।

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

$$\therefore \quad \text{माध्य}=\sum_{i=1}^{5} p_i x_i$$

$$=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{32}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{32}$$

$$=\frac{16+16+12+8+5}{32}$$

$$=\frac{57}{32}=1\cdot 8$$