ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1211/414/છ, તા. 15-9-2011 થી-મંજૂર

ગણિત

ધોરણ 11

(સિમેસ્ટર II)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે.
આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

લેખન

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી રાજીવભાઈ ચોક્સી
ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી વિપુલ આર. શાહ

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ
શ્રી રાજીવભાઈ ચોક્સી
ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી વિપુલ આર. શાહ

સમીક્ષા

ડૉ. પી. આઇ. અંધારિયા
શ્રી રવિનારાયણ બોરાણા
ડૉ. કૃષ્ણકુમાર એમ. મહેતા
શ્રી આર. ડી. મોઢા
શ્રી જયંતીભાઈ જે. પટેલ
શ્રી નરસિંહભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી શૈલેષભાઈ શેઠ
શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી નવરોજભાઈ ગાંગાણી
શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક

ચિત્રાંકન

શ્રી મનીષ પી. પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11 (સિમેસ્ટર II)** ના **ગણિત** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે. મૂળ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી તથા ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત
નિયામક
તા.05-08-2015

સુજીત ગુલાટી IAS
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2011, પુનઃમુદ્રણ : 2012, 2013, 2014, 2015

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી
ડૉ.ભરત પંડિત, નિયામક

મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

*ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

1. ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત 1
2. સંકર સંખ્યાઓ 22
3. દ્વિપદી પ્રમેય 48
4. સરવાળાનાં સૂત્રો અને અવયવ સૂત્રો 62
5. ગુણિત અને ઉપગુણિત સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો 91
6. ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો અને ત્રિકોણના ગુણધર્મો 111
7. શ્રેણી અને શ્રેઢી 130
8. શાંકવો 160
9. ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ 200
10. લક્ષ 225
11. વિકલન 256

- જવાબો 274
- પારિભાષિક શબ્દો 282

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

ધોરણ 11 ગણિતના સિમેસ્ટર I ના પુસ્તકમાં અભ્યાસક્રમની રચના તથા NCERT ના અભ્યાસક્રમને અનુરૂપ પુસ્તક લખવા વિશેની પૂર્વભૂમિકા તો રચાઈ ગઈ છે.

આ પુસ્તક પણ સૌપ્રથમ અંગ્રેજીમાં લખવામાં આવ્યું તથા અંગ્રેજી માધ્યમમાં શીખવતા શિક્ષકો તથા અધ્યાપકો દ્વારા તેનું પરામર્શન કરવામાં આવ્યું. નિષ્ણાતોનાં સૂચનો અનુસાર આવશ્યક પરિવર્તનો કરી હસ્તપ્રતનો અનુવાદ ગુજરાતીમાં કરવામાં આવ્યો તથા તેનું પરામર્શન ગુજરાતી માધ્યમથી પરિચિત નિષ્ણાતો દ્વારા કરવામાં આવ્યું તથા સૂચનોને ધ્યાનમાં રાખીને પુનઃ આવશ્યક ફેરફારો કરવામાં આવ્યા.

આ પછી તૈયાર થયેલી હસ્તપ્રતને લેખકોએ કાર્યશિબિરોમાં સંપૂર્ણપણે વાંચી અને અંતિમ સ્વરૂપ આપ્યું.

પ્રકરણ 1, ગણિતીય અનુમાન એ એક સાધન છે. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ સંબંધી ઘણા ગુણધર્મો આ નિયમ દ્વારા સાબિત થઈ શકે છે. વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વિવિધ પ્રકારે ગણિતીય અનુમાનના નિયમનો ઉપયોગ પ્રકરણ 1 માં દર્શાવ્યો છે. પ્રકરણ 2, સંકર સંખ્યા સંહતિના પરિચયની શરૂઆત છે. બીજગણિતના મુખ્ય પ્રમેય, સંકર સંખ્યાનાં વર્ગમૂળ, ઘનમૂળ, આર્ગન્ડ ચિત્ર, અસમતા વગેરેની રજૂઆત પ્રકરણમાં સરળતાથી કરી છે. આમ સંકર સંખ્યાના ઉપયોગથી n ઘાતવાળું વાસ્તવિક સહગુણકોવાળું કોઈ પણ બૈજિક સમીકરણ ઉકેલી શકાય છે અને સંકર સંખ્યાઓ આ રીતે ઉપયોગી છે.

ધન પૂર્ણાંક માટે દ્વિપદી પ્રમેય વર્ગ તથા ઘનનાં વિસ્તરણોનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે. પ્રકરણ 4, 5, 6 ત્રિકોણમિતિના સિમેસ્ટર I માં કરેલા અભ્યાસને આગળ ધપાવે છે. ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવા માટે તથા ત્રિકોણમિતિ સમીકરણોના વ્યાપક ઉકેલ માટે આ પ્રકરણો ઉપયોગી છે.

પ્રકરણ 7 માં સમાંતર શ્રેણી, સમગુણોત્તર શ્રેણી તથા ઘાત શ્રેઢી (ઘાત 1, 2 તથા 3)નો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો છે.

પ્રકરણ 8 માં શાંકવો વિશે પ્રાથમિક અભ્યાસ અને માહિતી આપેલ છે. વ્યાપક દ્વિઘાત વક્ર તથા શંકુના છેદ વિશેની માહિતીનો માત્ર ઉલ્લેખ છે.

પ્રકરણ 9 માં ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો અભ્યાસ છે. આના માટે અગત્યનું સાધન સદિશ હોવાથી પ્રકરણની શરૂઆતમાં સદિશનો માત્ર જરૂર પરિચય જ આપ્યો છે. ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો અભ્યાસ રેખાખંડના વિભાજન સુધી મર્યાદિત છે.

પ્રકરણ 10 તથા 11 કલનશાસ્ત્રની શરૂઆત સૂચવે છે. લક્ષની માત્ર સાહજિક સંકલ્પના જ લઈ, વ્યાખ્યા આપી પૂર્વપ્રમેયો તથા પ્રમેયોના આધારે લક્ષ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે પર ભાર મૂક્યો છે. આલેખોના આધારે લક્ષની સંકલ્પના સમજાવી છે. વિદ્યાર્થી આલેખો દોરે તે અપેક્ષિત નથી. વિકલનની વ્યાખ્યા આપી પ્રાથમિક વિધેયોના વિકલિતો કેવી રીતે મેળવી શકાય તે સમજાવ્યું છે.

આ પુસ્તકમાં વિપુલ પ્રમાણમાં ઉદાહરણ આપ્યાં છે, જેથી કરીને વિદ્યાર્થી સ્વ-પ્રયત્ને તમામ સંકલ્પનાઓ સારી રીતે સમજી શકે તથા શિક્ષક વિદ્યાર્થીને સ્વ-અભ્યાસ તરફ દોરી શકે. દરેક પ્રકરણના અંતે પૂરતા પ્રમાણમાં બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો આપ્યા છે, જેથી સંકલ્પનાની સમજણની કસોટી થઈ શકે.

ચાર રંગોમાં આકર્ષક મુદ્રણ એ પુસ્તકની વિશિષ્ટતા છે. પુસ્તકમાં ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓના પ્રદાન વિશે પણ કેટલીક માહિતી આપી છે. કેટલાંક પ્રકરણના અંતે આવી માહિતી આપી છે. વિદ્યાર્થીને અભ્યાસ માટે પૂરતું અભ્યાસ સાહિત્ય પુસ્તકમાંથી જ મળી શકે તેવો અમારો હેતુ છે.

પુસ્તક ક્ષતિરહિત બને તે માટે પૂરતો પ્રયત્ન કર્યો હોવા છતાં કેટલીક ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તો ધ્યાન દોરવા વિનંતી.

આશા છે કે વિદ્યાર્થીઓ તથા શિક્ષકો, બધાને પુસ્તક બહુમૂલ્ય તથા ઉપયોગી લાગશે.

– લેખકો

પાઠ્યપુસ્તકનો અભ્યાસ કરાવતા નીચેની બાબતોનો ખ્યાલ રાખવો.

શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓને અભ્યાસ માટે જરૂરી છે પરંતુ બોર્ડની પરીક્ષામાં પૂછવું નહિ.

પ્રકરણ	સ્વાધ્યાય	ઉદાહરણ
પ્રકરણ 1	સ્વાધ્યાય 1 : દા.નં. 21	21, 24
પ્રકરણ 2	સ્વાધ્યાય 2 : દા.નં. 16	–
પ્રકરણ 5	સ્વાધ્યાય 5 : દા.નં. 19 થી 22	–
પ્રકરણ 8	–	13, 14, 19, 32
પ્રકરણ 10	આર્ટિકલ 10.3 સ્વાધ્યાય 10 : દા.નં. 1, 2, 3ની સૂચનામાંથી 'વ્યાખ્યા' શબ્દ કાઢી નાખવો.	14, 15, 16
પ્રકરણ 11	સ્વાધ્યાય 11 : દા.નં. 6, 20(4)	17, 26 ઉદા. 19માં $P(n) = \frac{d}{dx} sin^n x = nsin^{n-1}x \ cosx$ સ્વીકારવું.

વિદ્યાર્થીઓને ઉચ્ચ અભ્યાસ અને સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષા માટે ઉપયોગી છે. પરંતુ બોર્ડની પરીક્ષામાં પૂછવું નહિ.

પ્રકરણ	સ્વાધ્યાય	ઉદાહરણ
પ્રકરણ 1	સ્વાધ્યાય 1 : દા.નં. 9, 24, 29	23
પ્રકરણ 2	સ્વાધ્યાય 2.3 : દા.નં. 3	–
પ્રકરણ 8	સ્વાધ્યાય 8.3 : દા.નં. 3, 4 સ્વાધ્યાય 8.4 : દા.નં. 8, 9 સ્વાધ્યાય 8 : દા.નં. 6	–
પ્રકરણ 10	સ્વાધ્યાય 10 : 9	
પ્રકરણ 11	સ્વાધ્યાય 11 : 20(23)	

પ્રકરણ 1

ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત

Mathematics is the queen of science and number theory is the queen of mathematics.
– Gauss

Mathematics passes not only truth but also supreme beauty !
– Bertrand Russell

1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે તર્ક પરથી તારણ પર આવવાની એક પદ્ધતિ શીખી ગયાં. ઉદાહરણ તરીકે,

નીચે આપેલાં વિધાનો જુઓ :

(1) $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050$

(2) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n-1)}{2}$

(3) (2) માં $n = 100$ લઈએ તો, $1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{(100)(101)}{2} = (50)(101) = 5050$

અહીં આપણે સાબિત કરવા માગીએ છીએ કે 1 થી 100નો સરવાળો 5050 થાય. આપણી પાસે વ્યાપક પરિણામ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n \cdot 1)}{2}$ છે. તેમાં આપણે $n = 100$ મૂકીને જરૂરી પરિણામ મેળવી શકીએ. અહીં આપણે વ્યાપક પરિણામનો ઉપયોગ કોઈ વિશિષ્ટ પરિણામ મેળવવા માટે કર્યો.

(1) જો ab એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ 3 વડે વિભાજ્ય છે અથવા b એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. (2) જો p અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય અને ab એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ p વડે વિભાજ્ય હોય અથવા b એ p વડે વિભાજ્ય હોય. (3) ધારો કે $p = 3$. (2) પ્રમાણે 3 અવિભાજ્ય સંખ્યા હોવાથી જો ab એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો a એ 3 વડે વિભાજ્ય છે અથવા b એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અહીં પણ આપણે વ્યાપક પરિણામનો ઉપયોગ કોઈ વિશિષ્ટ પરિણામ મેળવવા માટે કર્યો.

(1) અમિતાભ બચ્ચન એક સારા કલાકાર છે.

(2) જો કલાકાર પસંદગી પામે તો તેમના વર્ગમાં તેમને રાષ્ટ્રીય પુરસ્કાર પદ્મભૂષણથી સન્માનિત કરવામાં આવે છે.

(3) અમિતાભ બચ્ચન પદ્મભૂષણ પુરસ્કાર વડે સન્માનિત થયા હતા.

અહીં પણ સમાન પ્રકારની પરિસ્થિતિ થાય છે.

પરંતુ તાર્કિક તારણથી વિરુદ્ધ નીચેનાં વિધાનો જુઓ :

$4 - 1 = 3$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$4^2 - 1 = 15$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$4^3 - 1 = 63$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અહીં આપણે ઉપર મુજબના અવલોકનોની રીત પરથી અનુમાન કરી શકીએ કે પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $4^n - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય થાય. આમ વિશિષ્ટ પરિણામ પરથી આપણે વ્યાપક પરિણામનું અનુમાન કરી શકીએ છીએ. આ રીતે મેળવેલ અનુમાન એ પરિણામની સાબિતી નથી. આ રીતે કરાયેલા અનુમાનની સાબિતી આપવી પડે. આવાં બધાં અનુમાનો સાચાં ન પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે, $n^2 - n + 41$ એ $n = 1, 2, 3, ...39$ સુધીની nની કિંમતો માટે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ દર્શાવે છે.

પરંતુ $n = 41$ માટે $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ એ સ્વાભાવિક રીતે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. આમ, આપણે $n^2 - n + 41$ ની $n = 1, 2, 3, ...39$ સુધીની કિંમતોનું અવલોકન કરીને તે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા છે તેવું અનુમાન ન કરી શકીએ.

ચોક્કસ પ્રકારનાં અવલોકનો પરથી અનુમાન કરી પરિણામનો તાર્કિક રીતે ચકાસણી કરી અનુમાનને સાબિત કરવું જોઈએ.

ઇતિહાસમાં **પ્લેટો**ના સમયમાં આ પ્રકારની માહિતી છે. 370 B.C. માં પ્લેટોનું લખાણ ***'parmenides'* (ચર્ચા અથવા સંવાદો)**માં એવા પ્રકારનાં ઉદાહરણો છે કે જેની સાબિતી અનુમાનના આધારે આપી હોય. યુક્લિડે ગણિતીય અનુમાનની મદદથી સાબિત કર્યું હતું કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત ગણ છે. **ભાસ્કરાચાર્ય II** ના લખાણ ***'cyclic method'* (ચક્રીય પદ્ધતિ)**માં પણ આ પદ્ધતિના અંશ જોવા મળે છે.

સોરાઇટસે અધોદિશા અનુમાન પ્રથાનો ઉપયોગ કર્યો. તેના કહેવા મુજબ 10,00,000 રેતીના દાણાના ઢગલામાંથી જો એક દાણો ઓછો કરીએ તો ઢગલામાં કોઈ ફેર પડતો નથી, તે ઢગલો જ રહે છે. આ રીતે, આગળ વધતાં એક-એક દાણો ઘટાડીને એક જ દાણાથી અથવા એક પણ દાણા વગર રેતીનો ઢગલો બનાવી શકાય !

1000 A.D. ના અરસામાં **અલ-કરઝી (Al-Karaji)** નામના ગણિતજ્ઞે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેણી માટે **અલ-ફકરી (Al-Fakhri)**માં કર્યો અને દ્વિપદી પ્રમેય તથા **પાસ્કલ**ના ત્રિકોણના ગુણધર્મો સાબિત કર્યા.

સૌપ્રથમ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતને સ્પષ્ટપણે સૂત્રના રૂપમાં પાસ્કલ નામના ગણિતજ્ઞે ***'Traité-du-triangle arithmetique'*** (1665)માં રજૂ કર્યો. ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ **ફર્મા (Fermat)** અને સ્વીસ ગણિતજ્ઞ **જેકોબ બર્નુલી (Jacob Bernoulli)** એ આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કર્યો હતો. 19મી સદીમાં **જ્યોર્જ બૂલ (George Boole), સન્ડર્સ પીઅર્સ (Sanders Peirce), પીનો (Peano)** અને **ડેડકિન્ડ (Dedekind)** નામના ગણિતજ્ઞોએ અર્વાચીન રીતે આ સિદ્ધાંતનું પદ્ધતિસરનું નિરૂપણ કર્યું.

1.2 અનુમાનનો સિદ્ધાંત

આપણે નીચેના **'ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત'** તરીકે ઓળખાતા સિદ્ધાંતથી શરૂઆત કરીએ.

ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત : જો પ્રાકૃતિક ચલનું કોઈ વિધાન P(n) એ $n = 1$ માટે સત્ય હોય તથા જો $k \in N$ માટે P(k)ની સત્યાર્થતા પરથી P($k + 1$)ની સત્યાર્થતા ફલિત થતી હોય તો પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

અહીં P(n) એ પ્રાકૃતિક ચલનું વિધાન છે. આપણે તેને બે સોપાનોમાં સિદ્ધ કરીશું :

(1) આધાર : આપણે તેને $n = 1$ માટે સાબિત કરીશું. (0 અથવા ન્યૂનતમ કિંમત માટે)

(2) આનુસંગિક સોપાન : આપેલ વિધાન કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n = k$ માટે સાચું છે તે સ્વીકારી તે વિધાનને $n = k + 1$ માટે સાબિત કરીશું.

તો, P(n) પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

ડોમિનો અસર : આપણે અહીં સોગટાંવાળી એક રમતમાં વપરાતા ડોમિનોની લાંબી હાર બતાવી છે, કે જેથી

(1) પ્રથમ ડોમિનો પડી જશે.

(2) જો કોઈ ડોમિનો પડી જાય તો તેના પછીનો ડોમિનો પડી જશે.

આ પરથી એવું સાબિત કરી શકાય કે બધા જ ડોમિનો પડી જશે.

વિધાનોની અનંત શ્રેણીનું પ્રથમ વિધાન સાચું છે અને જો તેમાંનું કોઈ પણ સત્ય હોય તો તે પછીનું પણ સત્ય હોય તો વિધાનોની આ શ્રેણી દરેક $n \in N$ માટે સત્ય બને.

તાર્કિક સંકેતમાં, $(\forall P)\ [P(1) \wedge (\forall k \in N)\ (P(k) \Rightarrow P(k + 1))] \Rightarrow (\forall n \in N)[P(n)]$

આને આપણે ક્રમના સુવ્યવસ્થાના સિદ્ધાંતની મદદથી પણ સાબિત કરી શકીએ. પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણના કોઈ પણ અરિક્ત ઉપગણને ન્યૂનતમ ઘટક હોય. એ **ક્રમનો સુવ્યવસ્થિતતાનો (Well-ordering principle)** સિદ્ધાંત છે.

સાબિતી : ધારો કે S જેના માટે P(n) સત્ય નથી તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણનો ઉપગણ છે. P(1) સત્ય હોવાથી $1 \notin S$. જો S ખાલી ગણ ન હોય તો તેમાં ન્યૂનતમ ઘટક t મળે કે જેથી $t \neq 1$ હોય. ધારો કે $t = n + 1$. t એ S નો ન્યૂનતમ ઘટક હોવાથી P(t) સત્ય નથી તથા P(n) સત્ય છે. વળી, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. આમ, $P(n + 1) = P(t)$ સત્ય બને, જે વિસંગત છે. આમ, $S = \emptyset$.

$\therefore \quad \forall n \in N$, P($n$) સત્ય બને.

ક્યારેક સિદ્ધાંતનો ખોટો ઉપયોગ કરીને વિરોધાભાસ પેદા કરી શકાય છે.

પોલ્યા (Polya)ની એક જાણીતી સાબિતી છે કે કોઈ પણ ઘોડો જુદા રંગનો નથી એટલે કે બધા ઘોડા એક રંગના છે.

આધાર : જો એક જ ઘોડો હોય, તો એક જ રંગ હોય. આમ, P(1) સત્ય બને.

અનુમાનિક સોપાન : ધારો કે n ઘોડાઓના ગણમાં દરેક ઘોડાનો રંગ સમાન છે. હવે $n + 1$ ઘોડાઓના ગણમાં દરેક ઘોડાને 1, 2, 3,... $n + 1$ ક્રમ આપો. ઉપગણો $\{1, 2, 3,..., n\}$ અને $\{2, 3, 4,...n + 1\}$ એ બંને n ઘોડાઓના ગણ અરિક્ત છેદગણવાળા છે. માટે તે દરેકનો રંગ સમાન હોય. બંને ગણોના ઘોડાઓનો રંગ સમાન હોવાથી $n + 1$ ઘોડાઓનો રંગ સરખો થાય. આ દલીલ 1 ઘોડા માટે સત્ય છે જ. $n \geq 3$ ઘોડાઓ માટે સાચી છે. પરંતુ 2 ઘોડાઓનો ગણ {1} અને {2} એ અલગગણ હોવાથી ઉપરની દલીલ સાચી ન ઠરે.

1.3 ઉદાહરણો

હવે આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કેટલાંક ઉદાહરણોમાં કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$

$n = 1$ માટે ડા.બા. = 1 અને જ.બા. = $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. આમ, P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. એટલે કે, P(n) એ $n = k$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(i)}$$

$n = k + 1$ લેતાં,

$1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ સાબિત કરવું પડે.

હવે, $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + ... + k) + (k + 1)$

$= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$ ((i) પરથી)

$= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

આમ, $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે અને $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણનું ઐતિહાસિક મહત્ત્વ છે.

ઉપરના સૂત્ર મુજબ સ્પષ્ટ છે કે, $1 + 2 + 3 + ... + 100 – 5050$. જ્યારે આ સૂત્ર જાણીતું ન હતું ત્યારે નાની ઉંમરે **ગોસે (Gauss)** નીચે મુજબની ગણતરી કરીને તેના શિક્ષક **બટ્નર (Buttner)** અને સહશિક્ષક **બાર્ટેલ્સ (Bartels)**ને અચંબામાં મૂકી દીધા હતા.

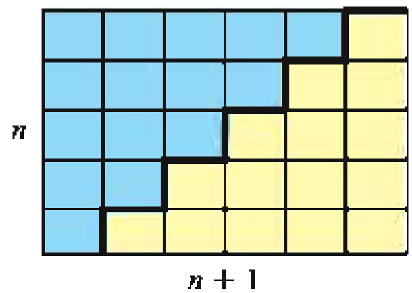
ધારો કે $S = 1 + 2 + 3 + ... + 100$ **(i)**

$\therefore$ $S = 100 + 99 + 98 + ... + 1$ **(ii)**

$\therefore$ $2S – (101) + (101) + ...$ 100 વખત **((i) + (ii) કરતાં)**

$\therefore$ $S – \frac{101 \times 100}{2} – 5050$. આ પરિણામ ખૂબ જ ઓછા સમયમાં તેણે મેળવ્યું હતું.

ચાલો આપણે ભૌમિતિક સાબિતી જોઈએ.



$n \times (n + 1)$ બાજુવાળો એક લંબચોરસ લો. આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ તેને એકમ લંબાઈના $n(n + 1)$ નાના લંબચોરસોમાં વિભાજિત કરો. ઘાટી નીસરણીની નીચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ $1 + 2 + 3 + ... + n$ થાય.

સંમિતતાથી જોઈ શકાય છે કે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$$2(1 + 2 + 3 + ... + n) – n(n + 1)$$

$$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + ... + n – \frac{n(n \cdot 1)}{2}$$

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n – 1)(2n + 1)}{6}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n – 1)(2n + 1)}{6}$, $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1^2 = 1$ અને જ.બા. $= \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

ધારો કે $n = k + 1$.

$$\therefore \quad \text{ડા.બા.} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2$$

$$= (k + 1)\left[\frac{k(2k + 1)}{6} + (k + 1)\right]$$

$$= (k + 1)\left(\frac{2k^2 – k – 6k – 6}{6}\right)$$

$$= \frac{(k \cdot 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)(2(k + 1) + 1)}{6} = \text{જ.બા.}$$

∴ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ P(k) સત્ય છે. ⇒ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in N$

$n - 1$ માટે ડા.બા. $- 1^3 - 1$ અને જ.બા. $- \frac{1^2 \times 2^2}{4} - 1$.

∴ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

∴ $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

ધારો કે $n = k + 1$.

ડા.બા. $- 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 - \frac{k^2(k-1)^2}{4} + (k+1)^3$

$$= \frac{(k+1)^2}{4} [k^2 + 4(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4)$$

$$= \frac{(k-1)^2 (k-2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+1+1)^2}{4} = \text{જ.બા.}$$

∴ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ P(k) સત્ય છે. ⇒ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in N$

$n = 1$ માટે ડા.બા. = 1 અને જ.બા. = $1^2 = 1$.

∴ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

∴ $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

ધારો કે, $n = k + 1$.

ડા.બા. = $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k + 1)^2$ = જ.બા.

∴ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ P(k) સત્ય છે. ⇒ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો : $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ અને જ.બા. $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે.

$\therefore \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

ધારો કે, $n = k + 1$.

ડા.બા. $= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k+1}{k+2}$ = જ.બા.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો : $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1 \cdot 1! = 1$, જ.બા. $= 2! - 1 = 1$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે.

$\therefore \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$

ધારો કે, $n = k + 1$.

ડા.બા. $= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + k \cdot k! + (k + 1)(k + 1)!$

$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!$

$= (k + 1)! \, [1 + (k + 1)] - 1$

$= (k + 1)! \, (k + 2) - 1$

$= (k + 2)! - 1$ = જ.બા.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : સીધી રીતે, $n \cdot n! = (n + 1 - 1)\, n! \quad = (n + 1)\, n! - n!$

$$= (n + 1)! - n!$$

હવે, n = 1, 2, 3,... વગેરે લઈ સરવાળો કરતાં,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + ((n + 1)! - n!)$$

$$= (n + 1)! - 1$$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો : $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n + 1)^2, \ n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n + 1)^2, \ n \in$ N

n = 1 લેતાં, ડા.બા. = $1 + \frac{3}{1} = 4$ અને જ.બા. = $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે.

$\therefore \quad \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)...\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right) = (k + 1)^2$

$n = k + 1$ લેતાં,

ડા.બા. = $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left(1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right)$

$= (k + 1)^2 \times \left(\frac{k^2 + 2k + 1 + 2k + 3}{(k+1)^2}\right)$

$= k^2 + 4k + 4$

$= (k + 2)^2$ = જ.બા.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : સીધો ગુણાકાર કરતાં, $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = \frac{4}{1} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{9} ... \frac{(n+1)^2}{n^2} = (n + 1)^2$

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો : $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n - 1)2^{n+1} + 2, \ n \in$ N

(આ પ્રકારની શ્રેણીને **સમાંતર સમગુણોત્તર** શ્રેણી કહે છે.)

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n - 1)2^{n+1} + 2, \ n \in$ N

n = 1 લેતાં, ડા.બા. = 2 અને જ.બા. = 0 + 2 = 2

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે.

આમ, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + ... + k \cdot 2^k = (k - 1)2^{k + 1} + 2$

હવે, $n = k + 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + k \cdot 2^k + (k + 1)2^{k + 1}$

$= (k - 1)2^{k + 1} + 2 + (k + 1)2^{k + 1}$

$= (k - 1 + k + 1)2^{k + 1} + 2$

$= 2k \cdot 2^{k + 1} + 2$

$= k \cdot 2^{k + 2} + 2 =$ જ.બા.

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો : $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ **($r \neq 1$), $n \in$ N**

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ **($r \neq 1$), $n \in$ N**

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= a$ અને જ.બા. $= \frac{a(r - 1)}{r - 1} = a$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$

ધારો કે $n = k + 1$.

$\therefore$ ડા.બા. $= a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} + ar^k$

$= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$

$= a\left(\frac{r^k - 1}{r - 1} + r^k\right)$

$= a\frac{r^k - 1 + r^k(r - 1)}{r - 1}$

$= \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r - 1}$

$= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} =$ જ.બા.

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $3^{2n + 2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે P(n) : $3^{2n + 2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, $3^4 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. આથી $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$.

હવે, $3^{2k+4} - 8(k+1) - 9$ **($2(k+1) + 2 = 2k + 4$)**

$= 3^{2k+2} \cdot 3^2 - 8k - 8 - 9$

$= 3^{2k+2}(8+1) - 8k - 8 - 9$ **($3^2 = 9 = 8 + 1$)**

$= 8 \cdot 3^{2k+2} + 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9$

$= 3^{2k+2} - 8k - 9 + 8(3^{2k+2} - 1)$

હવે, $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k) પરથી)**

વળી, $8(3^{2k+2} - 1)$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $3^{2k+2} - 8k - 9 + 8(3^{2k+2} - 1)$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : સ્પષ્ટ છે કે,

$3^{2n+2} - 8n - 9 = (3^2)^{n+1} - 1 - 8n - 8$

$= (3^2 - 1)((3^2)^n + (3^2)^{n-1} + ... + 1) - 8n - 8$ **(ઉદાહરણ 9)**

$= 8(3^{2n} + 3^{2n-2} + ... + 1) - 8n - 8$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

બીજી રીત :

અહીં P(n) : $3^{2n+2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in$ N

$n = 1$ માટે, $3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in$ N

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

એટલે કે, $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m$ જ્યાં $m \in$ N **(i)**

$n = k + 1$ લેતાં,

$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 = 3^{2k+2} \times 3^2 - 8k - 8 - 9$

$= (8k + 9 + 8m)9 - 8k - 8 - 9$ **((i) પરથી)**

$= 72k + 81 + 72m - 8k - 8 - 9$

$= 64k + 72m + 64$

$= 8(8k + 9m + 8)$ જે 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો : $2002^{2n+1} + 2003^{2n+1}$ એ દરેક $n \in N$ માટે 4005 થી વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $2002^{2n+1} + 2003^{2n+1}$ એ દરેક $n \in N$ માટે 4005 થી વિભાજ્ય છે.

$n = 1$ લેતાં,

$$2002^3 + 2003^3 = (2002 + 2003)\,[(2002)^2 - (2002)(2003) + (2003)^2]$$
$$= (4005)\,[(2002)^2 - (2002)(2003) + (2003)^2]$$

$\therefore$ $(2002)^3 + (2003)^3$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $2002^{2k+1} + 2003^{2k+1}$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$.

હવે, $2002^{2(k+1)+1} + 2003^{2(k+1)+1}$

$$= 2002^{2k+3} - 2002^{2k+1}(2003)^2 + (2002)^{2k+1} \cdot (2003)^2 + (2003)^{2k+3}$$
$$- (2002)^{2k+1}\,[(2002)^2 - (2003)^2] + (2003)^2\,[(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}]$$
$$- -(4005)\,(2002)^{2k+1} + (2003)^2\,[(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}]$$

હવે, $(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k))**

$\therefore$ $(2002)^{2(k+1)+1} + (2003)^{2(k+1)+1}$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો : $x^{2n} - y^{2n}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $x^{2n} - y^{2n}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

ધારો કે, $n = 1$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ અને તેથી $x^2 - y^2$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $x^{2k} - y^{2k}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$.

$$x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} = x^{2k+2} - x^{2k}y^2 + x^{2k}y^2 - y^{2k+2}$$
$$= x^{2k}(x^2 - y^2) + y^2(x^{2k} - y^{2k})$$
$$= x^{2k}(x - y)(x + y) + y^2(x^{2k} - y^{2k})$$

હવે, $x^{2k}(x - y)(x + y)$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$x^{2k} - y^{2k}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k))**

$\therefore$ $x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in$ N

ધારો કે, $n = 1$. ડા.બા. $= 1^2 = 1$, જ.બા. $= \frac{1}{3}$ અને $1 > \frac{1}{3}$.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$

ધારો કે $n = k + 1$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k + 1)^2 \qquad \text{(i)}$$

હવે, $\frac{k^3}{3} + (k + 1)^2 = \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 6k + 3)$

$= \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k + 2)$

$> \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$ કારણ કે $\frac{1}{3}(3k + 2) \geq \frac{5}{3} > 0$

$\therefore$ $\frac{k^3}{3} + (k + 1)^2 > \frac{1}{3}(k + 1)^3$ (ii)

$\therefore$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k + 1)^2 > \frac{1}{3}(k + 1)^3$ ((i) અને (ii) પરથી)

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} > \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$, $n \in$ N

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો : $1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$, $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1$, જ.બા. $= \frac{1}{8}(3)^2 = \frac{9}{8}$ અને $1 < \frac{9}{8}$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $1 + 2 + 3 + ... + k < \frac{1}{8}(2k + 1)^2$

બંને બાજુ $(k + 1)$ ઉમેરતાં,

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) < \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) \qquad \text{(i)}$$

હવે, $\frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) = \frac{1}{8}(4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8)$

$= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9)$

$\frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) = \frac{1}{8}(2k + 3)^2$ **(ii)**

$\therefore$ $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) < \frac{1}{8}(2k + 3)^2$ **((i) અને (ii) પરથી)**

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^2 + 4n}{8} < \frac{4n^2 + 4n + 1}{8} = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $n \in$ N **($x > -1$)**

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ **$k \in$ N**

$n = k + 1$ લેતાં,

હવે, $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$

$\geq (1 + kx)(1 + x)$ **(P(k) અને $x > -1$ પરથી)**

$\therefore$ $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + kx + x$ કારણ કે $k \in$ N, $x^2 \geq 0$

$\therefore$ $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. = 1, જ.બા. = 2 − 1 = 1

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$

બંને બાજુ $\frac{1}{(k+1)^2}$ ઉમેરતાં,

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$ **(i)**

હવે, $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$

$$= 2 - \frac{1}{k \cdot 1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{-k-1+k}{k(k+1)}$$

$$= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{k-k-1}{k(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k-1)^2}$$

$\therefore \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ $\left(\frac{1}{k(k+1)^2} > 0\right)$ **(ii)**

$\therefore \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{(k+1)}$ **(i) અને (ii) પરથી**

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : n ગમે તેટલો મોટો હોય તો પણ સરવાળો $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ સિમિત થાય અને 2 થી ઓછો થાય.

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n; \quad n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n; \quad n \in N$

n = 1 લેતાં, ડા.બા. = $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2$, જ.બા. = $2^1 = 2$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore \quad \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + ... + \binom{k}{k} = 2^k$

ધારો કે $n = k + 1$.

ડા.બા. = $\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + ... + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}$

$$= \binom{k}{0} + \left(\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right) + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right) + ... + \left(\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right) + \binom{k}{k}$$

$\left(\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1, \binom{k}{r} = \binom{k-1}{r-1} + \binom{k-1}{r}\right)$

$$= 2\left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + ... + \binom{k}{k}\right]$$

$$= 2 \cdot 2^k$$

$$= 2^{k+1}$$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

1.4 કેટલાક વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારોમાં ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ

(1) ચલ પ્રકાર 1 : જો P(n) પ્રાકૃતિક ચલ nનું વિધાન હોય અને જો કોઈક ધન પૂર્ણાંક k_0 માટે P(k_0) સત્ય હોય તથા $k \geq k_0$ માટે P(k) સત્ય હોય $\Rightarrow$ P(k + 1) પણ સત્ય બને, તો પ્રત્યેક $n \geq k_0$, $n \in$ N માટે P(n) સત્ય બને.

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો : $2^n > n^2$; $n \geq 5, n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે P(n) : $2^n > n^2$; $n \geq 5, n \in$ N

$n = 5$ લેતાં, ($k_0 = 5$), $2^5 = 32$, $5^2 = 25$ અને $32 > 25$.

$\therefore$ P(5) સત્ય છે.

ધારો કે $k \geq 5$ તથા $k \in$ N માટે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $2^k > k^2$ $k \geq 5, k \in$ N

ધારો કે $n = k + 1$.

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$ **($2^k > k^2$) (i)**

હવે, $2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1$

$= k^2 - 2k + 1 - 2$

$= (k-1)^2 - 2 > 0$ **($k \geq 5$)**

$\therefore$ $2k^2 > (k+1)^2$ **(ii)**

$\therefore$ $2^{k+1} > (k+1)^2$ **((i) અને (ii) પરથી)**

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N, $n \geq 5$ માટે P(n) સત્ય છે.

(2) ચલ પ્રકાર 2 : ધારો કે P(n) એ પ્રાકૃતિક ચલનું વિધાન છે.

જો P(1) અને P(2) સત્ય હોય તથા જો પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક k માટે

P(k) અને P(k + 1) સત્ય હોય $\Rightarrow$ P(k + 2) સત્ય હોય તો પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 19 : ધારો કે a_n એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી છે, જ્યાં $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ અને $n \geq 1$ માટે $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. સાબિત કરો : $a_n = 2^n + 3^n$ $\forall n \in$ N.

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : જો શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ અને $n \geq 1$ માટે $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, તો $a_n = 2^n + 3^n$ $\forall n \in$ N.

ધારો કે $n = 1$. $a_1 = 5$ અને $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$. આથી, P(1) સત્ય છે.

ધારો કે $n = 2$. $a_2 = 13$ અને $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. આથી, P(2) સત્ય છે.

ધારો કે $a_k = 2^k + 3^k$, $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$ ($k \geq 1$)

હવે, $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$

$= 5(2^{k+1} + 3^{k+1}) - 6(2^k + 3^k)$

$= 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k$

$= 2^k(10 - 6) + 3^k(15 - 6)$

$= 2^k \cdot 2^2 + 3^k \cdot 3^2$

$= 2^{k-2} + 3^{k+2}$

$\therefore$ P(k + 2) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે અને P(k + 1) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 2) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ને આવૃત્ત સંબંધ કહે છે. તેનો ઉકેલ $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ છે, જ્યાં, α, β એ સમીકરણ $x^2 - 5x + 6 = 0$ નાં બીજ છે. (5 એ a_{n+1} નો સહગુણક, -6 એ a_n નો સહગુણક છે.)

$\therefore$ $\alpha = 3, \beta = 2$

$\therefore$ $a_n = A3^n + B2^n$

$\therefore$ $a_1 = 3A + 2B = 5;$ $\quad a_2 = 9A + 4B = 13$

આમ, A = B = 1. આથી, $a_n = 3^n + 2^n$.

$a_{n+2} = la_{n+1} - ma_n$ તો α, β એ સમીકરણ $x^2 - lx + m = 0$ નાં બીજ થાય.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે જો $n \geq 4$ તો ₹ nની ચુકવણી ₹ 2 અને ₹ 5 ના સિક્કાઓના ઉપયોગથી જ કરી શકાય. ($n \in$ N તથા $n \geq 4$)

ઉકેલ : P(n) : $n \geq 4$ તો ₹ nની ચુકવણી ₹ 2 અને ₹ 5 ના સિક્કાઓ દ્વારા જ થઈ શકે. $n \in$ N

ધારો કે $n = 4$. ₹ 4 ની ચુકવણી કરવા માટે આપણને ₹ 2 ના બે સિક્કાની જરૂર પડે.

$\therefore$ P(4) સત્ય છે.

ધારો કે $k \geq 4$ માટે વિધાન P(k) સત્ય છે.

હવે $n = k + 1$ લઈએ.

અહીં બે વિકલ્પો મળી શકે.

(1) જો ₹ k ની ચુકવણીમાં ₹ 5 નો એક સિક્કો હોય, તો તે પાછો લઈ ₹ 2 ના 3 સિક્કા આપો. આથી, $k + 6 - 5 = k + 1$ રૂપિયાની ચુકવણી થઈ જાય.

(2) જો ₹ k નો ચુકવણીમાં ₹ 5 ના એક પણ સિક્કાનો ઉપયોગ ના થયો હોય તો $k \geq 4$ હોવાથી ₹ 2 ના ઓછામાં ઓછા બે સિક્કાનો ઉપયોગ થયો હોવો જ જોઈએ. ₹ 2 ના 2 સિક્કા પાછા લઈ ₹ 5 નો એક સિક્કો આપો. આથી $k + 5 - 4 = k + 1$ રૂપિયાની ચુકવણી થઈ જાય.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $n \in$ N, $n \geq 4$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક $n > 23$ ને $7x + 5y = n$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય.

જ્યાં, $x \in N \cup \{0\}$, $y \in N \cup \{0\}$.

ઉકેલ : ધારો કે P(n) : $7x + 5y = n$, $x, y \in N \cup \{0\}$, $n \in$ Nનો ઉકેલ $n > 23$ માટે શક્ય છે.

ધારો કે $n = 24$. $x = y = 2$ લેતાં, $7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 24$ થાય.

∴ P(24) સત્ય છે.

ધારો કે $7x + 5y = k$, $k \geq 24$, $x \in N \cup \{0\}$, $y \in N \cup \{0\}$. (i)

હવે, $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$ (ii)

∴ $7(x - 2) + 5(y + 3) = k + 1$ ((i) અને (ii)નો સરવાળો કરતાં)

અહીં, $y + 3 \in N \cup \{0\}$ અને જો $x \neq 0$ અથવા 1 તો $x - 2 \in N \cup \{0\}$

ધારો કે $x = 0$. $5y = k \geq 24$. આમ, $y \geq 5$.

$7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$ અને $5y = k$ ઉમેરતાં,

∴ $7 \cdot 3 + 5(y - 4) = k + 1$

અહીં, $x = 3 \geq 0$, $y - 4 \geq 0$ ($y \geq 5$)

∴ $x = 0$ માટે $P(k + 1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $x = 1$

આથી ફરીથી, $7 + 5y = k$

$5y = k - 7 \geq 17$. હોવાથી $y \geq 4$

∴ $7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$ અને $7 + 5y = k$ ઉમેરતાં,

$7 \cdot 4 + 5(y - 4) = k + 1$ જ્યાં $y - 4 \geq 0$ અને $x = 4 \in N$

∴ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

∴ $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $n \in N$ તથા $n \geq 24$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 22 : (Tower of Hanoi, બ્રહ્માનો ટાવર) આપણી પાસે ત્રણ ખીલાવાળું એક પાટિયું છે તથા જુદી જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી પાતળી ગોળાકાર n તકતીઓ છે. શરૂઆતમાં એક ખીલામાં બધી તકતીઓને તેમના માપ પ્રમાણે ભરાવેલી છે, સૌથી મોટા માપની ત્રિજ્યાવાળી તકતી છેક તળિયે અને સૌથી નાના માપની ત્રિજ્યાવાળી તકતી સૌથી ઉપર રાખેલ છે. આ તકતીઓને એવી રીતે એક ખીલાથી બીજા કે ત્રીજા ખીલા પર લઈ જવાની છે, કે જેથી કોઈ પણ તબક્કામાં મોટી તકતી નાની તકતી પર ન હોય. સાબિત કરો કે પ્રથમ ખીલાથી બીજા ખીલાનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજા ખીલા પર બધી તકતીઓને ગોઠવવાના ન્યૂનતમ પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા $2^n - 1$ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $P(n)$: n તકતીઓને પ્રથમ ખીલાથી ત્રીજા (કે બીજા) ખીલામાં ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા $2^n - 1$ છે. $n \in N$

જો $n = 1$ તો સ્પષ્ટ છે કે એક જ પ્રયત્નમાં તકતીને પહેલા ખીલાથી ત્રીજા ખીલામાં ગોઠવી શકાય. વળી, $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. આથી P(1) સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$ સત્ય છે એટલે કે k તકતીઓને પહેલા ખીલાથી ત્રીજા ખીલા પર માંગ્યા પ્રમાણે ગોઠવવાના પ્રયત્નોની ન્યૂનતમ સંખ્યા $2^k - 1$ છે.

હવે આપણે $k + 1$ તકતીઓનો વિચાર કરીએ. પ્રથમ આપણે તળિયાની તકતી સિવાયની ઉપરની k તકતીઓને ત્રીજા ખીલાનો ઉપયોગ કરીને બીજા ખીલામાં આપેલ શરત અનુસાર ગોઠવીએ. $P(k)$ સત્ય હોવાથી તે ક્રિયા આપણે $2^k - 1$ પ્રયત્નમાં કરી શકીએ. હવે છેલ્લી તકતીને ત્રીજા ખીલામાં ગોઠવો. આ એક પ્રયત્ન થયો. હવે, બીજા ખીલાની k તકતીઓને ત્રીજા ખીલામાં માંગ્યા પ્રમાણે ગોઠવો. તે ક્રિયા $2^k - 1$ પ્રયત્નમાં થઈ શકશે. (કારણ કે $P(k)$ સત્ય છે.)

∴ પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા $= 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 23 : સાબિત કરો : $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} \in \mathbb{N}$. $\quad n \in$ N **(પ્રકરણ 3નો અભ્યાસ કર્યા પછી)**

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} \in \mathbb{N}$, $\quad n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ માટે, $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} = \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} = \frac{15 + 33 + 55 + 62}{165} = \frac{165}{165} = 1$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. $\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \in \mathbb{N}$.

ધારો કે $n = k + 1$

હવે, $\left(\frac{(k+1)^{11}}{11} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k-1)^3}{3} + \frac{62(k-1)}{165}\right) - \left(\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165}\right)$

$$= \frac{1}{11}((k+1)^{11} - k^{11}) + \frac{1}{5}((k+1)^5 - k^5) + \frac{1}{3}((k+1)^3 - k^3) + \frac{62}{165}$$

$$= \frac{1}{11}\left(1 + \binom{11}{1}k + \binom{11}{2}k^2 + ... + \binom{11}{10}k^{10}\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \binom{5}{1}k + \binom{5}{2}k^2 + ... + \binom{5}{4}k^4\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(1 + \binom{3}{1}k + \binom{3}{2}k^2\right) + \frac{62}{165}$$

$$= \frac{1}{11}\binom{11}{1}k + \frac{1}{11}\binom{11}{2}k^2 + ... + \frac{1}{11}\binom{11}{10}k^{10} + \frac{1}{5}\binom{5}{1}k + \frac{1}{5}\binom{5}{2}k^2 + ... + \frac{1}{5}\binom{5}{4}k^4$$

$$+ \frac{1}{3}\binom{3}{1}k + \frac{1}{3}\binom{3}{2}k^2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} \qquad \text{(i)}$$

હવે, 11 અવિભાજ્ય હોવાથી, $\binom{11}{r}$ એ $r = 1, 2, ..., 10$ માટે 11 વડે વિભાજ્ય છે.

5 અવિભાજ્ય હોવાથી, $\binom{5}{r}$ એ $r = 1, 2, 3, 4$ માટે 5 વડે વિભાજ્ય છે.

3 અવિભાજ્ય હોવાથી, $\binom{3}{r}$ એ $r = 1, 2$ માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અને $\frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} = 1$

$\therefore$ (1) ની જ.બા.ની સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

વળી, $\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \in \mathbb{N}$.

$\therefore \quad \frac{(k+1)^{11}}{11} + \frac{(k-1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{62(k+1)}{165}$

$= \frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165}$ + પ્રાકૃતિક સંખ્યા $\in$ N

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 24 : એક સભાગૃહમાં $2n$ માણસો છે. અમુક માણસો બીજા માણસો સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કોઈ પણ એવી ત્રણ વ્યક્તિઓ નથી કે જેમણે એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કર્યું હોય. સાબિત કરો કે આમ મળતી હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા n^2 હોય.

ઉકેલ : P(n) : અમુક માણસો બીજા માણસો સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કોઈ પણ એવી ત્રણ વ્યક્તિઓ નથી કે જેમણે એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કર્યું હોય. આમ મળતી હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા n^2 હોય.

$n = 1$ લેતાં, બે વ્યક્તિઓ છે. આમ, હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા $1 = 1^2$.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા n^2 છે.

ધારો કે $n = k + 1$

હવે $2k + 2$ વ્યક્તિઓ છે. હસ્તધૂનન કર્યું હોય તેવી બે વ્યક્તિઓ A અને B પસંદ કરો.

(જો એવી બે વ્યક્તિઓ ન મળે તો હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા 0 થાય. જે વધુમાં વધુ $(k + 1)^2$ છે તેમ સાબિત થાય.)

હવે, બાકીની $2k$ વ્યક્તિઓ દ્વારા હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા વધુમાં વધુ k^2 છે. **(P(k) સત્ય છે.)**

A અને B દ્વારા એક હસ્તધૂનન થાય છે.

$2k$ વ્યક્તિઓમાંની દરેક વ્યક્તિ A અથવા B સાથે જ હસ્તધૂનન કરી શકે પણ બંને સાથે નહિ.

હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા $k^2 + 1 + 2k = (k + 1)^2$

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

એક વિરોધાભાસ (Paradox) :

P(n) : તરસ્યો માણસ પાણીનાં n ટીપાં પી શકે. $n \in N$

$n = 1$ માટે સ્પષ્ટ છે કે તરસ્યા માણસને 1 ટીપું પાણી પીવું ગમે.

જો તે k ટીપાં પાણી પી શકે તો ચોક્કસ $k + 1$ ટીપાં પાણી પણ પી શકે.

આમ, તે ગમે તેટલાં ટીપાં પાણી પી શકે અને પૃથ્વી પરનું બધું જ પાણી પીને પૃથ્વીને પાણીવિહોણી બનાવી શકે !

નોંધ : પરિણામોનો ખોટી રીતે ઉપયોગ કરીને કોઈ ખોટા પરિણામ પર પહોંચીએ તેને વિરોધાભાસ કહે છે.

સ્વાધ્યાય 1

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરો : **(1 થી 20)**

1. $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + ... + n^2(n + 1) = \frac{n(n - 1)(n + 2)(3n - 1)}{12}$

2. $a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d) - \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d)$

3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{n}{3n - 1}$

4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1)(n + 2) - \frac{n(n - 1)(n + 2)(n + 3)}{4}$

5. $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

7. $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n} = \frac{2n}{n+1}$

8. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

9. $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

10. જો $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3$ તો $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_{n+2} - 1$

11. $41^n - 1$ એ 40 વડે વિભાજ્ય છે.

12. $4007^n - 1$ એ 2003 વડે વિભાજ્ય છે.

13. $7^n - 6n - 1$ એ 36 વડે વિભાજ્ય છે.

14. $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

15. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ એ 133 વડે વિભાજ્ય છે.

16. $n(n+1)(2n+1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

17. $1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + ... + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

18. $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.

19. $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} \in N.$

20. $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

21. લુકાસની શ્રેણી $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 3)$; $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ માટે સાબિત કરો કે $a_n \leq (1.75)^n$.

22. સાબિત કરો : $2^n > n^3$, જ્યાં $n \geq 10,\ n \in N$

23. સાબિત કરો કે n બાજુઓ વાળા બહુકોણને $\frac{n(n-3)}{2}$ વિકર્ણો હોય જ્યાં, $n > 3,\ n \in N$

24. જો $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(n \geq 3,\ n \in N)$ તો સાબિત કરો કે

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ (આ શ્રેણી $\{a_n\}$ને **ફિબોનાકી શ્રેણી** કહે છે.)

25. જો $f : N \to N,\ f(1) = 1,\ f(2) = 5,\ f(n+1) = f(n) + 2f(n-1),\ \ n \geq 2$

તો સાબિત કરો કે $f(n) = 2^n + (-1)^n$

26. જો $f : N \to N,\ f(1) = 1,\ f(n+1) - f(n) = 2^n$

તો સાબિત કરો કે $f(n) = 2^n - 1$

27. જો $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2};\ \ n \geq 3$

તો સાબિત કરો કે $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

28. જો $a_1 = 1,\ a_2 = 11$ અને $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2};\ \ n \geq 3$

તો સાબિત કરો કે $a_n = 2(-1)^n + 3^n,\ \ n \in N$

29. કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક $n \geq 12$ ને $7x + 3y = n$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તેમ સાબિત કરો.

જ્યાં, $x \in N \cup \{0\},\ y \in N \cup \{0\}$

30. સાબિત કરો કે $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ યુગ્મ છે. $n \in N$ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

31. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $P(n) : 2^n < n!$ માટે ...... સત્ય છે. ☐

(a) $P(1)$ (b) $P(2)$

(c) કોઈ પણ $P(n)$, $n \in N$ (d) $P(4)$

(2) $P(n) : 2^n = 0$ માટે ...... સત્ય છે. ☐

(a) $P(1)$ (b) $P(3)$

(c) $P(10)$ (d) $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, $k \in N$

(3) $1 + 2 + 3 + ... + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $n \in N$ ☐

(a) $P(1)$ માટે ડા.બા. $= 7 =$ જ.બા.

(b) $P(1)$ માટે ડા.બા. $= 3 =$ જ.બા.

(c) $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, $k \in N$ માટે સત્ય નથી.

(d) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે તેમ નથી.

(4) જો ...... સત્ય હોય અને $P(k)$ સત્ય હોય $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય હોય, $k \geq -1$, તો પ્રત્યેક $n \in N \cup \{0, -1\}$ માટે $P(n)$ સત્ય હોય. ☐

(a) $P(-1)$ (b) $P(0)$ (c) $P(1)$ (d) $P(2)$

(5) $P(n) : P = 2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. એ $n =$ ...... માટે સત્ય નથી. ☐

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) 5

(6) $P(n) : 2^n - 1$ એ $n =$ ...... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ☐

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 8

(7) $P(n) : n^2 - n + 41$ એ $n =$ ...... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. ☐

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 41

(8) $P(n) : 2n + 1$ એ $n =$ ...... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. ☐

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(9) $P(n) : 4n + 1$ એ $n =$ ...... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. ☐

(a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 11

(10) $P(n) : 2^n > n^2$ એ $n =$ ...... માટે સત્ય છે. ☐

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત અને તેનાં ઉપરનાં ઉદાહરણો
2. વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારના ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત તથા તેના ઉપયોગો

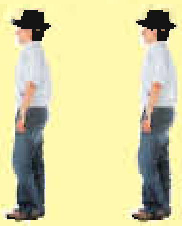
કોયડો

એક ઓરડામાં n વ્યક્તિ છે. $n - 1$ કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી n સફેદ ટોપી છે. દરેક વ્યક્તિના માથે એક ટોપી છે. આ વ્યક્તિઓ એક હારમાં એવી રીતે ઊભી રહી છે કે દરેક વ્યક્તિ તેની આગળની વ્યક્તિની ટોપી જોઈ શકે. હવે છેલ્લેથી શરૂ કરી દરેક વ્યક્તિને પૂછવામાં આવે છે, 'તમારી ટોપીનો રંગ કહી શકશો'. જો પાછળની $n - 1$ વ્યક્તિ પોતાની ટોપીનો રંગ ના કહી શકે તો સૌથી આગળની વ્યક્તિ કહે છે, 'હા, મારી ટોપીનો રંગ સફેદ છે.'

હવે ગણિતીય અનુમાનથી આગળ વધીએ. $n = 1$ માટે 1 વ્યક્તિ, ઓછામાં ઓછી 1 સફેદ ટોપી તથા $1 - 1 = 0$ કાળી ટોપી છે. આથી તે વ્યક્તિ કહે છે કે મારા માથા ઉપર સફેદ ટોપી છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. k વ્યક્તિ, ઓછામાં ઓછી k સફેદ ટોપી તથા $k - 1$ કાળી ટોપી હોય અને પાછળની $k - 1$ વ્યક્તિ પોતાની ટોપીનો રંગ કહેવામાં નિષ્ફળ જાય છે, તો પ્રથમ ઉભેલી વ્યક્તિ કહી શકે કે 'મારા માથા પર સફેદ ટોપી છે'. $n = k + 1$ લેતાં, $k + 1$ વ્યક્તિ, k કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી $k + 1$ સફેદ ટોપી છે. હવે પ્રથમ વ્યક્તિ વિચારે છે કે જો મારા માથા ઉપર કાળી ટોપી હોય તો પાછળની k વ્યક્તિ વચ્ચે ઓછામાં ઓછી k સફેદ ટોપી તથા $k - 1$ કાળી ટોપી રહે. P(k) સત્ય હોવાથી મારી પાછળની વ્યક્તિ કહી શકે કે તેના માથા પર સફેદ ટોપી છે. પરંતુ મારી પાછળની વ્યક્તિ અનુત્તર છે. આથી મારા માથા પર સફેદ ટોપી છે.

સમજૂતી : $n = 2$ માટે બે વ્યક્તિ એક કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી બે સફેદ ટોપી છે.



જો છેલ્લી વ્યક્તિ પ્રથમ વ્યક્તિના માથા ઉપર કાળી ટોપી જુએ તો એક જ કાળી ટોપી હોવાથી તે નિશ્ચિતપણે કહી શકે કે તેના માથા પર સફેદ ટોપી છે. તે જવાબ આપી શકતી ન હોવાથી પ્રથમ વ્યક્તિની તાર્કિક દલીલ એ છે કે તેના માથે સફેદ ટોપી જ હોવી જોઈએ અને તેની પાછળની વ્યક્તિના માથા પર સફેદ અથવા કાળી ગમે તે ટોપી હોય. કારણ કે એક કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી બે સફેદ ટોપી છે. આથી પ્રથમ વ્યક્તિ કહી શકે કે તેના માથા પર સફેદ ટોપી છે.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) was one of India's greatest mathematical geniuses. He made substantial contributions to the analytical theory of numbers and worked on elliptical functions, continued fractions and infinite series.

In 1990 he began to work on his own on mathematics summing geometric and arithmetic series.

Ramanujan had shown how to solve cubic equations in 1902 and he went to find his own method to solve the quartic.

1904 Ramanujan had begun to undertake deep research. He investigated the series $\Sigma\left(\frac{1}{n}\right)$ and calculated Euler's constant to 15 decimal places.

Continuing his mathematical work Ramanujan studied continued fractions and divergent series in 1908.

પ્રકરણ 2

સંકર સંખ્યાઓ

A mathematician is a device for turning coffee into theorems.

- Paul Erdos

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain and as far as they are certain, they do not refer to reality.

- Albert Einstein

2.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં સંખ્યાઓના ગણ N, Z, Q અને R નો અભ્યાસ કરી ગયાં. આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ અને અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ભેગા મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ રચે છે. આપણે સંખ્યાઓના ગુણધર્મો તેમજ એક ચલ અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના ઉકેલનો અભ્યાસ કરી ગયાં. તદુપરાંત આપણે એક ચલ દ્વિઘાત સમીકરણોના ઉકેલની પણ ચર્ચા કરી ગયાં. આપણે જોયું કે જો વિવેચક $b^2 - 4ac < 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. ઉદાહરણ તરીકે $x^2 + 1 = 0$ ને R માં ઉકેલ નથી. ઋણ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ મેળવવા માટે વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો તેનાથી મોટા ગણમાં વિસ્તાર કરવો પડે. વાસ્તવમાં ઋણ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી તે સૌથી પહેલાં ગ્રીકવાસીઓ જોઈ શક્યા હતા. ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી **મહાવીરે** અથવા **મહાવીરાચાર્ય** (850 A.D.) પણ તેમના ગ્રંથ **'ગણિતસાર સંગ્રહ'**માં આ મુશ્કેલીનો ઉલ્લેખ કર્યો છે. વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો વિસ્તાર એવી રીતે થવો જોઈએ કે જેથી સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર જેવી બૈજિક ક્રિયાઓ યોગ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય અને તે મર્યાદિત ઉપગણ R માં હાલ વ્યાખ્યાયિત બૈજિક ક્રિયાઓ સાથે સુસંગત રહે. આ નવા ગણને **સંકર સંખ્યાઓનો ગણ (set of complex numbers)** કહેવાય છે અને તેને સંકેતમાં **C** વડે દર્શાવાય છે.

2.2 ગણ R × R અને સંકર સંખ્યા

સંકર સંખ્યાનો ગણ C મેળવવા માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R થી શરૂઆત કરીએ. R × R એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડનો ગણ છે.

$R \times R = \{(a, b) \mid a \in R, b \in R\}$

આપણે R × R ના બે ઘટકોની સમાનતા તથા તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

(1) સમાનતા : જો $a = c$ અને $b = d$ તો R × R ના બે ઘટકો (a, b) અને (c, d) સમાન થાય.

આમ, $a = c, b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$

ઉદાહરણ તરીકે, $(1, 0) = (sin^2x + cos^2x, \log 1)$ પરંતુ, $(1, 4) \neq (4, 1)$

(2) **સરવાળો :** $R \times R$ ના બે ઘટકો (a, b) અને (c, d) નો સરવાળો નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ :

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

ઉદાહરણ તરીકે, $(5, 2) + (2, 3) = (5 + 2, 2 + 3) = (7, 5)$

(3) **ગુણાકાર :** $R \times R$ ના બે ઘટકો (a, b) અને (c, d) નો ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

ઉદાહરણ તરીકે, $(5, 2)(2, 3) = (5 \times 2 - 2 \times 3, 5 \times 3 + 2 \times 2) = (4, 19)$

આ બધા નિયમો સાથેના ગણ $R \times R$ ને સંકર સંખ્યાઓનો ગણ કહે છે તથા તેને C વડે દર્શાવાય છે.

સામાન્ય રીતે આપણે સંકર સંખ્યાને z વડે દર્શાવીશું.

2.3 સંકર સંખ્યાઓના મૂળભૂત બૈજિક ગુણધર્મો

સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયાઓ વિશે ગણ R માં સંવૃત્તતા, ક્રમ, જૂથ અને વિભાજનના ગુણધર્મોની ચર્ચા આપણે કરી ગયાં છીએ. આ ક્રિયાઓ વિશે ગણ C માં પણ આ જ ગુણધર્મો સાચા છે તે હવે આપણે જોઈશું.

સરવાળા વિશેની ક્રિયા નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

(1) **સંવૃત્તતાનો નિયમ :** બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો સંકર સંખ્યા હોય છે.

એટલે કે, $z_1 + z_2 \in C \quad \forall z_1, z_2 \in C$

આ નિયમને માટે એમ પણ કહેવાય છે કે C પર સરવાળો એ દ્વિક્ક્રિયા છે.

(2) **ક્રમનો નિયમ :** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in C$

(3) **જૂથનો નિયમ :** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in C$

(4) **સરવાળા માટે એકમ સંખ્યાનું અસ્તિત્વ :** સંકર સંખ્યા $O = (0, 0)$ એવી મળે છે કે જેથી $z + O = z = O + z$ $\forall z \in C$. $O = (0, 0)$ ને સરવાળા માટેનો એકમ ઘટક કે શૂન્ય સંકર સંખ્યા કહે છે. સરવાળા માટેનો એકમ ઘટક O અનન્ય છે તેમ સાબિત કરી શકાય.

ખરેખર જો, $(a, b) + (x, y) = (a, b) \qquad \forall (a, b) \in C$

તો $a + x = a, \qquad b + y = b$

$\therefore \ x = 0, \qquad y = 0$. આમ, $(x, y) = (0, 0)$

વળી, $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.

(5) **સરવાળા માટે વિરોધી સંખ્યાનું અસ્તિત્વ :** પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા $z = (a, b)$, ને સંગત સંકર સંખ્યા $(-a, -b)$ મળે કે જેથી $z + (-a, -b) = O$. આ સંકર સંખ્યા $(-a, -b)$ ને $-z$ વડે દર્શાવાય છે અને તે z ની સરવાળા માટેની વિરોધી સંખ્યા છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b)$

$= (a + (-a), b + (-b))$

$= (0, 0)$

$= O$ (O સરવાળા માટેની એકમ સંખ્યા છે.)

વળી, $(-z) + z = O$

આપણે સાબિત કરી શકીએ કે પ્રત્યેક $z \in C$ માટે તેની વિરોધી સંખ્યા $-z$ અનન્ય છે.

નોંધ : $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$ માટે $a + x = 0 = b + y$ જરૂરી છે.

$\therefore \ x = -a, y = -b$

$\therefore$ **$(-a, -b)$ એ (a, b)ને સંગત સરવાળા માટેની વિરોધી સંખ્યા છે.**

ગુણાકાર વિશેની ક્રિયા નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

(1) સંવૃત્તતાનો નિયમ : બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંકર સંખ્યા હોય છે.

એટલે કે, $z_1z_2 \in C \qquad \forall z_1, z_2 \in C$

આમ, ગુણાકાર પણ C પર દ્વિક્ક્રિયા છે.

(2) ક્રમનો નિયમ : $z_1z_2 = z_2z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in C$

(3) જૂથનો નિયમ : $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in C$

(4) ગુણાકાર માટેના એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ : સંકર સંખ્યા (1, 0) એવી મળે છે કે જેથી

$z(1, 0) = z = (1, 0)z \quad \forall z \in C$

$z = (a, b)$ લેતાં, $z(1, 0) = (a, b)(1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b) = z$

વળી, $(1, 0)z = z$

$\therefore \quad z(1, 0) = (1, 0)z = z$

(1, 0) ને ગુણાકાર માટેનો એકમ ઘટક કહે છે. ગુણાકાર માટેનો એકમ ઘટક (1, 0) અનન્ય છે.

નોંધ : જો $(a, b)(x, y) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C$, તો

$ax - by = a$ અને $ay + bx = b, \quad \forall a, b \in R$.

વિશેષત: $a = 1, b = 0$ માટે $x = 1, y = 0$.

આમ, $(a, b)(1, 0) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C$.

(5) ગુણાકાર માટેની વ્યસ્ત સંખ્યાનું અસ્તિત્વ : શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z = (a, b)$ ને સંગત સંકર સંખ્યા $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ મળે કે જેથી $z\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$. સંકર સંખ્યા $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ ને z^{-1} વડે દર્શાવાય છે અને તેને z ની વ્યસ્ત સંખ્યા કહેવાય છે.

((1, 0) એ ગુણાકાર માટેનો એકમ ઘટક છે.).

$(a, b) \neq (0, 0)$ હોવાથી $a^2 + b^2 \neq 0$. તેથી $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{-b}{a^2-b^2}\right) \in C$ અને

$$z \cdot z^{-1} = (a, b)\left(\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2},\ a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$$

વળી, $z^{-1} \cdot z = (1, 0)$

અહીં નોંધીએ કે પ્રત્યેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z \in C$ માટે તેનો વ્યસ્ત અનન્ય છે. z^{-1} ને $\frac{1}{z}$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

નોંધ : ધારો કે z' એવી સંકર સંખ્યા છે કે જેથી $zz' = (1, 0)$

ધારો કે $z' = (x, y)$

$\therefore \quad zz' = (a, b)(x, y) = (1, 0)$

$\therefore \quad (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$

$\therefore \quad ax - by = 1, ay + bx = 0$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં $x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$

$$\therefore \quad z' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

$\therefore \quad z = (a, b) \neq (0, 0)$ હોવાથી $a^2 + b^2 \neq 0$.

$$\therefore \quad z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

ગુણાકાર માટેની વ્યસ્ત સંખ્યાઓના અસ્તિત્વ પરથી ફલિત કરી શકાય કે જો $z_1z_2 = 0$ તો $z_1 = 0$ અથવા $z_2 = 0$. (ચકાસો !)

(6) વિભાજનનો નિયમ : કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 માટે

(a) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

(b) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

2.4 C ના ઉપગણ તરીકે R

વ્યાખ્યા પરથી પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની એક ક્રમયુક્ત જોડ છે. જે સંકર સંખ્યા (a, b) માં $b = 0$ હોય તેવી સંકર સંખ્યાઓના ગણને R' વડે દર્શાવીએ. આમ, $R' = \{(a, 0) \mid a \in R\}$. સ્પષ્ટ છે કે $R' \subset C$. R' ના કોઈ પણ બે ઘટકો $(a, 0)$ અને $(b, 0)$ માટે,

(1) $(a, 0) = (b, 0) \Leftrightarrow a = b$

(2) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in R'$

(3) $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \in R'$

આમ, R' ની કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો અને ગુણાકાર R' માં જ છે. વળી, R' ની બે સંખ્યાઓ $(a, 0)$ અને $(b, 0)$ નો સરવાળો કે ગુણાકાર કરવામાં વાસ્તવિક રીતે તો બે ક્રમયુક્ત જોડની પ્રથમ સંખ્યાઓ a અને b નો જ સરવાળો કે ગુણાકાર કરવાનો રહે છે. ક્રમયુક્ત જોડની બીજી સંખ્યા તો શૂન્ય જ રહે છે. ખરેખર, C ની માફક R' માં પણ સરવાળો તથા ગુણાકાર માટે સંવૃત્તતાના નિયમનું પાલન થાય છે. $(a, 0)$ પ્રકારની સંકર સંખ્યા ખરેખર તો વાસ્તવિક સંખ્યાની જેમ જ વર્તે છે. તેથી આપણે $(a, 0)$ ને a ની સાથે સંગત કરીશું અને $(a, 0) = a$ લખીશું. $(4, 0) = 4$, $(0, 0) = 0$ વગેરે. આ પ્રકારે આપણે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા a ને સંકર સંખ્યા $(a, 0)$ તરીકે જોઈ શકીએ. તેથી આપણે R' ને R તરીકે ઓળખી શકીએ તથા $R' = R \subset C$. આમ હવે $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. હવે, $(0, 0) = 0$, સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક, $(1, 0) = 1$ ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક મળે.

2.5 સંકર સંખ્યાનું $a + ib$ સ્વરૂપમાં નિરૂપણ

$(a, 0)$ ને a તરીકે લખવાથી આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યા (a, b) ને એક અન્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવીશું.

પ્રથમ આપણે એક મહત્ત્વની સંકર સંખ્યા $(0, 1)$ નો પરિચય મેળવીએ. તેને આપણે સંકેતમાં i વડે દર્શાવીશું. આમ, સંકર સંખ્યા $i = (0, 1)$.

હવે, $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. ઈ.સ. 1737 માં **ઓઈલરે (Euler)** પ્રથમ વખત સંકેત i રજૂ કર્યો, જ્યાં $i^2 = -1$. $i = (0, 1)$ ને **કાલ્પનિક સંખ્યા (Imaginary number)** કહે છે.

$$\begin{aligned} \text{હવે, } (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \qquad ((0, 1)(b, 0) = (0 - 0, 0 + b) = (0, b)) \\ &= a + ib \end{aligned}$$

$\therefore \quad (a, b) = a + ib$

આમ, પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા (a, b) ને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે, જ્યાં $a, b \in R$ અને $i^2 = -1$.

$\therefore \quad C = \{a + ib \mid a, b \in R\}$

ગુણાકાર વિશેના ક્રમના નિયમ પરથી, $ib = bi$.

$\therefore \quad a + ib$ ને $a + bi$ તરીકે પણ લખી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $(3, 5) = 3 + 5i$, $(0, 7) = 0 + 7i$, $(5, 0) = 5 + 0i = 5$

સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ માં a ને zનો **વાસ્તવિક ભાગ (real part)** કહે છે. તેને સંકેતમાં $Re(z)$ વડે દર્શાવાય છે. b ને z નો **કાલ્પનિક ભાગ (imaginary part)** કહે છે. તેને સંકેતમાં $Im(z)$ વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $z = a + ib = Re(z) + iIm(z)$. ઉદાહરણ તરીકે જો $z = 3 + 2i$, તો $Re(z) = 3$ અને $Im(z) = 2$.

આપણે નોંધીએ કે સંકર સંખ્યા zનો વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જ છે.

જો કોઈ સંકર સંખ્યાનો વાસ્તવિક ભાગ શૂન્ય હોય અને કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય ન હોય, તો તે સંકર સંખ્યાને **શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા (purely imaginary number)** કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $9i = 0 + 9i$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

હવે સંકર સંખ્યાઓ $a + bi$ સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે બૈજિક ક્રિયાઓની ચર્ચા કરીએ.

બે સંકર સંખ્યાઓની સમાનતા :

બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1 = a + bi$ અને $z_2 = c + di$ સમાન હોય એટલે કે $(a, b) = (c, d)$ તો $a = c$ તથા $b = d$.

જો $z = a + bi = 0 + 0i$ એટલે કે $(0, 0)$ હોય, તો $a = 0$ તથા $b = 0$.

ઉદાહરણ 1 : જો $3x + (3x - y)i = 4 + (-6)i$, જ્યાં $x, y \in R$ તો x અને y શોધો.

ઉકેલ : અહીં $3x + (3x - y)i = 4 + (-6)i$. જો $a + bi = c + di$ તો $a = c$ તથા $b = d$.

આથી $3x = 4$, $3x - y = -6$. સમીકરણો ઉકેલતાં, $x = \frac{4}{3}$, $y = 10$.

બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો :

ધારો કે $z_1 = a + bi$ તથા $z_2 = c + di$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. $z_1 = (a, b)$ અને $z_2 = (c, d)$ વચ્ચેનો સરવાળો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = a + c + (b + d)i$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + 2\sqrt{2}i) + (-3 + \sqrt{2}i) = (2 - 3) + (2\sqrt{2} + \sqrt{2})i$

$$= -1 + 3\sqrt{2}i$$

બે સંકર સંખ્યાઓનો તફાવત :

ધારો કે z_1 અને z_2 બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો તફાવત $z_1 - z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ધારો કે, $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$

$\therefore \quad -z_2 = (-c, -d)$

$$\begin{aligned}\therefore \quad z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2)\\ &= (a, b) + (-c, -d)\\ &= (a - c, b - d)\\ &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + \sqrt{3}i) - (-3 + 2\sqrt{3}i) = 2 - (-3) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})i$

$$= 5 - \sqrt{3}i$$

બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર :

ધારો કે $z_1 = a + bi$ અને $z_2 = c + di$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે.

$z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$

$\therefore \quad z_1z_2 = (ac - bd, ad + bc)$

$\therefore \quad z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + \sqrt{3}i)(-3 + \sqrt{3}i) = (2 \times (-3) - \sqrt{3}\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-3))i$

$= (-6 - 3) + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})i = -9 - \sqrt{3}i$

વિભાજનનો નિયમ તથા જૂથનો નિયમ હોવાથી આપણે બે કૌંસનો ગુણાકાર કરી સાદું રૂપ આપી શકીએ.

બે સંકર સંખ્યાઓનો ભાગાકાર :

ધારો કે z_1 અને z_2 બે સંકર સંખ્યાઓ છે, જ્યાં $z_2 \neq 0$. તેમનો ભાગાકાર $\frac{z_1}{z_2}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = z_1 \frac{1}{z_2}$

ખરેખર, $\frac{1}{z} = z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{6+3i}{10+8i} = (6 + 3i)(10 + 8i)^{-1}$

$= (6 + 3i)\frac{(10-8i)}{164}$

$= \frac{60+30i-48i-24i^2}{164}$

$= \frac{84-18i}{164}$ $\quad (i^2 = -1)$

$= \frac{21}{41} + \frac{(-9)}{82}i$

i ના ઘાતાંકો

સંકર સંખ્યાઓના પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે આપણે ઘાતાંકના નિયમો સત્ય છે તે સ્વીકારી લઈશું.

આપણે જાણીએ છીએ કે $i^2 = -1, i^3 = i^2i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i, i^6 = -1$ વગેરે.

યાદ રાખો, $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

વળી, $i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, i^{-2} = -1, i^{-3} = i, i^{-4} = 1$ વગેરે.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક k માટે, $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

ગણિતમાં ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમ (law of trichotomy) પ્રમાણે બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે $x < y$, $x = y$ અથવા $x > y$ પૈકી એક અને માત્ર એક જ વિકલ્પ શક્ય છે. આ ત્રિવિધ વિકલ્પનો નિયમ કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સરખામણી કરવા માટેનો છે. આ નિયમ સંકર સંખ્યાઓ માટે સાચો નથી. C માં ક્રમ નથી.

ઉદાહરણ 2 : કિંમત શોધો : (i) $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^2$ (ii) $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{1000}$

ઉકેલ : (i) $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^2 = \left[i^{16}i^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^{24}\left(\frac{1}{i}\right)\right]^2$

$= (-i - i)^2 = (-2i)^2 = -4$

(ii) $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{997} + i^{998} + i^{999} + i^{1000}$

$= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + ... + (i - 1 - i + 1)$ (250 કૌંસ સુધી)

$= 0 + 0 + ... + 0 = 0$

સંકર સંખ્યાની અનુબદ્ધ સંખ્યા :

જો $z = (a, b) = a + bi$ તો તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $a - bi = (a, -b)$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. તેને સંકેતમાં $\overline{z}$ વડે દર્શાવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$. આમ, કરણીની માફક $\overline{z}$ એ સંમેયકારક અવયવની જેમ વર્તે છે. $z\overline{z} = a^2 + b^2$ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી આપણે સંકર સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ને $\frac{p\overline{q}}{q\overline{q}}$ તરીકે દર્શાવી શકીએ. આમ કરવાથી છેદ $q\overline{q}$ વાસ્તવિક સંખ્યા બને. ચાલો આપણે આ સંકલ્પનાને કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 3 : નીચેની સંખ્યાઓને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, $a, b \in R$

(1) $\frac{(2 - 8i)(7 + 8i)}{1 + i}$ (2) $(3 + 4i)^{-1}$ (3) $\frac{(1 + i)^3}{4 + 3i}$ (4) $\frac{1}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$

ઉકેલ : (1) $\frac{(2 - 8i)(7 + 8i)}{1 + i} = \frac{14 + 16i - 56i - 64i^2}{1 + i}$

$= \frac{14 - 40i - 64}{1 - i}$ **($i^2 = -1$)**

$= \frac{78 - 40i}{1 - i}$

$= \frac{78 - 40i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$ **($1 + i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા વડે ગુણતાં અને ભાગતાં)**

$= \frac{78 - 78i - 40i + 40i^2}{1 - i^2}$

$= \frac{38 - 118i}{2}$

$= 19 - 59i$

(2) $(3 + 4i)^{-1} = \frac{1}{3 + 4i} = \frac{1}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{3 - 4i}{9 - 16} = \frac{3}{25} + i\left(-\frac{4}{25}\right)$

અથવા સીધી રીતે, $(3 + 4i)^{-1} = \frac{3 - 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$ **(z^{-1}નું સૂત્ર)**

(3) $\frac{(1 + i)^3}{4 + 3i} = \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3}{4 + 3i}$

$= \frac{1 + 3i - 3 - i}{4 + 3i}$

$= \frac{-2 + 2i}{4 + 3i}$

$= \frac{(-2 + 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)}$

$= \frac{-8 + 8i + 6i - 6i^2}{16 - 9}$

$= -\frac{2}{25} + \frac{14}{25}i$ **($i^2 = -1$)**

(4) $\frac{1}{1+cos\theta - isin\theta} = \frac{1}{1+cos\theta - isin\theta} \times \frac{1+cos\theta + isin\theta}{1+cos\theta + isin\theta}$

$$= \frac{1+cos\theta + isin\theta}{(1+cos\theta)^2 + sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+cos\theta + isin\theta}{1+cos^2\theta + 2cos\theta + sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+cos\theta + isin\theta}{2+2cos\theta}$$

$$= \frac{1+cos\theta}{2(1+cos\theta)} + i\frac{sin\theta}{2(1+cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{sin\theta}{2(1+cos\theta)}$$

નોંધ : પ્રકરણ 5 શીખ્યા પછી તમે $\frac{sin\theta}{1+cos\theta} = \frac{2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}{2cos^2\frac{\theta}{2}} = tan\frac{\theta}{2}$ લખી શકશો.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં સમીકરણોમાંથી $x, y \in R$ શોધો :

(1) $\frac{(1+i)x-2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y+i}{3-i} = i$ (2) $\frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0$

ઉકેલ : (1) $\frac{(1+i)x-2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y+i}{3-i} = i$

$\therefore$ $[x + (x-2)i](3-i) + [2y + (1-3y)i](3+i) = (3+i)(3-i)i$

(બંને બાજુએ $(3+i)(3-i)$ વડે ગુણતાં)

$\therefore$ $3x + (x-2) + [3(x-2) - x]i + 6y - (1-3y) + [2y + 3(1-3y)]i = (9+1)i$

$\therefore$ $(4x + 9y - 3) + (2x - 7y - 3)i = 10i$

$\therefore$ $4x + 9y - 3 = 0$ અને $2x - 7y - 3 = 10$ (સંકર સંખ્યાઓની સમાનતા)

$\therefore$ $4x + 9y - 3 = 0$ અને $2x - 7y - 13 = 0$

ઉપરની સમીકરણ સંહતિને ઉકેલતાં, $x = 3, y = -1$

(2) $\frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0$

$\therefore$ $iy(3x+y) - (3y+4i)(ix+1) = 0$ (બંને બાજુ $(ix+1)(3x+y)$ વડે ગુણતાં)

$\therefore$ $(-3y + 4x) + i(3xy + y^2 - 3xy - 4) = 0 + i0$

$\therefore$ $(-3y + 4x) + i(y^2 - 4) = 0 + i0$

$\therefore$ $-3y + 4x = 0$ અને $y^2 - 4 = 0$ ($a + bi = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$)

$y^2 - 4 = 0$ પરથી $y = \pm 2$.

$y = 2$ માટે $x = \frac{3}{2}$ તથા $y = -2$ માટે $x = -\frac{3}{2}$.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{\left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(-\frac{3}{2}, -2\right)\right\}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચેની સંકર સંખ્યાઓને $a + bi$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i)$ (2) $(2 - 3i)(-2 + i)$

(3) $(3 + i)(3 - i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right)$ (4) $\frac{4+i}{2-3i}$ ($(2 - 3i)^{-1}$નો ઉપયોગ કરીને)

(5) $\frac{1-2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$ (6) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

(7) $(1-i)^4$ (8) $\left[i^{17} - \left(\frac{1}{i}\right)^{34}\right]^2$

(9) $\left(\frac{4i^3-1}{2i+1}\right)^2$ (10) $\frac{(3+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}$

2. નીચેનાં સમીકરણોમાંથી $x, y \in R$ શોધો :

(1) $x + 4yi = xi + y + 3$

(2) $(4 + 5i)x + (3 - 2i)y + i^2 + 6i = 0$

(3) $\frac{x}{1-i} + \frac{y}{1 \cdot i} = 1 + 3i$

(4) $(x^4 + 2xi) - (3x^2 + yi) = (3 - 5i) + (1 + 2yi)$

(5) $(3x - 2yi)(2 + i)^2 = 10(1 + i)$

3. નીચેની સંકર સંખ્યાઓની વ્યસ્ત સંકર સંખ્યા મેળવો :

(1) $3 - 2i$ (2) $-1 + i\sqrt{3}$ (3) $\frac{4+3i}{5-3i}$ (4) $(2 - 3i)^2$ (5) $-i$

4. બતાવો કે, (1) $Re(iz) = -Im(z)$ (2) $Im(iz) = Re(z)$

5. ચકાસો કે સંકર સંખ્યાઓ $z = 1 \pm i$ એ સમીકરણ $z^2 - 2z + 2 = 0$ નો ઉકેલ છે.

*

2.6 અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા તથા સંકર સંખ્યાનો માનાંક

અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા : આપણે જાણીએ છીએ કે જો $z = a + bi$ તો $\overline{z} = a - bi$.

ઉદાહરણ તરીકે,

(1) જો $z = 3 + 5i$ તો $\overline{z} = 3 - 5i$

(2) જો $z - 5 - 3i$ તો $\overline{z} - 5 + 3i$

(3) જો $z = 3 = 3 + 0i$ તો $\overline{z} = 3 - 0i = 3$

(4) જો $z = 3i = 0 + 3i$ તો $\overline{z} = 0 - 3i = -3i$

અનુબદ્ધ સંખ્યાઓનાં કેટલાંક મૂળભૂત પરિણામો નોંધીએ.

કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ z, z_1, z_2 નીચેના ગુણધર્મો અસ્તિત્વ ધરાવે છે :

(1) $\overline{(\overline{z})} = z$ **(2)** $\frac{z+\overline{z}}{2} = Re(z)$

(3) $\frac{z-\overline{z}}{2i} = Im(z)$ **(4)** $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ **એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.**

(5) $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ **એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.**

(6) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$ **(7)** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

(8) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, **જ્યાં** $z_2 \neq 0$

ઉપરના ગુણધર્મોની સાબિતી સરળ છે. ચાલો, આપણે કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીએ :

ધારો કે $z = a + ib$

(1) $\overline{z} = a - ib$

$\therefore$ $\overline{(\overline{z})} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

(2) $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$ **($a = Re(z)$)**

$\therefore \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = Re(z)$

(3) $z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\, Im(z)$ **($b = Im(z)$)**

$\therefore \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = Im(z)$

(4) $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$

આમ, $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

સંકર સંખ્યાનો માનાંક :

સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ નો માનાંક, નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

z નો માનાંક = $\sqrt{a^2 + b^2}$. z ના માનાંક માટેનો સંકેત $|\, z \,|$ છે.

$\therefore \quad |\, z \,| = \sqrt{a^2 + b^2}$, જ્યાં $z = a + bi$

આપણે નોંધીએ કે, $|\, z \,|$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને $|\, z \,| \geq 0 \quad \forall z \in C.$

ઉદાહરણ તરીકે, જો $z = 3 + 4i$ હોય તો,

$|\, z \,| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

જો z વાસ્તવિક સંખ્યા હોય (એટલે કે $z = a + 0i$) તો, $|\, z \,| = \sqrt{a^2} = |\, a \,|$ જ્યાં z નો માનાંક $|\, z \,|$ એ સંકર સંખ્યાનો માનાંક છે અને a નો માનાંક $|\, a \,|$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો માનાંક છે. (આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\sqrt{a^2} = |\, a \,|$).

સંકર સંખ્યાના માનાંકના ગુણધર્મો :

(1) $|\, z \,| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|\, z \,| \geq |\, Re(z) \,|,\ |\, z \,| \geq |\, Im(z) \,|$

(3) $z\bar{z} = |\, z \,|^2$

(4) $|\, z \,| = |\, \bar{z} \,|$

(5) $|\, z \,| = |\, -z \,|$

(6) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|\, z_2 \,|^2}$, જ્યાં $z_2 \neq 0$

(7) $|\, z_1 z_2 \,| = |\, z_1 \,|\, |\, z_2 \,|$

(8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|\, z_1 \,|}{|\, z_2 \,|}$, જ્યાં $z_2 \neq 0$

(9) $|\, z_1 + z_2 \,| \leq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|$ **(ત્રિકોણીય અસમતા) (શા માટે ત્રિકોણીય ?)**

(10) $|\, z_1 - z_2 \,| \geq \big|\, |\, z_1 \,| - |\, z_2 \,| \,\big|$

ચાલો આપણે ઉપરના પૈકી કેટલાક ગુણધર્મો ચકાસીએ :

(1) $|\, z \,| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ તથા $b = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|\, z \,|^2 = a^2 + b^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \geq (Re(z))^2$

$\therefore \quad |\, z \,| \geq |\, Re(z) \,|$. તે જ રીતે $|\, z \,| \geq |\, Im(z) \,|$

(3) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\, z \,|^2$

(4) $|\, z \,| = |\, a + ib \,| = \sqrt{a^2 + b^2}$ અને $|\, \bar{z} \,| = |\, a - bi \,| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

તેથી $|\, z \,| = |\, \bar{z} \,|$.

(7) $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2})$

$= (z_1z_2)(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$

$= (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})$

$= |z_1|^2 |z_2|^2$

$\therefore\ |z_1z_2| = |z_1||z_2|$

(9) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$

$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}$ $\quad (\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}|$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

$\therefore\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(10) $z_1 - z_2 + z_2 = z_1$

$\therefore\ |z_1 - z_2 + z_2| = |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$

$\therefore\ |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

તે જ રીતે, $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$

પરંતુ, $|z_1| - |z_2|$ અથવા $|z_2| - |z_1| = ||z_1| - |z_2||$. (જો $a \in R$ તો $|a| = a$ or $-a$)

$\therefore\ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ એટલે કે $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

ઉદાહરણ 5 : નીચેની સંખ્યાઓની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા તથા માનાંક શોધો : (1) $(2 - 3i)^2$ (2) $\frac{-3+7i}{1+i}$

ઉકેલ : (1) $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$\therefore$ $(2 - 3i)^2$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $-5 + 12i$ છે અને

$|(2 - 3i)^2| = |2 - 3i|^2 = 4 + 9 = 13$

(2) ધારો કે $z = \frac{-3+7i}{1+i}$

$= \frac{-3+7i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$

$= \frac{-3+3i+7i+7}{1-i^2}$ $\quad (i^2 = -1)$

$= \frac{4+10i}{2} = 2 + 5i$

$\therefore\ \overline{z} = 2 - 5i$ અને $|z| = \sqrt{2^2 - 5^2} = \sqrt{29}$

અથવા $|z| = \frac{|-3+7i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{49-9}}{\sqrt{2}} = \sqrt{29}$

ઉદાહરણ 6 : જો $z = x + yi$ અને $| 3z | = | z - 4 |$, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 + x = 2$

ઉકેલ : અહીં $| 3z | = | z - 4 |$

$\therefore \quad | 3x + 3yi | = | (x - 4) + yi |$

$\therefore \quad 3\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

$\therefore \quad 9(x^2 + y^2) = (x - 4)^2 + y^2$

$\therefore \quad 9x^2 + 9y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

$\therefore \quad 8x^2 + 8x + 8y^2 = 16$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + x = 2$

ઉદાહરણ 7 : જો $z_1 = 3 + 4i$ અને $z_2 = 12 - 5i$ તો ચકાસો કે

(1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ (2) $| z_1 + z_2 | < | z_1 | + | z_2 |$ (3) $| z_1 z_2 | = | z_1 || z_2 |$

અહીં, $z_1 = 3 + 4i$ અને $z_2 = 12 - 5i$

(1) $z_1 z_2 = (3 + 4i)(12 - 5i) = 36 - 15i + 48i - 20i^2$

$= 36 - 15i + 48i + 20$

$= 56 + 33i$

$\therefore \quad \overline{z_1 z_2} = 56 - 33i$

હવે, $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (3 - 4i)(12 + 5i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 = 56 - 33i$

આમ, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ ચકાસી શકાય છે.

(2) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 12 - 5i = 15 - i$

$\therefore \quad | z_1 + z_2 | - \sqrt{225 + 1} - \sqrt{226}$

વળી, $| z_1 | = \sqrt{9 + 16} = 5$, $| z_2 = \sqrt{144 + 25} = 13$

આમ, $| z_1 | + | z_2 | = 5 + 13 = 18 = \sqrt{324}$

સ્પષ્ટ છે કે $\sqrt{226} < \sqrt{324}$

આમ, $| z_1 + z_2 | < | z_1 | + | z_2 |$ ચકાસી શકાય છે.

(3) $| z_1 z_2 | = \sqrt{56^2 + 33^2} = \sqrt{3136 + 1089} = \sqrt{4225} = 65$ **((1) પરથી)**

વળી, $| z_1 || z_2 | = 5 \cdot 13 = 65$

આમ, $| z_1 z_2 | - | z_1 || z_2 |$ ચકાસી શકાય છે.

ઉદાહરણ 8 : (1) જો $z \in C$ અને $| z + 3 | \le 8$, તો $| z - 2 |$ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

(2) જો $z \in C$ અને $| z - 4 | \le 4$, તો $| z + 1 |$ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

ઉકેલ : (1) અહીં $| z + 3 | \le 8$

$z - 2 = | (z + 3) - 5 | \le | z + 3 | + | -5 |$ **(ત્રિકોણીય અસમતા)**

$\le 8 + 5 = 13$

$\therefore \quad | z - 2 | \le 13$

જો આપણે $z = -11$ લઈએ, તો $|z+3| = |-11+3| = 8$ અને $|z-2| = 13$

$\therefore$ $|z+3| \le 8$ શરતને આધીન $|z-2|$ની મહત્તમ કિંમત 13 થાય. ($z = -11$ માટે)

હવે, $|z-2| \ge 0$ એ હંમેશાં સત્ય છે.

$z = 2$ માટે $|z+3| \le 8$ સત્ય છે અને $|z-2| = 0$.

$|z+3| \le 8$ શરતને આધીન $|z-2|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 0 થાય. ($z = 2$ માટે)

(2) અહીં $|z-4| \le 4$

$$|z+1| = |(z-4)+5| \le |z-4| + |5| \le 4+5 = 9$$ (ત્રિકોણીય અસમતા)

$$\therefore \ |z+1| \le 9$$

જો આપણે $z = 8$ લઈએ, તો $|z-4| = 4$ અને $|z+1| = 9$.

$\therefore$ $|z-4| \le 4$ શરતને આધીન $|z+1|$ની મહત્તમ કિંમત 9 છે. ($z = 8$ માટે)

હવે, $|z+1| \ge 0$. જો આપણે $z = -1$ લઈએ તો $|z+1| = 0$ થાય.

પરંતુ $|z-4| = |-1-4| = 5 \nleq 4$.

આમ, $z = -1$ માટે $|z-4| \le 4$ શરતનું પાલન થતું નથી.

હવે, $|z+1| = |(z-4)+5| = |(z-4)-(-5)| \ge ||z-4| - |-5||$

($|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$)

$$\ge 5 - 4 = 1$$

$\therefore$ $|z+1| \ge 1$

જો આપણે $z = 0$ લઈએ, તો $|z-4| = 4$ અને $|z+1| = 1$.

$\therefore$ $|z-4| \le 4$ શરતને આધીન $|z+1|$ની ન્યૂનતમ કિંમત 1 થાય. ($z = 0$ માટે)

ઉદાહરણ 9 : $z \in C$ માટે $\frac{z-1}{z+1}$ $(z \neq -1)$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોય તો બતાવો કે, $|z| = 1$.

ઉકેલ : ધારો કે $z = x + iy$.

$$\therefore \ \frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

$\frac{z-1}{z+1}$ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોવાથી, $Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

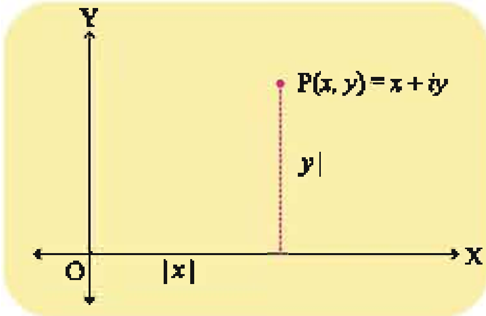
$$\therefore \ \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

$$\therefore \ x^2 + y^2 = 1$$

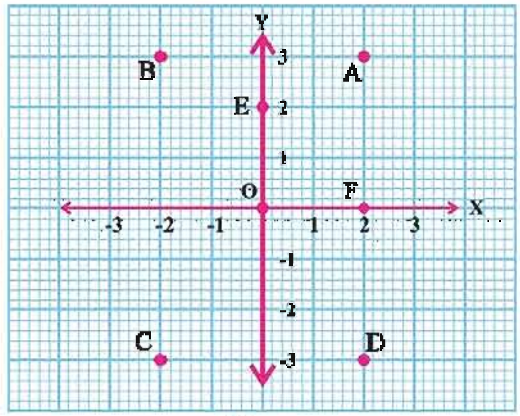
$\therefore$ $|z| = 1$. ($|z| = \sqrt{x^2+y^2}$)

2.7 આર્ગન્ડ આકૃતિ અને ધ્રુવીય સ્વરૂપ

ઐતિહાસિક રીતે જોતાં સંકર સંખ્યાનું સમતલના બિંદુ તરીકેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ ઉપયોગી છે, કારણ કે સંકર સંખ્યાને R^2 માં ક્રમયુક્ત જોડ તરીકે દર્શાવવાથી તેની સાથે ભૂમિતિની સંકલ્પનાને જોડી શકાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ અને XY-સમતલનાં બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) ને XY-સમતલના અનન્ય બિંદુ $P(x, y)$ તરીકે ભૌમિતિક રીતે દર્શાવી શકાય તેમજ XY-સમતલના બિંદુ $P(x, y)$ ને સંગત અનન્ય સંકર સંખ્યા $x + iy$ મળે. (જુઓ આકૃતિ 2.1.)



આકૃતિ 2.1



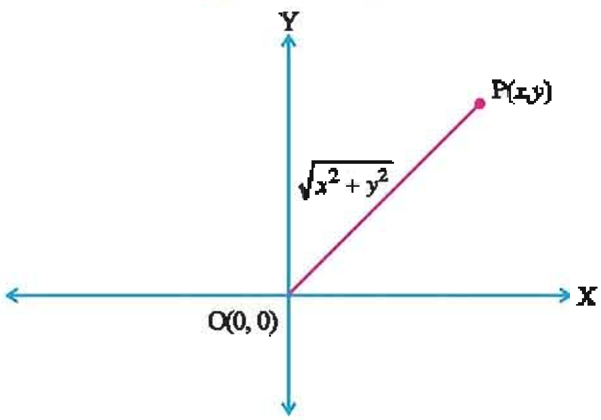
આકૃતિ 2.2

સંકર સંખ્યાઓ જેવી કે $2 + 3i$, $-2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $0 + 2i$, $2 + i0$ એટલે કે ક્રમયુક્ત જોડ (2, 3), (−2, 3), (−2, −3), (2, −3), (0, 2), (2, 0) ને સંગત બિંદુઓ અનુક્રમે A, B, C, D, E, F આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવેલ છે.

યામ સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને અનન્ય સંકર સંખ્યા સાથે સંગત કરી શકાય છે અને તેને **સંકર સમતલ (Complex plane)** અથવા **આર્ગન્ડ સમતલ (Argand plane)** કહેવાય છે. X-અક્ષ પરના બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા $a + i0$ (વાસ્તવિક સંખ્યા) સ્વરૂપમાં હોય છે અને Y-અક્ષ પરનાં બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા $0 + ib$ (શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા) સ્વરૂપમાં હોય છે. આર્ગન્ડ સમતલમાં X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે વાસ્તવિક અક્ષ તથા કાલ્પનિક અક્ષ કહેવાય છે.

(**જેન રોબર્ટ આર્ગન્ડ (Jean-Robert Argand)** (1768 - 1822) એક પ્રતિભાશાળી ગણિતજ્ઞ હતો. 1806 માં જ્યારે તે પેરિસમાં એક પુસ્તકની દુકાન સંભાળતો હતો ત્યારે તેણે સંકર સંખ્યાઓના ભૌમિતિક નિરૂપણનો ખ્યાલ આપ્યો. તે નિરૂપણને આપણે આર્ગન્ડ આકૃતિ તરીકે ઓળખીએ છીએ.)

સંકર સંખ્યાના માનાંકનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :

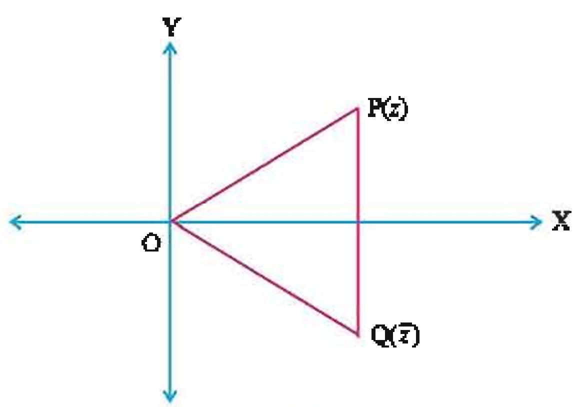


આકૃતિ 2.3

આર્ગન્ડ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સંકર સંખ્યા $x + iy$ નો માનાંક એ ઊગમબિંદુ O(0,0) થી P(x,y) વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે. (આકૃતિ 2.3)

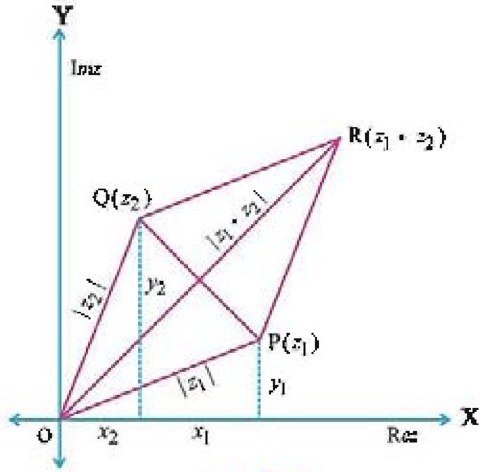
અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ અને તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\bar{z} = x - iy$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં અનુક્રમે બિંદુઓ P(x,y) અને Q(x,−y) વડે દર્શાવાય છે. ભૌમિતિક રીતે બિંદુ Q(x,−y) ને બિંદુ P(x,y) નું વાસ્તવિક અક્ષને સાપેક્ષ **આરસી પ્રતિબિંબ (Mirror Image)** કહેવાય છે. (આકૃતિ 2.4)



આકૃતિ 2.4

બે સંકર સંખ્યાઓના સરવાળાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :



આકૃતિ 2.5

આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આર્ગન્ડ સમતલમાં P, Q તથા R અનુક્રમે z_1, z_2 તથા $z_1 + z_2$ દર્શાવે છે, જ્યાં $z_1 = x_1 + iy_1$ તથા $z_2 = x_2 + iy_2$ છે. $\overline{OR}$ તથા $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ છે.

$\therefore$ $\overline{OR}$ તથા $\overline{PQ}$ પરસ્પર દુભાગે છે.

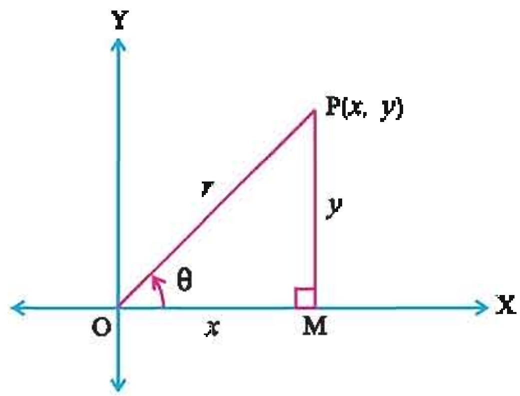
$\therefore$ OPRQ સ.બા.ચ. છે.

વળી, O, P, Q સમરેખ નથી એમ ધારી લેવામાં આવ્યું છે.

ભૌમિતિક રીતે અનુક્રમે z_1, z_2 અને $z_1 + z_2$ ના માનાંક $|z_1| = OP$, $|z_2| = OQ = PR$ અને $|z_1 + z_2| = OR$. છે. આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણની બે બાજુઓના માપનો સરવાળો તેની ત્રીજી બાજુના માપ કરતા મોટો હોય છે. તેથી ΔORP માં $OR < OP + PR$. આથી $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$. આ કારણથી સંકર સંખ્યાઓની આ અસમતાને ત્રિકોણીય અસમતા કહે છે. (ખરેખર તો ત્રિકોણીય અસમતા $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ છે. તેમાં સમાનતા ક્યારે થાય ?)

સંકર સંખ્યાનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ :

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ને બીજા એક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. તેને સંકર સંખ્યાનું **ધ્રુવીય સ્વરૂપ (Polar form)** કહેવાય છે. ચાલો આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યાને તેના ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે સમજીએ. ધારો કે સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં બિંદુ $P(x, y)$ વડે દર્શાવી છે. (આકૃતિ 2.6) $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{OX}$ દોરો. $M \in \overleftrightarrow{OX}$ માટે $OM = x$ અને $PM = y$. ધારો કે $OP = r$ અને $m\angle MOP = \theta$. તો $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$.



આકૃતિ 2.6

નોંધ : અહીં P પ્રથમ ચરણમાં છે તથા $x > 0$, $y > 0$ છે. પરંતુ જો $P(x, y)$ આર્ગન્ડ સમતલનું ઊગમબિંદુ સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો પણ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ સત્ય છે.

$\therefore \quad z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

અહીં, $r^2 = x^2 + y^2$. $\qquad (r = OP > 0)$

$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (r > 0)$

$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ અને $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ના $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ સ્વરૂપને તેનું **ધ્રુવીય સ્વરૂપ (Polar Form)** કહેવાય છે. θ ને z નો **કોણાંક (Argument)** કહે છે, તેને સંકેતમાં **arg(z)** વડે દર્શાવાય છે. *sine* અને *cosine* વિધેયો આવર્તી હોવાથી $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$ નું સમાધાન કરે તેવી θ ની ઘણી કિંમતો મળે. આવો દરેક θ એ z નો કોણાંક છે. $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$ નું સમાધાન કરતી θ ની અનન્ય કિંમત $-\pi < \theta \le \pi$ માં આવેલી હોય તે કિંમતને z નો **મુખ્ય કોણાંક**

(Principal argument) કહેવાય છે. જ્યારે આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યાને તેના ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ ત્યારે **arg(z) ને મુખ્ય કોણાંક** જ લઈશું. જો અન્યથા દર્શાવેલ ન હોય તો સંકેત arg(z) નો અર્થ arg(z) નો મુખ્ય કોણાંક. જ્યારે આપણે arg(z) ની કિંમત શોધીએ ત્યારે બિંદુ $P(x, y)$નું સ્થાન સમતલમાં ક્યાં આવેલું છે તેનું ધ્યાન રાખવું જોઈએ.

આપણે નોંધીએ કે, **સંકર સંખ્યા 0 નો કોણાંક વ્યાખ્યાયિત નથી. (કેમ ?)**

$$arg(x + i0) = \begin{cases} 0, & \text{જો } x > 0 \\ \pi, & \text{જો } x < 0 \end{cases} \qquad arg(0 + iy) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{જો } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{જો } y < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાનો મુખ્ય કોણાંક 0 અને ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો મુખ્ય કોણાંક π છે. તે જ રીતે શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા yi નો મુખ્ય કોણાંક $y > 0$ માટે $\frac{\pi}{2}$ છે અને $y < 0$ માટે $-\frac{\pi}{2}$ છે.

વળી, $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$ તથા $-\pi < \theta \le \pi$.

(i) જો $x > 0, y > 0$ તો, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ થાય તેવો θ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$.

(ii) જો $x < 0, y > 0$ તો α શોધો કે જેથી $cos\alpha = \frac{|x|}{r}$, $sin\alpha = \frac{|y|}{r}$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\theta = \pi - \alpha$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$.

(ii) જો $x < 0, y < 0$ તો α શોધો કે જેથી $cos\alpha = \frac{|x|}{r}$, $sin\alpha = \frac{|y|}{r}$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\theta = -\pi + \alpha$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$

(iv) જો $x > 0, y < 0$ તો α શોધો કે જેથી $cos\alpha = \frac{|x|}{r}$, $sin\alpha = \frac{|y|}{r}$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\theta = -\alpha$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$.

ઉદાહરણ 10 : નીચેની સંકર સંખ્યાઓને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરો. દરેકના માનાંક તથા મુખ્ય કોણાંક પણ મેળવો :

(1) $1 + i$ (2) $-1 + \sqrt{3}i$ (3) $-\sqrt{3} - i$ (4) $1 - i$

(5) -3 (6) $-2i$ (7) 1 (8) $2i$

ઉકેલ : (1) ધારો કે $z = 1 + i = x + iy$

$\therefore$ $x = 1, y = 1$

$\therefore$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ તથા $sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $P(\theta)$ નું સ્થાન પ્રથમ ચરણમાં છે.

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ z નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$ છે.

$|z| = r = \sqrt{2}$, $arg\, z = \theta = \frac{\pi}{4}$.

(2) ધારો કે $z = -1 + \sqrt{3}i = x + iy$

$\therefore$ $x = -1, y = \sqrt{3}$.

$\therefore$ $r = |z| = \sqrt{1 + 3} = 2$

$cos\theta = \frac{-1}{r} = \frac{-1}{2}$ અને $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $cos\alpha = \frac{1}{2}$, $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($| x | = 1, | y | = \sqrt{3}$)

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $x < 0$ તથા $y > 0$ હોવાથી, $P(\theta)$ દ્વિતીય ચરણમાં છે.

$\therefore$ $\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ z નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(cos\frac{2\pi}{3} - isin\frac{2\pi}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ $| z | = r = 2$, $arg\, z = \theta = \frac{2\pi}{3}$.

(3) ધારો કે $z = -\sqrt{3} - i = x + iy$

$\therefore$ $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$

$\therefore$ $r = | z | = \sqrt{3+1} = 2$

$cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ અને $sin\theta = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\alpha = \frac{1}{2}$ ($| x | = \sqrt{3}, | y | = 1$)

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $x < 0$ તથા $y < 0$ હોવાથી, $P(\theta)$ ત્રીજા ચરણમાં છે.

$\theta = -\pi + \alpha = -\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6}$

$\therefore$ z નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

વળી, $| z | = r = 2$, $arg\, z = \theta = \frac{-5\pi}{6}$.

(4) ધારો કે $z = 1 - i = x + iy$

$\therefore$ $x = 1$, $y = -1$

$\therefore$ $r = | z | = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($| x | = 1, | y | = 1$)

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $x > 0$ તથા $y < 0$ હોવાથી, $P(\theta)$ ચતુર્થ ચરણમાં છે.

$\therefore$ $\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ z નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

વળી, $| z | = r = \sqrt{2}$, $arg\, z = \theta = -\frac{\pi}{4}$.

(5) ધારો કે $z = -3$. અહીં $z = x + i0$ તથા $x < 0$.

આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = 3(cos\pi + i\, sin\pi)$ થાય.

વળી, $| z | = 3$, $arg\, z = \theta = \pi$.

(6) ધારો કે $z = -2i$. અહીં $z = 0 + iy$ તથા $y < 0$. આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ
$2\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ થાય.
વળી, $| z | = 2$, $arg\ z = \theta = -\frac{\pi}{2}$.

(7) ધારો કે $z = 1$. અહીં $z = x + i0$ તથા $x > 0$. આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $1(cos0 + isin0)$ થાય.
વળી, $| z | = 1$, $arg\ z = \theta = 0$.

(8) ધારો કે $z = 2i$. અહીં $z = 0 + iy$ તથા $y > 0$. આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(cos\frac{\pi}{2} \cdot isin\frac{\pi}{2}\right)$ થાય.
વળી, $| z | = 2$, $arg\ z = \theta = \frac{\pi}{2}$.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચેની સંકર સંખ્યાઓના માનાંક તથા મુખ્ય કોણાંક શોધો :

(1) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (2) $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2$ (3) $\sqrt{3} - i$ (4) $\frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{1-i}$ (5) $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$

2. જો $z = 3 + 2i$, તો નીચેનાં પરિણામ ચકાસો.

(1) $| z | = | \bar{z} |$ (2) $-| z | \le Re(z) \le | z |$ (3) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

3. જો $z_1 = 3 + 2i$ અને $z_2 = 2 - i$, તો નીચેનાં પરિણામ ચકાસો :

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ (3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ (4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4. જો z એ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા હોય, તો બતાવો કે $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

5. જો $(a + ib)^2 = \frac{1+i}{1-i}$, હોય તો બતાવો કે $a^2 + b^2 = 1$.

6. z_1 અને z_2 એવી સંકર સંખ્યાઓ છે કે જેથી $| z_1 | = | z_2 |$. તો $z_1 = z_2$ સાબિત થાય ? કેમ ?

7. જો સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ માટે, $arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ તો સાબિત કરો કે, $a^2 + b^2 - 2b = 1$.

8. જો $z \in C$, $| z | \le 3$ હોય તો $| 1 + z + z^2 + z^3 |$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

9. (1) જો $z = a + ib$ અને $2|z - 1| = | z - 2 |$, તો સાબિત કરો કે $3(a^2 + b^2) = 4a$

(2) જો $z \in C$ હોય, અને $| 2z - 3 | = | 3z - 2 |$, તો સાબિત કરો કે $| z | = 1$.

(3) જો $z \in C$ હોય, અને $| 2z - 1 | = | z - 2 |$, તો સાબિત કરો કે $| z | = 1$.

10. સાબિત કરો કે સંકર સંખ્યા $-3 + 2i$ એ $1 + 4i$ કરતાં ઊગમબિંદુથી વધુ નજીક છે.

11. સંખ્યાઓ $-2 + 3i$, $-2 - i$ અને $4 - i$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં દર્શાવો અને સાબિત કરો કે તે કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

12. જેનો માનાંક 4 અને મુખ્ય કોણાંક $\frac{5\pi}{6}$ હોય તેવી સંકર સંખ્યા શોધો.

13. જો z_1 અને z_2 એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા હોય તથા $(1 - 5i)z_1 - 2z_2 = 3 - 7i$ હોય, તો z_1 અને z_2 શોધો.

14. જો $(a + ib)^2 = x + iy$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$.

15. જો $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x + iy$ હોય, તો $x + y$ની કિંમત શોધો.

*

2.8 સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ

જો $(a + ib)^2 = z = x + iy$, તો આપણે $a + ib$ ને $z = x + iy$ નું વર્ગમૂળ કહીશું.

ધારો કે $z = x + iy$. ધારો કે z નું વર્ગમૂળ સંકર સંખ્યા $a + ib$ છે. (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો)

$\therefore \quad x + iy = (a + ib)^2$

$\therefore \quad x + iy = (a^2 - b^2) + (2ab)i$

$\therefore \quad a^2 - b^2 = x$ અને $2ab = y$ **(i)**

હવે, $a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ **((i) પરથી) (ii)**

(i) અને (ii) પરથી $2a^2 = |z| + x$ એટલે કે, $a = \pm\sqrt{\frac{|z| + x}{2}}$ અને $b = \pm\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}$

જો $y > 0$, તો a અને b બંને ધન અથવા બંને ઋણ

$\therefore \quad x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$

જો $y < 0$, તો a અને b પૈકી એક ધન અને બીજો ઋણ હોય.

$\therefore \quad x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$ થાય.

હવે, આપણે સાબિત કર્યું કે દરેક સંકર સંખ્યાને બે વર્ગમૂળ મળે છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ મેળવો : (1) $\sqrt{3} - i$ (2) $7 + 24i$

ઉકેલ : (1) : ધારો કે $z = \sqrt{3} - i$. અહીં $x = \sqrt{3}$ તથા $y = -1 < 0$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $y < 0$ હોય તો $x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$

આમ, $\sqrt{3} - i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}\right)$.

હવે, $2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{3} - i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$ છે. **($\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ લીધાં છે.)**

(2) ધારો કે $z = 7 + 24i$. અહીં $x = 7$, $y = 24 > 0$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $y > 0$, હોય તો $x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$

આમ, $7 + 24i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{25 + 7}{2}} + i\sqrt{\frac{25 - 7}{2}}\right) = \pm(4 + 3i)$ છે.

ઉદાહરણ 12 : નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ શોધો : (1) 1 (2) -1 (3) i (4) $-i$

(1) ધારો કે $z = 1$

$\therefore \quad |z| = 1$, ધારો કે z નું વર્ગમૂળ $a + ib$ છે.

$\therefore \quad (a + ib)^2 = 1$

$\therefore \quad a^2 - b^2 + 2abi = 1 = 1 + 0i$

$\therefore$ $a^2 - b^2 = 1$, $2ab = 0$. $2ab = 0$ પરથી $a = 0$ અથવા $b = 0$.

$a = 0$ પરથી $-b^2 = 1$. પરંતુ $b \in$ R હોવાથી તે શક્ય નથી.

$\therefore$ $2ab = 0$ પરથી $b = 0$. આમ $a^2 - b^2 = 1$ માં $b = 0$ લેતાં,

$a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \pm 1$

$\therefore$ $a + ib = \pm 1$

$\therefore$ 1 નાં વર્ગમૂળ ± 1 છે.

નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે, R માં 1 નાં વર્ગમૂળ ± 1 છે.

(2) ધારો કે $z = -1$. ધારો કે z નું વર્ગમૂળ $a + ib$ છે.

$\therefore$ $(a + ib)^2 = -1$

$\therefore$ $a^2 - b^2 + 2abi = -1$

$\therefore$ $a^2 - b^2 = -1$, $2ab = 0$

$2ab = 0$ પરથી $a = 0$ અથવા $b = 0$

પરંતુ $b = 0$ પરથી $a^2 = -1$ જે $a \in$ R માટે શક્ય નથી.

$\therefore$ $a = 0$ અને $b^2 = 1$

$\therefore$ $b = \pm 1$

$\therefore$ -1 નાં વર્ગમૂળ $\pm i$ છે. (જે આપણી ધારણા મુજબ યથાર્થ છે, કારણ કે $i^2 = -1$)

યાદ રાખો કે $i^2 = -1$.

તે જ રીતે -4 નાં વર્ગમૂળ $\pm 2i$

-3 નાં વર્ગમૂળ $\pm\sqrt{3}i$

(3) ધારો કે i નું વર્ગમૂળ $a + ib$ છે.

$\therefore$ $(a + ib)^2 = i$

$\therefore$ $a^2 - b^2 + 2iab = i$

$\therefore$ $a^2 - b^2 = 0$ અને $2ab = 1$

$\therefore$ $a = b$ અથવા $a = -b$

પરંતુ $a = -b$ પરથી $-2a^2 = 1$ કારણ કે $2ab = 1$. આ શક્ય નથી.

$\therefore$ $a = b$ અને $2a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ તથા $a = b$ હોવાથી $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ i નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

(4) $z = -i$ આગળ (3)ની જેમ $a^2 - b^2 = 0$, $2ab = -1$

$\therefore$ $a = b$ અથવા $a = -b$

જો $a = b$ તો $2a^2 = -1$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ $a = -b$ તથા $2a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ અથવા $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $-i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ છે.

2.9 સંકર બીજ ધરાવતાં દ્વિઘાત સમીકરણો

આપણે દ્વિઘાત સમીકરણોનો અભ્યાસ કરી ગયાં. જ્યારે વિવેચક અનૃણ હોય એટલે કે $D \geq 0$ હોય ત્યારે તેમના ઉકેલોની ચર્ચા કરી હતી. હવે આપણે અનુત્તર પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકીશું. $D < 0$ હોય તો શું ?

આપણે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b\ c \in R$, $a \neq 0$ નો ઉકેલ જ્યારે $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય ત્યારે મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac)$$

$$= \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b^2}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}\right]$$

જો $ax^2 + bx + c = 0$ તો $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$

હવે, $b^2 - 4ac < 0$.

$\therefore$ $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$નું વર્ગમૂળ એ $\frac{b^2 - 4ac}{4}$ નું વર્ગમૂળ છે, જે $\frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2}$ છે.

$$\therefore \quad ax + \frac{b}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad (a \neq 0)$$

આમ, જો $D < 0$ હોય, તો $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$ છે.

બીજગણિતનો મૂળભૂત પ્રમેય :

સંકર સહગુણકોવાળા અને એક અથવા એક કરતાં વધારે ઘાતવાળા દરેક બહુપદીય સમીકરણને ઓછામાં ઓછું એક સંકર બીજ હોય છે.

ઉદાહરણ 13 : ઉકેલો : (1) $x^2 + 3 = 0$ (2) $2x^2 + x + 1 = 0$ (3) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$.

ઉકેલ : (1) $x^2 + 3 = 0$

$\therefore$ $x^2 = -3$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{3}i$

(2) અહીં, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$

$\therefore$ $b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલ, $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$

(3) અહીં, $a = \sqrt{3}$, $b = -\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{3}$

$\therefore$ $b^2 - 4ac = 2 - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2 - 36 = -34 < 0$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલ, $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \pm \sqrt{17}i}{\sqrt{6}}$

2.10 1 નાં ઘનમૂળ

ધારો કે z એ 1નું ઘનમૂળ છે.

$\therefore$ $z^3 = 1$

$\therefore$ $z^3 - 1 = 0$

$\therefore \quad (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

$\therefore \quad z = 1$ અથવા $z^2 + z + 1 = 0$

$\therefore \quad z = 1$ અથવા $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\qquad (a = 1, b = 1, c = 1, D = -3)$

આમ, 1 નાં ઘનમૂળ 1, $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ છે.

1 નાં ઘનમૂળના ગુણધર્મો :

(1) 1 નાં બંને અવાસ્તવિક ઘનમૂળ એકબીજાના વર્ગ બરાબર છે.

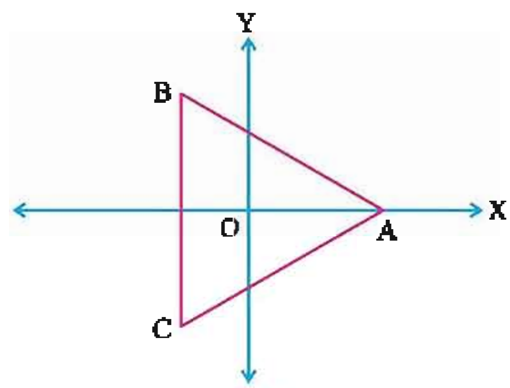
ધારો કે $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$. તો $\omega^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2) = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

વળી, $(\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3\omega = \omega$. આમ, 1નાં ઘનમૂળ 1, ω, ω^2 છે.

(2) આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે 1 ના ત્રણેય ઘનમૂળનો સરવાળો 0 થાય છે. એટલે કે $1 + \omega + \omega^2 = 0$

(3) સહેલાઈથી ચકાસી શકાય છે કે 1ના ત્રણેય ઘનમૂળનો ગુણાકાર 1 થાય. એટલે કે $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$

(4) જો 1, $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં અનુક્રમે A, B, C વડે દર્શાવવામાં આવે તો A(1, 0), $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ અને $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. આપણે નોંધીએ કે AB = BC = AC = $\sqrt{3}$. તેથી A, B, C એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ થશે. (આકૃતિ 2.7)



આકૃતિ 2.7

સ્વાધ્યાય 2.3

1. ઉકેલો :

(1) $x^2 + 2 = 0$ (2) $x^2 + x + 1 = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

(4) $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ (5) $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$ (6) $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

2. નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ મેળવો :

(1) $4 + 4\sqrt{3}i$ (2) $5 - 12i$ (3) $-48 + 14i$ (4) $3 - 4\sqrt{10}\,i$

(5) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6}$ (6) $4i$ (7) $-16i$ (8) -25 (9) -10

3. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ક્યારે થાય ? તમારું અનુમાન સાબિત કરો.

4. આર્ગન્ડ આકૃતિમાં જો બિંદુ Pને z દ્વારા તથા બિંદુ Qને iz દ્વારા દર્શાવવામાં આવે તો સાબિત કરો કે OP = OQ અને $m\angle POQ = \frac{\pi}{2}$. ભૌમિતિક અર્થઘટન પણ કરો.

5. આર્ગન્ડ આકૃતિમાં બિંદુઓ z, iz, $-z$ તથા $-iz$ એ ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ સાબિત કરો.

6. આર્ગન્ડ આકૃતિમાં z અને $\bar{z}$ વચ્ચે ક્યો સંબંધ છે ?

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 14 : $\overline{z} = z^2$ શરતનું પાલન કરતી બધી સંકર સંખ્યાઓ z શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $z = x + iy$, $\overline{z} = z^2$

$\therefore \quad x - iy = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

સંકર સંખ્યાઓની સમાનતાની વ્યાખ્યા અનુસાર $x = x^2 - y^2$ અને $-y = 2xy$

બીજા પરિણામ પરથી, $y = 0$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$.

પ્રથમ ધારો કે $y = 0$.

$x = x^2 - y^2$ પરથી $x = x^2$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = 1$.

$\therefore \quad z = 0$ અથવા $z = 1$. **($y = 0$ છે.)**

હવે, જો $x = -\frac{1}{2}$, તો $-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$ **($x = x^2 - y^2$)**

$\therefore \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

આમ, $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

પરિણામે $\overline{z} = z^2$ શરતનું પાલન કરતી ચાર સંકર સંખ્યાઓ $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : જો $\frac{3 - 2isin\theta}{1 - 2isin\theta}$ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો $\theta \in R$ શોધો તથા સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : $\frac{3 + 2isin\theta}{1 - 2isin\theta} = \frac{3 - 2isin\theta}{1 - 2isin\theta} \times \frac{1 + 2isin\theta}{1 + 2isin\theta}$

$$= \frac{3 + 6isin\theta - 2isin\theta + 4i^2sin^2\theta}{1 - 4sin^2\theta}$$

$$= \frac{3 - 4sin^2\theta}{1 + 4sin^2\theta} + i\frac{8sin\theta}{1 + 4sin^2\theta}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો સંકર સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો તેનો કાલ્પનિક ભાગ 0 થાય.

$\therefore \quad \frac{8sin\theta}{1 + 4sin^2\theta} = 0$

$\therefore \quad sin\theta = 0$

$\therefore \quad \theta = k\pi, k \in Z$. આથી સંખ્યા $\frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$

સ્વાધ્યાય 2

1. નીચેની સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો :

(1) $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ (2) $\left(\frac{1}{1 - 4i} - \frac{2}{1 + i}\right)\left(\frac{3 - 4i}{5 + i}\right)$

2. $\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}$ નો માનાંક શોધો.

3. કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ z_1 અને z_2 માટે સાબિત કરો કે,

$Re(z_1z_2) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2)$.

4. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ માટે $z = 7 + 2i$ આગળ $Re(f(z))$ અને $Im(f(z))$ની કિંમત શોધો.

5. બતાવો કે $|z - 1| = |z + i|$ નો બિંદુગણ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને -1 ઢાળવાળી રેખા દર્શાવે છે.

6. સાબિત કરો કે $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

7. જો z_1 અને z_2 ભિન્ન સંકર સંખ્યાઓ હોય તથા $|z_2| = 1$ તો $\left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z_1}z_2}\right|$ની કિંમત શોધો.

8. જો $\frac{1}{\alpha + i\beta} + \frac{1}{a + ib} = 1$, જ્યાં $\alpha, \beta, a, b \in R$; તો b ને α તથા βના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

9. જો $(x + iy)^3 = a + ib$, તો સાબિત કરો કે $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4(x^2 - y^2)$.

10. ઉકેલો : (1) $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ (2) $27x^2 - 10x + 1 = 0$ (3) $21x^2 - 28x + 10 = 0$

11. જો $z \in C$ અને $|z| \le 2$, તો $|z - 3|$ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

12. $z = 3 - 2i$ માટે બતાવો કે $z^2 - 6z + 13 = 0$. આ પરથી $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 17$ની કિંમત શોધો.

13. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ થાય તેવી mની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો. જ્યાં, $m \in N$.

14. જો $(x - iy)^2 = \frac{a - ib}{c - id}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$ થાય.

15. સમીકરણ $|z| - z = 1 + 2i$ નું સમાધાન કરતાં z ની કિંમત શોધો.

16. જો સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3 એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ દર્શાવે તથા $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, તો બતાવો કે $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

17. બતાવો કે આર્ગન્ડ આકૃતિમાં સંકર સંખ્યાઓ z, iz અને $z + iz$ થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}|z|^2$ હોય.

18. જો $z = x + iy$ અને $w = \frac{1 - iz}{z - i}$, તો બતાવો કે $|w| = 1 \Rightarrow z$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય.

19. જો $z = -5 + 4i$, તો બતાવો કે $z^4 + 9z^3 + 35z^2 - z + 164 = 0$.

20. જો $z = x + iy$, તો સાબિત કરો કે $|x| + |y| \le \sqrt{2}|z|$.

21. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $|z - 4| < |z - 2|$ નો ઉકેલ... ☐

(a) $Re(z) > 0$ (b) $Re(z) < 0$ (c) $Re(z) > 3$ (d) $Re(z) > 2$

(2) જો $|z - 1|^2 = |z|^2 + 1$, તો આર્ગન્ડ આકૃતિમાં z નું સ્થાન ...... પર છે. ☐

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) કાલ્પનિક અક્ષ (c) વાસ્તવિક અક્ષ (d) $2x + 3 = 0$

(3) જો $|z + 4| \le 3$, તો $|z + 1|$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 6 (b) 0 (c) 4 (d) 10

(4) એક સંકર સંખ્યાની અનુબદ્ધ સંખ્યા $\frac{1}{i-1}$ છે, તો તે સંકર સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{i-1}$ (b) $\frac{-1}{i-1}$ (c) $\frac{1}{i+1}$ (d) $\frac{-1}{i+1}$

(5) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ ની કિંમત ...... છે. ☐

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) i^n

(6) $\frac{3+4i}{4-5i}$ નો વ્યસ્ત...

(a) $-\frac{8}{25}+\frac{31}{25}i$ (b) $\frac{8}{25}-\frac{31}{25}i$ (c) $-\frac{8}{25}-\frac{31}{25}i$ (d) $\frac{8}{25}+\frac{31}{25}i$

(7) જો $x + iy = \frac{u - iv}{u - iv}$ હોય, તો $x^2 + y^2 =$ ....

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

(8) જેથી $(1 + i)^{2n} - (1 - i)^{2n}$ થાય તેવી ન્યૂનતમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n ...... છે.

(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) 12

(9) આર્ગન્ડ આકૃતિમાં સંકર સંખ્યા $\frac{1+2i}{1-i}$ નું સ્થાન ...... ચરણમાં છે.

(a) પ્રથમ (b) દ્વિતીય (c) તૃતીય (d) ચતુર્થ

(10) $arg(-1) =$ ......

(a) 0 (b) π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\pi$

(11) $sinx + icos2x$ અને $cosx - isin2x$ એ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો...

(a) $x = k\pi, k \in Z$ (b) $x = 0$

(c) $x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k \in Z$ (d) એવો કોઈ x ન મળે.

(12) જો એક સંકર સંખ્યા ત્રીજા ચરણમાં હોય, તો તેની અનુબદ્ધ સંખ્યા ...... ચરણમાં હોય ?

(a) પ્રથમ (b) દ્વિતીય (c) તૃતીય (d) ચતુર્થ

(13) જેનો માનાંક 2 અને મુખ્ય કોણાંક $\frac{2\pi}{3}$ હોય તેવો સંકર સંખ્યા ...... છે.

(a) $-1 + i\sqrt{3}$ (b) $-1 - i\sqrt{3}$ (c) $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

(14) $1 - i\sqrt{3}$ નો મુખ્ય કોણાંક ...... છે.

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$

(15) જો 1નાં ઘનમૂળ 1, ω, ω^2 હોય, તો $1 + \omega + \omega^2 =$ ......

(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) ω

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $a + ib$, જ્યાં $a, b \in R$ સ્વરૂપની સંખ્યાને સંકર સંખ્યા કહે છે. અહીં $i^2 = -1$.
2. ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે.

   $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$, $z_1z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
3. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
4. શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-bi}{a^2+b^2}$ છે.
5. $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$
6. સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\bar{z} = a - ib$ છે.

7. $z = a + ib$ નો માનાંક $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ છે.

8. સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) ને ભૌમિતિક રીતે XY-સમતલમાં બિંદુ $P(x, y)$ તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે અને આનાથી ઊલટું પણ સાચું છે.

9. $x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\begin{cases} \pm\left(\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}\right), & y > 0 \\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}} - i\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}\right), & y < 0 \end{cases}$

10. 1 નાં ઘનમૂળ 1, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ છે.

11. જો $b^2 - 4ac < 0$, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ જ્યાં $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ નાં બીજ $\dfrac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$ છે.

—❖—

Brahmagupta was the first to use zero as a number. He gave rules to compute with zero. Negative numbers did not appear in *Brahmasphuta siddhanta* but in the Nine Chapters on the Mathematical Art (Jiu zhang suan-shu) around 200 BC. Brahmagupta's most famous work is his *Brahmasphutasiddhanta*.

Brahmagupta gave the solution of the general linear equation in chapter eighteen of *Brahmasphutasiddhanta*.

The difference between *rupas*, when inverted and divided by the difference of the unknowns, is the unknown in the equation. The *rupas* are [subtracted on the side] below that from which the square and the unknown are to be subtracted. which is a solution equivalent to $x = \dfrac{e-c}{b-d}$, where rupas represent constants. He further gave two equivalent solutions to the general quadratic equation.

Diminish by the middle [number] the square-root of the rupas multiplied by four times the square and increased by the square of the middle; divide the remainder by twice the square. The middle whatever is the square-root of the rupas multiplied by the square [and] increased by the square of half the unknown, diminish that by half the unknown [and] divide [the remainder] by its square. [The result is] the unknown, which are, respectively, solutions equivalent to, $x = \dfrac{\sqrt{4ac+b^2} - b}{2a}$

Brahmagupta then goes on to give the sum of the squares and cubes of the first n integers.

The sum of the squares is that [sum] multiplied by twice the [number of] step[s] increased by one [and] divided by three. The sum of the cubes is the square of that [sum] Piles of these with identical balls [can also be computed].

It is important to note here Brahmagupta found the result in terms of the sum of the first n integers.

He gives the sum of the squares of the first n natural numbers as $n(n+1)(2n+1)/6$ and the sum of the cubes of the first n natural numbers as $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

પ્રકરણ 3

દ્વિપદી પ્રમેય

The laws of nature are but the mathematical thoughts of God.

– Euclid

*

I like mathematics because it is not human and has nothing particular to do with this planet or with the whole accidental universe, because like Spinoza's God, it won't love us in return.

– Bertrand Russell

*

If there is God, he is a great mathematician.

– Paul Dirac

3.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે આગળના વર્ગોમાં નીચેનાં વિસ્તરણોનો અભ્યાસ કર્યો છે :

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ અને $(a + b)^4$ મેળવવા

$(a + b)^3$ નો $(a + b)$ વડે ગુણાકાર કરીએ તો તેનું વિસ્તરણ મેળવી શકીએ.

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

જો કે, આ જ પ્રમાણે ગુણાકારના ઉપયોગથી $(a + b)^5$, $(a + b)^6$,... જેવાં વિસ્તરણ મેળવવાં મુશ્કેલ પડે.

એવું માનવામાં આવે છે કે, ધન પૂર્ણાંક n માટે $(a + b)^n$નું વ્યાપક સૂત્ર અગિયારમી સદીના જાણીતા પર્શિયન કવિ અને ગણિતજ્ઞ **ઓમર ખૈયામે** આપ્યું હતું. આ સૂત્ર અથવા વિસ્તરણને **દ્વિપદી પ્રમેય (Binomial Theorem)** કહે છે.

ચોથી સદી (B.C.)ના **ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી યુક્લિડે** દ્વિપદી પ્રમેયના વિસ્તરણનું $n = 2$ માટે વિશિષ્ટ ઉદાહરણ આપ્યું. ત્રીજી સદી (B.C.)માં **ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી પિંગલા (Pingala)**એ ઉચ્ચકક્ષા માટેના વિસ્તરણની વાત કરી હતી. 10મી સદીમાં વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેય અને પાસ્કલના ત્રિકોણની વિગતોથી **ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી હલાયુધ (Halayadha)** પરિચિત હતા. **પર્શીયન ગણિતશાસ્ત્રી અલ-કરજી (Al-Karaji)** અને 13મી સદીમાં ચીની ગણિતશાસ્ત્રી **યાન્ગ હુએ (Yang-hui)** પણ આવા જ પરિણામો મેળવ્યા હતાં.

$n = 1, 2, 3,...$ લઈ, $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણમાં આવતાં ક્રમિક પદોના સહગુણકો નીચે આપેલી ત્રિકોણીય રીતે ગોઠવાયેલી સંખ્યાઓની હાર પરથી પણ મેળવી શકાય છે. આ ગોઠવણી ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ **બ્લેઝ પાસ્કલ** (1623-1662) ના નામથી **પાસ્કલનો ત્રિકોણ (Pascal's Triangle)** તરીકે જાણીતી છે.

ઘાતાંક	સહગુણક
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
.	. . . .
.	. . . .
.	. . . .

પાસ્કલના ત્રિકોણની કોઈ પણ હારમાં પ્રથમ અને છેલ્લો ઘટક 1 છે. આ બે ઘટકની વચ્ચેના ઘટક એ ઘટકની ઉપરની હારના બે તીરના આરંભબિંદુ પરની સંખ્યાઓનો સરવાળો છે.

પાસ્કલનો ત્રિકોણ : પ્રથમ હાર : 1 1

એટલે કે, $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

બીજી હાર : 1 2 1

અહીં પ્રથમ અને છેલ્લા ઘટક 1 અને વચ્ચેનું પદ 2, પ્રથમ હારનાં બે પદોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે, કારણ કે $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$ $\left(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}\right.$ **ના ઉપયોગથી**$\left.\right)$

તે જ પ્રમાણે, ત્રીજી હાર 1 3 3 1 માં પ્રથમ અને છેલ્લું પદ 1, બીજું પદ એ બીજી હારનાં પ્રથમ અને દ્વિતીય પદનો સરવાળો $1 + 2 = 3$, જે $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$ છે અને ત્રીજું પદ એ બીજી હારનાં દ્વિતીય અને તૃતીય પદનો સરવાળો $2 + 1 = 3$, જે $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$ છે.

ઉપરની ચર્ચા પરથી, આ જ પ્રમાણે પાંચમી હાર આપણે ચકાસીએ.

ચોથી હાર : 1 4 6 4 1

એટલે કે, $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

હવે પાંચમી હાર : 1 (1 + 4) (4 + 6) (6 + 4) (4 + 1) 1

1 5 10 10 5 1

એટલે કે, $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

અહીં, $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} = \binom{5}{1}$; $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$; $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$; $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$.

$$\left(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}\right).$$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$, સૂત્ર તથા $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, ના ઉપયોગથી પાસ્કલનો ત્રિકોણ નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય.

ઘાતાંક					સહગુણક				
1				$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$			
2			$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$		
3		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$	
4	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

ઉપરની ગોઠવણીના અવલોકન પરથી, આગળની હાર લખ્યા સિવાય આપણે કોઈ પણ ઘાતાંક n માટે $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો લખી શકીએ, દાખલા તરીકે ઘાતાંક 7 માટે આપણને પદોના સહગુણકો $\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \binom{7}{2}, \binom{7}{3}, \binom{7}{4}, \binom{7}{5}, \binom{7}{6}, \binom{7}{7}$ મળે.

હવે આપણે કોઈ પણ ધનપૂર્ણાંક n માટે $(a+b)^n$ નું દ્વિપદી વિસ્તરણ લખવા માટે સક્ષમ છીએ.

3.2 દ્વિપદી પ્રમેય

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r + \ldots + \binom{n}{n}b^n,\ n \in \mathbb{N}$$

આ પ્રમેય આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું.

ધારો કે, $P(n) : (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r + \ldots + \binom{n}{n}b^n$

$n = 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= (a+b)^1 = a + b$ અને જ.બા. $= \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}a^{1-1}\cdot b = a + b$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$$\therefore \quad (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}\cdot b + \binom{k}{2}a^{k-2}\cdot b^2 + \ldots$$
$$+ \binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)}\cdot b^{r-1} + \binom{k}{r}a^{k-r}\cdot b^r + \ldots + \binom{k}{k}b^k$$

હવે, $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$$= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}\cdot b + \binom{k}{2}a^{k-2}\cdot b^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + \binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)}\cdot b^{r-1} + \binom{k}{r}a^{k-r}\cdot b^r + \ldots + \binom{k}{k}b^k\right]$$

બંને અવયવોનો ગુણાકાર કરી પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં, આપણે જોઈ શકીએ કે,

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^k\cdot b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}\cdot b^2 + \ldots$$
$$+ \left[\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}\right]a^{k-(r-1)}\cdot b^r + \ldots + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ અને $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$, $1 \le r \le n$

$$\therefore \quad (a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^{(k+1)-1} \cdot b + \binom{k+1}{2}a^{(k+1)-2} \cdot b^2 + ...$$

$$+ \binom{k+1}{r}a^{(k+1)-r} \cdot b^r + ... + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી P(n), $\forall n \in$ N માટે સત્ય છે.

કેટલાંક ઉપપ્રમેયો :

(1) $(a + b)^n$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં $a = 1$, $b = x$ મૂકતાં,

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{r}x^r + ... + \binom{n}{n}x^n, \forall n \in N$$

(2) b ના બદલે $-b$ મૂકતાં,

$$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + ...$$

$$+ (-1)^r \cdot \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + ... + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}b^n$$

(3) (1) માં $x = 1$ લેતાં,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{r} + ... + \binom{n}{n}$$

$$\therefore \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{r} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

(4) (1) માં $x = -1$ લેતાં,

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \qquad \text{(i)}$$

વળી, $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n}$ (ii)

$\therefore$ (i) તથા (ii) નાં અનુરૂપ પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$2^n = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ...\right]$$

$$\therefore \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = 2^{n-1} \qquad \text{(iii)}$$

$$\therefore \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... = 2^{n-1}$$ ((i) તથા (iii) પરથી) (iv)

નોંધ : $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણ પરથી, આપણે નીચેના મુદ્દાઓનું અવલોકન કરીએ :

(1) વિસ્તરણમાં $(n + 1)$ પદો છે.

(2) પ્રથમ પદમાં 'a' નો ઘાતાંક n છે અને ત્યાર પછી ક્રમશઃ પદોમાં 'a' નો ઘાતાંક 1 જેટલો ઘટતો જાય છે અને સાથે સાથે પ્રથમ પદમાં 'b' નો ઘાતાંક શૂન્ય છે અને ત્યાર પછી ક્રમશઃ પદોમાં 'b' નો ઘાતાંક 1 જેટલો વધતો જાય છે.

(3) દરેક પદની ઘાત (એટલે કે a અને bના ઘાતાંકનો સરવાળો) n છે જે $(a + b)$નો ઘાતાંક છે.

(4) પદોના સહગુણકો ક્રમશઃ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}$ છે.

(5) આપણે જાણીએ છીએ કે, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. તેથી વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો ક્રમશઃ ડાબી તથા જમણી તરફથી સંમિત રીતે ગોઠવાયેલાં છે, એટલે કે,

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$; $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$,...

ઉદાહરણ 1 : વિસ્તરણ કરો : $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^5$, $x \neq 0$

ઉકેલ : અહીં $a = \frac{x}{2}$, $b = \frac{1}{x}$, $n = 5$

આ કિંમતો દ્વિપદી પ્રમેય (સૂત્ર)માં મૂકતાં,

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= 1\left(\frac{x^5}{32}\right) + 5\left(\frac{x^4}{16}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{x^3}{8}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x^4}\right) + 1\cdot\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

$$= \frac{x^5}{32} + \frac{5x^3}{16} + \frac{5x}{4} + \frac{5}{2x} + \frac{5}{2x^3} + \frac{1}{x^5}$$

ઉદાહરણ 2 : વિસ્તરણ કરો : $\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^4$, $x \neq 0$

ઉકેલ : $a = 2x$, $b = 1 - \frac{1}{x}$, $n = 4$ ઉપપ્રમેય (2)માં મૂકતાં,

$$\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^4 = \left[2x-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^4$$

$$= \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3\left(1-\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}(2x)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 - \binom{4}{3}(2x)\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+ \binom{4}{4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= 16x^4 - 4(8x^3)\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(4x^2)\left(1-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$$

$$- \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$+ \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \binom{4}{3}\left(\frac{1}{x^3}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]$$

$$= 16x^4 - 32x^3 + 32x^2 + 24x^2 - 48x + 24 - 8x + 24 - \frac{24}{x} + \frac{8}{x^2}$$

$$+ 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

$$= 16x^4 - 32x^3 + 56x^2 - 56x + 49 - \frac{28}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

ઉદાહરણ 3 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(0.99)^5$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $(0.99)^5 = (1 - 0.01)^5$

$$= \binom{5}{0} - \binom{5}{1}(0.01) + \binom{5}{2}(0.01)^2 - \binom{5}{3}(0.01)^3 + \binom{5}{4}(0.01)^4 - \binom{5}{5}(0.01)^5$$

$$= 1 - 5(0.01) + 10(0.0001) - 10(0.000001) + 5(0.00000001) - (0.0000000001)$$

$$= 0.9509900499$$

ઉદાહરણ 4 : $(1.1)^{100000}$ અને 10000 માંથી કોણ નાનું છે ?

ઉકેલ : $(1.1)^{100000} = (1 + 0.1)^{100000}$

$= \binom{100000}{0} + \binom{100000}{1}(0.1) +$ કેટલાંક ધન પદો

$= 1 + 10000 +$ કેટલાંક ધન પદો

> 10000

$\therefore$ $(1.1)^{100000}$ તથા 10000 પૈકી 10000 નાની સંખ્યા છે.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. વિસ્તરણ કરો :

(1) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$, $(x \neq 0)$ (2) $(1 - 2x)^4$ (3) $(3x - 2)^6$ (4) $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^5$, $(x \neq 0)$

2. વિસ્તરણ કરો : (1) $(1 + x + x^2)^4$ (2) $(1 - x + x^2)^3$

3. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી કિંમત શોધો :

(1) $(0.98)^4$ (2) $(99)^4$ (3) $(101)^6$

4. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(1.01)^{10000}$ અને 100 માંથી કોણ મોટું છે તે નક્કી કરો.

*

3.3 વ્યાપક અને મધ્યમ પદ

1. $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણમાં $(n + 1)$ પદ હોય છે, આપણે $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય ...$(n + 1)$ માં પદને અનુક્રમે $T_1, T_2, T_3, ..., T_{n+1}$ કહીએ તો,

$T_1 = \binom{n}{0}a^n$, $T_2 = \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b$, $T_3 = \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2, ..., T_{n+1} = \binom{n}{n}b^n$.

આ પદોનાં અવલોકન પરથી આપણને **વ્યાપક પદ (General Term) $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r$, $0 \leq r \leq n$** મળે.

2. જો $(a + b)^n$ માં n યુગ્મ હોય, તો $n + 1$ અયુગ્મ થશે. તેથી $\left(\frac{n}{2}+1\right)$મું પદ એટલે કે

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$મું પદ $= \left(\frac{n+2}{2}\right)$મું પદ **મધ્યમ પદ (Middle Term)** થશે.

દાખલા તરીકે, $(2x + y)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{10+2}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ એ મધ્યમ પદ થશે.

જો n અયુગ્મ હોય, તો $n + 1$ યુગ્મ થશે. તેથી **બે મધ્યમ પદો મળશે, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ મું પદ.**

દાખલા તરીકે, $(2x + y)^9$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{9+1}{2} = 5$મું પદ અને $\frac{9+3}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ મધ્યમ પદ થશે.

ઉદાહરણ 5 : $(3x - y)^7$ ના વિસ્તરણનું ચોથું પદ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3x$, $b = -y$, $n = 7$

હવે, $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r$

T_4 શોધવા માટે $r = 3$ લેતાં, **$(r + 1 = 4)$**

$\therefore \quad T_4 = T_{3+1} = \binom{7}{3}(3x)^{7-3}\cdot(-y)^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}(81x^4)(-y)^3$

$= -2835x^4y^3$

ઉદાહરણ 6 : $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{16}$, $(x \neq 0)$ ના વિસ્તરણમાં x^{-2} નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = x$, $b = -\frac{1}{x^2}$, $n = 16$

$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$

$= \binom{16}{r}(x)^{16-r}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{16}{r}(-1)^r\cdot x^{16-3r}$

x નો ઘાતાંક -2 મેળવવા આપણે $16 - 3r = -2$ એટલે કે $r = 6$ લઈશું.

$\therefore \quad T_{6+1} = \binom{16}{6}(-1)^6\cdot x^{16-3(6)}$

$\therefore \quad T_7 = \binom{16}{6}\cdot 1\cdot x^{-2}$

$\therefore \quad x^{-2}$ નો સહગુણક $\binom{16}{6}$ અથવા 8008 મળે.

ઉદાહરણ 7 : $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{11}$, $(x \neq 0)$ ના વિસ્તરણમાં અચળ પદ અસ્તિત્વ ધરાવે, તો મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે અચળ પદ (એટલે કે જે પદમાં x નો ઘાતાંક શૂન્ય છે) અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે $(r + 1)$મું પદ છે.

અહીં, $a = 2x^2$, $b = -\frac{1}{x}$, $n = 11$

$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$

$= \binom{11}{r}(2x^2)^{11-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r = \binom{11}{r}(2)^{11-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{22-3r}$

અચળ પદ માટે, x નો ઘાતાંક શૂન્ય લેતાં,

$\therefore \quad 22 - 3r = 0$

$\therefore \quad r = \frac{22}{3} \notin N.$

$\therefore$ આપણી ધારણા ખોટી છે.

$\therefore$ આપેલ વિસ્તરણમાં અચળ પદનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 8 : $\left(\frac{x}{2}+3y\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ/પદો શોધો.

ઉકેલ : $n = 9$ અયુગ્મ હોવાથી, આપણને બે મધ્યમ પદો મળશે.

જે $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$મું અને $\frac{n+3}{2} = \frac{9+3}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ છે.

અહીં, $a = \frac{x}{2}$, $b = 3y$, $n = 9$

$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$

$\therefore \quad T_5 = T_{4+1} = \binom{9}{4}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{9-4}\cdot(3y)^4 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{x^5}{32}\right)(81y^4) = \frac{5103}{16}\ x^5y^4$

અને $T_6 = \binom{9}{5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{9-5} \cdot (3y)^5$ $(r + 1 = 6)$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{x^4}{16}\right)(243y^5)$$

$$= \frac{15309}{8}\ x^4y^5$$

$\therefore$ મધ્યમ પદો $\frac{5103}{16}\ x^5y^4$ અને $\frac{15309}{8}\ x^4y^5$ છે.

ઉદાહરણ 9 : $\left(\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2x^2}}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણનું અચળ પદ મેળવો. $(x > 0)$

ઉકેલ : અહીં, $T_{r+1} = \binom{12}{r}\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{12-r} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2x^2}}\right)^r$

$$= \binom{12}{r} \cdot \frac{\sqrt{3}^r}{(\sqrt{3})^{12-r}} \times \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \cdot x^{6 - \frac{r}{2} - r}$$

$$= \binom{12}{r} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^{12-2r}} \times \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \times x^{6 - \frac{3r}{2}}$$

અચળ પદ માટે, $6 - \frac{3r}{2} = 0$ લેતાં, $r = 4$

$$T_5 = \binom{12}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{55}{4}$$

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (1) $(x + 2)^9$ ના વિસ્તરણમાં x^6 નો અને (2) $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$, $(x \neq 0)$ ના વિસ્તરણમાં x^{32} નો સહગુણક મેળવો.
2. અચળ પદ મેળવો : (1) $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{10}$, $(x > 0)$ (2) $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$, $(x \neq 0)$
3. $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^7 અને x^8 ના સહગુણક સમાન હોય, તો n શોધો.
4. નીચેના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ / પદો શોધો :

   (1) $\left(2 - \frac{x^3}{3}\right)^7$ (2) $\left(\frac{x}{2} + 3y\right)^8$ (3) $\left(\frac{3}{2x} - \frac{2x^2}{3}\right)^{20}$, $(x \neq 0)$ (4) $(3x + 2y)^5$
5. $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક 20 હોય, તો n શોધો.
6. $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં 5 મા, 6 ઠા અને 7 મા પદોના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો n શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 10 : $(1 - x)^{15} \cdot (1 + 3x)^4$ ના ગુણાકારના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક મેળવો.

ઉકેલ : $(1 - x)^{15}$ અને $(1 + 3x)^4$ ના વિસ્તરણ માટે દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$(1-x)^{15} = \binom{15}{0} - \binom{15}{1}x + \binom{15}{2}x^2 - \binom{15}{3}x^3 + ... - \binom{15}{15}x^{15}$ અને

$(1+3x)^4 = (3x+1)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3 + \binom{4}{2}(3x)^2 + \binom{4}{3}(3x) + \binom{4}{4} \cdot 1$

હવે $(1-x)^{15} \cdot (1+3x)^4$ ના ગુણાકારમાં x^3 નો સહગુણક મેળવવા માટે, આપણે પૂરેપૂરો ગુણાકાર કરવાને બદલે ફક્ત x^3 વાળા પદો એકઠાં કરીએ.

તે $\binom{15}{0} \cdot \binom{4}{1}(27x^3) - \binom{15}{1}x \cdot \binom{4}{2}(9x^2) + \binom{15}{2}x^2 \cdot \binom{4}{3}(3x) - \binom{15}{3}x^3 \cdot \binom{4}{4}$

$= 1 \cdot 4 \cdot 27x^3 - 15 \cdot x \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 9x^2 + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}x^2 \cdot 4 \cdot 3x - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \cdot 1$

$= (108 - 810 + 1260 - 455)x^3 = 103x^3$

$\therefore$ $(1-x)^{15} \cdot (1+3x)^4$ ના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક 103 છે.

ઉદાહરણ 11 : $\left(\frac{x}{3}+3\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ 8064 હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $n = 10$

$\therefore$ n યુગ્મ હોવાથી, મધ્યમ પદ $\frac{n+2}{2} = \frac{10+2}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ થશે.

$\therefore$ $T_6 = T_{5+1} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{10-5} \cdot (3)^5$

$\therefore$ $8064 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{3^5} \cdot 3^5$

$\therefore$ $\frac{8064}{252} = x^5$

$\therefore$ $x^5 = 32 = 2^5$

$\therefore$ $x = 2$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો : $(3+\sqrt{8})^5 + (3-\sqrt{8})^5 = 6726$. તે પરથી તારવો કે, $6725 < (3+\sqrt{8})^5 < 6726$. આ પરથી $[(3+\sqrt{8})^5]$ મેળવો.

ઉકેલ : $(3+\sqrt{8})^5 = \binom{5}{0}(3)^5 + \binom{5}{1}(3)^4(\sqrt{8}) + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 + \binom{5}{3}(3)^2(\sqrt{8})^3 + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{8})^5$ (i)

$(3-\sqrt{8})^5 = \binom{5}{0}(3)^5 - \binom{5}{1}(3)^4(\sqrt{8}) + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 - \binom{5}{3}(3)^2(\sqrt{8})^3 + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 - \binom{5}{5}(\sqrt{8})^5$ (ii)

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$(3+\sqrt{8})^5 + (3-\sqrt{8})^5 = 2\left[\binom{5}{0}(3)^5 + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4\right]$

$= 2\left[1 \cdot 243 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 27 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 64\right]$ $\left(\binom{5}{4} = \binom{5}{1}\right)$

$= 2[243 + 2160 + 960]$

$= 2[3363]$

$= 6726$

હવે, $(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 9 - 8 = 1$ અને $(3 + \sqrt{8}) > 0$. તેથી $3 - \sqrt{8} > 0$.

તથા $(3 + \sqrt{8}) > 1$

$\therefore \quad 3 - \sqrt{8} < 1$

$\therefore \quad 0 < 3 - \sqrt{8} < 1$

$\therefore \quad 0 < (3 - \sqrt{8})^5 < 1$

$\therefore \quad (3 + \sqrt{8})^5 < (3 + \sqrt{8})^5 + (3 - \sqrt{8})^5 = 6726 < (3 + \sqrt{8})^5 + 1$

$\therefore \quad (3 + \sqrt{8})^5 < 6726$ અને $6726 < (3 + \sqrt{8})^5 + 1$

$\therefore \quad 6725 < (3 + \sqrt{8})^5 < 6726$

પૂર્ણાંક ભાગની વ્યાખ્યા અનુસાર સ્પષ્ટ છે કે $[(3 + \sqrt{8})^5] = 6725$

ઉદાહરણ 13 : $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ના વિસ્તરણમાં xની ઘાતવાળા પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 127 હોય, તો n શોધો. $(x \neq 0)$ $(n \in N)$

ઉકેલ : $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદો $\binom{n}{0}(x^2)^n$, $\binom{n}{1}(x^2)^{n-1}\cdot\left(\frac{-2}{x}\right)$ અને $\binom{n}{2}(x^2)^{n-2}\cdot\left(\frac{-2}{x}\right)^2$ છે.

આ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 127 છે. તેથી

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}\cdot 4 = 127$

$\therefore \quad 1 - 2n + \frac{4n(n-1)}{2} = 127$

$\therefore \quad 1 - 2n + 2n(n-1) = 127$

$\therefore \quad 1 - 2n + 2n^2 - 2n - 127 = 0$

$\therefore \quad 2n^2 - 4n - 126 = 0$

$\therefore \quad n^2 - 2n - 63 = 0$

$\therefore \quad (n - 9)(n + 7) = 0$

$\therefore \quad n = 9$ or $n = -7$. પરંતુ $-7 \notin N$

$\therefore \quad n = 9$

ઉદાહરણ 14 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી બતાવો કે, $8^n - 7n$ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે છે.

ઉકેલ : $8^n = (1 + 7)^n$

$= 1 + \binom{n}{1}7 + \binom{n}{2}7^2 + \binom{n}{3}7^3 + \ldots + \binom{n}{n}7^n$

$= 1 + 7n + 7^2\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}7 + \ldots + \binom{n}{n}7^{n-2}\right]$

$\therefore \quad 8^n - 7n = 1 + 49m$, જ્યાં $m = \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}7 + \ldots + \binom{n}{n}7^{n-2}\right] \in N$

$\therefore \quad 8^n - 7n$ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે છે.

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $\forall n \in N$

ઉકેલ : [વિચારો : જુઓ કે જ.બા. $= \frac{(2n)!}{(n!)(n!)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \binom{2n}{n}$.

જે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક છે.]

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (x + 1)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right] \times$$

$$\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}\right]$$

હવે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક $\binom{2n}{n}$ છે અને

જ.બા.માં x^n નો સહગુણક $= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2$ **(પદવાર ગુણાકાર કરતાં)**

$$\therefore \quad \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$, $\forall n \in N$

ઉકેલ : [વિચારો : જુઓ કે જ.બા. $= \frac{(2n)!}{[2n-(n-1)]!(n-1)!} = \binom{2n}{n-1}$

જે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-1} નો સહગુણક છે.]

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (x + 1)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right] \times$$

$$\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3} + ... + \binom{n}{n}\right]$$

હવે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-1} નો સહગુણક $\binom{2n}{n-1}$ છે અને

જ.બા.માં x^{n-1} નો સહગુણક $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

$$\therefore \quad \binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + ... + (2n + 1)\binom{n}{n} = (n + 1)2^n$, $\forall n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + ... + (2n - 1)\binom{n}{n-1} + (2n + 1)\binom{n}{n} = S$ **(i)**

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, પદોને ઊલટા ક્રમમાં ગોઠવતાં,

$(2n + 1)\binom{n}{0} + (2n - 1)\binom{n}{1} + (2n - 3)\binom{n}{2} + ... + 5\binom{n}{n-2} + 3\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = S$ **(ii)**

(i) અને (ii) નાં અનુરૂપ પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$\therefore \quad (1 + (2n + 1))\binom{n}{0} + (3 + (2n - 1))\binom{n}{1} + (5 + (2n - 3))\binom{n}{2} + ... +$$

$$((2n - 3) + 5)\binom{n}{n-2} + ((2n - 1) + 3)\binom{n}{n-1} + ((2n + 1) + 1)\binom{n}{n} = 2S$$

$\therefore \quad (2n+2)\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}\right] = 2S$

$\therefore \quad 2(n+1)\cdot 2^n = 2S$

$\therefore \quad S = (n+1)2^n$

તેથી, $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+5\binom{n}{2}+...+(2n+1)\binom{n}{n} = (n+1)2^n$.

ઉદાહરણ 18 : $(x-2y)^n$ ના વિસ્તરણમાં જો પાંચમાં અને છઠ્ઠા પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો $\frac{x}{y}$નું મૂલ્ય શોધો. જો $n = 8$ હોય તો $\frac{x}{y}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $T_5 = \binom{n}{4}\cdot x^{n-4}\cdot(-2y)^4$ અને $T_6 = \binom{n}{5}\cdot x^{n-5}\cdot(-2y)^5$

અહીં, $T_5 + T_6 = 0$. આથી, $T_5 = -T_6$

$\therefore \quad \binom{n}{4}\cdot(-2)^4\cdot x^{n-4}\cdot y^4 = -\binom{n}{5}\cdot(-2)^5\cdot x^{n-5}\cdot y^5$

$\therefore \quad \frac{n!}{4!(n-4)!}\cdot 16\cdot x^{n-4}\cdot y^4 = -\frac{n!}{5!(n-5)!}\cdot(-32)\cdot x^{n-5}\cdot y^5$

$\therefore \quad \frac{x^{n-4}\cdot y^4}{x^{n-5}\cdot y^5} = \frac{n!}{5!(n-5)!}\times\frac{4!(n-4)!}{n!}\times\frac{32}{16}$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{4!(n-4)(n-5)!}{5\cdot 4!(n-5)!}\times 2$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{n-4}{5}\times 2$

હવે, $n = 8$ લેતાં, $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$

ઉદાહરણ 19 : $(1+x)^{59}$ ના વિસ્તરણમાં છેલ્લા 30 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો મેળવો.

ઉકેલ : $(1+x)^{59}$ ના વિસ્તરણમાં કુલ 60 પદો મળશે.

$\therefore$ છેલ્લાં 30 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો,

$S = \binom{59}{30}+\binom{59}{31}+\binom{59}{32}+...+\binom{59}{58}+\binom{59}{59}$ (પ્રથમ 30 સહગુણકો $\binom{59}{0}, \binom{59}{1}, ..., \binom{59}{29}$) (i)

એટલે કે $S = \binom{59}{29}+\binom{59}{28}+\binom{59}{27}+...+\binom{59}{1}+\binom{59}{0}$ ($\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ સૂત્રના ઉપયોગથી) (ii)

$\therefore \quad 2S = \binom{59}{0}+\binom{59}{1}+...+\binom{59}{59}$ ((i) અને (ii)ની અનુરૂપ બાજુઓનો સરવાળો કરતાં)

$\therefore \quad S = \frac{2^{59}}{2} = 2^{58}$

સ્વાધ્યાય 3

1. $(1+x)^{2n}$ અને $(1+x)^{2n-1}$ના વિસ્તરણમાં x^n ના સહગુણકોનો ગુણોત્તર મેળવો.
2. જો $(1+x)^{36}$ ના વિસ્તરણમાં $(r-2)$ માં અને $(2r-5)$માં પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો r શોધો.
3. જો $(x+y)^n$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદો અનુક્રમે 64, 960 અને 6000 હોય, તો x, y અને n શોધો.
4. જો $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં બીજા, ત્રીજા અને ચોથા પદ અનુક્રમે 240, 720 અને 1080, હોય, તો a, b અને n શોધો.

5. સાબિત કરો : $(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7 = 10084$, તથા તે પરથી તારવો કે, $10083 < (2 + \sqrt{3})^7 < 10084$.

6. જો $\left(\sqrt[5]{2} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં ચોથા પદ અને છેલ્લેથી ચોથા પદનો ગુણોત્તર 6 : 1 હોય તો n શોધો.

7. $(1 - x)^{12} \cdot (1 + 2x)^6$ ના વિસ્તરણમાં x^4 નો સહગુણક મેળવો.

8. જો $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$, $(x \neq 0)$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 376 હોય, તો x^8 નો સહગુણક શોધો.

9. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી બતાવો કે, $3^{2n} - 8n - 1$ એ 64 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$.

10. સાબિત કરો : $(\forall n \in N)$

(1) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + ... + (n + 1)\binom{n}{n} = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$

(2) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + ... + \frac{1}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

11. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) જો $(1 + x)^n$ના વિસ્તરણમાં 5 મા અને 19 મા પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો n ...... છે. ☐

(a) 18 (b) 24 (c) 22 (d) 20

(2) જો $(1 + x)^{32}$ના વિસ્તરણમાં $(r - 6)$ મા અને $(2r - 2)$ મા પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો r ...... છે. ☐

(a) −2 (b) 14 (c) 34 (d) 20

(3) $(x + x^2)^{20}$ ના વિસ્તરણમાં x^{21} નો સહગુણક ...... છે. ☐

(a) $\binom{20}{1}$ (b) $\binom{20}{0}$ (c) $\binom{20}{2}$ (d) $\binom{20}{12}$

(4) $(2x + 3y + 4z)^5$ ના વિસ્તરણમાં $x^a\, y^b\, z^c$ પ્રકારના પદોની સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 10 (b) 15 (c) 21 (d) 42

(5) જો $(2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4 = x + y\sqrt{3}$, તો y ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 56 (c) 112 (d) 97

(6) જો $(a + b)^{10}$ નું મધ્યમ પદ T_{r-1} હોય, તો r = ... ☐

(a) 6 (b) 5 (c) 7 (d) 8

(7) $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણનું અચળ પદ ...... છે. $(x \neq 0)$ ☐

(a) 7920 (b) 495 (c) −7920 (d) −495

(8) $\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n-1}{n-1}$ = ... $(n > 1)$ ☐

(a) 2^n (b) 2^{n-1} (c) $2^n - 1$ (d) $2^{n-1} - 1$

(9) $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^8$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ ...... છે. $(x \neq 0)$ ☐

(a) $\binom{8}{4}$ (b) $\binom{8}{4}(2x)$ (c) $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2x}\right)$ (d) $\binom{8}{4}(2)$

(10) $(x + y)^{15}$ ના વિસ્તરણમાં $x^{13}y^2$ અને x^2y^{13} ના સહગુણકોનો સરવાળો ...... છે. ☐

(a) $\binom{15}{2}$ (b) $2\binom{15}{13}$ (c) $\binom{15}{3}$ (d) $2\binom{15}{3}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેનાં મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણ

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + ... + \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r + ... + \binom{n}{n}b^n, n \in N$ ને **દ્વિપદી પ્રમેય** કહે છે.

2. દ્વિપદી પ્રમેયના સહગુણકોની હારબદ્ધ ગોઠવણીને **પાસ્કલનો ત્રિકોણ** કહે છે.

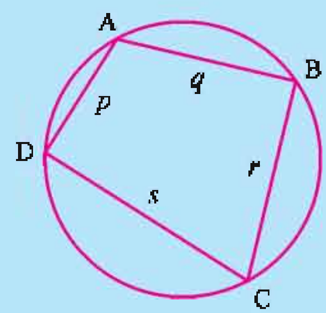
3. $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$ છે.

4. જો n યુગ્મ હોય, તો $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું અથવા $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ મું છે. અને જો n અયુગ્મ હોય, તો બે મધ્યમ પદ મળે જે $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ મું પદ છે.

—❖—

Brahmagupta's formula

Brahmagupta's most famous result in geometry is his formula for cyclic quadrilaterals. Given the lengths of the sides of any cyclic quadrilateral, Brahmagupta gave an approximate and an exact formula for the figure's area.



The approximate area is the product of the halves of the sums of the sides and opposite sides of a quadrilateral. The accurate [area] is the square root from the product of the halves of the sums of the sides diminished by [each] side of the quadrilateral.

So given the lengths p, q, r and s of a cyclic quadrilateral, the approximate area is $\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$ while, letting $t = \frac{p+q+r+s}{2}$, the exact area is

$$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

Heron's formula is a special case of this formula and it can be derived by setting one of the sides equal to zero.

પ્રકરણ 4

સરવાળાનાં સૂત્રો અને અવયવ સૂત્રો

Music is the pleasure the human mind experiences from counting without being aware that it is counting.

– Gottfried Leibnitz

4.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોની મૂળભૂત સંકલ્પના અને ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, આપણે કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ α અને β ના સરવાળાથી મળતી સંખ્યા $\alpha + \beta$ અને બાદબાકીથી મળતી સંખ્યા $\alpha - \beta$ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોને α અને β માટેના ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના ઉપયોગથી કેવી રીતે વ્યક્ત કરી શકાય તે જોઈશું. આ સૂત્રોને સરવાળાનાં સૂત્રો કહે છે. ત્યારબાદ આ સૂત્રોના ઉપયોગથી અવયવ સૂત્રો તરીકે ઓળખાતાં અન્ય સૂત્રો મેળવીશું અને તેમના ઉપયોગો જોઈશું.

જો $f(x) = ax$, $x \in R$ સુરેખ વિધેય હોય તો તેને માટે,

$$f(x - y) = a(x - y) = ax - ay = f(x) - f(y)$$

એટલે કે, $f(x - y) = f(x) - f(y)$

હવે, ત્રિકોણમિતીય વિધેય $f(x) = cosx$ માટે $\alpha = \frac{\pi}{3}$ અને $\beta = \frac{\pi}{6}$ લેતાં,

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ અને $cos(\alpha - \beta) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

પરંતુ $cos\alpha - cos\beta = cos\frac{\pi}{3} - cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$

એટલે કે, $cos(\alpha - \beta) \neq cos\alpha - cos\beta$

આમ, સુરેખ વિધેય માટે સત્ય જણાતું પરિણામ ત્રિકોણમિતીય વિધેય માટે સત્ય નથી. આવાં બીજાં પણ પરિણામો છે. તો હવે આપણે $cos(\alpha - \beta)$ નું સૂત્ર $cos\alpha$, $cos\beta$, $sin\alpha$, $sin\beta$ પરથી મેળવીએ.

4.2 સરવાળાનાં સૂત્રો

આપણે પહેલા $cos(\alpha - \beta)$ અને $cos(\alpha + \beta)$ નાં સૂત્રો મેળવીશું.

સૌ પ્રથમ $cos(\alpha - \beta)$ની અભિવ્યક્તિ મેળવીએ.

પ્રમેય 1 : $\alpha, \beta \in R$ માટે,

(1) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

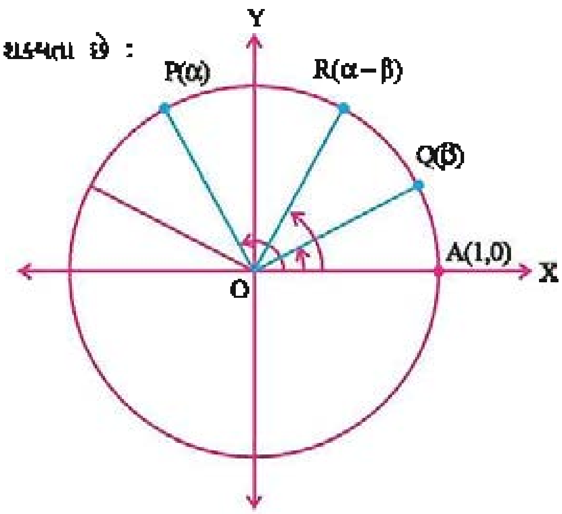
(2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

સાબિતી : વિકલ્પ (1) : ધારો કે $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$.

અહીં α અને β માટે ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમ પ્રમાણે ત્રણ શક્યતા છે :

(i) $\alpha > \beta$ (ii) $\alpha = \beta$ (iii) $\alpha < \beta$

(i) $\alpha > \beta$



આકૃતિ 4.1

ધારો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ α, β અને $\alpha - \beta$ ને સંગત એકમ વર્તુળ પરનાં ત્રિકોણમિતીય બિંદુઓ અનુક્રમે P, Q અને R છે.

$\therefore$ વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$,

$Q(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta)$ અને

$R(\alpha - \beta) = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$.

અહીં, A(1, 0) છે.

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે $l(\widehat{AP}) = \alpha$, $l(\widehat{AQ}) = \beta$ અને $l(\widehat{AR}) = \alpha - \beta$.

હવે $\beta < \alpha$ અને તેથી $Q \in \widehat{AP}$,

$l(\widehat{PQ}) = l(\widehat{AP}) - l(\widehat{AQ})$

$\therefore \quad l(\widehat{PQ}) = \alpha - \beta = l(\widehat{AR})$

$\therefore \quad \widehat{PQ} \cong \widehat{AR}$

એક જ વર્તુળમાં એકરૂપ ચાપને સંગત જીવાઓ એકરૂપ હોય છે.

$\therefore \quad PQ = AR$

$\therefore \quad PQ^2 = AR^2$

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$PQ^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha \sin\beta$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$$

$$AR^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \sin(\alpha - \beta))^2$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

પરંતુ $AR^2 = PQ^2$

$\therefore \quad 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$

$\therefore \quad -2\cos(\alpha - \beta) = -2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$

$\therefore \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

(ii) ધારો કે $\alpha = \beta$

ડા.બા. $= cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha - \alpha) = cos0 = 1$

જ.બા. $= cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

$= cos\alpha\ cos\alpha + sin\alpha\ sin\alpha$

$= cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

(iii) ધારો કે $\alpha < \beta$

તો, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$

$\therefore\ cos(\alpha - \beta) = cos(-(\beta - \alpha))$

$= cos(\beta - \alpha)$ (*cosine* યુગ્મ વિધેય છે)

$= cos\beta\ cos\alpha + sin\beta\ sin\alpha$ $(\beta > \alpha)$

$\therefore\ cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

વિકલ્પ (2) : $\alpha, \beta \in R$

$\alpha, \beta \in R$ હોવાથી α_1 અને β_1 એવા મળે કે જેથી $\alpha_1, \beta_1 \in [0, 2\pi)$

તથા $\alpha = 2m\pi + \alpha_1$ અને $\beta = 2n\pi + \beta_1$, $m, n \in Z$

$\therefore\ \alpha - \beta = 2m\pi + \alpha_1 - (2n\pi + \beta_1)$

$= 2(m - n)\pi + \alpha_1 - \beta_1$

$= 2k\pi + \alpha_1 - \beta_1$, જ્યાં $k = m - n \in Z$

વળી, *sin* અને *cos* વિધેયોનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π હોવાથી,

$cos\alpha = cos\alpha_1$, $cos\beta = cos\beta_1$ અને $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha_1 - \beta_1)$

તથા $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha_1 - \beta_1)$

$= cos\alpha_1\ cos\beta_1 + sin\alpha_1\ sin\beta_1$ (વિકલ્પ (1))

$= cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

$\therefore\ cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

આમ, વિકલ્પ (1) તથા (2) પરથી સાબિત થાય છે કે, પ્રત્યેક $\alpha, \beta \in R$ માટે

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$$

(2) હવે, $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha - (-\beta))$

$= cos\alpha\ cos(-\beta) + sin\alpha\ sin(-\beta)$

$= cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$ $(cos(-\beta) = cos\beta,\ sin(-\beta) = -sin\beta)$

$$\therefore\ cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$$

ઉપપ્રમેય 1 : (1) $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$ **(2)** $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$

સાબિતી : (1) આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રત્યેક $\alpha, \beta \in R$ માટે

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

ઉપરનાં સૂત્રમાં $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને $\beta = \theta$ લેતાં,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$

$$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$$

$$= \sin\theta$$

$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

(2) આ સૂત્રમાં θ ને બદલે $\frac{\pi}{2} - \theta$ લેતાં,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$\therefore \quad \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

પ્રમેય 2 : **(1)** $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

સાબિતી : **(1)** $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$ $\quad \left(\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$\therefore \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)]$

$$= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$ ($\cos(-\theta) = \cos\theta$ અને $\sin(-\theta) = -\sin\theta$)

$\therefore \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

4.3 સંબંધિત સંખ્યાઓ માટેનાં સૂત્રો

પ્રત્યેક $\alpha, \beta \in R$ માટે, આપણે પ્રમેય 1 અને 2 પરથી નીચેનાં સૂત્રો મેળવ્યા છે :

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (i)

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (ii)

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ (iii)

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ (iv)

આપણે જોયું કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

હવે (iv) અને (ii) માં $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને $\beta = \theta$ મૂકતાં,

$sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = sin\frac{\pi}{2}\, cos\theta + cos\frac{\pi}{2}\, sin\theta = 1 \cdot cos\theta + 0 \cdot sin\theta = cos\theta$

$\therefore \quad sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cos\theta$

$cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cos\frac{\pi}{2}\, cos\theta - sin\frac{\pi}{2}\, sin\theta = 0 \cdot cos\theta - 1 \cdot sin\theta = -sin\theta$

$\therefore \quad cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -sin\theta$

અને તે પરથી $tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -cot\theta$.

તે જ રીતે સૂત્ર (iii) તથા (i) માં $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ અને $\beta = \theta$ મૂકતાં નીચેનાં પરિણામ મળે,

$sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -cos\theta$, $cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -sin\theta$

$\therefore \quad tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = cot\theta$

તે જ રીતે $sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -cos\theta$, $cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = sin\theta$

$\therefore \quad tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -cot\theta$

હવે (i) થી (iv) માં $\alpha = \pi$, $\beta = \theta$ અને $\alpha = 2\pi$, $\beta = \theta$ માં મૂકતાં નીચેનાં પરિણામ મળે છે :

$sin(\pi - \theta) = sin\theta$, $cos(\pi - \theta) = -cos\theta$, $tan(\pi - \theta) = -tan\theta$

$sin(\pi + \theta) = -sin\theta$, $cos(\pi + \theta) = -cos\theta$, $tan(\pi + \theta) = tan\theta$

$sin(2\pi - \theta) = -sin\theta$, $cos(2\pi - \theta) = cos\theta$, $tan(2\pi - \theta) = -tan\theta$

$sin(2\pi + \theta) = sin\theta$, $cos(2\pi + \theta) = cos\theta$, $tan(2\pi + \theta) = tan\theta$

આ સૂત્રોનો આપણે દાખલાઓની ગણતરીમાં સતત ઉપયોગ કરીશું. તેને યાદ રાખવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણે વિચારીએ.

સૌ પ્રથમ આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો $sin\alpha$, $cos\alpha$ ની કિંમતો વિશે વિચારીશું, જ્યાં $0 \le \alpha < 2\pi$, કારણ કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $\theta = 2n\pi + \alpha$, $0 \le \alpha < 2\pi$ છે. ધારો કે $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ છે. તો $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} + \beta$, $\frac{3\pi}{2} - \beta$ અને $\frac{3\pi}{2} + \beta$ અનુક્રમે પ્રથમ, બીજા, ત્રીજા તથા ચોથા ચરણના ત્રિકોણમિતીય બિંદુને સંગત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

$\frac{\pi}{2} + \beta$	$\frac{\pi}{2} - \beta$
$\frac{3\pi}{2} - \beta$	$\frac{3\pi}{2} + \beta$

આકૃતિ 4.2

આકૃતિ 4.2 માં કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે, ત્રિકોણમિતીય વિધેયનું નીચે પ્રમાણે પરિવર્તન થાય છે : $sin \to cos$, $cos \to sin$, $tan \to cot$, $cot \to tan$, $sec \to cosec$, $cosec \to sec$.

$P\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ બીજા ચરણમાં છે.

બીજા ચરણમાં $sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) > 0$ થાય. આથી $sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = cos\beta$.

નોંધ : ડાબીબાજુના વિધેયનું મૂલ્ય ધન છે કે ઋણ તે આધારે નિશાની + કે − લેવી.

$P\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)$ ત્રીજા ચરણમાં છે અને ત્રીજા ચરણમાં $cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right) < 0$ છે.

$\therefore \quad cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -sin\beta.$

$\pi - \beta$	β
$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$

આકૃતિ 4.3

હવે આકૃતિ 4.3 જુઓ.

આ પ્રકારના પરિવર્તનમાં કોઈ પણ સંખ્યા માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેય તેનું તે જ રહે છે. એટલે કે $sin \rightarrow sin$, $cos \rightarrow cos$ વગેરે.

હવે વિધેયનું મૂલ્ય ધન છે કે ઋણ છે તે આધારે + કે − ની પસંદગી થાય. હવે ત્રિકોણમિતીય બિંદુ $P(\pi + \beta)$ ત્રીજા ચરણમાં છે અને $sin(\pi + \beta)$ ત્રીજા ચરણમાં ઋણ છે.

તેથી, $sin(\pi + \beta) = -sin\beta$,

$tan(\pi + \beta) = tan\beta$ **($tan(\pi + \beta)$ નું મૂલ્ય ત્રીજા ચરણમાં ધન છે)**

હવે, $P(2\pi - \beta)$ ચોથા ચરણમાં છે.

તેથી, $sec(2\pi - \beta) = sec\beta$, $cosec(2\pi - \beta) = -cosec\beta$.

($P(2\pi - \beta)$ ચોથા ચરણમાં હોવાથી $sec(2\pi - \beta) > 0$ અને $cosec(2\pi - \beta) < 0$)

હવે, $sin\left(\frac{38\pi}{3}\right)$ અને $cos\left(\frac{61\pi}{4}\right)$ નાં મૂલ્યો આપણે આ નિયમોના આધારે શોધીએ.

$$sin\left(\frac{38\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{36\pi + 2\pi}{3}\right)$$

$$= sin\left(12\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= sin\frac{2\pi}{3}$$ **(12π એ *sine* નું આવર્તમાન છે.)**

$$= sin\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ **(*sine* નું મૂલ્ય બીજા ચરણમાં ધન છે.)**

$$cos\left(\frac{61\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{60\pi + \pi}{4}\right)$$

$$= cos\left(15\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= cos\left(14\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$ **(14π એ *cosine* નું આવર્તમાન છે.)**

$$= -cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$ **(*cosine* નું મૂલ્ય ત્રીજા ચરણમાં ઋણ છે.)**

tan વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin(\pi + \theta) = -sin\theta$, $cos(\pi + \theta) = -cos\theta$. તેથી $tan(\pi + \theta) = tan\theta$.

આમ, π એ *tan* નું એક આવર્તમાન છે. હવે આપણે સાબિત કરીશું કે π એ *tan* નું મુખ્ય આવર્તમાન છે.

ધારો કે *tan* નું મુખ્ય આવર્તમાન p છે.

હવે, $tan(\theta + p) = tan\theta,\ \forall \theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\},$

$$\theta + p \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$$

વિશિષ્ટ કિંમત $\theta = 0$ લેતાં,

$tan p = 0$

$\therefore\ p = k\pi$

$\therefore$ p નું ન્યૂનતમ ધન મૂલ્ય π છે.

$\therefore$ *tan* વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન π છે.

ઉદાહરણ 1 : મૂલ્ય શોધો : (1) $cos120^\circ$ (2) $sin\left(\frac{-17\pi}{4}\right)$ (3) $tan\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ (4) $3sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

ઉકેલ : (1) $cos120^\circ = cos(90^\circ + 30^\circ) = -sin30^\circ = \frac{-1}{2}$ **$\left(cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -sin\theta\right)$**

$\therefore\ cos120^\circ = \frac{-1}{2}$

(2) $sin\left(\frac{-17\pi}{4}\right) = -sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ **$(sin(-\theta) = -sin\theta)$**

$= -sin\left(\frac{16\pi + \pi}{4}\right)$

$= -sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= -sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(4π એ *sine* નું આવર્તમાન છે.)**

$\therefore\ sin\left(\frac{-17\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = tan\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right) = tan\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = tan\frac{\pi}{4} = 1$ **(3π એ *tan* નું આવર્તમાન છે.)**

$\therefore\ tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = 1$

(4) $3sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = 3sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ **$(sec(-\theta) = sec\theta)$**

$= 3sec\left(\frac{8\pi - \pi}{4}\right)$

$= 3sec\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 3sec\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ **(2π એ *sec* નું આવર્તમાન છે.)**

$= 3sec\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}$

$\therefore\ 3sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$

ઉદાહરણ 2 : મૂલ્ય શોધો : (1) $\frac{sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{cos(\theta - \pi)} + \frac{tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{cot(3\pi + \theta)} + \frac{cosec(2\pi + \theta)}{sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}$

(2) $sin\frac{10\pi}{3} \cdot cos\frac{11\pi}{6} + cos\frac{2\pi}{3} \cdot sin\frac{5\pi}{6}$

(3) $cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{8} + cos^2\frac{7\pi}{8}$

ઉકેલ : (1) $\dfrac{sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{cos(\theta - \pi)} + \dfrac{tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{cot(3\pi + \theta)} + \dfrac{cosec(2\pi + \theta)}{sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}$

$$= \frac{-sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{cos(\pi - \theta)} + \frac{-cot\,\theta}{cot\,\theta} + \frac{cosec\,\theta}{-cosec\,\theta}$$

$$= \frac{-cos\,\theta}{-cos\,\theta} + (-1) + (-1) = 1 - 1 - 1 = -1$$

(2) $sin\frac{10\pi}{3} \cdot cos\frac{11\pi}{6} + cos\frac{2\pi}{3} \cdot sin\frac{5\pi}{6}$

$$= sin\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) \cdot cos\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) + cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) \cdot sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -sin\frac{\pi}{3} \cdot cos\frac{\pi}{6} + \left(-cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{4} - \frac{1}{4} = -1$$

(3) $cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{8} + cos^2\frac{7\pi}{8}$

$$= cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\left(\frac{-\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{-3\pi}{8}\right)$$

$$= \left(cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(cos^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + 1 = 2$$

ઉદાહરણ 3 : નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યા ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો :

(1) $sin110^\circ + cos110^\circ$ (2) $cosec\frac{17\pi}{12} - sec\frac{17\pi}{12}$

ઉકેલ : (1) $sin110^\circ + cos110^\circ = sin(180^\circ - 70^\circ) + cos(90^\circ + 20^\circ)$

$$= sin70^\circ - sin20^\circ$$

હવે, *sine* પ્રથમ ચરણમાં વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ $70 > 20$ હોવાથી $sin70^\circ > sin20^\circ$

$\therefore$ $sin70^\circ - sin20^\circ > 0$

$\therefore$ $sin110^\circ + cos110^\circ$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(2) $cosec\frac{17\pi}{12} - sec\frac{17\pi}{12}$

$$= cosec\left(\frac{12\pi + 5\pi}{12}\right) - sec\left(\frac{18\pi - \pi}{12}\right)$$

$$= cosec\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) - sec\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -cosec\frac{5\pi}{12} + cosec\frac{\pi}{12}$$

હવે, *sine* પ્રથમ ચરણમાં વધતું વિધેય છે. તેથી *cosec* ઘટતું વિધેય થશે.

$\frac{\pi}{12} < \frac{5\pi}{12}$

$\therefore \quad cosec\frac{\pi}{12} > cosec\frac{5\pi}{12}$

$\therefore \quad \left(cosec\frac{\pi}{12} - cosec\frac{5\pi}{12}\right) > 0$

$\therefore \quad cosec\frac{17\pi}{12} - sec\frac{17\pi}{12}$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. મૂલ્ય મેળવો :

(1) $cos135^\circ$ (2) $tan\left(\frac{-23\pi}{6}\right)$ (3) $cos\left(\frac{-50\pi}{3}\right)$

(4) $sec690^\circ$ (5) $cosec\ \frac{15\pi}{4}$ (6) $cot\left(\frac{-7\pi}{3}\right)$

સાબિત કરો : **(2 થી 11)**

2. $cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \cdot sec(-\theta) \cdot tan(\pi - \theta) + sec(2\pi + \theta) \cdot sin(\pi + \theta) \cdot cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 0$

3. $\frac{sin(\pi-\theta)}{sin(\pi+\theta)} \cdot \frac{cosec(\pi+\theta)}{cosec(-\pi+\theta)} \cdot \frac{cosec(2\pi+\theta)}{sin(3\pi-\theta)} = -cosec^2\theta$

4. $\frac{sin(-\theta) \cdot tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cdot sin(\pi-\theta) \cdot sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{sin(\pi-\theta) \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) \cdot cosec(\pi-\theta) \cdot cot(2\pi-\theta)} = 1$

5. $sin(n + 1)A \cdot cos(n + 2)A - cos(n + 1)A \cdot sin(n + 2)A = -sinA$

6. $sin^2(40^\circ + \theta) + sin^2(50^\circ - \theta) = 1$

7. $\frac{cot\ 333^\circ - cos\ 567^\circ}{tan\ 297^\circ + sin\ 477^\circ} = 1$

8. $\frac{sec^2 129^\circ - cosec^2 31^\circ}{cosec 39^\circ - sec 121^\circ} = cosec39^\circ - sec59^\circ.$

9. $cos(A + B + C) = cosA\ cosB\ cosC - sinA \cdot sinB \cdot cosC - sinA\ cosB\ sinC - cosA\ sinB\ sinC$

10. $sin\alpha \cdot sin(\beta - \gamma) + sin\beta \cdot sin(\gamma - \alpha) + sin\gamma \cdot sin(\alpha - \beta) = 0$

11. $(sin\alpha - cos\alpha) \cdot (sin\beta + cos\beta) = sin(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$

12. ΔABC માટે, સાબિત કરો :

(1) $sin(B + C) = sinA$ (2) $cos(A + B) = -cosC$

(3) $sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = cos\frac{A}{2}$ (4) $tan(A - B - C) = tan2A$

(5) $\frac{sin(B+C) \cdot cos(B+C) \cdot sin\frac{A}{2} \cdot cos\frac{A}{2}}{sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot sin(\pi+A) \cdot cos(2\pi-A)} = 1$

(6) જો $cosA = cosB\ cosC$, તો સાબિત કરો કે $2cotB\ cotC = 1$.

13. બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ ABCD માટે સાબિત કરો :

(1) $sin(A + B) + sin(C + D) = sin(B + C) + sin(A + D)$

(2) $cot(A + B + C) + cotD = 0$

14. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD માટે સાબિત કરો :

(1) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$

(2) $\sin A + \sin B = \sin C + \sin D$

15. જો $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$, તો $2\sin\alpha - \cos\beta = \sqrt{3}\sin\beta$ સાબિત કરો.

16. જો $\theta = \frac{19\pi}{4}$, તો $\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\tan\theta + \sec^2\theta - 4\cot^2\theta = 0$ સાબિત કરો.

17. કિંમત શોધો : (1) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

(2) $\sin x + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi + x) + ... + 2n$ પદ

(3) $\cos x + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi - x) + ... + (2n + 1)$ પદ, જ્યાં $x = \frac{\pi}{3}$.

(4) $\cot\frac{\pi}{20} \cdot \cot\frac{3\pi}{20} \cdot \cot\frac{5\pi}{20} \cdot \cot\frac{7\pi}{20} \cdot \cot\frac{9\pi}{20}$

18. નીચેની સંખ્યાઓ ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો :

(1) $\sin 155^\circ + \cos 155^\circ$ (2) $\tan\frac{6\pi}{7} + \cot\left(\frac{-6\pi}{7}\right)$.

(3) $\tan 111^\circ - \cot 111^\circ$ (4) $\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{12} + \sec\frac{7\pi}{12}$.

19. જો $\tan\theta = \frac{-3}{4}$ અને $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $\dfrac{\sin(\pi-\theta) + \tan(\pi+\theta) + \tan(4\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)}$ નું મૂલ્ય શોધો.

20. પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, સાબિત કરો કે $\sin(n\pi + (-1)^n\theta) = \sin\theta$.

*

4.4 કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો

(1) આપણે આગળ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવ્યા. હવે આપણે $\sin(\alpha - \beta)$ અને $\cos(\alpha - \beta)$ના ઉપયોગથી $\sin\frac{\pi}{12}$ અને $\cos\frac{\pi}{12}$ તથા અન્ય મૂલ્યો મેળવીશું.

$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{6}$ લેતાં, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{12}$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

આ જ રીતે, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ મેળવી શકાય.

વળી, $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) (i) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

(ii) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

(i) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)(\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta)$

$= \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha (1 - \sin^2\beta) - (1 - \sin^2\alpha) \cdot \sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

હવે, $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

$= (1 - \cos^2\alpha) - (1 - \cos^2\beta)$

$= \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

આ જ રીતે સાબિત કરી શકીએ કે,

$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

4.5 $f(\alpha) = a\cos\alpha + b\sin\alpha$, $\alpha \in R$ નો વિસ્તાર ગણ, $a, b \in R$ તથા $a^2 + b^2 \neq 0$

અહીં $a^2 + b^2 \neq 0$ હોવાથી આપણે ત્રણ વિકલ્પો લઈશું :

(1) $a = 0, b \neq 0$ (2) $a \neq 0, b = 0$ (3) $a \neq 0$ તથા $b \neq 0$

વિકલ્પ (1) : $a = 0, b \neq 0$

અહીં, $f(\alpha) = b\sin\alpha$. વળી $\sin\alpha$ વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે.

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -b \leq b\sin\alpha \leq b \quad (b > 0)$

$\therefore$ $b > 0$ માટે $b\sin\alpha$ નો વિસ્તાર $[-b, b] = [-|b|, |b|]$ છે. $(|b| = b)$

હવે, $b < 0$ હોય, તો

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -b \geq b\sin\alpha \geq b \Leftrightarrow b \leq b\sin\alpha \leq -b$

$\therefore$ $b < 0$ માટે તેનો વિસ્તાર $[b, -b] = [-|b|, |b|]$ છે. $(|b| = -b)$

$\therefore$ $f(\alpha) = b\sin\alpha$ નો વિસ્તાર $[-|b|, |b|]$ થાય.

વિકલ્પ (2) : $a \neq 0, b = 0$

અહીં, $f(\alpha) = a\cos\alpha$ થાય અને તેનો વિસ્તાર આગળની જેમ $[-|a|, |a|]$ થાય.

વિકલ્પ (3) : $a \neq 0, b \neq 0$

આ વિકલ્પમાં આપણે $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ ને $r\cos(\theta - \alpha)$ સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરીશું.

$r\cos(\theta - \alpha) = r\cos\theta \cos\alpha + r\sin\theta \sin\alpha$, હોવાથી આપણે r અને θ એવા શોધીશું કે જેથી, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$. $(r > 0)$

$\therefore$ $a^2 + b^2 = r^2$ તથા $tan\theta = \frac{b}{a}$ થવા જોઈએ.

$\therefore$ $r = \sqrt{a^2 - b^2}$ તથા *tan* વિધેયનો વિસ્તાર R હોવાથી વાસ્તવિક સંખ્યા $\frac{b}{a}$ ને અનુરૂપ

$\theta \in R - \left\{(2n-1)\frac{\pi}{2} \mid n \in Z\right\}$ મળશે જ કે જેથી $tan\theta = \frac{b}{a}$ થાય.

તેથી આપેલી a અને b નો શૂન્યેતર વાસ્તવિક કિંમતો માટે આપણે $r = \sqrt{a^2 - b^2}$ અને θ એવા લઈએ કે જેથી $tan\theta = \frac{b}{a}$ થાય. આપણે θ પસંદ કરી શકીએ કે જેથી $rcos\theta = a$, $rsin\theta = b$.

હવે, $f(\alpha) = acos\alpha + bsin\alpha$

$$= rcos\theta\, cos\alpha + r\, sin\theta\, sin\alpha$$

$$= r\,(cos\theta\, cos\alpha + sin\theta\, sin\alpha)$$

$$= r\, cos(\theta - \alpha)$$

$f(\alpha) = r\,cos(\theta - \alpha)$

$-1 \le cos(\theta - \alpha) \le 1 \Leftrightarrow -r \le r\,cos(\theta - \alpha) \le r$ **$(r > 0)$**

$\therefore$ $f(\alpha)$ નો વિસ્તાર $[-r, r]$ છે.

તેથી $f(\alpha)$ નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}\right]$ છે.

આમ, $f(\alpha)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $\sqrt{a^2+b^2}$ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય $-\sqrt{a^2+b^2}$ થશે.

4.6 *tan* અને *cot* વિધેયનાં સરવાળા - સૂત્રો

(1) જો α, β અને $\alpha + \beta \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, તો

$$tan\,(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$$

અને જો α, β અને $\alpha - \beta \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, તો

$$tan\,(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$$

સાબિતી : $tan\,(\alpha + \beta) = \frac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sin\alpha\,cos\beta + cos\alpha\,sin\beta}{cos\alpha\,cos\beta - sin\alpha\,sin\beta}$ **$\left(\alpha + \beta \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}\right)$**

હવે, $\alpha, \beta \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, $cos\alpha \ne 0$, $cos\beta \ne 0$

તેથી અંશ અને છેદને $cos\alpha \cdot cos\beta$, વડે ભાગતાં,

$$tan\,(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}.$$

આ જ રીતે, $tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$ મેળવી શકાય.

(2) જો α, β અને $\alpha + \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$, તો

$$cot(\alpha + \beta) = \frac{cot\alpha \cdot cot\beta - 1}{cot\beta + cot\alpha}$$

અને જો α, β અને $\alpha - \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$, તો

$$cot(\alpha - \beta) = \frac{cot\alpha \cdot cot\beta + 1}{cot\beta - cot\alpha}$$

સાબિતી : $cot(\alpha + \beta) = \frac{cos(\alpha + \beta)}{sin(\alpha + \beta)} = \frac{cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta}{sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta}$ $(\alpha + \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\})$

હવે, $\alpha, \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$, $sin\alpha \neq 0$, $sin\beta \neq 0$

તેથી અંશ અને છેદને $sin\alpha \cdot sin\beta$ વડે ભાગતાં,

$$cot(\alpha + \beta) = \frac{cot\alpha \cdot cot\beta - 1}{cot\beta + cot\alpha}.$$

આ જ રીતે, $cot(\alpha - \beta) = \frac{cot\alpha \cdot cot\beta + 1}{cot\beta - cot\alpha}$ મેળવી શકાય.

4.7 $tan\frac{\pi}{12}$ અને $cot\frac{\pi}{12}$ નાં મૂલ્યો

અહીં, $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

(1) $tan\frac{\pi}{12} = tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tan\frac{\pi}{3} - tan\frac{\pi}{4}}{1 + tan\frac{\pi}{3}\, tan\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$\therefore$ $tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

(2) $cot\frac{\pi}{12} = cot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{cot\frac{\pi}{3}\, cot\frac{\pi}{4} + 1}{cot\frac{\pi}{4} - cot\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

હવે, $tan\frac{5\pi}{12} = tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ અને

$$cot\frac{5\pi}{12} = cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો $sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $tan\beta = \frac{-12}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, તો $P(\alpha + \beta)$ અને $P(\alpha - \beta)$નું ચરણ નક્કી કરો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ પરથી સરવાળો કરતાં $0 < \alpha + \beta < \pi$ મળે.

$\therefore$ $P(\alpha + \beta)$ પ્રથમ ચરણમાં અથવા બીજા ચરણમાં છે. *cosine* વિધેયનું મૂલ્ય પ્રથમ ચરણમાં ધન અને બીજા ચરણમાં ઋણ છે અને *sine* વિધેયનું મૂલ્ય પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે. તેથી $P(\alpha + \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરવા $cos(\alpha + \beta)$ નું મૂલ્ય શોધવું જોઈએ.

$\therefore$ $cos\alpha = -\sqrt{1-sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{-3}{5}$ $\quad\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

$tan\beta = \frac{-12}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

$\therefore$ $sec\beta = \sqrt{1+tan^2\beta} = \sqrt{1+\frac{144}{25}} = \frac{13}{5}$ $\quad\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < 0\right)$

$\therefore$ $cos\beta = \frac{5}{13}$, $sin\beta = tan\beta \cdot cos\beta = \frac{-12}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-12}{13}$

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$$
$$= \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right)$$
$$= \frac{-15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$\therefore$ $cos(\alpha + \beta) > 0$

$\therefore$ $P(\alpha + \beta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

ચરણ નક્કી કરવાની બીજી રીત :

$P(\alpha + \beta)$નું ચરણ નક્કી કરવાની બીજી રીત જોઈએ :

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right)$$
$$= \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65} > 0$$

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta = \frac{33}{65} > 0$ $\quad$ **(પ્રથમ રીત)**

હવે, $sin(\alpha + \beta) > 0$ અને $cos(\alpha + \beta) > 0$ હોવાથી $P(\alpha + \beta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે, $P(\alpha - \beta)$ માટે, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

$\therefore$ $\frac{\pi}{2} > -\beta > 0$

$\therefore$ $0 < -\beta < \frac{\pi}{2}$ તથા $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\quad$ **(i)**

$\frac{\pi}{2} < \alpha-\beta < \frac{3\pi}{2}$ $\quad$ **((i) પરથી સરવાળો કરતાં)**

∴ $P(\alpha - \beta)$ બીજા અથવા ત્રીજા ચરણમાં છે. *sine* વિધેયનું મૂલ્ય બીજા ચરણમાં ધન અને ત્રીજા ચરણમાં ઋણ છે અને *cosine* વિધેયનું મૂલ્ય બીજા અને ત્રીજા બંને ચરણમાં ઋણ છે. તેથી $P(\alpha - \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરવા આપણે $sin(\alpha - \beta)$ શોધવું પડશે.

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right)$$

$$= \frac{20 - 36}{65} = \frac{-16}{65}$$

∴ $sin(\alpha - \beta) < 0$

∴ $P(\alpha - \beta)$ ત્રીજા ચરણમાં છે.

ઉદાહરણ 5 : $sin\theta + cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ નો વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(\theta) = sin\theta + cos\left(\theta \cdot \frac{\pi}{3}\right)$.

$$= sin\theta + cos\theta\ cos\frac{\pi}{3} - sin\theta\ sin\frac{\pi}{3}$$

$$= sin\theta + \frac{1}{2}cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2}cos\theta + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) sin\theta = acos\theta + bsin\theta$$

$f(\theta)$ ને $acos\theta + bsin\theta$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = \frac{1}{2},\ b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

હવે, $r^2 - a^2 + b^2 - \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}$

$$r^2 - 2 - \sqrt{3}$$

∴ $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}}$

∴ $r - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $f(\theta)$ નો વિસ્તાર $[-r, r] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ છે.

ઉદાહરણ 6 : $sin110^\circ + cos110^\circ$ ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(\theta) - sin110^\circ + cos110^\circ$

$$- \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin110^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}cos110^\circ\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(cos45^\circ\ sin110^\circ + sin45^\circ\ cos110^\circ\right)$$

$$= \sqrt{2}\ sin(110^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\ sin155^\circ > 0$$ **(90 < 155 < 180)**

∴ $sin110^\circ + cos110^\circ$ ધન સંખ્યા છે.

નોંધ : આપણે આ પ્રકરણમાં ગણેલ ઉદાહરણ 3 આ રીતે પણ કરી શકાય.

ઉદાહરણ 7 : $\sqrt{3}sin\alpha - cos\alpha$ ને $rsin(\alpha - \theta)$ સ્વરૂપે દર્શાવી r અને θ શોધો.

જ્યાં $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$.

ઉકેલ : ધારો કે $f(\alpha) = \sqrt{3}sin\alpha - cos\alpha$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ વડે ગુણતાં અને ભાગતાં,

$$f(\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha - \frac{1}{2}cos\alpha\right)$$

$$= 2\left(sin\alpha\, cos\frac{\pi}{6} - cos\alpha\, sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$$

હવે, $rsin(\alpha - \theta)$ સાથે સરખાવતાં,

$r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ મળે. અહીં $\theta = \frac{\pi}{6}$ એ $0 \le \theta < 2\pi$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 8 : જો $\sqrt{3}cos\alpha - sin\alpha = rcos(\alpha - \theta)$, તો r અને θ શોધો. જેથી $(r > 0)$

(i) $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ (ii) $0 < \theta < 2\pi$

ઉકેલ : ધારો કે $f(\alpha) = \sqrt{3}cos\alpha - sin\alpha$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ વડે ગુણતાં અને ભાગતાં,

$$f(\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha - \frac{1}{2}sin\alpha\right)$$

$$= 2\left(cos\frac{\pi}{6}\, cos\alpha - sin\frac{\pi}{6} sin\alpha\right)$$

$$= 2cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2cos\left(\alpha - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

હવે, $rcos(\alpha - \theta)$ સાથે સરખાવતાં,

$\therefore$ $r = 2$ અને $\theta = \frac{-\pi}{6}$ મળે, જે $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$$2cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 2cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6} - 2\pi\right) - 2cos\left(\alpha - \frac{11\pi}{6}\right)$$

$\therefore$ $\theta = \frac{11\pi}{6}$ લેતાં, θ એ $0 < \theta < 2\pi$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે, $sin^2A = cos^2(A - B) + cos^2B - 2cos(A - B)cosA\ cosB$.

ઉકેલ : જ.બા. $- cos^2(A - B) + cos^2B - 2cos(A - B)cosA\ cosB$.

$$- cos^2B + cos^2(A - B) - 2cos(A - B)\ cosA\ cosB$$

$$= cos^2B + cos(A - B)\ [cos(A - B) - 2cosA\ cosB]$$

$$= cos^2B + cos(A - B)\ [cosA\ cosB + sinA\ sinB - 2cosA\ cosB]$$

$$= cos^2B + cos(A - B)\ (sinA\ sinB - cosA\ cosB)$$

$$= cos^2B - cos(A - B)\ cos(A + B)$$

$$- cos^2B - (cos^2A - sin^2B)$$

$- cos^2B + sin^2B - cos^2A - 1 - cos^2A - sin^2A -$ ડા.બા.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. કિંમત શોધો :

(1) $sin^2 37\frac{1}{2}^\circ - sin^2 7\frac{1}{2}^\circ$ (2) $sin^2 52\frac{1}{2}^\circ - cos^2 7\frac{1}{2}^\circ$ (3) $cos^2 37\frac{1}{2}^\circ - sin^2 37\frac{1}{2}^\circ$

2. સાબિત કરો : $sin^2A + sin^2B + cos^2(A + B) + 2sinA\, sinB\, cos(A + B) = 1$.

3. (1) જો $cosA = \frac{1}{7}$, $cosB = \frac{13}{14}$ અને $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે, $A - B = \frac{\pi}{3}$

(2) જો $sinA = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $cosB = \frac{3}{\sqrt{10}}$ અને $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે, $A + B = \frac{\pi}{4}$

4. (1) જો $cos\alpha = \frac{4}{5}$, $cos\beta = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha, \beta < 2\pi$, તો $P(\alpha - \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરો.

(2) જો $cos\alpha = \frac{-5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $tan\beta = \frac{4}{3}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, તો $P(\alpha + \beta)$નું ચરણ નક્કી કરો.

5. જો $cot\alpha = \frac{1}{2}$, $sec\beta = \frac{-5}{3}$, જ્યાં $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ અને $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ તો $tan(\alpha + \beta)$ નું મૂલ્ય શોધો અને $P(\alpha + \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરો.

6. નીચેનાનો વિસ્તાર મેળવો :

(1) $7sin\theta + 24cos\theta$ (2) $cos\theta + sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

7. સાબિત કરો કે $5cos\theta + 3cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 7$ નું મૂલ્ય $[0, 14]$ માં છે.

8. $\sqrt{3}sin\theta + cos\theta$ ને $rcos(\theta - \alpha)$ સ્વરૂપે દર્શાવો, જ્યાં $r > 0$ અને $0 < \alpha < 2\pi$.

9. જો $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ અને $cos\alpha - \sqrt{3}sin\alpha = rcos(\alpha - \theta)$, તો r અને θ શોધો.

10. સાબિત કરો :

(1) $tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}cos\,\alpha - sin\,\alpha}{cos\,\alpha + \sqrt{3}\,sin\,\alpha}$ (2) $tan39^\circ = \frac{\sqrt{3}cos\,21^\circ - sin\,21^\circ}{cos\,21^\circ + \sqrt{3}\,sin\,21^\circ}$

(3) $tan3A \cdot tan2A \cdot tanA = tan3A - tan2A - tanA$

(4) $cotA \cdot cot2A - cot2A \cdot cot3A - cot3A \cdot cotA = 1$

(5) $tan25^\circ \cdot tan15^\circ + tan15^\circ \cdot tan50^\circ + tan25^\circ \cdot tan50^\circ = 1$

11. જો $A + B = \frac{\pi}{4}$, તો, સાબિત કરો કે

(1) $(1 + tanA)(1 + tanB) = 2$

(2) $(cotA - 1)(cotB - 1) = 2$

12. (1) સાબિત કરો કે $A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tanA = tanB + 2tan(A - B)$

(2) સાબિત કરો કે $tan65^\circ = tan25^\circ + 2tan40^\circ$

13. જો $A + B + C = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, તો સાબિત કરો કે,

(1) $tanA\ tanB + tanB\ tanC + tanC\ tanA = 1$

(2) $cotA + cotB + cotC = cotA\ cotB\ cotC$

14. જો $A + B + C = k\pi$, $k \in Z$, તો સાબિત કરો કે,

(1) $tanA + tanB + tanC = tanA \ tanB \ tanC$

(2) $cotB \cdot cotC + cotC \cdot cotA + cotA \cdot cotB = 1$

15. જો $tanA = 3$, $tanB = \frac{1}{2}$, $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે, $A - B = \frac{\pi}{4}$.

16. જો ΔABC માં, $tanB = 2$ અને $tanC = 3$, તો સાબિત કરો કે, $tanA = 1$.

17. જો $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, $tanA = \frac{a}{a+1}$ અને $tanB = \frac{1}{2a+1}$, તો સાબિત કરો કે, $A + B = \frac{\pi}{4}$.

18. જો $\alpha + \beta = \theta$, $\alpha - \beta = \phi$ અને $\frac{tan\,\alpha}{tan\,\beta} = \frac{x}{y}$, તો સાબિત કરો કે, $\frac{sin\,\theta}{sin\,\phi} = \frac{x+y}{x-y}$.

19. જો $\frac{tan\,(A-B)}{tan\,A} + \frac{sin^2C}{sin^2A} = 1$, તો સાબિત કરો કે, $tanA \cdot tanB = tan^2C$.

20. જો $tan(A + B) = 3$ અને $tan(A - B) = 2$, તો $tan2A$ અને $tan2B$ નાં મૂલ્ય શોધો.

21. જો $tan\beta = \frac{n sin\alpha\, cos\alpha}{1 - n sin^2\alpha}$, તો સાબિત કરો કે $tan(\alpha - \beta) = (1 - n)\ tan\alpha$.

*

4.8 ગુણાકારનું સરવાળા અથવા તફાવતના સ્વરૂપમાં નિરૂપણ

આપણે $\alpha, \beta \in R$ માટે નીચેનાં સૂત્રો તારવ્યાં છે :

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$ **(i)**

$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$ **(ii)**

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$ **(iii)**

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$ **(iv)**

સૂત્રો (i) અને (ii)નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta) = 2sin\alpha\ cos\beta$

$sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta) = 2cos\alpha\ sin\beta$

એટલે કે,

$2sin\alpha\ cos\beta = sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$ **(v)**

$2cos\alpha\ sin\beta = sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$ **(vi)**

તે જ પ્રમાણે, સૂત્રો (iii) અને (iv) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta) = 2cos\alpha\ cos\beta$

$cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta) = -2sin\alpha\ sin\beta$

એટલે કે,

$2cos\alpha\ cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$ **(vii)**

$2sin\alpha\ sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$ **(viii)**

આ સૂત્રો (v), (vi), (vii) અને (viii) માં ડાબી બાજુનાં પરિણામો ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના ગુણાકાર સ્વરૂપમાં છે, જ્યારે જમણી બાજુનાં પદ બે સંખ્યાઓના સરવાળા અને તફાવત સ્વરૂપે ચલ $\alpha + \beta$ અથવા $\alpha - \beta$ હોય તેવાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્ય છે. આથી બે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના ગુણાકારનું સરવાળા-બાદબાકીના સ્વરૂપમાં નિરૂપણ કરવું સરળ બનશે.

ઉદાહરણ તરીકે $2\sin3\theta\cos5\theta = \sin(3\theta + 5\theta) + \sin(3\theta - 5\theta)$

$$= \sin8\theta + \sin(-2\theta)$$

$$= \sin8\theta - \sin2\theta \qquad (\sin(-\theta) = -\sin\theta)$$

હવે, આમાં જ જો મોટા માપનો ખૂણો પહેલા લેવામાં આવે તો ગણતરી સરળ બનશે :

$$2\cos3\theta \cdot \sin5\theta = 2\sin5\theta \cdot \cos3\theta = \sin(5\theta + 3\theta) + \sin(5\theta - 3\theta)$$

$$= \sin8\theta + \sin2\theta$$

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાને સરવાળા કે તફાવત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $2\sin5\theta\cos\theta$ (2) $2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$ (3) $2\sin3\theta\sin5\theta$ (4) $\sin^2\theta$ (5) $2\cos5\theta\cos\frac{\theta}{2}$

ઉકેલ : (1) $2\sin5\theta\cos\theta = \sin(5\theta + \theta) + \sin(5\theta - \theta) = \sin6\theta + \sin4\theta$

(2) $2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} = \sin\left(\frac{5\theta}{2} + \frac{3\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\theta}{2} - \frac{3\theta}{2}\right) = \sin4\theta - \sin\theta$

(3) $2\sin3\theta\sin5\theta = 2\sin5\theta\sin3\theta = \cos(5\theta - 3\theta) - \cos(5\theta + 3\theta)$

$$= \cos2\theta - \cos8\theta$$

(4) $\sin^2\theta = \sin\theta\sin\theta = \frac{1}{2}[2\sin\theta\sin\theta] = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta - \theta) - \cos(\theta + \theta)\right]$

$$= \frac{1}{2}[\cos0 - \cos2\theta] = \frac{1}{2}[1 - \cos2\theta]$$

(5) $2\cos5\theta\cos\frac{\theta}{2} = \cos\left(5\theta + \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(5\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{11\theta}{2} + \cos\frac{9\theta}{2}$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે, $\sin20^\circ \cdot \sin40^\circ \cdot \sin60^\circ \cdot \sin80^\circ = \frac{3}{16}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \sin20^\circ \cdot \sin40^\circ \cdot \sin60^\circ \cdot \sin80^\circ$

$$= \sin60^\circ \cdot (\sin20^\circ \cdot \sin40^\circ) \cdot \sin80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}(2\sin40^\circ \cdot \sin20^\circ) \cdot \sin80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}[\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)]\sin80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}[\cos(20^\circ) - \cos60^\circ]\sin80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos20^\circ - \frac{1}{2}\right)\sin80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2\sin80^\circ\cos20^\circ - \sin80^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(80^\circ + 20^\circ) + \sin(80^\circ - 20^\circ) - \sin80^\circ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin100^\circ + \sin60^\circ - \sin80^\circ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin(180^\circ - 80^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin80^\circ\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin80^\circ\right)$$

$$= \frac{3}{16} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 13 : જો A + B = 90°, તો $sinA \cdot sinB$ નાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = sinA \cdot sinB = sinA\ sin(90° - A) = sinA\ cosA$

હવે, $y = \frac{1}{2}(2sinA \cdot cosA) = \frac{1}{2}[sin(A + A) - sin(A - A)]$

$= \frac{1}{2}sin2A$ $(sin0 = 0)$

હવે, $-1 \le sin2A \le 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le \frac{1}{2}sin2A \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

આમ, $sinA\ sinB$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે $\frac{1}{2}$ અને $\frac{-1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચેનાને સરવાળા કે તફાવત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $2sin7\theta \cdot cos3\theta$ (2) $2sin\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{5\theta}{2}$ (3) $2cos5\theta \cdot sin3\theta$

(4) $2cos\frac{5\theta}{2} \cdot sin\frac{7\theta}{2}$ (5) $2cos11\theta \cdot cos3\theta$ (6) $2cos\frac{5\theta}{2} \cdot cos\frac{3\theta}{2}$

(7) $sin9\theta \cdot sin11\theta$ (8) $2sin\frac{7\theta}{2} \cdot sin\frac{9\theta}{2}$ (9) $2sin\theta \cdot cos\theta$

2. કિંમત શોધો :

(1) $2sin\frac{5\pi}{12} \cdot sin\frac{\pi}{12}$ (2) $2sin\frac{5\pi}{12} \cdot cos\frac{7\pi}{12}$ (3) $2cos\frac{\pi}{12} \cdot sin\frac{5\pi}{12}$

(4) $2cos\frac{5\pi}{12} \cdot cos\frac{7\pi}{12}$ (5) $8cos15° \cdot cos45° \cdot cos75°$ (6) $8sin10° \cdot sin50° \cdot sin70°$

3. સાબિત કરો :

(1) $sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\ sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{1}{2}cos2\theta$

(2) $sin\theta \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) = \frac{1}{4}sin3\theta$

(3) $2cos\frac{\pi}{13} \cdot cos\frac{9\pi}{13} + cos\frac{3\pi}{13} + cos\frac{5\pi}{13} = 0$

(4) $cos20° \cdot cos40° \cdot cos60° \cdot cos80° = \frac{1}{16}$

(5) $4cos12° \cdot cos48° \cdot cos72° = cos36°$

4. $4cos\theta \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) = cos3\theta$ સાબિત કરો તથા તે પરથી

$cos6°\ cos42°\ cos66°\ cos78° = \frac{1}{16}$ તારવો.

5. $\frac{1}{2sin10°} - 2sin70°$ ની કિંમત શોધો.

6. સાબિત કરો કે, $cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} = \frac{-1}{2}$.

*

4.9 સરવાળા અથવા તફાવતનું ગુણાકાર તરીકે નિરૂપણ

આપણે આગળ સૂત્રો (v) થી (viii) જોયાં, જે નીચે પ્રમાણે છે :

$2sin\alpha \cdot cos\beta = sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$ **(v)**

$2cos\alpha \cdot sin\beta = sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$ **(vi)**

$2cos\alpha \cdot cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$ **(vii)**

$2sin\alpha \cdot sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$ **(viii)**

અહીં, $\alpha + \beta = C$ અને $\alpha - \beta = D$ લેતાં,

$\alpha = \frac{C+D}{2}$ અને $\beta = \frac{C-D}{2}$ મળે.

$$sinC + sinD = 2sin\left(\frac{C+D}{2}\right) cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$sinC - sinD = 2cos\left(\frac{C+D}{2}\right) sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$cosC + cosD = 2cos\left(\frac{C+D}{2}\right) cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$cosD - cosC = 2sin\left(\frac{C+D}{2}\right) sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$ **અથવા**

$$cosC - cosD = -2sin\left(\frac{C+D}{2}\right) sin\left(\frac{C-D}{2}\right).$$

આ સૂત્રો ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના સરવાળા કે તફાવતનું ગુણાકાર તરીકે નિરૂપણ કરવામાં ઉપયોગી છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાને ગુણાકાર સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(1) $sin6\theta + sin4\theta$ (2) $sin6\theta - sin2\theta$ (3) $cos5\theta + cos2\theta$

(4) $cos6\theta - cos10\theta$ (5) $sin\theta - 1$ (6) $cos\theta + 1$

ઉકેલ : (1) $sin6\theta + sin4\theta = 2sin\left(\frac{6\theta+4\theta}{2}\right) cos\left(\frac{6\theta-4\theta}{2}\right) = 2sin5\theta\ cos\theta$

(2) $sin6\theta - sin2\theta = 2cos\left(\frac{6\theta+2\theta}{2}\right) sin\left(\frac{6\theta-2\theta}{2}\right) = 2cos4\theta\ sin2\theta$

(3) $cos5\theta + cos2\theta = 2cos\left(\frac{5\theta+2\theta}{2}\right) cos\left(\frac{5\theta-2\theta}{2}\right) = 2cos\frac{7\theta}{2}\ cos\frac{3\theta}{2}$

(4) $cos6\theta - cos10\theta = -2sin\left(\frac{6\theta+10\theta}{2}\right) sin\left(\frac{6\theta-10\theta}{2}\right)$

$= -2sin8\theta\ sin(-2\theta) = 2sin8\theta\ sin2\theta$

(5) $sin\theta - 1 = sin\theta - sin\frac{\pi}{2} = 2cos\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}\right) sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$= 2cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

(6) $\cos\theta + 1 = \cos\theta + \cos 0 = 2\cos\left(\frac{\theta + 0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - 0}{2}\right)$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો :

(1) $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = \frac{1}{2}$

(2) $1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A = 4\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A$

(3) $\sqrt{3}\sin 10^\circ + \sqrt{2}\sin 55^\circ = \cos 80^\circ + 2\cos 50^\circ$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= \cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

$$= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{100^\circ + 140^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{100^\circ - 140^\circ}{2}\right)$$

$$= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos 120^\circ \cos(20^\circ) \qquad (\cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ)$$

$$= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos(180^\circ - 60^\circ)\cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2}\cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = \frac{1}{2} = \text{જ.બા.}$$

(2) ડા.બા. $= 1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A$

$$= (\cos 0 + \cos 2A) + (\cos 4A + \cos 6A)$$

$$= 2\cos A \cdot \cos A + 2\cos 5A \cdot \cos A$$

$$= 2\cos A(\cos A + \cos 5A)$$

$$= 2\cos A(2\cos 3A \cdot \cos 2A)$$

$$= 4\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A = \text{જ.બા.}$$

(3) ડા.બા. $= \sqrt{3}\sin 10^\circ + \sqrt{2}\sin 55^\circ$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 55^\circ$$

$$= 2\sin 60^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 45^\circ \sin 55^\circ$$

$$= \cos 50^\circ - \cos 70^\circ + \cos 10^\circ - \cos 100^\circ$$

$$= \cos 50^\circ - \cos(180^\circ - 80^\circ) - (\cos 70^\circ - \cos 10^\circ) \qquad \text{(પદોનું પુનર્ગઠન)}$$

$$= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + 2\sin(90^\circ - 50^\circ) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + \cos 50^\circ = \cos 80^\circ + 2\cos 50^\circ = \text{જ.બા.}$$

સ્વાધ્યાય 4.4

1. ગુણાકાર સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $sin7\theta + sin3\theta$ (2) $sin\frac{\theta}{2} + sin\frac{3\theta}{2}$ (3) $sin3\theta - sin5\theta$

(4) $sin\frac{7\theta}{2} - sin\frac{3\theta}{2}$ (5) $cos11\theta + cos9\theta$ (6) $cos\frac{5\theta}{2} + cos\frac{11\theta}{2}$

(7) $cos5\theta - cos11\theta$ (8) $cos\frac{\theta}{2} - cos\frac{3\theta}{2}$ (9) $cos\theta - 1$

(10) $sin\theta + 1$ (11) $cos\theta + sin\theta$ (12) $sin\theta - cos\theta$

સાબિત કરો : **(2 થી 7)**

2. (1) $cos55^\circ + cos65^\circ + cos175^\circ = 0$ (2) $cos\frac{5\pi}{12} - cos\frac{\pi}{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(3) $sin65^\circ + cos65^\circ = \sqrt{2}\,cos20^\circ$ (4) $\frac{sin\frac{5\pi}{12} - cos\frac{5\pi}{12}}{cos\frac{5\pi}{12} + sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) $\frac{cos\,7A + cos\,5A}{sin\,7A - sin\,5A} = cotA$

(6) $cos2\theta\ cos\frac{\theta}{2} - cos3\theta\ cos\frac{9\theta}{2} = sin5\theta\ sin\frac{5\theta}{2}$

(7) $sin\theta + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

3. (1) $(cos\alpha + cos\beta)^2 + (sin\alpha + sin\beta)^2 = 4cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

(2) $(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2 = 4sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

4. (1) $sinA + sinB + sinC - sin(A + B + C) = 4sin\frac{A + B}{2}\ sin\frac{B - C}{2}\ sin\frac{C - A}{2}$.

(2) $cosA + cosB + cosC + cos(A + B + C) = 4cos\frac{A + B}{2}\ cos\frac{B - C}{2}\ cos\frac{C - A}{2}$.

5. (1) $\frac{sin(A + B) - 2sinA + sin(A - B)}{cos(A + B) - 2cosA + cos(A - B)} = tanA$

(2) $\frac{cos\,3A + 2cos\,5A + cos\,7A}{cos\,A + 2cos\,3A + cos\,5A} = cos2A - sin2A\ tan3A$

6. (1) $\frac{1}{sin\,10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{cos10^\circ} = 4$ (2) $\sqrt{2}\,sin10^\circ + \sqrt{3}\,cos35^\circ - sin55^\circ + 2cos65^\circ$

7. (1) $sin\theta = nsin(\theta + 2\alpha) \Leftrightarrow tan(\theta + \alpha) = \frac{1 + n}{1 - n}tan\alpha$

(2) $sin(2A + 3B) = 5sinB \Rightarrow 2tan(A + 2B) = 3tan(A + B)$.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin(\alpha + \beta) < sin\alpha + sin\beta$ અને તે પરથી તારવો કે $sin49^\circ + sin41^\circ > 1$.

ઉકેલ : $sin(\alpha + \beta) - sin\alpha - sin\beta$

$= sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta - sin\alpha - sin\beta$

$= sin\alpha\ (cos\beta - 1) + sin\beta\ (cos\alpha - 1)$ **(i)**

હવે, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. તેથી $0 < sin\alpha < 1, 0 < sin\beta < 1$ અને

$0 < cos\alpha < 1, 0 < cos\beta < 1$

$\therefore\ cos\alpha - 1 < 0, cos\beta - 1 < 0$

$\therefore\ sin\alpha(cos\beta - 1) < 0$ અને $sin\beta(cos\alpha - 1) < 0$

$\therefore\ sin\alpha(cos\beta - 1) + sin\beta(cos\alpha - 1) < 0$

$\therefore\ sin(\alpha + \beta) - sin\alpha - sin\beta < 0$

$\therefore\ sin(\alpha + \beta) < sin\alpha + sin\beta$

હવે, $\alpha = 49^\circ, \beta = 41^\circ$ લેતાં,

આપણે જાણીએ છીએ કે, $0 < 49 < 90$ અને $0 < 41 < 90$

$sin(49^\circ + 41^\circ) < sin49^\circ + sin41^\circ$

$\therefore\ sin90^\circ < sin49^\circ + sin41^\circ$

$\therefore\ sin49^\circ + sin41^\circ > 1$

ઉદાહરણ 17 : જો $cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, $sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ અને $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$, તો સાબિત કરો કે, $tan2\alpha = \frac{56}{33}$.

ઉકેલ : અહીં, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ આપેલ છે.

$\therefore\ 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ અને $\frac{-\pi}{4} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore\ cos(\alpha - \beta)$ અને $sin(\alpha + \beta)$ ધન થાય.

હવે, $sin(\alpha + \beta) - \sqrt{1 - cos^2(\alpha - \beta)} - \sqrt{1 - \frac{16}{25}} - \frac{3}{5}$ $\left(0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

$cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ sin(\alpha + \beta) - \frac{3}{5}$ અને $cos(\alpha - \beta) - \frac{12}{13}$

હવે, $tan(\alpha + \beta) = \frac{sin(\alpha - \beta)}{cos(\alpha \cdot \beta)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

અને $tan(\alpha - \beta) = \frac{sin(\alpha - \beta)}{cos(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

$tan2\alpha - tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$

$= \frac{tan(\alpha \cdot \beta) + tan(\alpha - \beta)}{1 - tan(\alpha + \beta)\, tan(\alpha - \beta)} - \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} - \frac{56}{33}$

$\therefore\ tan2\alpha - \frac{56}{33}$

ઉદાહરણ 18 : જો α અને β એ સમીકરણ $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ નાં બીજ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(1) $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (2) $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$

ઉકેલ : અહીં, $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ આપેલ છે. **(i)**

$\therefore \quad a\cos\theta = c - b\sin\theta$

$\therefore \quad a^2\cos^2\theta = (c - b\sin\theta)^2$

$\therefore \quad a^2(1 - \sin^2\theta) = c^2 - 2bc\sin\theta + b^2\sin^2\theta$

$\therefore \quad (a^2 + b^2)\sin^2\theta - 2bc\sin\theta + (c^2 - a^2) = 0$ **(ii)**

અહીં, α અને β સમીકરણ (i)નાં બીજ છે તેથી $\sin\alpha$ અને $\sin\beta$ સમીકરણ (ii)નાં બીજ થશે.

$\therefore \quad \sin\alpha \sin\beta = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$ **(iii)**

ફરી, $a\cos\theta + b\sin\theta = c$

$\therefore \quad b\sin\theta = c - a\cos\theta$

$\therefore \quad b^2(1 - \cos^2\theta) = c^2 - 2ac\cos\theta + a^2\cos^2\theta$

$\therefore \quad b^2 - b^2\cos^2\theta = a^2\cos^2\theta - 2ac\cos\theta + c^2$

$\therefore \quad (a^2 + b^2)\cos^2\theta - 2ac\cos\theta + (c^2 - b^2) = 0$ **(iv)**

અહીં α અને β સમીકરણ (i)નાં બીજ છે તેથી $\cos\alpha$, $\cos\beta$ સમીકરણ (iv)નાં બીજ થશે.

$\therefore \quad \cos\alpha \cos\beta = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$ **(v)**

હવે, $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$\therefore \quad \cos(\alpha + \beta) = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

અને $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$ **((iii) અને (v) પરથી)**

$\therefore \quad \cos(\alpha - \beta) = \dfrac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$

ઉદાહરણ 19 : જો $a\sin\theta = b\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = c\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$, તો સાબિત કરો કે,

$ab + bc + ca = 0.$ $(abc \neq 0)$

ઉકેલ : ધારો કે $a\sin\theta = b\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = c\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = k$

સ્પષ્ટ છે કે $k \neq 0$. (કેમ ?)

$$\therefore \quad \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = sin\theta + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= sin\theta + sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \ cos\frac{2\pi}{3} + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = 0$$

$$\therefore \quad k\left(\frac{bc + ca + ab}{abc}\right) = 0$$

$$\therefore \quad ab + bc + ca = 0 \qquad (k \neq 0)$$

સ્વાધ્યાય 4

1. સાબિત કરો :

(1) $\dfrac{cos^2 33^\circ - cos^2 57^\circ}{sin^2 \frac{21^\circ}{2} - sin^2 \frac{69^\circ}{2}} = -\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{sin\, 20^\circ} - \dfrac{1}{cos\, 20^\circ} = 4$

2. સાબિત કરો $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow tan(\alpha + \beta) > tan\alpha + tan\beta$ અને

તારવો કે, $tan35^\circ + tan25^\circ < \sqrt{3}$.

3. સાબિત કરો : $2tan\beta + cot\beta = tan\alpha \Rightarrow 2tan(\alpha - \beta) = cot\beta$.

4. જો $\theta + \beta = \alpha$ અને $sin\theta = ksin\beta$, તો સાબિત કરો કે, $tan\theta = \dfrac{k\,sin\alpha}{1 + k\,cos\alpha}$ અને $tan\beta = \dfrac{sin\alpha}{k - cos\alpha}$.

5. ΔABC માં જો $sinA + cosB = 0$, તો સાબિત કરો કે ΔABC ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે તથા $0 < sinA < \frac{1}{\sqrt{2}}$ છે.

6. જો $cos(\beta - \gamma) + cos(\gamma - \alpha) + cos(\alpha - \beta) = \frac{-3}{2}$, તો સાબિત કરો કે,

$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 0$ અને $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 0$.

7. જો $tan(\alpha + \theta) = n\,tan(\alpha - \theta)$, તો સાબિત કરો કે, $(n + 1)\, sin2\theta = (n - 1)\, sin2\alpha$.

8. જો α અને β એ સમીકરણ $a\,tan\theta + b\,sec\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે, $tan(\alpha + \beta) = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$.

9. $3cos\theta + 5sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ નાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો મેળવો.

10. સાબિત કરો : $sin10^\circ \cdot sin30^\circ \cdot sin50^\circ \cdot sin70^\circ = \frac{1}{16}$.

11. સાબિત કરો : $cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

12. સાબિત કરો કે, $\frac{cos8\theta\, cos5\theta - cos12\theta\, cos9\theta}{sin8\theta\, cos5\theta + cos12\theta\, sin9\theta} = tan4\theta$.

13. સાબિત કરો કે, $m tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = n tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow cos2\theta = \frac{m+n}{2(m-n)}$.

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $\frac{cos\,10^\circ + sin\,10^\circ}{cos\,10^\circ - sin\,10^\circ}$નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $tan25^\circ$ (b) $tan35^\circ$ (c) $tan55^\circ$ (d) $tan80^\circ$

(2) $cos245^\circ + sin155^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 0 (b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(3) $cos(270^\circ + \alpha)\, cos(90^\circ - \alpha) - sin(270^\circ - \alpha)\, cos\alpha$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(4) $2sin\left(\frac{\pi}{12}\right) sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\frac{-1}{4}$ (b) 1 (c) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(5) જો A = 125 અને $x = sinA^\circ + cosA^\circ$, તો .... ☐

(a) $x < 0$ (b) $x = 0$ (c) $x > 0$ (d) $x \geq 0$

(6) જો $tan\alpha = \frac{n}{n+1}$ અને $tan\beta = \frac{1}{2n+1}$, $(0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4})$, તો $\alpha + \beta =$ ...... ☐

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(7) $\frac{tan\,50^\circ - tan\,40^\circ}{tan\,10^\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(8) $sin190^\circ + cos190^\circ$ ...... છે. ☐

(a) ઋણ (b) શૂન્ય (c) ધન (d) અવાસ્તવિક

(9) જો $cot15^\circ = m$, તો $\frac{tan\,225^\circ + tan\,345^\circ}{tan\,195^\circ - tan\,105^\circ} =$ ...... ☐

(a) $\frac{m-1}{m^2+1}$ (b) $\frac{2m}{m^2+1}$ (c) $\frac{m^2-1}{m^2-1}$ (d) $\frac{m+1}{m^2+1}$

(10) $\log tan1^\circ + \log tan2^\circ + ... + \log tan89^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(11) $\frac{1 - tan^2 15^\circ}{1 + tan^2 15^\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 2 (d) $\sqrt{3}$

(12) $\cos 480^\circ \sin 150^\circ + \sin 600^\circ \cos 390^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) 0 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

(13) $\tan 25^\circ + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ \tan 20^\circ =$ ......

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

(14) ΔABC માં જો $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, તો $\angle C$ નું રેડિયન માપ ...... છે.

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(15) $\sqrt{3}\,cosec 20^\circ - \sec 20^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -4 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(16) $(\sqrt{3}\sin 75^\circ - \cos 75^\circ)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(17) $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} =$ ......

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

(18) $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(19) $\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ - \cos^2 37\frac{1}{2}^\circ =$ ......

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
4. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
5. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
6. $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
7. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

   $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

8. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

9. $f(\alpha) = a\cos\alpha + b\sin\alpha,\ \alpha \in R,\ a, b, \in R$ નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}\ \right]$ છે.

(જ્યાં $a^2 + b^2 \neq 0$)

યોગ્ય પ્રદેશમાં,

10. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

11. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

12. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$

13. $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

14. $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},\ \ \cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

15. $2\sin\alpha\ \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

16. $2\cos\alpha\ \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

17. $2\cos\alpha\ \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

18. $2\sin\alpha\ \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

19. $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C + D}{2}\right)\ \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)$

20. $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C + D}{2}\right)\ \sin\left(\frac{C - D}{2}\right)$

21. $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C + D}{2}\right)\ \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)$

22. $\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C + D}{2}\right)\ \sin\left(\frac{C - D}{2}\right)$.

—❖—

Aryabhata is also known as **Aryabhata I** to distinguish him from the later mathematician of the same name who lived about 400 years later.

The surviving text is Aryabhata's masterpiece the *Aryabhatiya* which is a small astronomical treatise written in 118 verses giving a summary of Hindu mathematics up to that time. Its mathematical section contains 33 verses giving 66 mathematical rules without proof.

The mathematical part of the *Aryabhatiya* covers arithmetic, algebra, plane trigonometry and spherical trigonometry. It also contains continued fractions, quadratic equations, sums of power series and a table of *sines*.

પ્રકરણ 5

ગુણિત અને ઉપગુણિત સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો

Geometry is not true, it is advantageous.

– Henri Poincare

Since the mathematicians have invaded the theory of relativity, I do not understand it myself anymore.

– Albert Einstein

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે સરવાળા-સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી 2α, 3α વગેરે વાસ્તવિક સંખ્યા α ના ગુણિતો **(Multiples)** અને $\frac{\alpha}{2}$ જેવા α ના ઉપગુણિત **(Submultiples)** માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો મેળવીશું. ત્યારબાદ આ સૂત્રોના ઉપયોગથી કેટલીક વિશિષ્ટ સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોની કિંમતો મેળવીશું, તથા છેલ્લે શરતી નિત્યસમોની સાબિતીમાં તેમનો ઉપયોગ જોઈશું.

5.2 2α માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો

(1) ***sin2α* નું સૂત્ર :** $\alpha, \beta \in R$ માટે,

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$

આ સૂત્રમાં $\beta = \alpha$ મૂકતાં,

$sin(\alpha + \alpha) = sin\alpha\ cos\alpha + cos\alpha\ sin\alpha$

$\therefore \quad sin2\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha$ **(i)**

(2) ***cos2α* નું સૂત્ર :** $\alpha, \beta \in R$ માટે,

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$

આ સૂત્રમાં $\beta = \alpha$ મૂકતાં,

$cos(\alpha + \alpha) = cos\alpha\ cos\alpha - sin\alpha\ sin\alpha$

$\therefore \quad cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ **(ii)**

$\therefore \quad cos2\alpha = cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha)$

$\therefore \quad cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$ **(iii)**

ફરીથી, $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$= 1 - sin^2\alpha - sin^2\alpha$

$\therefore \quad cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ **(iv)**

આમ, $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

ઉપરના સૂત્રોની મદદથી આપણે કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા α માટે $sin\alpha$ અને $cos\alpha$ નાં મૂલ્યો જાણતા હોઈએ તો વાસ્તવિક સંખ્યા 2α માટે $sin2\alpha$ અને $cos2\alpha$ નાં મૂલ્યો મેળવી શકીએ.

ઉપરનાં સૂત્રો (iii) અને (iv) પરથી આપણને,

$1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$, $1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha$ મળે.

આ સ્વરૂપ ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

હવે આપણે 2α ના સ્થાને α (એટલે α ના સ્થાને $\frac{\alpha}{2}$), મૂકીએ તો

$$sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$$

વળી, $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$ અને $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$

(3) $tan\alpha$ ના ઉપયોગથી $sin2\alpha$, $cos2\alpha$ અને $tan2\alpha$ નાં સૂત્રો :

$$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$$

$$= \frac{2sin\alpha \cdot cos\alpha}{cos^2\alpha + sin^2\alpha} \qquad (cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1)$$

જો $\alpha \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, તો $cos\alpha \neq 0$. તેથી $cos^2\alpha$ વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં,

$$sin2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 + tan^2\alpha} \qquad \textbf{(v)}$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

$$= \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{cos^2\alpha + sin^2\alpha}$$

ફરી, $\alpha \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, લેતાં, $cos\alpha \neq 0$. તેથી $cos^2\alpha$ વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં,

$$cos2\alpha = \frac{1 - tan^2\alpha}{1 + tan^2\alpha} \qquad \textbf{(vi)}$$

હવે, α અને 2α બંને tan વિધેયના પ્રદેશમાં હોય તો,

$$tan2\alpha = tan(\alpha + \alpha)$$

$$= \frac{tan\alpha + tan\alpha}{1 - tan\alpha\, tan\alpha} \quad \left(\alpha \in R - \left[\left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \cup \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}\right]\right)$$

$$\therefore \quad tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha} \qquad \textbf{(vii)}$$

હવે, ધારો કે α અને 2α બંને cot વિધેયના પ્રદેશમાં છે. તો ઉપર પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે,

$$cot2\alpha = \frac{cot^2\alpha - 1}{2cot\alpha} \qquad \left(\alpha \in R - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in Z\right\}\right) \textbf{(viii)}$$

નોંધ : જો $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $\forall k \in Z$, તો સ્પષ્ટ છે કે $\alpha \neq k\pi$ પ્રત્યેક $k \in Z$ કારણ કે $k\pi = \frac{2k\pi}{2}$, $2k \in Z$.

સૂત્રો (v), (vi) અને (vii) માં 2α ને બદલે α (અને α ને બદલે $\frac{\alpha}{2}$) લેતાં,

$$sin\alpha = \frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1 - tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad cos\alpha = \frac{1 - tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tan^2\frac{\alpha}{2}} \text{ અને } tan\alpha = \frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1 - tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

હવે, ઉપર મેળવેલ સૂત્રોમાં $tan\frac{\alpha}{2} = t$ લેતાં,

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ અને } tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

5.3 3α માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં સૂત્રો

(1) $sin3\alpha = sin(2\alpha + \alpha)$

$= sin2\alpha \cdot cos\alpha + cos2\alpha \cdot sin\alpha$

$= (2sin\alpha \cdot cos\alpha) \cdot cos\alpha + (1 - 2sin^2\alpha) \cdot sin\alpha$

$= 2sin\alpha \cdot cos^2\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha$

$= 2sin\alpha (1 - sin^2\alpha) + sin\alpha - 2sin^3\alpha$

$= 2sin\alpha - 2sin^3\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha$

$= 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$

$\therefore$ **$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$** **(ix)**

(2) $cos3\alpha = cos(\alpha + 2\alpha)$

$= cos\alpha \cdot cos2\alpha - sin\alpha \cdot sin2\alpha$

$= cos\alpha \cdot (2cos^2\alpha - 1) - sin\alpha (2sin\alpha\, cos\alpha)$

$= 2cos^3\alpha - cos\alpha - 2cos\alpha \cdot sin^2\alpha$

$= 2cos^3\alpha - cos\alpha - 2cos\alpha (1 - cos^2\alpha)$

$= 2cos^3\alpha - cos\alpha - 2cos\alpha + 2cos^3\alpha$

$= 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$

$\therefore$ **$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$** **(x)**

(3) $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ એ tan વિધેયનાં પ્રદેશમાં લેતાં,

$\alpha \neq (2k - 1)\frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq (2k - 1)\frac{\pi}{4}$ અને $\alpha \neq (2k - 1)\frac{\pi}{6}$, $k \in Z$

આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રત્યેક $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણક એ $\frac{\pi}{6}$નો અયુગ્મ ગુણક પણ છે. દાખલા તરીકે $\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6}$.

એટલે કે, $\left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \subset \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$

$tan3\alpha = tan(2\alpha + \alpha)$

$$= \frac{tan2\alpha + tan\alpha}{1 - tan2\alpha\, tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2tan\,\alpha}{1 - tan^2\alpha} + tan\,\alpha}{1 - \frac{2tan\,\alpha}{1 - tan^2\alpha} \cdot tan\,\alpha}$$

$$= \frac{2tan\,\alpha + tan\,\alpha - tan^3\alpha}{1 - tan^2\alpha - 2tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}, \alpha \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{6}, k \in Z\right\}$$

$$\therefore \quad \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}, \alpha \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{6}, k \in Z\right\} \qquad \textbf{(xi)}$$

આ સૂત્ર જો 2α એ tan વિધેયનાં પ્રદેશમાં હોય તો પણ સત્ય રહે છે.

જો α, 2α અને $3\alpha \in D_{cot}$ લેતાં,

$$\alpha \neq k\pi, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \alpha \neq \frac{k\pi}{3}, k \in Z$$

$$\left\{k\pi \mid k \in Z\right\} \subset \left\{\frac{k\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$$

$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}, \alpha \in R - \left\{\frac{k\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$ **પણ આ રીતે સહેલાઈથી મળે.** **(xii)**

પ્રત્યેક, $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ માટે પણ સૂત્ર સત્ય છે.

આમ, કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા α માટે, $sin\alpha$, $cos\alpha$ અને $tan\alpha$ નાં મૂલ્યો પરથી અનુક્રમે $sin3\alpha$, $cos3\alpha$ અને $tan3\alpha$ નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય છે. અને તે જ રીતે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં 4α, 5α,... વગેરે જેવાં મૂલ્યો માટે પણ α નાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો : (1) $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan\theta$ (2) $\frac{\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$

(3) $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ (4) $\sec\theta + \tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \tan\theta =$ જ.બા.

(2) ડા.બા. $= \frac{\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta}$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} + (1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2} + 1\right)}{\sin\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2} + 1\right)}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} =$ જ.બા.

(3) ડા.બા. $= \frac{\cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}$ $\left(\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right), \sin A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right)$

$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) =$ જ.બા.

(4) ડા.બા. $= sec\theta + tan\theta = \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$$= \frac{1 + sin\theta}{cos\theta}$$

$$= \frac{1 - cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

$$= \frac{2sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 2 : $cos4\theta$ નું $cos\theta$ માં બહુપદી તરીકે પદોમાં અને $sin5\theta$ નું $sin\theta$ માં બહુપદી તરીકે પદોમાં વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : $cos4\theta = cos2(2\theta)$

$$= 2cos^2 2\theta - 1$$

$$= 2(2cos^2\theta - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4cos^4\theta - 4cos^2\theta + 1) - 1$$

$$= 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1$$

$$sin5\theta = (sin5\theta + sin\theta) - sin\theta$$

$$= 2sin3\theta\ cos2\theta - sin\theta$$

$$= 2(3sin\theta - 4sin^3\theta)(1 - 2sin^2\theta) - sin\theta$$

$$= 6sin\theta - 12sin^3\theta - 8sin^3\theta + 16sin^5\theta - sin\theta$$

$$\therefore\ sin5\theta = 16sin^5\theta - 20sin^3\theta + 5sin\theta$$

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો : $cosA \cdot cos(60° - A)\ cos(60° + A) = \frac{1}{4}cos3A$ અને આ પરથી $cos20° \cdot cos40° \cdot cos60° \cdot cos80°$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ડા.બા. $= cosA \cdot cos(60° - A)\ cos(60° + A)$

$$= cosA(cos^2 60° - sin^2A)$$

$$= cosA\left(\frac{1}{4} - sin^2A\right)$$

$$= cosA\left(\frac{1}{4} - (1 - cos^2A)\right)$$

$$= cosA\left(-\frac{3}{4} + cos^2A\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4cos^3A - 3cosA\right) = \frac{1}{4}cos3A = \text{જ.બા.}$$

હવે, $cos20° \cdot cos40° \cdot cos60° \cdot cos80° = \frac{1}{2}(cos20° \cdot cos(60° + 20°)\ cos(60° - 20°)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}cos3(20°)\right] \qquad \textbf{(A = 20°)}$$

$$= \frac{1}{8}cos60° = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો : $cos^3\theta + cos^3\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + cos^3\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) = \frac{3}{4}cos3\theta$

ઉકેલ : $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$. આથી $cos^3\theta = \frac{1}{4}(cos3\theta + 3cos\theta)$

ડા.બા. $= \cos^3\theta + \cos^3\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos^3\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right)$

$$= \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos\theta] + \frac{1}{4}\left[\cos(2\pi + 3\theta) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\cos(4\pi + 3\theta) + 3\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos\theta] + \frac{1}{4}\left[\cos 3\theta + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\cos 3\theta + 3\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\left[\cos\theta + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\left[\cos\theta + 2\cos(\pi + \theta)\cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\left[\cos\theta - 2\cos\theta \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}(\cos\theta - \cos\theta) = \frac{3}{4}\cos 3\theta = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 5 : $\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 2^2A \cdot \cos 2^3A \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}A = \frac{\sin 2^n A}{2^n \cdot \sin A}$ સાબિત કરો અને તે પરથી $\cos\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} \cdot \cos\frac{8\pi}{15} \cdot \cos\frac{14\pi}{15}$નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$

ડા.બા. $= \cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 2^2A \cdot \cos 2^3A \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}A$

$$= \frac{\sin 2A}{2\sin A} \cdot \frac{\sin 2(2A)}{2\sin 2A} \cdot \frac{\sin 2(2^2A)}{2\sin 2^2A} \cdot \frac{\sin 2(2^3A)}{2\sin 2^3A} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 2(2^{n-1}A)}{2\sin 2^{n-1}A}$$

$$= \frac{\sin 2(2^{n-1}A)}{2^n \cdot \sin A} = \frac{\sin 2^n A}{2^n \cdot \sin A} = \text{જ.બા.}$$

$$\cos\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} \cdot \cos\frac{8\pi}{15} \cdot \cos\frac{14\pi}{15} = -\cos\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} \cdot \cos\frac{8\pi}{15} \cdot \cos\frac{\pi}{15}$$

$$\left(\cos\frac{14\pi}{15} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) = -\cos\frac{\pi}{15}\right)$$

$$= -\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}$$

$$= -\frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right)}{16\sin\frac{\pi}{15}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}} = \frac{1}{16}$$

સ્વાધ્યાય 5.1

સાબિત કરો : **(1 થી 19)**

1. $\frac{\sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cot\theta$

2. $\frac{\cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

3. $\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\operatorname{cosec}\theta$

4. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

5. $\frac{1 + sin2\theta + cos2\theta}{1 + sin2\theta - cos2\theta} = cot\theta$

6. $tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 2sec\theta$

7. $\frac{cot\theta - tan\theta}{1 - 2sin^2\theta} = sec\theta \cdot cosec\theta = 2cosec2\theta$

8. $sec2\theta - tan2\theta = tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

9. $\frac{sin\,5\theta - 2sin\,3\theta + sin\,\theta}{cos\,5\theta - cos\,\theta} = tan\theta$

10. $\frac{sin\theta - sin\,3\theta}{sin^2\theta - cos^2\theta} = 2sin\theta$

11. $\sqrt{3}cosec20^\circ - sec20^\circ = 4$

12. $2(cos^8\theta - sin^8\theta) = cos2\theta + cos^3 2\theta$

13. જો $tan\alpha = \frac{1}{3}$ અને $tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, તો $tan(\alpha + \beta) = 3$.

14. જો $cos\theta = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, તો $cos2\theta = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ અને $cos3\theta = \frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

15. $\frac{sin^2A - sin^2B}{sin2A - sin2B} = \frac{1}{2}tan(A + B)$

16. $\frac{sin\,3\theta}{sin\theta} - \frac{cos\,3\theta}{cos\theta} = 2$

17. $\frac{cos\,3\theta}{cos\theta} + \frac{sin\,3\theta}{sin\theta} = 4cos2\theta$

18. $cos^3\theta\, sin3\theta + sin^3\theta\, cos3\theta = \frac{3}{4}sin4\theta$

19. $cos^3\theta\, cos3\theta + sin^3\theta\, sin3\theta = cos^3 2\theta$

20. જો $sinA = \frac{3}{5}$, $0 < A < \frac{\pi}{2}$ તો $sin2A$, $cos2A$, $tan2A$ અને $sin4A$ નાં મૂલ્યો મેળવો.

21. જો $15\theta = \pi$ તો $cos\theta \cdot cos2\theta \cdot cos3\theta \cdot cos4\theta \cdot cos5\theta \cdot cos6\theta \cdot cos7\theta = \frac{1}{128}$ સાબિત કરો.

22. સાબિત કરો કે $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2cos8\theta}}} = 2cos\theta$, જ્યાં $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$

23. સાબિત કરો કે $tan\theta + tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + tan\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = 3tan3\theta$ અને આ પરથી તારવો કે $tan20^\circ + tan80^\circ + tan140^\circ = 3\sqrt{3}$.

24. સાબિત કરો કે $tan\theta \cdot tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \cdot tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = tan3\theta$ અને આ પરથી તારવો કે $tan6^\circ \cdot tan42^\circ \cdot tan66^\circ \cdot tan78^\circ = 1$.

25. સાબિત કરો : $cos6\theta = 32cos^6\theta - 48cos^4\theta + 18cos^2\theta - 1$.

*

5.4 $\frac{\alpha}{2}$ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોની $cos\alpha$ નાં મૂલ્યોમાં અભિવ્યક્તિ

(1) $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ માં 2α ને બદલે α મૂકતાં, (અને α ને બદલે $\frac{\alpha}{2}$ મૂકતાં),
$cos\alpha = 1 - 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ મળે.

$\therefore \quad 2sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\alpha$

$\therefore \quad sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{2}$ (xiii)

(2) તે જ પ્રમાણે $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$ માં 2α ને બદલે α (અને α ને બદલે $\frac{\alpha}{2}$) મૂકતાં,

$\therefore \quad 2cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\alpha$

$\therefore \quad cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{2}$ (xiv)

(3) $tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - cos\alpha}{2}}{\frac{1 + cos\alpha}{2}}$ $\alpha \neq (2k - 1)\pi;\ k \in Z$

$\therefore \quad tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}.$ (xv)

5.5 વિશિષ્ટ સંખ્યાઓ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો

(1) $sin18^\circ$:

ધારો કે $\theta = 18^\circ$

$\therefore \quad 5\theta = 90^\circ$

$\therefore \quad 3\theta + 2\theta = 90^\circ$

$\therefore \quad 2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$\therefore \quad sin2\theta = sin(90^\circ - 3\theta)$

$\therefore \quad sin2\theta = cos3\theta$

$\therefore \quad 2sin\theta\, cos\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

$\therefore \quad 2sin\theta = 4cos^2\theta - 3$ $(cos18^\circ \neq 0)$

$\therefore \quad 2sin\theta = 4(1 - sin^2\theta) - 3$

$\therefore \quad 2sin\theta = 4 - 4sin^2\theta - 3$

$\therefore \quad 4sin^2\theta + 2sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \quad sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

અહીં, $\theta = 18^\circ$ હોવાથી $P(\theta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

$\therefore \quad sin\theta > 0$

$\therefore \quad sin18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

(2) $cos18^\circ$:

$cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$ માં $\theta = 18^\circ$ મૂકતાં,

$cos^2 18^\circ = 1 - sin^2 18^\circ$

$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{16 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{16}$

$\therefore \quad cos^2 18^o = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$

$\therefore \quad cos18^o = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$ (0 < 18 < 90 હોવાથી $cos18^o > 0$)

(3) $cos36^o$:

$cos2\theta = 1 - 2sin^2\theta$ માં $\theta = 18^o$ મૂકતાં,

$$cos36^o = 1 - 2sin^2 18^o$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right)$$

$$= \frac{8-5-2\sqrt{5}-1}{8} = \frac{2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$\therefore \quad cos36^o = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(4) $sin36^o$:

$sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$ માં $\theta = 36^o$ મૂકતાં,

$$sin^2 36^o = 1 - cos^2 36^o$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}\right) = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$\therefore \quad sin36^o = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ (0 < 36 < 90 હોવાથી $sin36^o > 0$)

આ જ પ્રમાણે 18ની ગુણિત સંખ્યાઓ 54, 72, 144 વગેરે માટે પણ *sine* અને *cosine* નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય.

$$sin72^o = sin(90^o - 18^o) = cos18^o = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

અને $sin54^o = sin(90^o - 36^o) = cos36^o = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

તે જ રીતે $cos72^o = sin18^o$ અને $cos54^o = sin36^o$.

(5) $sin22\frac{1}{2}^o$ અથવા $sin\frac{\pi}{8}$:

$sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$ માં $\theta = \frac{45^o}{2}$ મૂકતાં,

$$sin^2\frac{45^o}{2} = \frac{1-cos\,45^o}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore \quad sin\frac{45^o}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (0 < $22\frac{1}{2}$ < 90 હોવાથી $sin22\frac{1}{2}^o > 0$)

(6) તે જ રીતે, $cos22\frac{1}{2}^o = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ મેળવી શકાય.

(7) $tan 22\frac{1}{2}^\circ$:

$$tan^2 22\frac{1}{2}^\circ = tan^2\frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - cos\, 45^\circ}{1 + cos\, 45^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1}$$

હવે, $0 < 22\frac{1}{2} < 90$ હોવાથી $tan 22\frac{1}{2}^\circ > 0$ છે.

$\therefore \quad tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$

તે જ રીતે $cot 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} + 1$ મળે. આ જ રીતે $67\frac{1}{2}$ માટે *sine* અને *cosine* નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય.

$$cos 67\frac{1}{2}^\circ = sin 22\frac{1}{2}^\circ,\ sin 67\frac{1}{2}^\circ = cos 22\frac{1}{2}^\circ \text{ અને } tan 67\frac{1}{2}^\circ = cot 22\frac{1}{2}^\circ$$

ઉદાહરણ 6 : જો $cot\theta = \frac{-5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ તો $sin\frac{\theta}{2} + cos\frac{\theta}{2}$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં $cot\theta = \frac{-5}{12}$. આથી, $tan\theta = \frac{-12}{5}$.

$\therefore \quad sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

$\therefore \quad sec\theta = \pm\frac{13}{5}$. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ હોવાથી $sec\theta < 0$

$\therefore \quad sec\theta = -\frac{13}{5}$. આથી $cos\theta = \frac{-5}{13}$

હવે, $sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - cos\,\theta}{2} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} = \frac{18}{26}$

$\therefore \quad sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{9}{13}$

$sin\frac{\theta}{2} > 0$ કારણ કે $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \quad sin\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + cos\,\theta}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$

$\therefore \quad cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad\left(\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad sin\frac{\theta}{2} + cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો : $sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8} + sin^4\frac{5\pi}{8} + sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8} + sin^4\frac{5\pi}{8} + sin^4\frac{7\pi}{8}$

$= sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8} + sin^4\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + sin^4\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$= 2\left(sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 2\left[\left(sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(sin^2\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$

$= 2\left[\left(\frac{1 - cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2\right]$ $\quad\left(sin^2\theta = \frac{1 - cos\,2\theta}{2}\right)$

$$= \frac{2}{4}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right] = \frac{3}{2} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 8 : જો $\sin\alpha + \sin\beta = a$ અને $\cos\alpha + \cos\beta = b$, તો સાબિત કરો કે

(1) $\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 - b^2 - 2}{2}$ (2) $\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$

ઉકેલ : (1) અહીં, $\sin\alpha + \sin\beta = a$ અને $\cos\alpha + \cos\beta = b$

વર્ગ કરીને ઉમેરતાં,

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = a^2 + b^2$$

$$\therefore 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$$

$$\therefore 2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$$

(ii) હવે, $\tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{1 + \cos(\alpha - \beta)}$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}}{1 + \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}}$$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2}}$$

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો : $\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta = \frac{1}{128}(3 - 4\cos4\theta + \cos8\theta)$

ઉકેલ : $\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta = (\sin\theta\cos\theta)^4$

$$= \frac{1}{16}(2\sin\theta\cos\theta)^4$$

$$= \frac{1}{16}(\sin2\theta)^4$$

$$= \frac{1}{16}(\sin^2 2\theta)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1 - \cos4\theta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}(1 - 2\cos4\theta + \cos^2 4\theta)$$

$$= \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos4\theta + \frac{1 + \cos8\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{128}(2 - 4\cos4\theta + 1 + \cos8\theta)$$

$$= \frac{1}{128}(3 - 4\cos4\theta + \cos8\theta)$$

સ્વાધ્યાય 5.2

1. જો $tan x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, હોય તો $sin\frac{x}{2}$, $cos\frac{x}{2}$ અને $tan\frac{x}{2}$નાં મૂલ્યો મેળવો.

2. જો $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $cos\beta = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ તો $sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ અને $cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$નાં મૂલ્યો મેળવો.

સાબિત કરો : **(3 થી 12)**

3. $cos^6\theta - sin^6\theta = \frac{1}{4}(cos^3 2\theta + 3cos2\theta)$

4. $cos^2 A + cos^2\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + cos^2\left(A - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

5. $sin^2 A + sin^2\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + sin^2\left(A - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$. પ્રશ્ન 4 પરથી તારવો.

6. $\left(1 + cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}$

7. $sin^4\theta \cdot cos^2\theta = \frac{1}{32}[2 - cos2\theta - 2cos4\theta + cos6\theta]$

8. $sin^6\theta = \frac{1}{32}[10 - 15cos2\theta + 6cos4\theta - cos6\theta]$

9. $sin6^\circ \cdot sin42^\circ \cdot sin66^\circ \cdot sin78^\circ = \frac{1}{16}$

10. $cos6^\circ \cdot cos42^\circ \cdot cos66^\circ \cdot cos78^\circ = \frac{1}{16}$

11. $16cos\frac{2\pi}{15} \cdot cos\frac{4\pi}{15} \cdot cos\frac{8\pi}{15} \cdot cos\frac{14\pi}{15} = 1$

12. $\left(1 + cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1 + cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 + cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1 + cos\frac{9\pi}{10}\right) = \frac{1}{16}$

*

5.6 શરતી નિત્યસમો

અહીં આપણે કેટલીક શરતોને આધીન મળતાં નિત્યસમો વિશે વિચારીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $sin2A + sin2B + sin2C = 4sinA\ sinB\ sinC$ એ $A + B + C = \pi$ હોય એવી A, B અને Cની કોઈ પણ કિંમતો માટે સત્ય છે એવું સાબિત કરી શકાય. પરંતુ તે માટે $A + B + C = \pi$ થાય તેવી જ A, B અને C ની કિંમતો લેવી તે શરત છે. આવા નિત્યસમને શરતી નિત્યસમ કહેવાય છે. જ્યારે $sin^2 A + cos^2 A = 1$ એ Aની પ્રત્યેક વાસ્તવિક કિંમત માટે સત્ય છે. આથી આવાં વિધાનોને નિત્યસમો કહે છે.

મુખ્યત્વે ત્રિકોણના ખૂણાઓને સાંકળતા સંબંધો આ પ્રકારના શરતી નિત્યસમો છે.

$A + B + C = \pi$

$\therefore\ A + B = \pi - C$ અને $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$\therefore\ sin(A + B) = sin(\pi - C)$ અને $sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

$\therefore\ sin(A + B) = sinC$ અને $sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = cos\frac{C}{2}$

તે જ રીતે,

$cos(A + B) = -cosC$ અને $cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = sin\frac{C}{2}$

ઉદાહરણ 10 : જો $A + B + C = \pi$ હોય તો સાબિત કરો કે,

$sin2A + sin2B + sin2C = 4sinA\ sinB\ sinC.$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin2A + sin2B + sin2C$

$= 2sin(A + B)\ cos(A - B) + 2sinC \cdot cosC$

$= 2sin(\pi - C)\ cos(A - B) + 2sinC \cdot cosC$ **$(A + B + C = \pi)$**

$= 2sinC \cdot cos(A - B) + 2sinC \cdot cosC$

$= 2sinC\ [cos(A - B) + cosC]$

$= 2sinC\ [cos(A - B) - cos(A + B)]$ **$(A + B + C = \pi)$**

$= 2sinC\ [-2sinA \cdot sin(-B)]$

$= 4sinA\ sinB\ sinC$ **$(sin(-B) = -sinB)$**

= જ.બા.

ઉદાહરણ 11 : જો $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ હોય તો સાબિત કરો કે,

$cos^2A + cos^2B + cos^2C = 2[1 + sinA\ sinB\ sinC].$

ઉકેલ : ડા.બા. $= cos^2A + cos^2B + cos^2C$

$= \frac{1 + cos2A}{2} + \frac{1 + cos2B}{2} + \frac{1 + cos2C}{2}$

$= \frac{1}{2}[3 + cos2A + cos2B + cos2C]$

$= \frac{1}{2}[3 + 2cos(A + B)\ cos(A - B) + 1 - 2sin^2C]$

$= \frac{1}{2}[4 + 2cos(A + B) \cdot cos(A - B) - 2sin^2C]$

$= 2 + cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cdot cos(A - B) - sin^2C$ **$\left(A + B = \frac{\pi}{2} - C\right)$**

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - sinC]$ **$\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = sinC\right)$**

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - cos(A + B)]$

$= 2 + sinC\ [-2sinA \cdot sin(-B)]$

$= 2 + 2sinA\ sinB\ sinC = 2\ [1 + sinA\ sinB\ sinC]$

અથવા બીજી રીત

ડા.બા. $= cos^2A + cos^2B + cos^2C$

$= cos^2A + 1 - sin^2B + 1 - sin^2C$

$- 2 + (cos^2A - sin^2B) - sin^2C$

$- 2 + cos(A + B)\ cos(A - B) - sin^2C$

$= 2 + cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cdot cos(A - B) - sin^2C$

$= 2 + sinC \cdot cos(A - B) - sin^2C$

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - sinC]$

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - cos(A + B)]$

$= 2 + sinC\ [-2sinA \cdot sin(-B)]$

$= 2\ [1 + sinA\ sinB\ sinC]$ = જ.બા.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. જો $A + B + C = \pi$, તો સાબિત કરો :

(1) $\cos2A + \cos2B + \cos2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$

(2) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$

(3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$

(4) $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

(5) $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$

(6) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$

(7) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2\left(1 + \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}\right)$

(8) $\sin^2A + \sin^2B - \sin^2C = 2\sin A \sin B \cos C$

2. જો $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો :

(1) $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 1 - 2\sin A \sin B \sin C$

(2) $\sin2A + \sin2B + \sin2C = 4\cos A \cos B \cos C$

(3) $\sin^2A - \sin^2B + \sin^2C = 1 - 2\cos A \sin B \cos C$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો : $\tan142\frac{1}{2}^\circ = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

ઉકેલ : $\tan142\frac{1}{2}^\circ = \tan\left(90^\circ + 52\frac{1}{2}^\circ\right)$

$$= -\cot52\frac{1}{2}^\circ$$

$$= -\cot\left(45^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ\right)$$

$$= -\frac{\cot7\frac{1}{2}^\circ - 1}{\cot7\frac{1}{2}^\circ + 1}$$

$$= -\frac{\cos7\frac{1}{2}^\circ - \sin7\frac{1}{2}^\circ}{\cos7\frac{1}{2}^\circ + \sin7\frac{1}{2}^\circ}$$

$$= -\frac{\cos7\frac{1}{2}^\circ - \sin7\frac{1}{2}^\circ}{\cos7\frac{1}{2}^\circ + \sin7\frac{1}{2}^\circ} \times \frac{\cos7\frac{1}{2}^\circ - \sin7\frac{1}{2}^\circ}{\cos7\frac{1}{2}^\circ - \sin7\frac{1}{2}^\circ}$$

$$= -\frac{\left(\cos7\frac{1}{2}^\circ - \sin7\frac{1}{2}^\circ\right)^2}{\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}$$

$$= -\frac{1 - 2\sin7\frac{1}{2}^\circ \times \cos7\frac{1}{2}^\circ}{\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}$$

$$= -\frac{1 - sin\ 15^\circ}{cos\ 15^\circ}$$

$$= -\frac{1 - sin\ (45^\circ - 30^\circ)}{cos\ (45^\circ - 30^\circ)}$$

$$= -\frac{1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = -\frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)} \frac{(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= -\frac{(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$= -\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3}$$

$= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 13 : જો $A + B + C = \pi$, તો સાબિત કરો કે,

$$sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} = 1 + 4sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right) sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right) sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$$

ઉકેલ : જ.બા. $= 1 + 4sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right) sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right) sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$

$= 1 + 4sin\left(\frac{B + C}{4}\right) sin\left(\frac{A + C}{4}\right) sin\left(\frac{A + B}{4}\right)$ **$(A + B + C = \pi)$**

$$= 1 + 2\left(2sin\left(\frac{B + C}{4}\right) sin\left(\frac{A + C}{4}\right)\right) sin\left(\frac{A + B}{4}\right)$$

$$= 1 + 2sin\left(\frac{A + B}{4}\right) \left[cos\left(\frac{B - A}{4}\right) - cos\left(\frac{A + B + 2C}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2sin\left(\frac{A + B}{4}\right) cos\left(\frac{B - A}{4}\right) - 2sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right) cos\left(\frac{\pi + C}{4}\right)$$

$$= 1 + \left(sin\frac{B}{2} + sin\frac{A}{2}\right) - \left(sin\frac{\pi}{2} - sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + sin\frac{B}{2} + sin\frac{A}{2} - sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{C}{2}$$

$= sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} =$ ડા.બા.

ઉદાહરણ 14 : જો α અને β સમીકરણ $acos\theta + bsin\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે, $tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2} = \frac{2b}{a + c}$

અને આ પરથી તારવો કે, $tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{b}{a}$.

ઉકેલ : $acos\theta + bsin\theta = c$

$$\therefore\ a\left(\frac{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + tan^2\frac{\theta}{2}}\right) + b\left(\frac{2tan\frac{\theta}{2}}{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}\right) = c$$

$$\therefore\ a - atan^2\frac{\theta}{2} + 2btan\frac{\theta}{2} = c + ctan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ (a + c)\,tan^2\frac{\theta}{2} - 2btan\frac{\theta}{2} + (c - a) = 0$$

આ $tan\frac{\theta}{2}$ માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે અને $tan\frac{\alpha}{2}$ અને $tan\frac{\beta}{2}$ તેનાં બીજ છે.

$$\therefore \quad tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2} = -\left(\frac{-2b}{a+c}\right) = \frac{2b}{a+c} \text{ અને } tan\frac{\alpha}{2} \cdot tan\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$$

હવે, $$tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2}}{1 - tan\frac{\alpha}{2}\, tan\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2b}{a+c}}{1-\frac{c-a}{c+a}} = \frac{2b}{a+c-c+a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

ઉદાહરણ 15 : ગણિતીય અનુમાનથી સાબિત કરો કે,

$$cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosn\theta = sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1.$$

ઉકેલ : ધારો કે

$$P(n) : cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosn\theta = sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1$$

$n = 1$ માટે, ડા.બા. $= cos\theta$, જ.બા. $= sin\theta \cdot cos\frac{\theta}{2} \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1$

$$= \frac{sin\theta \cdot cos\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= \frac{2sin\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= 2cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$= cos\theta =$ જ.બા. $\quad (cos2\theta = 2cos^2\theta - 1)$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$$\therefore \quad cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosk\theta = sin(k+1)\frac{\theta}{2} \cdot cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1.$$

$n = k + 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosk\theta + cos(k+1)\theta$

$$= \frac{sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\theta \cdot cos\frac{k\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} - 1 + cos(k+1)\theta$$

$$= \frac{1}{2sin\frac{\theta}{2}}\left(2sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\theta\, cos\frac{k\theta}{2} + 2sin\frac{\theta}{2} \cdot cos(k+1)\theta\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2sin\frac{\theta}{2}}\left[sin\left(\frac{(2k+1)\theta}{2}\right) + sin\frac{\theta}{2} + sin\left(\frac{(2k+3)\theta}{2}\right) - sin\left(\frac{(2k+1)\theta}{2}\right)\right] - 1$$

$$= \frac{1}{sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(sin\frac{(2k+3)\theta}{2} + sin\frac{\theta}{2}\right)\right] - 1$$

$$= \frac{1}{sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{2} \cdot 2sin\frac{(k+2)\theta}{2} \cdot cos\frac{(k+1)\theta}{2}\right] - 1$$

$$= \sin\frac{(k+2)\theta}{2} \cdot \cos\frac{(k+1)\theta}{2} \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1$$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે P(n) પ્રત્યેક $n \in$ N માટે સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 5

સાબિત કરો : **(1 થી 15)**

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \sec\theta + \tan\theta$

2. $\frac{\cot\theta + cosec\,\theta - 1}{\cot\theta - cosec\,\theta + 1} = \cot\frac{\theta}{2}$

3. $\tan\alpha = \sqrt{5}\tan\beta \Rightarrow \cos2\alpha = \frac{3\cos2\beta - 2}{3 - 2\cos2\beta}$

4. $\tan\frac{\alpha}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1-\tan^4\frac{\theta}{2}}{1+\tan^4\frac{\theta}{2}}$

5. જો $\sin\theta = a$, તો $a(1 + x^2) = 2x$ નાં બીજ $\tan\frac{\theta}{2}$ અને $\cot\frac{\theta}{2}$ છે.

6. જો $\cos\theta = a$, તો $4x^2 - 4x + 1 = a^2$ નાં બીજ $\cos^2\frac{\theta}{2}$ અને $\sin^2\frac{\theta}{2}$ છે.

7. જો α અને β સમીકરણ $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ નાં બીજ હોય, તો

(1) $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2ac}{a^2+b^2}$ અને $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$

(2) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{-2ab}{b^2-c^2}$ અને $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$

(3) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

8. $\cos^5\theta = \frac{1}{16}[10\cos\theta + 5\cos3\theta + \cos5\theta]$

9. $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)(2\cos2\theta - 1)(2\cos4\theta - 1) = 2\cos8\theta + 1$

10. $cosec\theta + cosec2\theta + cosec4\theta + \cot4\theta = \cot\frac{\theta}{2}$

11. $(\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ) - (\cos^2 66^\circ - \sin^2 6^\circ) = \frac{1}{4}$

12. $\frac{\sec8\theta - 1}{\sec4\theta - 1} = \frac{\tan8\theta}{\tan2\theta}$

13. $\cot\frac{\pi}{24} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$

14. $\tan\frac{\pi}{16} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$

15. $4\sin27^\circ = \sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$

16. જો $x = sin\theta + cos\theta \cdot sin2\theta$ અને $y = cos\theta + sin\theta \cdot sin2\theta$ તો સાબિત કરો કે, $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2$

17. જો $A + B + C = \pi$, સાબિત કરો કે,

(1) $sin(B + 2C) + sin(C + 2A) + sin(A + 2B) = 4sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{C-A}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

(2) $cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2} = 4cos\left(\frac{\pi - A}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi - B}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$.

18. જો ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો સાબિત કરો કે,

$cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1 \Leftrightarrow sin^2A + sin^2B + sin^2C = 2$.

ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંતથી નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરો : **(19 થી 22)**

19. $sinx + sin3x + sin5x + ... + sin(2n - 1)x = \frac{sin^2nx}{sinx}$.

20. $\frac{1}{2}tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}tan\frac{x}{4} + ... + \frac{1}{2^n}tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}cot\frac{x}{2^n} - cotx$

21. $sin\theta + sin2\theta + ... + sinn\theta = sin\frac{(n+1)\theta}{2} \cdot sin\frac{n\theta}{2} \cdot cosec\frac{\theta}{2}$

22. $cos\alpha \cdot cos2\alpha \cdot cos4\alpha \cdot ... \cdot cos2^{n-1}\alpha = \frac{sin^n 2\alpha}{2^n \cdot sin\alpha}$

23. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$નું એક બીજ ...... છે. ☐

(a) $sin70^\circ$ (b) $sin10^\circ$ (c) $sin20^\circ$ (d) $cos70^\circ$

(2) $cos^4\theta - sin^4\theta$ નો વિસ્તાર ...... છે. ☐

(a) $[0, 1]$ (b) $[-1, 1]$ (c) $(0, 1)$ (d) $(-1, 1)$

(3) $sec^4\theta + cosec^4\theta$ નો વિસ્તાર ...... છે. ☐

(a) $[1, \infty)$ (b) R^+ (c) $[8, \infty)$ (d) $R - (-1, 1)$

(4) $cos67\frac{1}{2}^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (c) $\sqrt{2} - 1$ (d) $\sqrt{2} + 1$

(5) $3sin\frac{\pi}{9} - 4sin^3\frac{\pi}{9}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{2}$ (b) -1 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(6) જો $sin\theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $P(2\theta)$ નું ચરણ ...... છે. ☐

(a) પહેલું (b) બીજું (c) ત્રીજું (d) ચોથું

(7) $6x - 8x^3 = \sqrt{3}$નું એક બીજ ...... છે. ☐

(a) $sin20^\circ$ (b) $sin30^\circ$ (c) $sin10^\circ$ (d) $cos10^\circ$

(8) જો α એ સમીકરણ $25cos^2\theta + 5cos\theta - 12 = 0$નું બીજ હોય, તો, $sin2\alpha$ શોધો. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

(a) $\frac{-24}{25}$ (b) $\frac{-13}{18}$ (c) $\frac{13}{18}$ (d) $\frac{24}{25}$

(9) $\frac{sin 3\theta}{1 + 2cos 2\theta}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-sin\theta$ (b) $-cos\theta$ (c) $cos\theta$ (d) $sin\theta$

(10) $\left(\frac{1 - sin\theta - cos\theta}{1 - sin\theta + cos\theta}\right)^2$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $tan^2\frac{\theta}{2}$ (b) $2cot\frac{\theta}{2}$ (c) $cot^2\frac{\theta}{2}$ (d) $2cosec\frac{\theta}{2}$

(11) $12sin40° - 16sin^3 40°$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $-2\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{2}$

(12) જો $sin\alpha = \frac{-3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, તો $cos\frac{\alpha}{2}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

(13) જો $\frac{1 + cosA}{1 - cosA} = \frac{m^2}{n^2}$, તો $tanA = ...$

(a) $\pm\frac{2mn}{m^2 - n^2}$ (b) $\pm\frac{2mn}{m^2 + n^2}$ (c) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$ (d) $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$

(14) $cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right) = ...$

(a) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}$

(15) જો $cos\alpha = -0.6$ અને $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, તો $tan\frac{\alpha}{4} = ...$

(a) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

(16) જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ અને $2x \cdot sin^2\frac{\theta}{2} + 1 = x$, તો $tan\theta$ ...... છે.

(a) $\sqrt{x^2 - 1}$ (b) $\sqrt{x^2 - 1}$ (c) $\sqrt{x^2 - 2}$ (d) $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$

(17) જો $tanx = \frac{b}{a}$, તો $acos2x + bsin2x$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $a - b$ (b) a (c) b (d) $a + b$

(18) $cos6° \cdot sin24° \cdot cos72°$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-1}{8}$ (b) $\frac{-1}{4}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{4}$

(19) $sin^6\theta + cos^6\theta$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{13}{8}$

(20) જો $cosA = \frac{3}{4}$, તો $32sin\frac{A}{2}\ sin\frac{5A}{2}$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -11 (b) $-\sqrt{11}$ (c) $\sqrt{11}$ (d) 11

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેનાં મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $sin2\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha$
2. $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$
3. $1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$ અને $1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha$
4. $sin2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1+tan^2\alpha}$
5. $cos2\alpha = \frac{1-tan^2\alpha}{1+tan^2\alpha}$
6. $tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$ $\quad \alpha \in R - [\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\} \cup \{(2k-1)\frac{\pi}{4}\}]\ k \in Z$
7. $cot2\alpha = \frac{cot^2\alpha - 1}{2cot\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in Z\}$
8. $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$
9. $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$
10. $tan3\alpha = \frac{3tan\alpha - tan^3\alpha}{1-3tan^2\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \{(2k-1)\frac{\pi}{6}, k \in Z\}$
11. $cot3\alpha = \frac{cot^3\alpha - 3cot\alpha}{3cot^2\alpha - 1}$ $\quad \alpha \in R - \{\frac{k\pi}{3} \mid k \in Z\}$
12. $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$
13. $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}$
14. $tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \{(2k-1)\pi \mid k \in Z\}$
15. $sin18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $cos18^\circ = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$
16. $sin36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$, $cos36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
17. $sin22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $cos22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $tan22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$

પ્રકરણ 6

ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો અને ત્રિકોણના ગુણધર્મો

If equations are trains threading the landscape of numbers, then no train stops at pi.
– Richard Preston

Pure mathematics is in its way, the poetry of logical ideas.
– Albert Einstein

6.1 પ્રાસ્તાવિક

સિમેસ્ટર-1માં અને પ્રકરણ 4, 5 માં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો, તેમના આલેખો અને તેમના ગુણધર્મો જેવા કે શૂન્યોનો ગણ, વિસ્તાર, આવર્તમાન, નિત્યસમોનો અભ્યાસ કર્યો. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ જમીન મોજણી કરવામાં થાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણમિતિની મદદથી ટેકરીની ઊંચાઈ માપ્યા વગર શોધી શકાય છે. બંગાળના એક જમીન મોજણીદાર અને ભારતીય ગણિતજ્ઞ 'રાધાનાથ સિકદરે' ત્રિકોણમિતીય ગણતરીની મદદથી ઈ.સ. 1852માં સાબિત કર્યું કે માઉન્ટ એવરેસ્ટ એ દુનિયાનું સૌથી ઊંચામાં ઊંચું શિખર છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ નૌપરિવહન, ઉપગ્રહ તંત્ર રચના, ખગોળશાસ્ત્ર, વિમાન-સંચાલન જેવા ક્ષેત્રોમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોના ઉકેલની રીતો તથા ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગથી ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું.

6.2 ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો

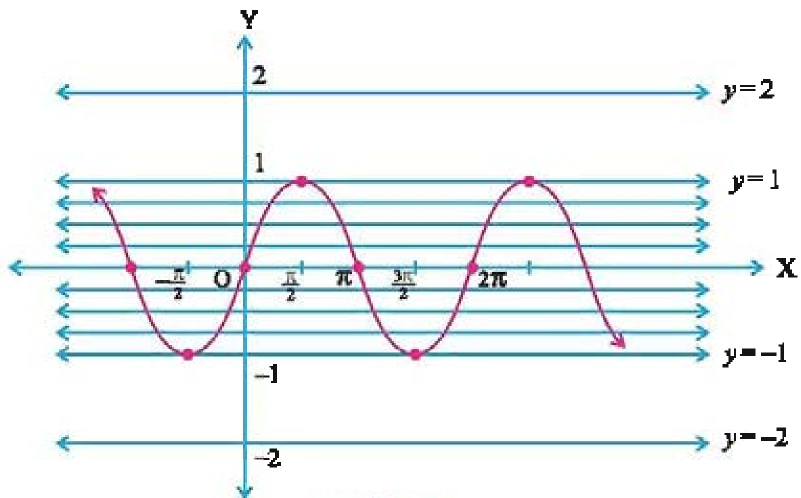
જે સમીકરણમાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયો આવેલાં હોય તેવા સમીકરણને ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ કહે છે. જેમકે, $\sin^2x - 4\cos x = 1$ એ એક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ છે.

જે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ તેના પ્રદેશની દરેક કિંમત માટે સત્ય બને તેને ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ કહે છે. જેમકે, $\cos2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ એ એક નિત્યસમ છે.

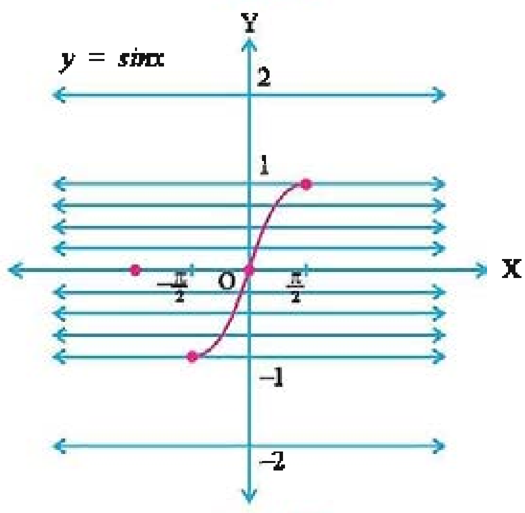
કેટલાંક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોનું તેના પ્રદેશના ઉપગણની કોઈક કિંમતો માટે સમાધાન થાય છે. આપણે આવા ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોના ઉકેલની રીતો મેળવીશું તથા સમીકરણના એક ઉકેલના ઉપયોગથી તેનો વ્યાપક ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું. સમીકરણ $\sin x = \frac{1}{2}$ નો ઉકેલ ફક્ત $x = \frac{\pi}{6}$ નથી પરંતુ $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 3\pi - \frac{\pi}{6}$ વગેરે પણ તેના ઉકેલો છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે $\sin x = \frac{1}{2}$ નો એક ઉકેલ $x = \frac{\pi}{6}$ છે, પરંતુ તે તેનો વ્યાપક ઉકેલ નથી. **કોઈ પણ ત્રિકોણમિતીય સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ એટલે તેના શક્ય તમામ ઉકેલોનો ગણ.**

અહીં નોંધીએ કે કેટલાંક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોનો ઉકેલ ખાલી ગણ હોય, જેમકે $sinx = \pi$. ત્રિકોણમિતીય વિધેયો આવર્તી હોવાથી, જો ત્રિકોણમિતીય સમીકરણને એક ઉકેલ હોય તો તેને અસંખ્ય ઉકેલો મળી શકે. આવા તમામ ઉકેલોના ગણને તેનો **વ્યાપક ઉકેલ** કહે છે.

$y = sinx$ નો આલેખ જુઓ. કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = k$, $k \in [-1, 1]$ લો. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે રેખા $y = k$, $k \in [-1, 1]$ એ $y = sinx$ ના આલેખને અસંખ્ય બિંદુઓમાં છેદે છે. (આકૃતિ 6.1) આનો મતલબ એ થયો કે કોઈ પણ $a \in [-1, 1]$ માટે સમીકરણ $sinx = a$ નો ઉકેલગણ અનંતગણ મળે. ત્રિકોણમિતીય સમીકરણના ઉકેલ માટે આપણને અનન્ય $\alpha \in R$ ની જરૂર પડે કે જેથી $sin\alpha = a$ થાય. તેના માટે આપણે પ્રદેશને યોગ્ય રીતે મર્યાદિત કરવો પડે. જો આપણે પ્રદેશને $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, વગેરે જેવો મર્યાદિત કરીએ તો એવો અનન્ય α મળે કે જેથી $sin\alpha = a$ થાય. આપણે $y = sinx$ માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ સ્વીકારીએ છીએ. આ પ્રદેશમાં કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = k$, $k \in [-1, 1]$ એ $y = sinx$ ના આલેખને એક જ બિંદુમાં છેદે છે. (આકૃતિ 6.2).



આકૃતિ 6.1

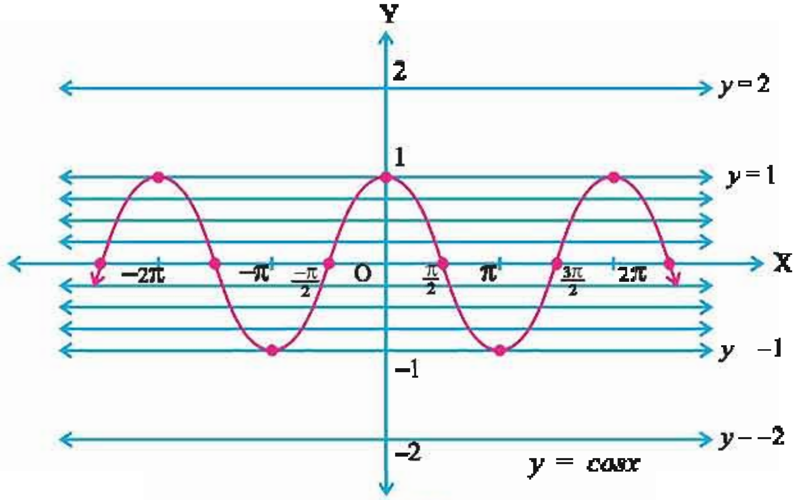


આકૃતિ 6.2

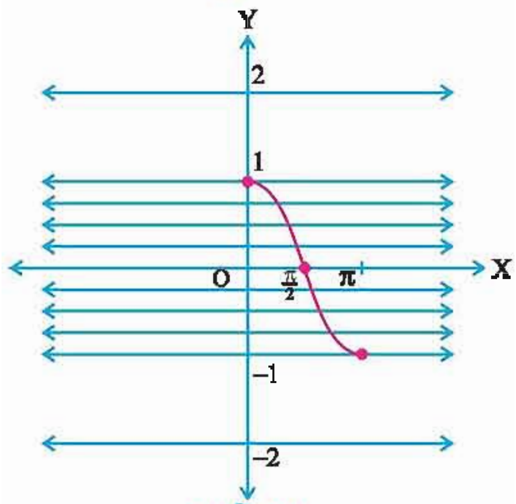
આવા જ પ્રકારની પરિસ્થિતિ $y = cosx$ માટે થાય છે. (આકૃતિ 6.3)

આપણે $y = cosx$ માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ $[0, \pi]$ સ્વીકારીએ છીએ. (આકૃતિ 6.4)

આપણે નોંધીએ કે કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = a$ જ્યાં $| a | > 1$ એ $y = sinx$ અથવા $y = cosx$ ના આલેખને છેદતી નથી. આમ, $sinx = a$ અથવા $cosx = a$, $| a | > 1$ ને કોઈ ઉકેલ નથી.

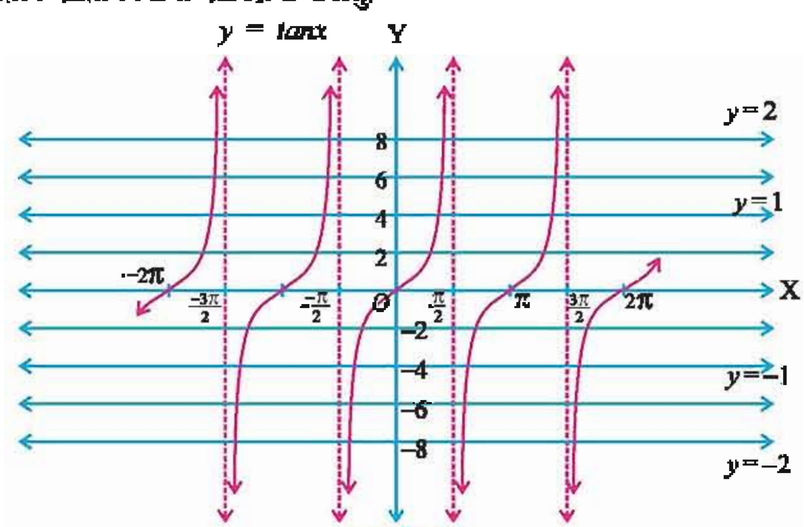


આકૃતિ 6.3

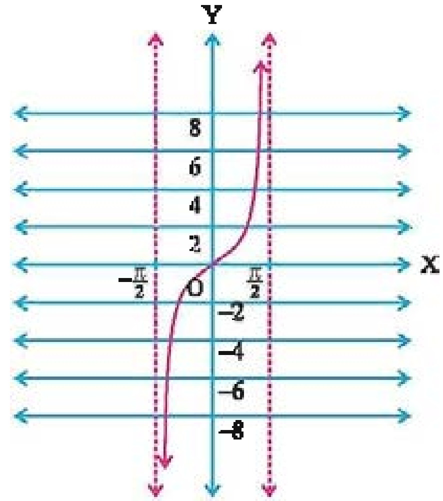


આકૃતિ 6.4

જો સમતલમાં આપણે કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા દોરીએ તો તે $y = \tan x$ ના આલેખને અસંખ્ય બિંદુઓમાં છેદશે. (આકૃતિ 6.5). આનો અર્થ એ થયો કે સમીકરણ $\tan x = a$, $a \in R$ નો ઉકેલગણ અનંતગણ થાય. આપણને અનન્ય α ની જરૂર છે, જ્યાં $\tan\alpha = a$ થાય. તેથી આપણે પ્રદેશને યોગ્ય રીતે મર્યાદિત કરવો પડે. આપણે $y = \tan x$ માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ સ્વીકારીએ છીએ. (આકૃતિ 6.6). આ સંકલ્પનાની વિસ્તૃત ચર્ચા આપણે ધોરણ 12ના પ્રથમ સેમેસ્ટરમાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના પ્રકરણમાં કરીશું.



આકૃતિ 6.5



આકૃતિ 6.6

આમ, કોઈ પણ $a \in [-1, 1]$ માટે અનન્ય $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, એવો મળે કે જેથી $a = sin\alpha$.

કોઈ પણ $a \in [-1, 1]$ માટે અનન્ય $\alpha \in [0, \pi]$, એવો મળે કે જેથી $a = cos\alpha$.

કોઈ પણ $a \in R$ માટે અનન્ય $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, એવો મળે કે જેથી $a = tan\alpha$.

આપણે *sine, cosine* અને *tangent* વિધેયોનાં શૂન્યોનો ગણ જાણીએ છીએ. આનો ખરેખર અર્થ એવો થાય છે કે આપણે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો $sin\theta = 0$, $cos\theta = 0$, $tan\theta = 0$ના વ્યાપક ઉકેલથી જ્ઞાત છીએ.

$$sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in Z$$

$$cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

$$tan\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in Z$$

હવે, આપણે વ્યાપક સ્વરૂપમાં $sin\theta = a$, $-1 \le a \le 1$, $cos\theta = a$, $-1 \le a \le 1$ અને $tan\theta = a$, $a \in R$ ના ઉકેલ મેળવીએ.

6.3 (i) $sin\theta = a$ નો વ્યાપક ઉકેલ જ્યાં $-1 \le a \le 1$

અહીં, $-1 \le a \le 1$, માટે અનન્ય $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, એવો મળે કે જેથી $a = sin\alpha$.

હવે, $sin\theta = a = sin\alpha$

$$\therefore \quad sin\theta - sin\alpha = 0 \Leftrightarrow 2cos\frac{\theta + \alpha}{2}\, sin\frac{\theta - \alpha}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad cos\frac{\theta + \alpha}{2} = 0 \text{ અથવા } sin\frac{\theta - \alpha}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\theta + \alpha}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \text{ અથવા } \frac{\theta - \alpha}{2} = n\pi, \ n \in Z$$ (કેમ ?)

$$\Leftrightarrow \quad \theta = (2n + 1)\pi - \alpha \text{ અથવા } \theta = 2n\pi + \alpha, \ n \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = (2n + 1)\pi + (-1)^{2n + 1}\alpha \text{ અથવા } \theta = 2n\pi + (-1)^{2n}\alpha, \ n \in Z$$

$\therefore$ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ $\theta = k\pi + (-1)^k\alpha$, $k \in Z$ છે.

($2n + 1$ અથવા $2n$ની જગ્યાએ k લખી શકાય કારણ કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક $2n + 1$ અથવા $2n$ સ્વરૂપમાં હોય છે, $n \in Z$)

આમ, $sin\theta = sin\alpha \Leftrightarrow \theta = k\pi + (-1)^k\alpha$, $k \in Z$

તેથી, $sin\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો વ્યાપક ઉકેલગણ $\{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in Z\}$ છે, જ્યાં $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $sin\theta = a = sin\alpha$.

(આપણે એવો કોઈ પણ $\alpha \in R$ લઈ શકીએ જ્યાં $a = sin\alpha$ થાય. ઉકેલગણ બદલાતો નથી. પરંતુ ઉકેલગણની એકરૂપતા માટે આપણે $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈએ છીએ.)

(ii) $cos\theta = a$ નો વ્યાપક ઉકેલ જ્યાં $-1 \le a \le 1$:

અહીં, $-1 \le a \le 1$ માટે અનન્ય $\alpha \in [0, \pi]$ એવો મળે કે જેથી $a = cos\alpha$.

હવે, $cos\theta = a = cos\alpha$

$\therefore \quad cos\theta - cos\alpha = 0 \Leftrightarrow -2sin\frac{\theta+\alpha}{2}\ sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Leftrightarrow sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ અથવા $sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\theta-\alpha}{2} = k\pi$ અથવા $\frac{\theta-\alpha}{2} = k\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow \theta = 2k\pi - \alpha$ અથવા $\theta = 2k\pi + \alpha, k \in Z$

$\therefore$ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ $\theta = 2k\pi \pm \alpha, k \in Z$ છે.

આમ, $cos\theta = cos\alpha \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \pm \alpha, k \in Z$

આથી, $cos\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો વ્યાપક ઉકેલગણ $\{2k\pi \pm \alpha \mid k \in Z\}$ છે, જ્યાં $\alpha \in [0, \pi]$ અને $cos\theta = a = cos\alpha$.

(iii) $tan\theta = a$ નો વ્યાપક ઉકેલ જ્યાં $a \in R$:

અહીં, $a \in R$ માટે અનન્ય $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ એવો મળે કે જેથી $a = tan\alpha$ થાય.

હવે, $tan\theta = a = tan\alpha$

$\therefore \quad tan\theta - tan\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{sin\theta}{cos\theta} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{sin\theta\, cos\alpha - cos\theta\, sin\alpha}{cos\theta\, cos\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{sin(\theta-\alpha)}{cos\theta\, cos\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow sin(\theta - \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \theta - \alpha = k\pi, k \in Z$

$\Leftrightarrow \theta = k\pi + \alpha, k \in Z$

આમ, $tan\theta = tan\alpha \Leftrightarrow \theta = k\pi + \alpha, k \in Z$

આથી, $tan\theta = a, a \in R$ નો ઉકેલગણ $\{k\pi + \alpha \mid k \in Z\}$ છે, જ્યાં $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan\theta = a = tan\alpha$.

શબ્દ 'ઉકેલ'નો અર્થ આપણે એવો કરીશું કે આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ.

ઉદાહરણ 1 : ઉકેલો : (1) $2sin2\theta - 1 = 0$ (2) $sin^2\theta - sin\theta - 2 = 0$

ઉકેલ : (1) $2sin2\theta - 1 = 0$

$\therefore \quad sin2\theta = \frac{1}{2} = sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$sin\theta = sin\alpha$ નો વ્યાપક ઉકેલ $k\pi + (-1)^k\alpha$, $k \in Z$ છે.

$\therefore \quad 2\theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}, k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(2) $sin^2\theta - sin\theta - 2 = 0$

$\therefore \quad (sin\theta + 1)(sin\theta - 2) = 0$

$\therefore \quad sin\theta = -1$ અથવા $sin\theta = 2$

પરંતુ $sin\theta = 2$ શક્ય નથી. **(કેમ ?)**

આમ, $sin\theta = -1 = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \theta = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{2}\right), k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : ઉકેલો : (1) $2cos5\theta + \sqrt{3} = 0$ (2) $2cos^2\theta + \sqrt{3}cos\theta = 0$

ઉકેલ : (1) $2cos5\theta + \sqrt{3} = 0$

$\therefore \quad cos5\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]\right)$

$cos\theta = cos\alpha$ નો વ્યાપક ઉકેલ $\theta = 2k\pi \pm \alpha$, $k \in Z$ છે.

$\therefore \quad 5\theta = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{\frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(2) $2cos^2\theta - \sqrt{3}cos\theta = 0$

$\therefore \quad cos\theta(2cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \quad cos\theta = 0$ અથવા $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$ અથવા $\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 3 : ઉકેલો : (1) $sin5x - sin3x - sinx = 0$ (2) $cosx + cos2x + cos3x = 0$

ઉકેલ : (1) $sin5x - sin3x - sinx = 0$

$\therefore \quad 2cos4x\ sinx - sinx = 0$

$\therefore \quad sinx(2cos4x - 1) = 0$

$\therefore$ $sinx = 0$ અથવા $cos4x = \frac{1}{2} = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $x = k\pi, k \in Z$ અથવા $4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$

$\therefore$ $x = k\pi, k \in Z$ અથવા $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\{k\pi \mid k \in Z\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \middle| k \in Z\right\}$ છે.

(2) $cosx + cos2x + cos3x = 0$

$\therefore$ $cos3x + cosx + cos2x = 0$

$\therefore$ $2cos2x\ cosx + cos2x = 0$

$\therefore$ $cos2x\ (2cosx + 1) = 0$

$\therefore$ $cos2x = 0$ અથવા $cosx = -\frac{1}{2} = cos\frac{2\pi}{3}$ $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]\right)$

$\therefore$ $2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$ અથવા $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in Z$

$\therefore$ $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}, k \in Z$ અથવા $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in Z$

આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{4} \middle| k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \middle| k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલો : (1) $tan^2\theta + (1 - \sqrt{3})tan\theta - \sqrt{3} = 0$

(2) $tan\theta + tan4\theta + tan7\theta = tan\theta\ tan4\theta\ tan7\theta$

ઉકેલ : (1) $tan^2\theta + (1 - \sqrt{3})tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $tan^2\theta + tan\theta - \sqrt{3}tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $tan\theta(tan\theta + 1) - \sqrt{3}(tan\theta + 1) = 0$

$\therefore$ $(tan\theta + 1)(tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore$ $tan\theta = -1$ અથવા $tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore$ $tan\theta = tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ અથવા $tan\theta = tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in Z$ અથવા $\theta = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{k\pi - \frac{\pi}{4} \middle| k \in Z\right\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{3} \middle| k \in Z\right\}$ છે.

(2) $tan\theta + tan4\theta + tan7\theta = tan\theta\ tan4\theta\ tan7\theta$

$\therefore$ $tan\theta + tan4\theta = -tan7\theta + tan\theta\ tan4\theta\ tan7\theta$

$\therefore$ $tan\theta + tan4\theta = -tan7\theta\ (1 - tan\theta\ tan4\theta)$ (i)

પ્રથમ આપણે $1 - tan\theta\ tan4\theta \neq 0$ સાબિત કરીએ.

જો $1 - tan\theta\ tan4\theta = 0$ તો (i) પરથી $tan\theta + tan4\theta = 0$ હોવાથી,

$tan\theta\ tan4\theta = 1$ અને $tan4\theta = -tan\theta$

$\therefore$ $tan^2\theta = -1$, જે R માં શક્ય નથી.

હવે, (i) પરથી $\frac{tan\theta + tan4\theta}{1 - tan\theta\, tan4\theta} = -tan7\theta$

$\therefore \quad tan(\theta + 4\theta) = -tan7\theta$

$\therefore \quad tan5\theta = tan(-7\theta)$

$\therefore \quad 5\theta = k\pi - 7\theta, k \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{k\pi}{12}, k \in Z$

વળી, $tan\theta$, $tan4\theta$, $tan7\theta$ વ્યાખ્યાયિત થવા જોઈએ.

$\therefore \quad \theta \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}, 4\theta \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}, 7\theta \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \ m \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{k\pi}{12}, k \in Z$ તો $k \neq 6, 18, 30,...$

$4\theta = \frac{k\pi}{3} \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z - \{6, 18,...\}$

$7\theta = \frac{7k\pi}{12} \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z - \{6, 18,...\}$

$\therefore \quad k \neq 6, 18,...$

$\therefore \quad k \neq 12n + 6, n \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{\frac{k\pi}{12} \;\middle|\; k \in Z \text{ જ્યાં } k \neq 12n + 6\right\}, \quad n \in Z$

ઉદાહરણ 5 : ઉકેલો : (1) $4sin\theta = cosec\theta$ (2) $sec\theta + tan\theta = 2 - \sqrt{3}$

ઉકેલ : (1) $4sin\theta = cosec\theta$

$\therefore \quad 4sin\theta = \frac{1}{sin\,\theta}$

$\therefore \quad 4sin^2\theta = 1$

$\therefore \quad sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore \quad sin\theta = sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ અથવા $sin\theta = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad \theta = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}, k \in Z$ અથવા $\theta = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right), k \in Z$

$\therefore \quad \theta = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}, k \in Z$ અથવા $\theta = k\pi + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}, k \in Z$

$\therefore \quad \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ છે.

(2) $sec\theta + tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ (i)

હવે, $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$,

$\therefore \quad sec\theta - tan\theta = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$

$\therefore \quad sec\theta - tan\theta = 2 + \sqrt{3}$ (ii)

(i) અને (ii) ને ઉકેલતાં, $sec\theta = 2$ અને $tan\theta = -\sqrt{3}$

અહીં નોંધીએ કે ઉપરનાં સમીકરણો ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોની સંહતિ છે.

હવે, $cos\theta = \frac{1}{2} > 0$ અને $tan\theta = -\sqrt{3} < 0$. આથી, $P(\theta)$ ચોથા ચરણમાં છે.

$\therefore$ $cos\theta = cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ અને $tan\theta = tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in Z$ **(P(θ) ચોથા ચરણમાં છે.)**

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{2k\pi - \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ છે.

6.4 $acosx + bsinx = c$, $a, b, c \in R$ અને $a^2 + b^2 \neq 0$ નો વ્યાપક ઉકેલગણ

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $a, b \in R$ માટે આપણને $r > 0$ અને $\alpha \in [0, 2\pi)$ એવાં મળે કે જેથી $a = rcos\alpha$ અને $b = rsin\alpha$ થાય.

$\therefore$ $a^2 + b^2 = r^2 cos^2\alpha + r^2 sin^2\alpha = r^2$

$\therefore$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ **($r > 0$)**

હવે, $acosx + bsinx = c$

$\therefore$ $rcos\alpha\, cosx + rsin\alpha\, sinx = c$

$\therefore$ $rcos(x - \alpha) = c$

$\therefore$ $cos(x - \alpha) = \frac{c}{r}$ **(i)**

અહીં આપેલ સમીકરણ એટલે કે સમીકરણ (i)નો ઉકેલ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

$$\left|\frac{c}{r}\right| \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \text{ છે.}$$

જો $cos(x - \alpha) = cos\beta$, જ્યાં $cos\beta = \frac{c}{r}$, $\beta \in [0, \pi]$, હોય તો સમીકરણ (i)નો વ્યાપક ઉકેલ $x - \alpha = 2k\pi \pm \beta$, $k \in Z$; જ્યાં $\alpha \in [0, 2\pi)$ તથા $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$.

આમ, જો $c^2 \leq a^2 + b^2$ તો $acosx + bsinx = c$ નો વ્યાપક ઉકેલ

$x = 2k\pi + \alpha \pm \beta$, $k \in Z$, જ્યાં $\alpha \in [0, 2\pi)$ તથા $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$ અને $cos\beta = \frac{c}{r}$, $\beta \in [0, \pi]$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

જો $c^2 > a^2 + b^2$ હોય, તો આપેલ સમીકરણને ઉકેલ ન મળે એટલે કે ઉકેલગણ $\emptyset$ થાય.

ઉદાહરણ 6 : ઉકેલો : $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2}$

ઉકેલ : રીત 1 : અહીં, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$.

$\therefore$ $r^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4$.

આથી, $r = 2$. અહીં, $c^2 < a^2 + b^2$ હોવાથી આપેલ સમીકરણને ઉકેલ મળે.

$a = rcos\alpha$ અને $b = rsin\alpha$ પરથી $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $sin\alpha = \frac{1}{2}$. આથી, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

હવે, $cos\beta = \frac{c}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\beta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલગણ $\{2k\pi + \alpha \pm \beta \mid k \in Z\}$

$$= \left\{2k\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} \;\middle|\; k \in Z\right\}$$

રીત 2 : $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (r = 2 વડે ભાગતાં)

$\therefore \quad cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \quad x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલગણ $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} \middle| k \in Z\right\}$

$= \left\{2k\pi + \frac{5\pi}{12} \middle| k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{\pi}{12} \middle| k \in Z\right\}$

ઉદાહરણ 7 : ઉકેલો : $3cos\theta + 4sin\theta = 6$.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.

$\therefore \quad r^2 = a^2 + b^2 = 25$. $c^2 = 36$. તેથી, $c^2 > a^2 + b^2$.

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

1. $2cos2\theta + \sqrt{2} = 0$
2. $2cos^2\theta + \sqrt{3}cos\theta = 0$
3. $2cos\theta + sec\theta = 3$
4. $4sin^2\theta - 8cos\theta + 1 = 0$
5. $\sqrt{2}\,cosec3\theta - 2 = 0$
6. $2sin^2\theta - sin\theta = 0$
7. $2sin\theta + cosec\theta = 3$
8. $sin2\theta + cos\theta = 0$
9. $sin7\theta = sin\theta + sin3\theta$
10. $cos^2\theta - cos\theta = 0$
11. $tan2\theta - \sqrt{3} = 0$
12. $\sqrt{3}cot\theta - cot^2\theta = 0$
13. $tan^2\theta - (\sqrt{3} + 1)tan\theta + \sqrt{3} = 0$
14. $cos\theta + sin\theta = 1$
15. $\sqrt{3}sin\theta - cos\theta = \sqrt{2}$
16. $2cos\theta + sin\theta = 3$
17. $3 - cot^2 5\theta = 0$
18. $cosec^2 2\theta - 2 = 0$
19. $\sqrt{2} + sec4\theta - 0$
20. $tan3\theta + cot\theta - 0$

*

6.5 ત્રિકોણના ગુણધર્મો

ત્રિકોણમિતિ શબ્દનો મૂળભૂત અર્થ ત્રિકોણના ઘટકોનું માપકરણ સૂચવે છે. દરેક ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ અને ત્રણ ખૂણાઓ હોય છે. ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાઓના માપ વચ્ચે નિશ્ચિત સંબંધ હોય છે. આ વિભાગમાં આપણે આ ઘટકો વચ્ચેના ચોક્કસ સંબંધો મેળવીશું.

ΔABC માટે સામાન્ય રીતે નીચેના સંકેતો પ્રચલિત છે :

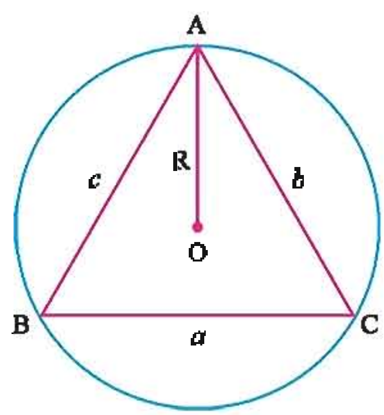
$m\angle BAC = A$, $m\angle ABC = B$, $m\angle BCA = C$

$A + B + C - \pi$

(ખૂણાઓનાં માપ A, B, C રેડિયન માપમાં લઈશું.)

$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

ત્રિકોણના પરિવૃત્તની ત્રિજ્યાનું માપ એટલે કે પરિત્રિજ્યા = R



આકૃતિ 6.7

sine સૂત્ર :

ΔABC માં,

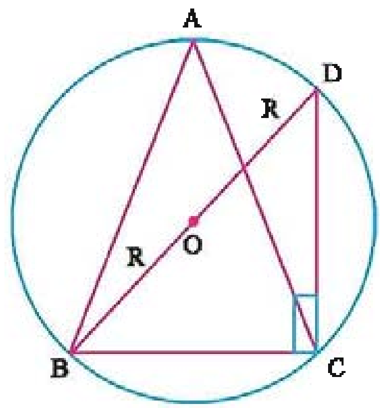
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

અહીં $\frac{a}{\sin A} = 2R$ સાબિત કરીશું. બાકીના બે તે જ પ્રમાણે મેળવી શકાય.

A સંબંધી ત્રણ વિકલ્પ છે :

(1) $0 < A < \frac{\pi}{2}$ (2) $A = \frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

વિકલ્પ 1 : $0 < A < \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.8

ધારો કે ΔABC નું પરિકેન્દ્ર O છે. $\overrightarrow{BO}$ પરિવૃત્તને D માં છેદે છે. અહીં $BD = 2OB = 2R$ અને $D = m\angle BDC = m\angle CAB = A$

(એક જ વૃત્તખંડના ખૂણા) (i)

ΔBCD માં, $m\angle BCD = \frac{\pi}{2}$

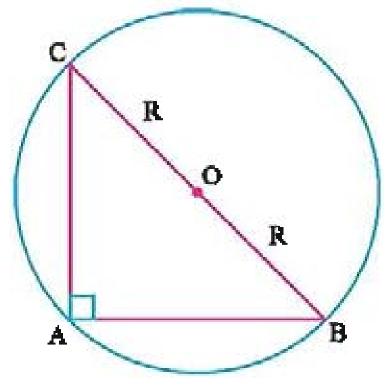
(અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.)

$\therefore \quad \sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$

$\therefore \quad \sin A = \frac{a}{2R}$ ((i) દ્વારા)

$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$

વિકલ્પ 2 : ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $A = \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.9

$\therefore$ $\overline{BC}$ પરિવૃત્તનો વ્યાસ છે.

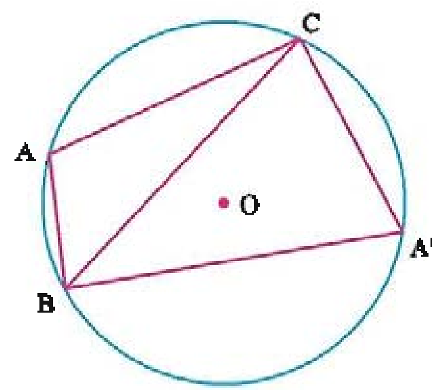
$\therefore \quad BC = 2R.$

હવે, $a = BC = 2R = 2R\sin\frac{\pi}{2} = 2R\sin A$

$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$

વિકલ્પ 3 : $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

∠BAC એ ગુરુકોણ હોવાથી શિરોબિંદુ લઘુચાપ BC પર છે. હવે, ગુરુચાપ BC પર બિંદુ A' લો.



આકૃતિ 6.10

$m\angle BA'C = (\pi - A) < \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} < A < \pi\right)$

$\therefore$ ΔBA'C માટે વિકલ્પ (1) પ્રમાણે,

$BC = a = 2R\sin A' = 2R\sin(\pi - A) = 2R\sin A$

$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$

આમ, દરેક વિકલ્પમાં $\frac{a}{\sin A} = 2R$ મળે છે.

આ જ રીતે, $\frac{b}{\sin B} = 2R$ અને $\frac{c}{\sin C} = 2R$ મેળવી શકાય.

$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

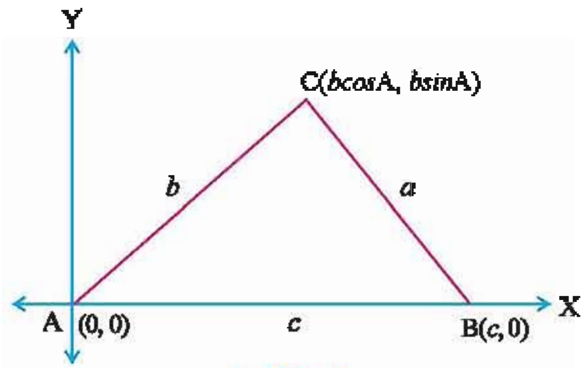
cosine સૂત્ર :

ΔABC માં,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ અને } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

આપણે, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ સાબિત કરીશું.

આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ΔABC માં A ને ઊગમબિંદુ તથા $\overrightarrow{AB}$ ને X-અક્ષની ધન દિશામાં લઈએ. અહીં, $AB = c$ હોવાથી B ના યામ $(c, 0)$ થાય. હવે, $AC = b$ અને $m\angle CAB = A$ હોવાથી, C ના યામ $(b\cos A, b\sin A)$ થશે.



આકૃતિ 6.11

હવે, $a = BC$

$\therefore \quad a^2 = BC^2$

$= (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2$

$= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$

$= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A + c^2$

$\therefore \quad a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$

$\therefore \quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$\therefore \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

તે જ રીતે, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ અને $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

નોંધ : (1) ΔABC માં $\angle A$ કાટકોણ હોય અથવા ગુરુકોણ હોય તો પણ ઉપરનું પરિણામ સત્ય જ છે.

(2) ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં માપ આપ્યાં હોય તો *cosine* સૂત્રથી ત્રણ ખૂણાનાં માપ અનન્ય રીતે નક્કી થઈ શકે. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ જ્ઞાત હોય તો તેના ખૂણાનાં માપ અનન્ય રીતે નક્કી થઈ શકે. તે જ રીતે, બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો આપ્યો હોય તો પણ આ સૂત્ર પ્રમાણે ત્રીજી બાજુ અનન્ય મળે.

એક અગત્યનું સૂત્ર :

sine અને *cosine* સૂત્રોની મદદથી આપણે અહીં એક અગત્યનું પરિણામ મેળવીશું :

પ્રક્ષેપ સૂત્ર :

$$a = b\cos C + c\cos B, \ b = c\cos A + a\cos C, \ c = a\cos B + b\cos A$$

આપણે, $a = b\cos C + c\cos B$ સાબિત કરીશું.

આપણે *cosine* સૂત્રની મદદથી સાબિતી આપીશું. (*sine* સૂત્રની મદદથી સાબિતી આપવાનો પ્રયત્ન કરો.)

$$b\cos C + c\cos B = b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

આમ, $a = b\cos C + c\cos B$

તે જ રીતે અન્ય બે પ્રક્ષેપ સૂત્રો મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 8 : ΔABC માટે સાબિત કરો કે,

(1) $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

(2) $a\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$

$$= a\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right) + b\left(\frac{c}{2R}-\frac{a}{2R}\right) + c\left(\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}\right)$$

$$= \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{2R} = 0 = \text{જ.બા.}$$

(2) $a\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = a\sin\left(\frac{\pi-(B+C)}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$ **$(A + B + C = \pi)$**

$$= a\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{a}{2}(\sin B - \sin C)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right) = \frac{1}{4R}(ab - ac) \qquad \text{(i)}$$

તે જ રીતે, $b\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) = \frac{1}{4R}(bc - ab)$ **(ii)**

$$c\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{4R}(ac - bc) \qquad \text{(iii)}$$

(i), (ii) અને (iii) નો સરવાળો કરતાં,

ડા.બા. $= a\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4R}(ab - ac + bc - ab + ac - bc) = 0 = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 9 : ΔABC માટે સાબિત કરો :

(1) $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(2) $\frac{\tan C}{\tan A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}$

ઉકેલ :

(1) ડા.બા. $= \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \frac{1}{a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \times \frac{1}{b} + \frac{a^2-b^2-c^2}{2ab} \times \frac{1}{c} \quad \text{(cosine સૂત્ર)}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \text{જ.બા.}$$

આમ, $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(2) ડા.બા. $= \frac{\tan C}{\tan A} = \frac{\sin C \cos A}{\cos C \sin A}$

$$= \frac{\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\frac{a}{2R}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 10 : ΔABC માટે સાબિત કરો :

$(a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B = a + b + c$

ઉકેલ : ડા.બા. $= (a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B$

$= a\cos C + b\cos C + b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B$

$= b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C + a\cos B + b\cos A$

$= a + b + c =$ જ.બા.

સ્વાધ્યાય 6.2

ΔABC માટે સાબિત કરો : **(1 થી 9)**

1. $a\sin(B - C) + b\sin(C - A) + c\sin(A - B) = 0$
2. $a^2(\cos^2B - \cos^2C) + b^2(\cos^2C - \cos^2A) + c^2(\cos^2A - \cos^2B) = 0$
3. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 0$
4. $a^3\sin(B - C) + b^3\sin(C - A) + c^3\sin(A - B) = 0$
5. $a\sin\left(\frac{A}{2}+C\right) = (b + c)\sin\frac{A}{2}$
6. $a\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = (b + c)\sin\frac{A}{2}$
7. $\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}$
8. $\tan\left(\frac{A}{2}+B\right) = \frac{c+b}{c-b}\tan\frac{A}{2}$
9. $\frac{1+\cos A\cos(B-C)}{1+\cos C\cos(A-B)} = \frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}$
10. સાબિત કરો : $\sin^2A + \sin^2B = \sin^2C \Rightarrow \Delta ABC$ કાટકોણ છે જ્યાં C કાટખૂણો છે.

11. સાબિત કરો : $(a^2 + b^2)sin\,(A - B) = (a^2 - b^2)sin\,(A + B) \Rightarrow \Delta ABC$ સમદ્વિભૂજ અથવા કાટકોણ છે.

12. સાબિત કરો : $(b^2 - c^2)cotA + (c^2 - a^2)cotB + (a^2 - b^2)cotC = 0$

13. સાબિત કરો : $\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)sin2A + \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right)sin2B + \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)sin2C = 0$

14. સાબિત કરો : $2\left(a sin^2 \frac{C}{2} + c sin^2 \frac{A}{2}\right) = c + a - b$

15. સાબિત કરો : $4\left(bc\, cos^2 \frac{A}{2} + ca\, cos^2 \frac{B}{2} + ab\, cos^2 \frac{C}{2}\right) = (a + b + c)^2$

16. બતાવો કે 3, 5, 7 માપની બાજુઓવાળો ત્રિકોણ ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે અને ગુરુકોણનું માપ શોધો.

17. જો કોઈ ત્રિકોણના ખૂણાઓનાં માપ 1 : 2 : 3 ગુણોત્તરમાં હોય તો તેમની સામેની બાજુઓના માપનો ગુણોત્તર શોધો.

18. જો ΔABC ના ખૂણાઓનાં માપ A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ તો A શોધો.

19. જો ΔABC માં $\frac{sin\,A}{sin\,C} = \frac{sin\,(A - B)}{sin\,(B - C)}$, હોય તો સાબિત કરો કે a^2, b^2, c^2 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

20. ΔABC માં $a = 2b$ અને $|A - B| = \frac{\pi}{3}$ તો C શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 11 : ઉકેલો : $sin3\alpha = 4sin\alpha\; sin(x + \alpha)\; sin(x - \alpha)$, જ્યાં, $\alpha \neq k\pi,\ k \in Z$

ઉકેલ : $sin3\alpha = 4sin\alpha\; sin(x + \alpha)\; sin(x - \alpha)$, જ્યાં, $\alpha \neq k\pi,\ k \in Z$

$\therefore\ sin3\alpha = 4sin\alpha\,(sin^2x - sin^2\alpha)$

$\therefore\ 3sin\alpha - 4sin^3\alpha = 4sin\alpha\, sin^2x - 4sin^3\alpha$

$\therefore\ 3sin\alpha = 4sin\alpha\, sin^2x$

$\therefore\ sin^2x = \frac{3}{4}$ $\qquad (\alpha \neq k\pi,\ sin\alpha \neq 0)$

$\therefore\ sinx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3},\ k \in Z$ અથવા $x = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right),\ k \in Z$

$\therefore\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in Z$

આમ, માંગેલ ઉકેલગણ $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 12 : ઉકેલો : $tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$

ઉકેલ : $tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$

$\therefore\ \frac{1 + tan\,\theta}{1 - tan\,\theta} + \frac{1 - tan\,\theta}{1 + tan\,\theta} = 4$

$\therefore\ \frac{(1 + tan\theta)^2 - (1 - tan\theta)^2}{(1 - tan\theta)(1 + tan\theta)} = 4$

$\therefore \quad \dfrac{2+2tan^2\theta}{1-tan^2\theta} = 4$

$\therefore \quad 1 + tan^2\theta = 2 - 2tan^2\theta$

$\therefore \quad 3tan^2\theta = 1$

$\therefore \quad tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

આમ, માંગેલ ઉકેલગણ $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 13 : જો $\dfrac{sinA}{4} = \dfrac{sinB}{5} = \dfrac{sinC}{6}$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{cosA}{12} = \dfrac{cosB}{9} = \dfrac{cosC}{2}$ અને તે પરથી $cosA + cosB + cosC$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\dfrac{sinA}{4} = \dfrac{sinB}{5} = \dfrac{sinC}{6}$

$\therefore \quad \dfrac{\frac{a}{2R}}{4} = \dfrac{\frac{b}{2R}}{5} = \dfrac{\frac{c}{2R}}{6}$

$\therefore \quad \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$ (ધારો કે), જ્યાં $k > 0$

$\therefore \quad a = 4k, b = 5k, c = 6k$

હવે, $cosA = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \dfrac{25k^2+36k^2-16k^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k} = \dfrac{45k^2}{60k^2} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \quad \dfrac{cosA}{12} = \dfrac{1}{16}$

તે જ રીતે $\dfrac{cosB}{9} = \dfrac{1}{16}$ અને $\dfrac{cosC}{2} = \dfrac{1}{16}$

આમ, $\dfrac{cosA}{12} = \dfrac{cosB}{9} = \dfrac{cosC}{2}$.

વળી, $cosA + cosB + cosC = \frac{12}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16} = \frac{23}{16}$.

સ્વાધ્યાય 6

ઉકેલો : **(1 થી 10)**

1. $2(sec^2\theta + sin^2\theta) = 5$

2. $2 - cosx = 2tan\frac{x}{2}$

3. $4sin\theta\, sin2\theta\, sin4\theta = sin3\theta$

4. $sin^2\theta - cos\theta = \frac{1}{4}$

5. $\sqrt{3}tan3\theta + \sqrt{3}tan2\theta + tan3\theta\, tan2\theta = 1$

6. $cosecx = 1 + cotx$

7. $sin^8x + cos^8x = \frac{17}{32}$

8. $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$

9. $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

10. $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

ΔABC માં સાબિત કરો : **(11 થી 14)**

11. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{2R^2}$

12. $a(\cos C - \cos B) = 2(b - c)\cos^2 \frac{A}{2}$

13. $a^3\cos(B - C) + b^3\cos(C - A) + c^3\cos(A - B) = 3abc$

14. જો $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$, તો સાબિત કરો કે $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

15. *sine* સૂત્રની મદદથી *cosine* સૂત્ર મેળવો.

16. સાબિત કરો : $(a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} = c^2$

17. સાબિત કરો : $abc(\cot A + \cot B + \cot C) = R(a^2 + b^2 + c^2)$

18. જો કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 4, 5 અને 6 હોય, તો સાબિત કરો કે ત્રિકોણના સૌથી મોટા માપવાળા ખૂણાનું માપ સૌથી નાના માપવાળા ખૂણાના માપ કરતાં બમણું છે.

19. જો ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ m, n, $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ હોય, તો ત્રિકોણના સૌથી મોટા માપવાળા ખૂણાનું માપ $\frac{2\pi}{3}$ છે.

20. જો ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં માપ સમીકરણ $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ નાં બીજ હોય અને તે બે બાજુઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય, તો ત્રિકોણની પરિમિતિ $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ છે તેમ બતાવો.

21. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$ નો ઉકેલગણ ...... છે. ☐

(a) $\emptyset$ (b) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

(c) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$ (d) $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$

(2) સમીકરણ $\sec^2 (a + 2)x + a^2 - 1 = 0$ નું $-\pi < x < \pi$ માં સમાધાન કરતી ક્રમયુક્ત જોડ (a, x) ની સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) અનંત

(3) સમીકરણ $\sin^{50}x - \cos^{50}x = 1$ નો વ્યાપક ઉકેલ ...... છે. ☐

(a) $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ (b) $2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$

(c) $k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$ (d) $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

(4) સમીકરણ $3\sin^2x - 7\sin x + 2 = 0$ ના અંતરાલ $[0, 5\pi]$ માં ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 10

(5) સમીકરણ $cos^7x + sin^4x = 1$ના અંતરાલ $(-\pi, \pi)$ માં વાસ્તવિક ઉકેલો ...... છે.

(a) $0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ (b) $0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ (c) $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$

(6) $2y = 1$ અને $y = sinx$, $-2\pi < x \le 2\pi$ ના આલેખોના છેદબિંદુઓની સંખ્યા...

(a) 2 (b) 4 (c) 3 (d) 1

(7) $sin\theta + cos\theta = 2$ નો ઉકેલગણ ...... છે.

(a) $k\pi, k \in Z$ (b) $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

(c) $\emptyset$ (d) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

(8) $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$ નો ઉકેલગણ ...... છે.

(a) R (b) $k\pi, k \in Z$

(c) $\emptyset$ (d) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

(9) ΔABC માં જો $\frac{cos A}{a} = \frac{cos B}{b} = \frac{cos C}{c}$ અને $a = 2$ તો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

(10) ΔABC માં $a = 5$, $b = 7$ અને $sinA = \frac{3}{4}$ તો આવા ...... ત્રિકોણો શક્ય બને.

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) અનંત

(11) ΔABC ની પરિમિતિ તેના ખૂણાઓની *sine* કિંમતના મધ્યકથી 6 ગણી છે. જો બાજુ $a = 1$ હોય તો A = ... છે.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

(12) ΔABC માં જો $a = 2b$ અને $A = 3B$ તો A = ... છે.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(13) જો ΔABC માટે A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા તેમની સામેની બાજુઓનાં માપ a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો a^2, b^2, c^2...

(a) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય. (b) સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(c) $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. (d) કોઈ સંબંધ ન હોય.

(14) ΔABC માં $A = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{3}$, તો $a + c\sqrt{2} =$ ......

(a) b (b) $\sqrt{3}b$ (c) $\sqrt{2}b$ (d) $2b$

(15) ΔABC માં $2ac\,sin\frac{1}{2}(A - B + C) =$ ......

(a) $a^2 + b^2 - c^2$ (b) $c^2 + a^2 - b^2$ (c) $b^2 - c^2 + a^2$ (d) $c^2 - a^2 - b^2$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in Z$

2. $cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}\ k \in Z$

3. $tan\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in Z$

4. $sin\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો ઉકેલગણ $\{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in Z\}$,
   જ્યાં $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $sin\theta = a = sin\alpha$.

5. $cos\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો ઉકેલગણ $\{2k\pi \pm \alpha \mid k \in Z\}$,
   જ્યાં $\alpha \in [0, \pi]$ અને $cos\theta = a = cos\alpha$.

6. $tan\theta = a, a \in R$ નો ઉકેલગણ $\{k\pi + \alpha \mid k \in Z\}$,
   જ્યાં $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan\theta = a = tan\alpha$.

7. જો $c^2 \le a^2 + b^2$, તો $acosx + bsinx = c$ નો ઉકેલ
   $x = 2k\pi + \alpha \pm \beta, k \in Z$, જ્યાં $\alpha \in [0, 2\pi)$ તથા $a = rcos\alpha$ અને $b = rsin\alpha$,
   $cos\beta = \frac{c}{r}, \beta \in [0, \pi], r = \sqrt{a^2 + b^2}$
   જો $c^2 > a^2 + b^2$, તો સમીકરણનો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.

8. **sine સૂત્ર :** $\frac{a}{sin A} = \frac{b}{sin B} = \frac{c}{sin C} = 2R$

9. **cosine સૂત્ર :**
   $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, cosB = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ અને $cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

10. **પ્રક્ષેપ સૂત્ર :**
    $a = bcosC + ccosB, b = ccosA + acosC, c = acosB + bcosA$

Aryabhata gave an accurate approximation for π. He wrote in the *Aryabhatiya* the following :

Add four to one hundred, multiply by eight and then add sixty-two thousand. The result is approximately the circumference of a circle of diameter twenty thousand. By this rule the relation of the circumference to diameter is given.

This gives $\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$ which is a surprisingly accurate value. In fact $\pi = 3.14159265$ correct to 8 places.

He gave a table of *sines* calculating the approximate values at intervals of $90°/24 = 3° 45'$. In order to do this he used a formula for $sin(n + 1)x - sin\ nx$ in terms of $sin\ nx$ and $sin(n - 1)x$. He also introduced the versine (versin = 1 − *cosine*) into trigonometry.

Aryabhata gives the radius of the planetary orbits in terms of the radius of the Earth/Sun orbit as essentially their periods of rotation around the Sun. He believes that the Moon and planets shine by reflected sunlight. Incredibly he believes that the orbits of the planets are ellipses. He correctly explains the causes of eclipses of the Sun and the Moon. The Indian belief up to that time was that eclipses were caused by a demon called Rahu. His value for the length of the year at 365 days 6 hours 12 minutes 30 seconds is an overestimate since the true value is less than 365 days 6 hours.

પ્રકરણ 7

શ્રેણી અને શ્રેઢી

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ભાષામાં અને ગણિતશાસ્ત્રમાં શ્રેણી શબ્દ સમાન અર્થમાં વાપરવામાં આવે છે. **શ્રેણી (Sequence)** એ ઉદ્ભવના ક્રમ પર ભાર આપે છે. આપણે જ્યારે ઘટનાઓની શ્રેણી વિશે વાત કરીએ, ત્યારે એ સ્પષ્ટપણે ઘટનાઓના ઉદ્ભવના ક્રમનું સૂચન કરે છે. દાખલા તરીકે, ભારતે આઈસીસી વર્લ્ડકપ 2011 જીત્યો. આપણે જાણીએ છીએ કે આ માટે ભારતના ખેલાડીઓના જૂથે સ્પર્ધાની શ્રેણીમાં કેટલીક સ્પર્ધાઓ જીતી અને છેવટે આખરી સ્પર્ધા પર પહોંચ્યા. અહીં આપણે જોઈએ છીએ કે, કોઈ ચોક્કસ ક્રમમાં ઘટનાઓની શ્રેણી તરફ તે દોરી જાય છે. આ જ પ્રમાણે ગણિતમાં આપણે સંખ્યાઓથી બનતી શ્રેણીની વાત કરીએ, તો તે ચોક્કસપણે પ્રથમ સંખ્યા, દ્વિતીય સંખ્યા, તૃતીય સંખ્યા... એમ દર્શાવશે. ઐતિહાસિક રીતે જોઈએ, તો પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળાનું સૂત્ર, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ઘનના સરવાળાનું સૂત્ર વગેરે સૂત્રો આપનાર પ્રથમ ગણિતજ્ઞ **આર્યભટ્ટ (*Aryabhatta*)** હતા. તેમના ગ્રંથ **આર્યભટીયમ (*Aryabhatiyam*)** માં આ કાર્ય જોવા મળે છે. આ પ્રમાણેનું કાર્ય ઈટાલીના પ્રખ્યાત ગણિતજ્ઞ **ફિબોનાકી (*Fibonacci*)** (1175-1250) ના કાર્યમાં પણ જોવા મળે છે. ફિબોનાકી શ્રેણીની સંખ્યાઓ ફિબોનાકી સંખ્યાઓ તરીકે પણ ઓળખાય છે. અને આ સંખ્યાઓ માહિતીના ઘણા ક્ષેત્રોમાં જોવા મળે છે.

હવે આપણે ગાણિતિક દૃષ્ટિએ શ્રેણીની ચર્ચા કરીએ. યુગ્મ સંખ્યાઓની શ્રેણી 2, 4, 6,..., નું અવલોકન કરીએ. આપણે સહેલાઈથી જોઈ શકીએ છીએ કે, તે 2(1), 2(2), 2(3),..., શ્રેણી છે. તે પરથી આપણે વ્યાપક રીતે nમી યુગ્મ સંખ્યા $2(n)$ મેળવી શકીએ. તેથી આપણને વિધેય $f : N \rightarrow R$, $f(n) = 2n$ નો વિચાર આવે. આ જ પ્રમાણે શ્રેણી 1, 4, 9, 16,... ને આપણે $f : N \rightarrow R$, $f(n) = n^2$ સ્વરૂપમાં લખી શકીએ. તેથી આપણે **જે વિધેયનો પ્રદેશ N હોય અથવા** $\{1, 2, 3,..., n\}$ **હોય તેવા વિધેયને શ્રેણી તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.**

શ્રેણી : વિધેય $f : N \rightarrow R$ અથવા $f : \{1, 2, 3,..., n\} \rightarrow R$ ને શ્રેણી કહે છે.

$f : \{1, 2, 3,..., n\} \rightarrow R$ ને સાન્ત શ્રેણી કહે છે.

દાખલા તરીકે, $f : N \rightarrow R$, $f(n) = 3n - 1$.

$n = 1, 2, 3,...$ લેતાં, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$,.... મળે. આમ, 2, 5, 8,... ને અનુક્રમે શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ, દ્વિતીય પદ, તૃતીય પદ,... કહે છે. **$f(n)$ ને શ્રેણીનું nમું પદ અથવા વ્યાપક પદ કહે છે.**

$f(n)$ ને a_n અથવા t_n અથવા T_n અથવા u_n વડે પણ દર્શાવાય છે.

શ્રેણીનું n મું પદ $f(n)$ અથવા a_n અથવા t_n હોય, તો તે શ્રેણી અનુક્રમે $\{f(n)\}$ અથવા $\{a_n\}$ અથવા $\{t_n\}$ વડે દર્શાવાય છે.

જેનો સહપ્રદેશ N, Z કે R હોય તેવી શ્રેણીને અનુક્રમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની શ્રેણી કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી કહે છે.

શ્રેણીનું n મું પદ એ સૂત્ર સ્વરૂપમાં હોઈ શકે, પરંતુ એ જરૂરી નથી કે હંમેશાં n મા પદ માટે સૂત્ર મળે. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની શ્રેણીનો વિચાર કરીએ. 2, 3, 5, 7, 11, 13,... અહીં n મી અવિભાજ્ય સંખ્યા મેળવવા માટે કોઈ સૂત્ર મળતું નથી. તેથી આ શ્રેણી કોઈ ચોક્કસ સૂત્રથી નિર્દિષ્ટ કરી શકાય નહીં.

આપણે એક શ્રેણી $f(n) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3) + (2n-1)$ જોઈએ. સ્પષ્ટપણે $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$. આપણને એમ કહેવાની ઇચ્છા થઈ આવે કે $f(4) = 7$ થશે. પરંતુ તેમ નથી, તે 13 છે. આમ, **આપણે કેટલાંક પદોની મદદથી શ્રેણીના વ્યાપક પદ વિશે અનુમાન કરી શકીએ તે જરૂરી નથી.**

ઉદાહરણ 1 : $f : N \to R$, $f(n) = 2n^2 - 4$ નાં પ્રથમ પાંચ પદો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $f(n) = 2n^2 - 4$

$\therefore \; f(1) = 2(1)^2 - 4 = -2, \quad f(2) = 2(2)^2 - 4 = 4,$

$f(3) = 2(3)^2 - 4 = 14, \quad f(4) = 2(4)^2 - 4 = 28, \quad f(5) = 2(5)^2 - 4 = 46.$

આમ, પ્રથમ પાંચ પદો $-2, 4, 14, 28, 46$ મળે.

ઉદાહરણ 2 : $f : N \to R$, $f(n) = n(-1)^n$ માટે 17 મા અને 16 મા પદોનો તફાવત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(n) = n(-1)^n$

$\therefore \; f(16) = 16(-1)^{16} = 16$ અને $f(17) = 17(-1)^{17} = -17$

હવે, $f(17) - f(16) = (-17) - (16) = -33$

$\therefore$ તફાવત $= |f(17) - f(16)| = 33$.

ઉદાહરણ 3 : $f : N \to R$, $f(n) = 8 - n^3$ માટે શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદો મેળવો.

ઉકેલ : $f(1) = 8 - (1)^3 = 7$, $f(2) = 8 - (2)^3 = 0$, $f(3) = 8 - (3)^3 = -19$ અને $f(4) = 8 - (4)^3 = -56$.

$\therefore$ પ્રથમ ચાર પદો 7, 0, -19 અને -56 છે.

ઉદાહરણ 4 : શ્રેણી $f : N \to R$ એ $f(1) = 1$ અને $f(n) = f(n-1) - 1$, $n \ge 2$ થી વ્યાખ્યાયિત છે. આ શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(1) = 1$.

હવે $f(n) = f(n-1) - 1$, $n \ge 2$ લેતાં,

$\therefore \; f(2) = f(2-1) - 1 = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(3) = f(2) - 1 = -1, \quad f(4) = f(3) - 1 = -2, \quad f(5) = f(4) - 1 = -3$

$\therefore$ પ્રથમ પાંચ પદો 1, 0, -1, -2, -3 છે.

ઉદાહરણ 5 : જો $f : N \to R$, $f(n) = cos\frac{n\pi}{2}$ હોય, તો આ શ્રેણીનાં પ્રથમ છ પદો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(n) = cos\frac{n\pi}{2}$

$\therefore\ f(1) = cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad f(2) = cos\pi = -1, \quad f(3) = cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$f(4) = cos2\pi = 1, \quad f(5) = cos\frac{5\pi}{2} = 0, \quad f(6) = cos3\pi = -1$

તેથી પ્રથમ છ પદો : 0, −1, 0, 1, 0, −1 છે.

ઉદાહરણ 6 : શ્રેણી $f(n) = (n - 1)(n + 2)(n - 3)$ નું 10 મું પદ કયું હશે ?

ઉકેલ : અહીં,, $f(n) = (n - 1)(n + 2)(n - 3)$

$$\therefore\ f(10) = (10 - 1)(10 + 2)(10 - 3)$$
$$= 9 \cdot 12 \cdot 7$$
$$= 756$$

$\therefore$ 10 મું પદ 756 છે.

7.2 શ્રેઢી

ધારો કે $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ શ્રેણી છે. હવે આપણે આપેલ શ્રેણીનાં પદોનો ઉપયોગ કરી નીચે પ્રમાણેની શ્રેણી બનાવવાનો વિચાર કરીએ.

$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, ..., a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ આ પ્રમાણે કરવાથી મળતી નવી શ્રેણીને આપેલ શ્રેણી $\{a_n\}$ પરથી મેળવેલી **શ્રેઢી (Series)** કહે છે.

સામાન્યતઃ શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાને S_n વડે દર્શાવાય છે. $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ એ મૂળ શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢી બને છે.

આમ, **દરેક શ્રેઢી એ શ્રેણી છે અને તેનું n મું પદ એ સંબંધિત શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો છે.**

દાખલા તરીકે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી લઈએ એટલે કે, 1, 3, 5, 7, 9,...

$$\therefore\ S_1 = a_1 = 1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

.

.

.

આપણને એક શ્રેણી 1, 4, 9, 16,... મળશે, જે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગની શ્રેણી છે, એટલે કે $S_n = n^2$. તેને શ્રેણી $f(n) = 2n - 1$ પરથી મેળવેલ **શ્રેઢી** કહે છે.

ચાલો, આપણે શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળા S_n પરથી તે જ શ્રેણીનું n મું પદ a_n મેળવીએ.

હવે, $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

આપણને $n = 2, 3, 4, ...$ માટે $S_n = S_{n-1} + a_n$ મળે છે.

$\therefore \quad S_n - S_{n-1} = a_n \quad \forall n \ge 2$ અને $S_1 = a_1$

આ સૂત્ર આપણને પ્રત્યેક $n \in N$ માટે પ્રથમ n પદોના સરવાળા S_n પરથી nમા પદનું સૂત્ર a_n આપે છે.

ઉદાહરણ 7 : શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે $S_n = n^3 - 2n$ હોય, તો શ્રેણી $\{a_n\}$ નાં પ્રથમ ચાર પદો તથા 8 મું પદ મેળવો.

ઉકેલ : $S_n = n^3 - 2n$

$\therefore \quad S_1 = (1)^3 - 2(1) = 1 - 2 = -1 \qquad S_2 = (2)^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4,$

$S_3 = (3)^3 - 2(3) = 27 - 6 = 21 \qquad S_4 = (4)^3 - 2(4) = 64 - 8 = 56.$

તેથી, $a_1 = S_1 = -1, \quad a_2 = S_2 - S_1 = 4 - (-1) = 5, \quad a_3 = S_3 - S_2 = 21 - 4 = 17$

$a_4 = S_4 - S_3 = 56 - 21 = 35.$

$\therefore$ $\{a_n\}$નાં પ્રથમ ચાર પદો : $-1, 5, 17, 35$ છે.

શ્રેણીનું 8 મું પદ, $a_8 = S_8 - S_7$

$= [(8)^3 - 2(8)] - [(7)^3 - 2(7)]$

$= [512 - 16] - [343 - 14] = 167$

ઉદાહરણ 8 : શ્રેઢી સૂત્ર $S_n = 4^n - 1$ પરથી તેને સંબંધિત શ્રેણી સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ : $a_1 = S_1 = 4 - 1 = 3.$

$S_n = 4^n - 1$

$\therefore \quad S_{n-1} = 4^{n-1} - 1$

$a_n = S_n - S_{n-1}, \forall n \ge 2 = (4^n - 1) - (4^{n-1} - 1)$

$= 4^n - 4^{n-1}$

$= 4^{n-1}(4 - 1)$

$= 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \ge 2$

આ સૂત્રમાં $n = 1$ લેતાં, $3 \cdot 4^{1-1} = 3 = a_1$ અને $a_1 = 3$ છે જ.

$\therefore \quad a_n = 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \ge 1$

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેની શ્રેણીઓનાં પ્રથમ પાંચ પદો લખો :

(1) $f(n) = 3n + 1$ (2) $f(n) = \frac{n-(-1)^n}{2}$, (3) $f(n) = n$ મી અવિભાજ્ય સંખ્યા

2. ફિબોનાકી શ્રેણી $a_1 = a_2 = 1$ અને $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ હોય, તો a_3, a_4, a_5, a_6 શોધો.

3. નીચેની શ્રેણીઓ માટે a_2, a_3, a_4 શોધો :

(1) $a_1 = -3$ અને $a_n = 2a_{n-1} + 1, \forall n > 1$

(2) $a_1 = \frac{1}{2}$ અને $a_n = 3a_{n-1} + (-1)^n, \forall n \ge 2.$

4. શ્રેણી $\{a_n\}$ નાં પ્રથમ ત્રણ પદો તથા દશમું પદ શોધો :

(1) $S_n = n^2 - 1$ (2) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. આપેલ શ્રેઢી સૂત્ર S_n પરથી તેને સંબંધિત શ્રેણી સૂત્ર મેળવો :

(1) $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \ne 1, a \ne 0$ (2) $S_n = 4\{1 - (-3)^{n-1}\}$

*

7.3 સમાંતર શ્રેણી

શ્રેણી 1, 3, 5, 7,.... નું અવલોકન કરીએ. અહીં દરેક પદ (પ્રથમ પદ પછીનું) તેની આગળના પદમાં 2 ઉમેરવાથી મળે છે. બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ છે. આવી શ્રેણીને **સમાંતર શ્રેણી (Arithmetic Progression, A.P.)** કહે છે. આપણે તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

સમાંતર શ્રેણી : શ્રેણી $f : N \rightarrow R, f(n) = an + b, a, b \in R, a \neq 0$ ને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. આમ સમાંતર શ્રેણી એ n નું સુરેખ વિધેય છે.

ઉદાહરણરૂપે, શ્રેણી $f(n) = 3n - 4, n \in N$ એ સમાંતર શ્રેણી છે તથા −1, 2, 5, 8, 11,... તેનાં પદો છે. અહીં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત 3 છે અને તે શૂન્યેતર અચળ છે.

ઉપરની ચર્ચામાં આપણે અવલોકન કરીએ કે બે ક્રમિક પદોનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ છે અને f એ n નું સુરેખ વિધેય છે, જ્યાં $n \in N$. હવે આપણે આ બે ગુણધર્મોને નીચેના પ્રમેયમાં વ્યક્ત કરીએ.

પ્રમેય 1 : સમાંતર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદોનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ છે.

સાબિતી : ધારો કે $\{f(n)\} = \{an + b\}$ એ સમાંતર શ્રેણી છે, $a, b \in R, a \neq 0$.

કોઈ પણ $k \in N$ માટે, $f(k + 1) - f(k) = [a(k + 1) + b] - (ak + b)$

$= ak + a + b - ak - b$

$= a$, શૂન્યેતર અચળ

આમ, બે ક્રમિક પદો $f(k + 1)$ અને $f(k)$નો તફાવત શૂન્યેતર અચળ મળે છે. આપણે તેને સમાંતર શ્રેણીનો **સામાન્ય તફાવત (Common Difference)** કહીશું અને સામાન્ય રીતે આપણે તેને 'd' વડે દર્શાવીશું. હવે પછી આપણે સામાન્ય તફાવતને બદલે તફાવત શબ્દનો ઉપયોગ પણ કરીશું. અહીં $d = f(k + 1) - f(k)$ લઈશું અને તે ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે.

ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. ધારો કે શ્રેણી $\{f(n)\}$નું પ્રથમ પદ 'a' છે અને પ્રત્યેક $k \in N$ માટે તફાવત $f(k + 1) - f(k) = d, d \neq 0$ છે. સ્પષ્ટ છે કે સમાંતર શ્રેણી મળશે. વ્યાપક રીતે, આપણે તારવીએ કે **સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $f(n) = a + (n - 1)d$**, $d \neq 0$ છે અને તે nનું સુરેખ વિધેય છે. આપણે તેને ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 2 : જો શ્રેણી $\{f(n)\}$ નું પ્રથમ પદ a અને બે ક્રમિક પદોનો તફાવત $d \neq 0$ હોય, તો $f(n) = a + (n - 1)d$, $\forall n \in N$ થાય અને તેથી તે સમાંતર શ્રેણી છે.

સાબિતી : ધારો કે વિધાન $P(n) : f(n) = a + (n - 1)d, \forall n \in N$

(1) $n = 1$ લેતાં, $f(1) = a$, પ્રથમ પદ અને $a + (n - 1)d = a + (1 - 1)d = a$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : f(k) = a + (k - 1)d, k \in N$ માટે સત્ય છે. **(i)**

હવે આપણે $P(k + 1)$ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

$f(k + 1) = f(k) + d$ **$(f(k + 1) - f(k) = d)$**

$= [a + (k - 1)d] + d$ **((i) પરથી)**

$\therefore f(k + 1) = a + kd$

$= a + [(k + 1) - 1]d$

આમ, $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $P(n)$ એ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

અહીં, $f(n) = a + (n - 1)d = dn + (a - d)$ એ n નું સુરેખ વિધેય છે $(d \neq 0)$. તેથી f એ સમાંતર શ્રેણી છે.

આપણે ઉપરના બે પ્રમેય પરથી તારવી શકીએ કે, જો સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને સામાન્ય તફાવત 'd' હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d, \ldots$ રીતે લખી શકાય.

આમ સમાંતર શ્રેણીના nમા પદનું સૂત્ર $f(n) = a + (n - 1)d$ થાય. n પદોની સાન્ત શ્રેણીના છેલ્લા પદ માટે પણ a_n નો ઉપયોગ થાય છે. તેનો પ્રદેશ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ છે.

જો આપણે n મા પદને t_n વડે દર્શાવીએ તો $t_n = a + (n - 1)d$, જ્યાં a એ પ્રથમ પદ અને d એ સામાન્ય તફાવત છે.

નોંધ : a, b, c સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો છે $\Leftrightarrow b - a = c - b$

$\Leftrightarrow 2b = a + c$

ઉદાહરણ 9 : સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18,... નું સત્તરમું અને ચાલીસમું પદ શોધો.

ઉકેલ : $a = 3, d = 5$

સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a + (n - 1)d$

$= 3 + (n - 1)5 = 5n - 2$

હવે, $n = 17$ લેતાં, $t_{17} = 5(17) - 2 = 83$ અને

$n = 40$ લેતાં, $t_{40} = 5(40) - 2 = 198$.

$\therefore$ 17 મું પદ 83 અને 40 મું પદ 198 છે.

ઉદાહરણ 10 : સમાંતર શ્રેણી 3, 14, 25, 36,... નું કેટલામું પદ તેના 37 મા પદ કરતાં 121 ઓછું છે ?

ઉકેલ : અહીં, $a = 3, d = 11, m = 37$

m મું પદ, $t_m = a + (m - 1)d$

$t_{37} = 3 + (37 - 1)11 = 3 + 396 = 399$

ધારો કે t_{37} કરતાં 121 ઓછું હોય તેવું પદ t_n છે.

$\therefore \quad t_n = t_{37} - 121 = 399 - 121 = 278$

$\therefore \quad a + (n - 1)d = 278$

$\therefore \quad 3 + (n - 1)11 = 278$

$\therefore \quad (n - 1)11 = 278 - 3 = 275$

$\therefore \quad n - 1 = 25$

$\therefore \quad n = 26$

આમ, 26 મું પદ એ 37 મા પદ કરતાં 121 ઓછું છે.

નોંધ : 121 જેટલું પદ ઓછું થાય તે માટે પદનો ક્રમાંક $\frac{121}{11} = 11$ ઓછો થવો જોઈએ. (તફાવત = 11)

$\therefore \quad 37 - 11 = 26$ મુ પદ માગ્યા પ્રમાણે મળે.

ઉદાહરણ 11 : જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ શૂન્ય હોય, તો સાબિત કરો કે તે શ્રેણીનું 31મું પદ એ 21 મા પદ કરતાં બમણું છે.

ઉકેલ : $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{11} = a + 10d$

$\therefore \quad 0 = a + 10d$ (i)

હવે, $2 \cdot t_{21} = 2(a + 20d)$

$= 2a + 40d$

$= (a + 30d) + (a + 10d)$

$= t_{31} + 0$ ((i) પરથી)

આમ, 31મું પદ એ 21મા પદ કરતાં બમણું છે.

ઉદાહરણ 12 : જો સમાંતર શ્રેણીનું p મું પદ q હોય અને q મું પદ p હોય તો તે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ મેળવો. $(p \neq q)$

ઉકેલ : અહીં, t_p એ $a + (p - 1)d = q$ (i)

અને t_q એ $a + (q - 1)d = p$ (ii)

(i) અને (ii)ને ઉકેલતાં,

$(p - q)d = q - p$

$\therefore \quad d = -1$ (કારણ કે $p \neq q$) અને $a = p + q - 1$

હવે nમું પદ $t_n = a + (n - 1)d$

$= p + q - 1 + (n - 1)(-1)$

$= p + q - n$

સમાંતર શ્રેઢી :

સમાંતર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમાંતર શ્રેઢી (Arithmetic series) કહે છે.

સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d$ ને સંબંધિત સમાંતર શ્રેઢીનું n મું પદ,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)d]$$

હવે આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાની અભિવ્યક્તિ સાબિત કરીએ.

એટલે કે, ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ સાબિત કરીએ.

પ્રમેય 3 : જે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ થાય. $\forall n \in N$.

સાબિતી : ધારો કે વિધાન $P(n) : S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d], \forall n \in N$.

(1) $n = 1$ માટે $S_1 = \frac{1}{2}[2a + (1 - 1)d] = a$, એટલે કે પ્રથમ પદનો સરવાળો પ્રથમ પદ 'a' છે.

$\therefore \quad P(1)$ સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : S_k = \frac{k}{2}[2a + (k - 1)d]$ એ $k \in N$ માટે સત્ય છે. (i)

$n = k + 1$ લેતાં,

$S_{k+1} = S_k + (k + 1)$મું પદ

$= \frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] + a + [(k + 1) - 1]d$ ((i) પરથી)

$= \frac{1}{2}[2ak + k(k - 1)d + 2a + 2kd]$

$= \frac{1}{2}[2a(k + 1) + kd(k - 1 + 2)]$

$= \frac{1}{2}[2a(k+1) + kd(k+1)]$

$= \frac{k+1}{2}[2a + \{(k+1) - 1\}d]$

આમ, P(*k*) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(*k* + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી P(*n*) એ $\forall n \in N$ સત્ય છે.

નોંધ : *n* પદોની સાન્ત સમાંતર શ્રેણી માટે

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}] = \frac{n}{2}(a + l)$$

જ્યાં *a* પ્રથમ પદ અને *l* છેલ્લું પદ છે, એટલે કે $l = t_n = a + (n-1)d$.

આમ, સમાંતર શ્રેણીના S_n માટેનું સૂત્ર = $\frac{\text{પદોની કુલ સંખ્યા}}{2}$ [પ્રથમ પદ + છેલ્લું પદ]

ઉદાહરણ 13 : સમાંતર શ્રેણી 15, 11, 7, 3,...નાં પ્રથમ પંદર પદોનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 15$, $d = 11 - 15 = -4$ અને $n = 15$

હવે, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore S_{15} = \frac{15}{2}[2(15) + (15-1)(-4)]$

$= \frac{15}{2}[30 - 56] = \frac{15}{2}[-26] = -195$

$\therefore$ પ્રથમ પંદર પદોનો સરવાળો -195 છે.

ઉદાહરણ 14 : બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમ *n* પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(3n + 6) : (5n - 13)$ છે. તેમના અગિયારમા પદોનો ગુણોત્તર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a_1 અને સામાન્ય તફાવત d_1 છે તથા બીજી સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a_2 અને સામાન્ય તફાવત d_2 છે.

હવે, $\frac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}}{\text{બીજી શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}} = \frac{3n+6}{5n-13}$

$$\therefore \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{3n+6}{5n-13}$$

$$\therefore \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{3n+6}{5n-13} \qquad \text{(i)}$$

શ્રેણીઓનાં *n* મા પદને અનુક્રમે t_n તથા t_n' વડે દર્શાવીએ તો,

હવે, $\frac{t_{11}}{t'_{11}} = \frac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2}$

$= \frac{2a_1 + 20d_1}{2a_2 + 20d_2}$

$= \frac{2a_1 + (21-1)d_1}{2a_2 + (21-1)d_2}$

તેથી (i) માં $n = 21$ લેતાં,

$$\frac{t_{11}}{t'_{11}} = \frac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2} = \frac{3(21) + 6}{5(21) - 13} = \frac{69}{92} = \frac{3}{4}$$

∴ આપેલ બે શ્રેણીઓનાં 11 માં પદોનો ગુણોત્તર 3 : 4 છે.

નોંધ : કેટલીક વખત સમાંતર શ્રેણીના કેટલાંક ક્રમિક પદોની આવશ્યકતા ઊભી થાય છે.

જો સમાંતર શ્રેણીનાં **ત્રણ** અથવા **પાંચ** અથવા **સાત** ક્રમિક પદો આપેલ હોય, ત્યારે આપણે તેમાંનું મધ્યમપદ 'a' ધારીશું અને તેની પહેલાનાં પદોમાં ક્રમશઃ 'd' ઘટાડતા જઈશું તથા તે પછીનાં પદોમાં ક્રમશઃ 'd' વધારતા જઈશું.

આમ, સમાંતર શ્રેણીનાં 3 ક્રમિક પદો : $a - d, a, a + d$

5 ક્રમિક પદો : $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$

7 ક્રમિક પદો : $a - 3d, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, a + 3d$ લઈ શકાય.

જો **ચાર** અથવા **છ** પદો આપેલ હોય, તો તેમાં બે મધ્યમપદ થશે, જેમને આપણે $a - d$ અને $a + d$ ધારીશું. અહીં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત '$2d$' લઈશું, તેથી પહેલાનાં પદો માટે ક્રમશઃ '$2d$' ઘટાડીશું અને પછીનાં પદો માટે '$2d$' વધારીશું.

આમ, સમાંતર શ્રેણીનાં 4 ક્રમિક પદો : $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$

6 ક્રમિક પદો : $a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d$ લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 15 : સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 24 અને 312 છે. આ ત્રણ પદો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $a - d, a, a + d$ છે.

$(a - d) + a + (a + d) = 24$ અને $(a - d) \cdot a \cdot (a + d) = 312$

આમ, $3a = 24$ તેથી $a = 8$

$(8 - d) \cdot 8 \cdot (8 + d) = 312$

∴ $64 - d^2 = 39$

∴ $d^2 = 25$

∴ $d = 5$ અથવા $d = -5$

જો $a = 8$ અને $d = 5$ લઈએ, તો તે પદો 3, 8, 13 થશે અને જો $a = 8$ અને $d = -5$ લઈએ, તો તે 13, 8, 3 થશે.

આમ, માંગેલ પદો 3, 8, 13 છે.

ઉદાહરણ 16 : સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો સરવાળો 24 છે અને પ્રથમ તથા છેલ્લાં પદોનો ગુણાકાર −45 છે, તો આ પદો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદો $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ છે.

તેમનો સરવાળો $(a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 24$

∴ $4a = 24$. તેથી $a = 6$

$(a - 3d)(a + 3d) = -45$

∴ $(6 - 3d)(6 + 3d) = -45$

∴ $36 - 9d^2 = -45$

∴ $9d^2 = 81$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore \quad d = 3$ અથવા $d = -3$

જો $a = 6$ અને $d = 3$ લઈએ, તો તે પદો $-3, 3, 9, 15$ અને જો $a = 6$ અને $d = -3$ લઈએ, તો તે પદો $15, 9, 3, -3$ થશે.

ઉદાહરણ 17 : એક વ્યક્તિની પ્રથમ વર્ષની આવક ₹ 3,50,000 છે. તેની આવકમાં દર વર્ષે ₹ 15,000 નો ઈજાફો (વધારો) થાય છે. 15 મા વર્ષે તેની આવક કેટલી હશે ? 15 વર્ષમાં તે કુલ કેટલી રકમ મેળવશે ?

ઉકેલ : અહીં, પ્રથમ પદ $a = 3,50,000$ અને $d = 15,000$

હવે, $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{15} = 3,50,000 + 14(15000) = 5,60,000$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$= \frac{15}{2}(3,50,000 + 5,60,000) = 68,25,000$$

$\therefore$ 15 મા વર્ષે તેની આવક ₹ 5,60,000 હશે અને 15 વર્ષમાં તે કુલ ₹ 68,25,000 મેળવશે.

સ્વાધ્યાય 7.2

1. નીચે આપેલી સમાંતર શ્રેણીઓમાં નિર્દેશિત પદો શોધો :

(1) $-17, -13, -9, \ldots$નું 16મું પદ,

(2) $101, 96, 91, \ldots$નું 31મું પદ,

(3) $3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, \ldots$નું 10મું પદ

2. એક સમાંતર શ્રેણીનું નવમું પદ 30 હોય, તો તેનાં પ્રથમ સત્તર પદોનો સરવાળો શોધો.

3. જેમને 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી 100 અને 500 વચ્ચેની તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

4. એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો, તે પછીના પાંચ પદોના સરવાળાથી $\frac{1}{6}$ ગણો હોય, તો તેનું 8મું પદ શોધો.

5. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $3n^2 + 5n$ હોય, તો તેનું કેટલામું પદ 164 થશે ?

6. એક સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ m પદોનો સરવાળો n અને પ્રથમ n પદોનો સરવાળો m હોય, તો પ્રથમ $(m + n)$ પદોનો સરવાળો મેળવો.

7. એક સમાંતર શ્રેણીનું pમું, qમું અને rમું પદ અનુક્રમે l, m, n હોય, તો

$l(q - r) + m(r - p) + n(p - q)$નું મૂલ્ય મેળવો.

8. બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(3n - 13) : (5n - 1)$ છે. તેમનાં 13માં પદોનો ગુણોત્તર મેળવો.

9. બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં n માં પદોનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(2n - 1) : (4n + 3)$ છે. તેમનાં પ્રથમ 25 પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર મેળવો.

10. જે પૂર્ણાંકોને 2 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય પરંતુ 5 વડે નિઃશેષ ન ભાગી શકાય તેવા 100 થી 200 સુધીના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

11. જો એક સમાંતર શ્રેણીનું 10મું પદ $\frac{1}{20}$ અને 20મું પદ $\frac{1}{10}$ હોય, તો તેનું 200 મું પદ શોધો.

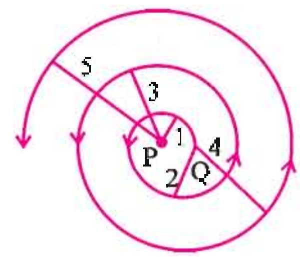
12. એક સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 9 અને તેમનાં વર્ગોનો સરવાળો 59 હોય, તો તે પદો મેળવો.

13. એક સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો સરવાળો 32 છે અને તેનાં બીજા તથા ત્રીજા પદોનો ગુણાકાર 60 છે, તો આ પદો શોધો.

14. એક વ્યક્તિ તેની લોનની ચૂકવણી માટે પ્રથમ હપ્તામાં ₹ 200 ભરે છે. જો તે દર માસે હપતાની રકમમાં ₹ 20 વધારે, તો 20મા હપતાના અંતે તેણે કુલ કેટલી રકમ ભરપાઈ કરી હશે ?

15. ભાર્ગવ પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 50 બચાવે છે અને તે પ્રત્યેક અઠવાડિયે ₹ 17.50ની બચત વધારતો જાય છે. n મા અઠવાડિયાની તેની બચત ₹ 207.50 થતી હોય, તો n શોધો તથા તેની કુલ બચત શોધો.

16. વારાફરતી P અને Q ને કેન્દ્ર લઈ ક્રમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક **કુંતલ (spiral)** બનાવ્યું છે. પ્રથમ P ને કેન્દ્ર લઈ 1 સેમી, 3 સેમી, 5 સેમી. આ પ્રમાણે ત્રિજ્યાઓ લઈ અર્ધવર્તુળો દોરવામાં આવે છે અને પછી Q ને કેન્દ્ર લઈ 2 સેમી, 4 સેમી, 6 સેમી,... ત્રિજ્યાઓ લઈ અર્ધવર્તુળો દોરવામાં આવે છે. જો આવાં 20 અર્ધવર્તુળોની મદદથી કુંતલ બનાવ્યું હોય, તો તેની લંબાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 7.1)



આકૃતિ 7.1

*

7.3 સમગુણોત્તર શ્રેણી

આપણે કેટલીક શ્રેણીનું નિરીક્ષણ કરીએ :

(1) 3, 6, 12, 24,... (2) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... (3) 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001,...

આપણે નોંધીએ કે દરેક પદ (પ્રથમ પદ સિવાયનું) કોઈક ચોક્કસ ક્રમમાં આગળ વધે છે. (1) માં બીજું પદ અને તે પછીના દરેક પદો, આગળના પદથી બમણાં છે. (3) માં દરેક પદ આગળના પદ કરતાં 0.1 ગણું છે.

તેથી કોઈ પણ પદનો તેની આગળના પદ સાથેનો ગુણોત્તર અચળ છે. એટલે કે દરેક પદ (પ્રથમ પદ સિવાય) માટે તે સમાન છે. આ ગુણધર્મ ધરાવતી શ્રેણીને **સમગુણોત્તર શ્રેણી (Geometric Progression, G.P.) કહે છે, અચળ ગુણોત્તરને સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર કહે છે. આમ જો દરેક ક્રમિક પદોની જોડી માટે પદનો પૂર્વપદ સાથેનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય, તો તે શ્રેણીને સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે.** આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

સમગુણોત્તર શ્રેણી : શ્રેણી $f : N \rightarrow R$, $f(n) = Ar^n$, $A \in R - \{0\}$, $r \in R - \{0\}$ ને સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે. સમગુણોત્તર શ્રેણી એ ઘાતાંકીય વિધેય છે.

$n = 1, 2, 3,...$ લેતાં સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પદો Ar, Ar^2, Ar^3,... મળશે.

પ્રમેય 4 : સમગુણોત્તર શ્રેણીના કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય છે.

સાબિતી : ધારો કે $f : N \rightarrow R$ એક સમગુણોત્તર શ્રેણી છે. કોઈક $A \neq 0$ અને કોઈક $r \neq 0$ માટે, $f(n) = Ar^n$, $\forall n \in N$.

બે ક્રમિક પદો $f(k + 1)$ અને $f(k)$ નો ગુણોત્તર $\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{Ar^{k+1}}{Ar^k} = r$, શૂન્યેતર અચળ.

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પ્રમેય પણ સત્ય છે.

ધારો કે શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a \neq 0$ અને પ્રત્યેક બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર r છે, જ્યાં $r \neq 0$. તો તે શ્રેણીનાં પદો a, ar, ar^2,..., ar^{n-1}. આમ, તેનું n મું પદ $t_n = ar^{n-1}$ થાય.

આપણે આ સાબિતી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપીશું.

પ્રમેય 5 : જો શ્રેણીનાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો તે સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

સાબિતી : ધારો કે $f : N \rightarrow R$, $f(n) = ar^{n-1}$ $(a \neq 0, r \neq 0)$

$P(n) : f(n) = ar^{n-1}$ લઈએ. $a, r \in R - \{0\}$

(1) $n = 1$ માટે, $f(1) = ar^0 = a$, પ્રથમ પદ.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : f(k) = ar^{k-1}$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

હવે આપણે $P(k + 1)$ સત્ય સાબિત કરીશું.

$\therefore \frac{f(k+1)}{f(k)} = r$ (પક્ષ)

$\therefore f(k + 1) = r \cdot f(k) = r \cdot (ar^{k-1}) = ar^k = ar^{(k+1)-1}$

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

$\{f(n)\}$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

આપણે નોંધીએ કે, જે શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય ગુણોત્તર r છે, તે સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}, ...$ છે.

અહીં પણ આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ t_n દ્વારા દર્શાવીશું.

તેથી, $t_n = ar^{n-1}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$.

નોંધ : (1) હવે પછી આપણે સામાન્ય ગુણોત્તરને 'ગુણોત્તર' જ કહીશું.

(2) જો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ એટલે કે $b^2 = ac$ થાય.

ઉદાહરણ 18 : સમગુણોત્તર શ્રેણી 54, 36, 24, 16,...નું n મું અને 8 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 54$, $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$.

હવે $t_n = ar^{n-1} = 54\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$= \frac{2 \times 3^3 \times 2^{n-1}}{3^{n-1}}$

$\therefore t_n = 2^n \cdot 3^{4-n}$

t_n માં $n = 8$ લેતાં, $t_8 = 2^8 \cdot 3^{-4}$

$= \frac{256}{81}$

$\therefore$ શ્રેણીનું n મું પદ $2^n \cdot 3^{4-n}$ અને 8 મું પદ $\frac{256}{81}$ છે.

ઉદાહરણ 19 : એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 18 અને છઠ્ઠું પદ 486 હોય, તો તેનું 9મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $t_3 = 18$ અને $t_6 = 486$.

હવે, $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore t_3 = ar^2 = 18$ અને $t_6 = ar^5 = 486$

$\therefore \frac{t_6}{t_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{486}{18}$

$\therefore r^3 = 27$

$\therefore r = 3$

વળી, $ar^2 = 18$. આથી, $9a = 18$

$\therefore \quad a = 2$

$\therefore \quad t_9 = ar^8 = 2(3)^8 = 13122$

$\therefore$ 9મું પદ 13122 છે.

સમગુણોત્તર શ્રેઢી

સમગુણોત્તર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમગુણોત્તર શ્રેઢી (Geometric Series) કહે છે.

જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને ગુણોત્તર 'r' હોય, તો સમગુણોત્તર શ્રેઢીનું n મું પદ

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ થશે.

હવે આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી S_n નું સૂત્ર મેળવીએ.

પ્રમેય 6 : જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને ગુણોત્તર r હોય, તો તેના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, $n \in N$ તથા જો $r = 1$ તો $S_n = na$.

સાબિતી : ધારો કે વિધાન $P(n) : S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, $n \in N$.

(1) $n = 1$ માટે $S_1 = \dfrac{a(r - 1)}{r - 1} = a$ એટલે કે પ્રથમ પદનો સરવાળો એ પ્રથમ પદ 'a' જ થશે.

આમ, $P(1)$ સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : S_k = \dfrac{a(r^k - 1)}{r - 1}$ એ $k \in N$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$

$$S_{k+1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^{k+1-1}$$

$$= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$$

$$= \frac{a}{r - 1}[r^k - 1 + r^{k+1} - r^k]$$

$$= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$$

આમ, $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતને આધારે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

જો $r = 1$ તો સ્પષ્ટ છે કે $S_n = a + a + ... + a$ (n વખત) $= n \cdot a$

નોંધ : જ્યારે $r < 1$ હોય, ત્યારે આપણે S_n ના સૂત્રનો ઉપયોગ $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ સ્વરૂપે કરીશું.

ઉદાહરણ 20 : સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $t_2 = 6$ અને $t_5 = 48$ તો S_6 શોધો.

ઉકેલ : $t_2 = 6$ અને $t_5 = 48$

$\therefore \quad ar = 6$ અને $ar^4 = 48$

$\therefore \quad \dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{48}{6}$

$\therefore \quad r^3 = 8 = 2^3$

$\therefore \quad r = 2$ અને $ar = 6$

$\therefore \quad a = 3$

હવે, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$\therefore \quad S_6 = \dfrac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$

ઉદાહરણ 21 : એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ $\frac{3}{4}$ છે. પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો એ પ્રથમ દશ પદોના સરવાળાથી $\frac{32}{33}$ ગણો હોય, તો પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $t_3 = \frac{3}{4}$ અને $S_5 = \frac{32}{33} \cdot S_{10}$

$\therefore \quad ar^2 = \frac{3}{4}$ અને $\dfrac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = \dfrac{32}{33} \cdot \dfrac{a(r^{10} - 1)}{r - 1}$

$\therefore \quad \frac{33}{32} = r^5 + 1$

$\therefore \quad r^5 = \frac{33}{32} - 1$

$\therefore \quad r^5 = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\therefore \quad r = \frac{1}{2}$

વળી, $ar^2 = \frac{3}{4}$ પરથી $a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad a = 3$

હવે, $S_4 = \dfrac{a(1 - r^4)}{1 - r} = \dfrac{3\left(1 - \frac{1}{16}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(\frac{15}{16}\right)$

$\therefore \quad S_4 = \frac{45}{8}$

$\therefore$ પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો $\frac{45}{8}$ છે.

નોંધ : કેટલીક વખત આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીના કેટલાંક ક્રમિક પદો ધારવાં આવશ્યક હોય છે.

જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં **ત્રણ** અથવા **પાંચ** અથવા **સાત** ક્રમિક પદો આપ્યાં હોય, તો આપણે મધ્યમપદને 'a' ધારીશું અને તેની પહેલાનાં પદો માટે a ને $r, r^2, r^3, \ldots$ વડે ભાગીશું તથા પાછળનાં પદો માટે a ને $r, r^2, r^3, \ldots$ વડે ગુણીશું. આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં,

3 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r}, a, ar$

5 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

7 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2, ar^3$ લઈશું.

જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં **ચાર** અથવા **છ** ક્રમિક પદો આપ્યાં હોય, તો બે મધ્યમપદો $\frac{a}{r}$ અને ar ધારીશું તથા $\frac{a}{r}$ ની પહેલાનાં પદો માટે $\frac{a}{r}$ ને $r^2, r^4, r^6, \ldots$ વડે ભાગીશું અને ar પછીનાં પદો માટે $r^2, r^4, r^6, \ldots$ વડે ar ને ગુણીશું. આપણે, સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં

4 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

6 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^5}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3, ar^5$ લઈશું.

ઉદાહરણ 22 : ત્રણ સંખ્યાઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો છે. તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે $\frac{31}{5}$ અને 1 છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{a}{r}, a, ar$ છે.

તેમનો ગુણાકાર $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1$ અને સરવાળો $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{31}{5}$

$\therefore$ $a^3 = 1$ તેથી $a = 1$ અને $\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{31}{5}$

$\therefore$ $5r^2 - 26r + 5 = 0$

$\therefore$ $(5r - 1)(r - 5) = 0$

$\therefore$ $r = \frac{1}{5}$ અથવા $r = 5$

$a = 1$ અને $r = \frac{1}{5}$ લેતાં, તે સંખ્યાઓ $5, 1, \frac{1}{5}$ થશે.

(જો આપણે $r = 5$ લઈએ તો આ જ સંખ્યાઓ મળે.)

ઉદાહરણ 23 : શ્રેણી 5, 55, 555,...નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : $S_n = 5 + 55 + 555 + \dots$ n પદો

$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \dots$ n પદો$]$

$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots$ n પદો$]$

$= \frac{5}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots$ n પદો$) - (1 + 1 + 1 + \dots n$ પદો$)]$

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$ **(અહીં, $a = 10, r = 10$)**

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right]$

$= \frac{50}{81}(10^n) - \frac{50}{81} - \frac{5n}{9}.$

ઉદાહરણ 24 : ચોક્કસ પ્રકારના સૂક્ષ્મ જીવાણું (બેક્ટેરિયા) દર કલાકે 4 % પ્રમાણે વધે છે. શરૂઆતમાં 40 જીવાણુઓ હોય, તો ચોથા કલાકના અંતે કેટલા જીવાણુઓ હાજર હશે ? ચોથા કલાકમાં કેટલા જીવાણુઓ વધ્યા હશે ?

ઉકેલ : શરૂઆતના બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 40 છે. પ્રથમ કલાકના અંતે 4 % જીવાણુઓ વધે છે.

તેથી પ્રથમ કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા

$40 + 40\left(\frac{4}{100}\right) = 40(1 + 0.04) = 40(1.04)$

બીજા કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા $40(1.04)^2$ થશે.

ત્રીજા કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા $40(1.04)^3$ છે.

આમ, ક્રમિક કલાકોમાં જીવાણુઓની સંખ્યા એ એક સમગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે. શરૂઆતમાં $T_1 = a = 40$ અને $r = 1.04$.

હવે, ચોથા કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા $40(1.04)^4 = 46.7943$

એટલે કે લગભગ 47 બૅક્ટેરિયા 4 કલાકના અંતે હાજર હોય.

ચોથા કલાકમાં વધેલા જીવાણુઓની સંખ્યા

= ચાર કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા − ત્રણ કલાકના અંતે જીવાણઉઓની સંખ્યા

$= 40[(1.04)^4 - (1.04)^3]$

$= 40(1.04)^3\ (1.04 - 1)$

$= 40(1.04)^3\ (0.04)$

$= 1.7987$

∴ ચોથા કલાકમાં લગભગ 2 જીવાણુ વધે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ માટે દર્શાવેલ પદો શોધો :

(1) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...$નું 12 મું પદ

(2) $7, \frac{-7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{-7}{8}, ...$નું 11 મું પદ

(3) $-2, -2\sqrt{2}, -4, -4\sqrt{2}, ...$નું 8 મું પદ

2. નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ માટે માગ્યા પ્રમાણે ગણો :

(1) $t_7 = 96$, $r = 2$, તો t_{10} શોધો. (2) $a = 2$, $r = \sqrt{2}$, $t_n = 128$ તો n શોધો.

(3) $a = 3$, $r = 3$, $S_n = 363$, તો n શોધો. (4) $r = \frac{1}{3}$, $S_3 = \frac{585}{4}$, તો a શોધો.

3. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 21 અને તે પછીનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 168 હોય, તો પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો કરો.

4. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો $\frac{9}{2}$ અને છઠ્ઠું પદ એ તેના ત્રીજા પદથી 8 ગણું હોય, તો તે શ્રેણી શોધો.

5. શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો કરો :

(1) 7, 77, 777, 7777,... (2) 3, 33, 303, 3003,...

6. સરવાળો કરો : $a(a + b) + a^2(a^2 + b^2) + a^3(a^3 + b^3) + ...$ n પદો સુધી. $(a, b \neq 0, \pm 1)$

7. સમગુણોત્તર શ્રેણીની પાંચ ક્રમિક ધન સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 32 અને સૌથી મોટી અને સૌથી નાની સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 81 : 1 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

8. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું $(p + q)$મું પદ m અને $(p - q)$મું પદ n છે. આ શ્રેણીનું p મું પદ m અને n માં શોધો.

9. જો 1, a, b, c, 2 એ સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો abc ની કિંમત શોધો.

10. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું pમું, qમું અને rમું પદ પણ અન્ય સમગુણોત્તર શ્રેણીના ત્રણ ક્રમિક પદો હોય, તો સાબિત કરો કે p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

11. જો x, y, z સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} = \frac{1}{y}$.

12. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો ગુણાકાર 16 છે તથા બીજી અને ત્રીજી સંખ્યાનો સરવાળો 5 છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

13. એક મોટરસાઈકલ ₹ 60,000 માં ખરીદી, જો દર વર્ષે તેની કિંમતમાં 10 % ઘટાડો થતો હોય, તો ચોથા વર્ષના અંતે તેની કિંમત કેટલી હશે ?

*

7.4 મધ્યકો

સમાંતર મધ્યક : જો ત્રણ ભિન્ન સંખ્યાઓ a, A, b સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો હોય તો A ને બે સંખ્યાઓ a અને b નો **સમાંતર મધ્યક (Arithmetic Mean)** કહે છે. સમાંતર મધ્યકને સંકેત A વડે દર્શાવાય છે.

a, A અને b એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad A - a = b - A$

$\therefore \quad 2A = a + b$

$\therefore \quad A = \frac{a+b}{2}$

આમ, a અને bનો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a+b}{2}$ છે. તે a અને bનો સરેરાશ છે.

જેમકે, 4 અને 12 નો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{4+12}{2} = 8$ છે.

સમાંતર મધ્યકો : બે ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે જો સંખ્યાઓ $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ સમાંતર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો હોય, તો $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ને બે ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો કહેવાય.

ધારો કે, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ એ a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો છે.

અહીં, આપણને સમાંતર શ્રેણીનાં $n + 2$ પદો મળે છે. તેમાં પ્રથમ પદ a અને $(n + 2)$મું પદ b છે.

$\therefore \quad t_{n-2} = b = a + [(n + 2) - 1]\, d$

$\therefore \quad b - a = (n + 1)d$

$\therefore \quad \frac{b-a}{n+1} = d$

અહીં, સમાંતર મધ્યક $A_1 = a + d = a + \left(\frac{b-a}{n-1}\right)$

આમ, $A_1 = a + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, $A_2 = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, $A_3 = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$,...

તેથી a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો $A_k = a + k\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, જ્યાં $k = 1, 2, 3, ..., n$.

અહીં, A_k એ a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો પૈકીનો kમો સમાંતર મધ્યક છે.

અહીં, $n = 1$ માટે $A_1 = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{a \cdot b}{2}$, જે a અને bનો સમાંતર મધ્યક છે.

આમ, બે ભિન્ન સંખ્યાઓ a અને b માટેનો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a-b}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 25 : 8 અને 23 વચ્ચે ચાર સમાંતર મધ્યકો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 8$, $b = 23$ અને $n = 4$

તેથી, $d = \frac{b-a}{n-1} = \frac{23-8}{4 \cdot 1} = \frac{15}{5} = 3$

$\therefore$ 8 અને 23 વચ્ચેના ચાર સમાંતર મધ્યકો,

$8 + 3$, $8 + 2(3)$, $8 + 3(3)$, $8 + 4(3)$. મધ્યકો 11, 14, 17 અને 20 છે.

ઉદાહરણ 26 : 1 અને 31 વચ્ચે n સમાંતર મધ્યકો એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી, $(n-1)$મા અને 7 મા મધ્યકનો ગુણોત્તર 9 : 5 થાય, તો n શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 1$, $b = 31$.

સામાન્ય તફાવત $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{31-1}{n+1} = \frac{30}{n+1}$

$$\frac{(n-1)\text{મો મધ્યક}}{7\text{મો મધ્યક}} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{1+(n-1)\left(\frac{30}{n+1}\right)}{1+7\left(\frac{30}{n+1}\right)} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{n+1+30n-30}{n+1+210} = \frac{9}{5}$$

$\therefore \quad 5(31n - 29) = 9(n + 211)$

$\therefore \quad 155n - 145 = 9n + 1899$

$\therefore \quad 146n = 2044$

$\therefore \quad n = 14$

સમગુણોત્તર મધ્યક : આપેલી બે ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ a અને b માટે ધન સંખ્યા G એવી મળે કે જેથી, a, G, b સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો હોય, તો G ને a અને b નો **સમગુણોત્તર મધ્યક (Geometric Mean)** અથવા **ગુણોત્તર મધ્યક** કહે છે. a અને b ના સમગુણોત્તર મધ્યકને G વડે દર્શાવાય છે.

a, G, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad \frac{G}{a} = \frac{b}{G}$

$\therefore \quad G^2 = ab$

$\therefore \quad \mathbf{G = \sqrt{ab}}$

જેમકે, 2 અને 18 નો ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{2 \times 18} = 6$ છે.

ગુણોત્તર મધ્યકો : આપેલ ભિન્ન ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $G_1, G_2, ..., G_n$ મળે કે જેથી, $a, G_1, G_2, G_3, ... G_n, b$ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો હોય, તો $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ ને a અને b વચ્ચેના ગુણોત્તર મધ્યકો કહે છે.

હવે, a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો માટેનું સૂત્ર મેળવીશું.

ધારો કે, $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ એ a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો છે. તેથી $a, G_1, G_2, G_3, ..., G_n, b$ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો છે, જેનું પ્રથમ પદ a અને $(n + 2)$મું પદ b છે.

$\therefore \quad t_{n+2} = b = ar^{n+1}$, જ્યાં r એ સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર છે.

$$\therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

આમ, $G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, G_3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, ...$

$\therefore$ **a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો, $G_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$, જ્યાં, $k = 1, 2, 3, ..., n$**

અહીં, G_k એ a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો પૈકીનો kમો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

$n = 1$ માટે, $G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{ab}$, જે a અને bનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

આમ, બે ભિન્ન ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b નો ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{ab}$ થાય.

ઉદાહરણ 27 : 2 અને $\frac{2}{81}$ વચ્ચેના ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $b = \frac{2}{81}$, $n = 3$.

$\therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{2}{81} \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3+1}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

હવે, $G_1 = ar = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $G_2 = ar^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$, $G_3 = ar^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$.

$\therefore$ 2 અને $\frac{2}{81}$ વચ્ચેના ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}$ છે.

ઉદાહરણ 28 : જો બે ધન સંખ્યાઓનો સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 7 અને $2\sqrt{6}$ હોય, તો તે બે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે ધન સંખ્યાઓ a તથા b નો સમાંતર મધ્યક 7 અને સમગુણોત્તર મધ્યક $2\sqrt{6}$ છે.

$A = \frac{a \cdot b}{2} = 7$ અને $G = \sqrt{ab} = 2\sqrt{6}$

$\therefore \quad a + b = 14$ અને $ab = 24$

$\therefore \quad b = \frac{24}{a}$

$\therefore \quad a + \frac{24}{a} = 14$

$\therefore \quad a^2 - 14a + 24 = 0$

$\therefore \quad (a - 12)(a - 2) = 0$

$\therefore \quad a = 12$ અથવા $a = 2$

હવે $a = 12$, તો $b = 2$ અને $a = 2$ તો $b = 12$

$\therefore$ માંગેલ સંખ્યાઓ 2 અને 12 છે.

ઉદાહરણ 29 : જો a અને b નો ગુણોત્તર મધ્યક G તથા A_1 અને A_2 એ a અને b વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો હોય, તો સાબિત કરો કે $G^2 = (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1)$.

ઉકેલ : A_1, A_2 એ a અને b વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો છે.

$\therefore \quad a, A_1, A_2, b$ સમાંતર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો છે.

$\therefore \quad A_1 = \frac{a + A_2}{2}$ અને $A_2 = \frac{A_1 - b}{2}$

$\therefore \quad 2A_1 - A_2 = a$ અને $2A_2 - A_1 = b$

હવે $G^2 = ab = (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1)$

પ્રમેય 7 : જો બે ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ a અને b ના સમાંતર મધ્યક અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે A અને G હોય, તો સાબિત કરો કે, A > G

સાબિતી : a અને b એ ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ છે.

તેથી, $A = \frac{a+b}{2}$ અને $G = \sqrt{ab}$

$\therefore \quad A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0 \qquad (a \neq b;\ a, b > 0)$

$\therefore \quad A > G$

ઉદાહરણ 30 : બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યકનો તફાવત 12 છે તથા તે બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 1 : 9 છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ સંખ્યાઓ a અને b છે, $a, b \in R^+$.

$\therefore \quad A = \frac{a-b}{2}$ અને $G = \sqrt{ab}$

હવે, $A > G$ હોવાથી $A - G = 12$ અને $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$

$\therefore \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 12$ અને $b = 9a$

$\therefore \quad \frac{a+9a}{2} - \sqrt{a \cdot 9a} = 12$

$\therefore \quad 5a - 3a = 12$

$\therefore \quad a = 6$ અને $b = 54$

$\therefore$ માંગેલ બે સંખ્યાઓ 6 અને 54 છે.

ઉદાહરણ 31 : ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c માટે સાબિત કરો કે $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

તે જ પ્રમાણે $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ અને $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$.

ઉપરના પરિણામોની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણાકાર કરતાં, $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq abc$

$\therefore \quad (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

સ્વાધ્યાય 7.4

1. 3 અને 4 વચ્ચે પાંચ સમાંતર મધ્યકો મૂકો.
2. −3 અને 29 વચ્ચે ત્રણ સમાંતર મધ્યકો મૂકો.
3. $\frac{1}{8}$ અને 8 વચ્ચેના પાંચ ગુણોત્તર મધ્યકો શોધો.
4. 2 અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો મૂકો.
5. જે બે ધન સંખ્યાઓના સમાંતર અને ગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે 25 અને 15 હોય, તે સંખ્યાઓ શોધો.
6. દ્વિઘાત સમીકરણના બે બીજના સમાંતર અને ગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે 10 અને 8 હોય, તો તે દ્વિઘાત સમીકરણ મેળવો.

7. જો $sec(x + y)$, $sec x$, $sec(x - y)$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $cos x = \pm\sqrt{2}\ cos \frac{y}{2}$, જ્યાં $cos x \neq 1$; $cos y \neq 1$.

8. જો $\frac{1}{q}$ એ $\frac{1}{p}$ અને $\frac{1}{r}$નો સમાંતર મધ્યક હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{r+p}{q}$ એ $\frac{p+q}{r}$ અને $\frac{q+r}{p}$નો સમાંતર મધ્યક છે, જ્યાં $p, q, r \neq 0$.

*

7.5 કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓના સરવાળા

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ઘાતની શ્રેણી : આપણે સમાંતર શ્રેણી અને સમગુણોત્તર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળા માટેનાં સૂત્ર મેળવ્યાં, પરંતુ દરેક શ્રેણી માટે આવાં સૂત્ર મેળવવા શક્ય નથી. કેટલીક અગત્યની શ્રેણીઓ એવી છે કે જેઓ સમાંતર શ્રેણી નથી તેમજ સમગુણોત્તર શ્રેણી પણ નથી અને છતાં આપણે તેમનાં n પદોના સરવાળાની ગણતરી કરી શકીએ છીએ. આપણે આવી કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓને ધ્યાનમાં લઈએ. આપણે પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યા, તેમનાં વર્ગ, તેમના ઘનના સરવાળાનાં સૂત્રો શોધીએ.

આપણે 'Σ' (Σને સીગ્મા વંચાય) સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું. તેનો આવી શ્રેણીઓ માટે વિશિષ્ટ ઉપયોગ છે. તે કેપીટલ ગ્રીક અક્ષર સીગ્માનું એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ છે. Σ નો અર્થ **સરવાળો** એમ થાય છે.

$\sum\limits_{n=2}^{n=6} t_n$ ને આપણે 'સીગ્મા t_n જ્યાં n નું મૂલ્ય 2 થી 6 તેમ વાંચીશું.' તે $n = 2, 3, 4, 5$ અને 6 માટે t_n નો સરવાળો સૂચવે છે. એટલે કે, $\sum\limits_{n=2}^{n=6} t_n = t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$.

દાખલા તરીકે,

$$\sum_{n=2}^{n=6} (2n+3) = \{2(2)+3\} + \{2(3)+3\} + \{2(4)+3\} + \{2(5)+3\} + \{2(6)+3\}$$

$$= 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 55$$

એટલે કે, આપણે $n = 2, 3, 4, 5$ અને 6 ને $(2n + 3)$ માં મૂકીને આપણે પરિણામે જે સંખ્યાઓ મળે તેનો સરવાળો કરીશું.

$\sum\limits_{n=2}^{n=6} t_n$ ને બદલે $\sum\limits_{n=2}^{6} t_n$ લખવું અનુકૂળ રહેશે.

Σ સંકેતના નીચે પ્રમાણે સહેલાઈથી સાબિત થઈ શકે તેવા ગુણધર્મો છે :

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} ma_i = m\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, જ્યાં m એ i પર આધારિત ન હોય તેવી અચળ સંખ્યા છે.

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} (i)^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0$

$$= 1 + 1 + 1 + ... \ n \text{ વખત} = n$$

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} m = m\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = mn$, જ્યાં m અચળ

નોંધ : (1) $\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$, $b_i \neq 0, \forall i \in N$

હવે આપણે કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધીએ,

(1) $\sum_{r=1}^{n} r$, (2) $\sum_{r=1}^{n} r^2$, (3) $\sum_{r=1}^{n} r^3$.

હવે, $\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ એ આપણે સમાંતર શ્રેણી માટે પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્રની મદદથી સાબિત કરી શકીએ. (પ્રયત્ન કરો !)

નોંધ : એવું માનવામાં આવે છે કે મહાન ગણિતજ્ઞ ગૉસે લગભગ 5 થી 6 વર્ષની ઉંમરે $1 + 2 + 3 + ... + 100$નો સરવાળો મેળવ્યો હતો. જ્યારે તેના શિક્ષકે તેને 1 થી 100 નો સરવાળો કરવાનું કહ્યું, તો તેણે આ પ્રશ્ન ગણતરીની ક્ષણોમાં જ ઉકેલ મેળવ્યો હતો. તેને $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$,... $50 + 51 = 101$, જેવી જોડીઓ બનાવી આ જોડીઓનો સરવાળો કર્યો, દરેક જોડીમાં સરવાળો 101 બને છે અને તેવી 50 જોડીઓ છે. તેથી 1 થી 100 સુધીનો સરવાળો $50 \times 101 = 5050$.

આ પરથી પણ આપણને $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ સૂત્ર મળે.

પ્રમેય 8 : $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$

સાબિતી : અહીં, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

આપણે એક નિત્યસમ લઈએ : $x^3 - (x - 1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$

તેમાં, $x = 1, 2, 3, ..., n$, લેતાં,

$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$

$\vdots$

$n^3 - (n - 1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$

ઉપરના પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$n^3 - 0^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2] - 3[1 + 2 + 3 + ... + n] + [1 + 1 + 1 + ... + 1, n \text{ વખત}]$

$\therefore \quad n^3 = 3 \cdot S_n - 3 \sum_{r=1}^{n} r + n$

$\therefore \quad 3S_n = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$

$\therefore \quad S_n = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n\right)$

$= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$

$= \frac{1}{6} \cdot n\left(2n^2 + 3n + 1\right)$

$= \frac{1}{6} \cdot n\,(n + 1)(2n + 1)$

$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n + 1)(2n + 1)$

પ્રમેય 9 : $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ n \in N$

સાબિતી : અહીં, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

આપણે એક નિત્યસમ લઈએ : $x^4 - (x - 1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

તેમાં, $x = 1, 2, 3, ..., n$, લેતાં,

$1^4 - 0^4 = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1$

$2^4 - 1^4 = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) - 1$

$3^4 - 2^4 = 4(3)^3 - 6(3)^2 + 4(3) - 1$

$\vdots$

$n^4 - (n - 1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

ઉપરના પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$n^4 - 0^4 = 4[1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3] - 6[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2]$
$+ 4[1 + 2 + 3 + ... + n] - [1 + 1 + 1 + ... + 1,\ n$ વખત$]$

$\therefore \quad n^4 = 4S_n - 6\sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r - n$

$\therefore \quad 4S_n = n^4 + 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\,\frac{n(n+1)}{2} + n$

$\therefore \quad S_n = \frac{1}{4}\left[n^4 + n(n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1) + n\right]$

$= \frac{1}{4} \cdot n\left[n^3 + (n + 1)(2n + 1) - 2(n + 1) + 1\right]$

$= \frac{1}{4} \cdot n\left(n^3 + 2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1\right)$

$= \frac{1}{4} \cdot n\left(n^3 + 2n^2 + n\right)$

$= \frac{1}{4} n \cdot n\left(n^2 + 2n + 1\right)$

$= \frac{1}{4} n^2(n + 1)^2$

$\therefore \quad S_n = \frac{1}{4} \cdot n^2(n + 1)^2$ અથવા $S_n = \left[\frac{1}{2}\, n(n + 1)\right]^2$

$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

આપણે $\sum_{r=1}^{n} r$, $\sum_{r=1}^{n} r^2$, $\sum_{r=1}^{n} r^3$ ને અનુક્રમે Σn, Σn^2, Σn^3 વડે દર્શાવીશું.

ઉદાહરણ 32 : નીચેના સરવાળા કરો :

(1) $\sum_{r=7}^{16} 2r^3$, (2) $\sum_{r=10}^{20} (3r - r^2)$

ઉકેલ : (1) $\sum_{r=7}^{16} 2r^3 = 2\sum_{r=7}^{16} r^3$

$$= 2\left[\sum_{r=1}^{16} r^3 - \sum_{r=1}^{6} r^3\right]$$

$$= 2\left[\frac{(16)^2 \cdot (17)^2}{4} - \frac{(6)^2 \cdot (7)^2}{4}\right]$$

$$= 2\ [18496 - 441] = 2\ [18055] = 36110$$

(2) $\sum_{r=10}^{20} (3r - r^2) = 3\left[\sum_{r=1}^{20} r - \sum_{r=1}^{9} r\right] - \left[\sum_{r=1}^{20} r^2 - \sum_{r=1}^{9} r^2\right]$

$$= 3\left[\frac{20(20+1)}{2} - \frac{9(9+1)}{2}\right] - \left[\frac{20(20+1)(20(2)+1)}{6} - \frac{9(9+1)(2(9)+1)}{6}\right]$$

$$= 3\left[\frac{(20)(21)}{2} - \frac{9(10)}{2}\right] - \left[\frac{20(21)(41)}{6} - \frac{9(10)(19)}{6}\right]$$

$$= 3\ (210 - 45) - (2870 - 285) = 495 - 2585 = -2090$$

ઉદાહરણ 33 : $1^3 + 3^3 + 5^3 + ...$ n પદોનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : આપણે સમાંતર શ્રેણી 1, 3, 5,...ના n મા પદ (વ્યાપક પદ)નો વિચાર કરીએ. તેનું પ્રથમ પદ $a = 1$ અને $d = 2$ છે.

$\therefore \quad t_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$

$\therefore$ આપેલ શ્રેણીનું n મું પદ $(2n-1)^3$ થશે.

નોંધ : જ્યારે આપણે વ્યાપક પદ મેળવવું હોય, તો તે મેળવવા માટેની પદ્ધતિ બતાવવાની જરૂર રહેતી નથી. દાખલા તરીકે આ પ્રશ્નમાં 1, 3, 5,... એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. જેથી સ્વાભાવિક રીતે, nમી અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $2n - 1$ છે.

હવે, $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$

$$= \sum_{r=1}^{n} (2r-1)^3$$

$$= \sum_{r-1}^{n} (8r^3 - 12r^2 + 6r - 1)$$

$$= 8 \sum_{r=1}^{n} r^3 - 12 \sum_{r=1}^{n} r^2 + 6 \sum_{r=1}^{n} r - \sum_{r=1}^{n} 1$$

$$= 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12 \cdot \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} + 6 \cdot \frac{n(n \div 1)}{2} - n$$

$$= n(n+1)\,[2n(n+1) - 2(2n+1) + 3] - n$$

$$= n(n+1)\,(2n^2 + 2n - 4n - 2 + 3) - n$$

$$= n(n+1)\,(2n^2 - 2n + 1) - n$$

$$= n[(n+1)(2n^2 - 2n + 1) - 1]$$

$$= n(2n^3 + 2n^2 - 2n^2 - 2n + n + 1 - 1)$$

$$= n(2n^3 - n)$$

$$= n^2(2n^2 - 1)$$

ઉદાહરણ 34 : શ્રેઢી $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \ldots$ n પદો સુધીનો સરવાળો કરો અને તે પરથી પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, શરૂઆતમાં આપણે 1, 2, 3,... અને 4, 5, 6,... નું n મું પદ મેળવીએ, જે અનુક્રમે n તથા $(n + 3)$ થશે.

$$\therefore \quad t_n = n(n+3)$$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{r=1}^{n} r(r+3)$$

$$= \sum_{r-1}^{n} (r^2 + 3r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^2 + 3 \sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 9n(n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n+1+9)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n-5)}{3}$$

$n = 50$, મૂકતાં,

$$S_{50} = \frac{50(51)(55)}{3} = 46750$$

આમ, પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ અને પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો 46750 થાય.

ઉદાહરણ 35 : $(1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + ...$ પ્રથમ n પદોનો સરવાળો કરો. $(x \neq 1)$

ઉકેલ : અહીં, $S_n = \frac{1-x^2}{1-x} + \frac{1-x^3}{1-x} + \frac{1-x^4}{1-x} + ...$ n પદો

$= \frac{1}{1-x}$ [(1 + 1 + 1 +... n પદો) − ($x^2 + x^3 + x^4$ +... n પદો)]

$$= \frac{1}{1-x}\left[n - \frac{x^2(1-x^n)}{1-x}\right]$$

($x^2 + x^3 + x^4$ +... n પદો એ સમગુણોત્તર શ્રેણી છે, જ્યાં; $a = x^2$, $r = x$)

ઉદાહરણ 36 : જો શ્રેઢી $1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 + ... + 2(n-1)^2 + n^2$. ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $\frac{n(n+1)^2}{2}$ હોય, જ્યાં n યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો જ્યારે n અયુગ્મ હોય, ત્યારે આ શ્રેઢીનો સરવાળો કેટલો થશે ?

ઉકેલ : જ્યારે n અયુગ્મ હોય, ત્યારે છેલ્લું પદ n^2 થશે.

$\therefore \quad 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 + ... + 2(n-1)^2 + n^2$.

$$= \frac{(n-1)[(n-1)-1]^2}{2} + n^2 \qquad ((n-1) \text{ યુગ્મ છે.})$$

$$= \frac{(n-1) \cdot n^2 + 2n^2}{2}$$

$$= \frac{n^2(n-1+2)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2}$$

ઉદાહરણ 37 : શ્રેણી $1 + \frac{1}{2}(1 + 2) + \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) + ...$ 16 પદ સુધીનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : અહીં, $t_n = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + ... + n)$

$$= \frac{1}{n}\Sigma n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{r=1}^{16}\left(\frac{r+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{16} r \cdot \sum_{r=1}^{16} 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16(17)}{2} + 16\right]$$

$$= \frac{1}{2}(136 + 16)$$

$$= \frac{1}{2}(152) = 76$$

સ્વાધ્યાય 7.5

1. નીચે આપેલા સરવાળા મેળવો :

(1) $\sum\limits_{r=1}^{10} (2r^2 + 3)$ (2) $\sum\limits_{r=2}^{10} (4r^2 - 28r + 49)$ (3) $\sum\limits_{r=6}^{15} (r^2 - r - 1)$ (4) $\sum\limits_{r=8}^{20} (2 - r^2)$

2. નીચે આપેલ પ્રથમ n પદના સરવાળા મેળવો :

(1) $3^2 + 7^2 + 11^2 + \ldots$ (2) $1^3 + 4^3 + 7^3 + \ldots$

(3) $2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + \ldots$ (4) $3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \cdot 5 + \ldots$

(5) $(5^4 - 1^4) + (8^4 - 4^4) + (11^4 - 7^4) + \ldots$ (6) $1^2 + \left(\frac{1^2 + 2^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3}\right) + \ldots$

(7) $(2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \ldots$ (8) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots$

(9) $(n^2 - 1^2) + 2(n^2 - 2^2) + 3(n^2 - 3^2) + \ldots$

3. નીચેના સરવાળા મેળવો :

(1) $2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + \ldots + 22^3 - 23^3$

(2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 29^2 - 30^2$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 38 : જો α_1, α_2, α_3 અનુક્રમે પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો, તેમના વર્ગોનો સરવાળો તથા તેમના ઘનનો સરવાળો દર્શાવે, તો સાબિત કરો કે, $9\alpha_2^2 = \alpha_3(1 + 8\alpha_1)$.

ઉકેલ : $\alpha_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\alpha_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\alpha_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

હવે, $\alpha_3[1 + 8\alpha_1] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[1 + 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}[4n^2 + 4n + 1]$

$= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4} \times \frac{9}{9}$

$= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2 \cdot 9$

$= 9\alpha_2^2$

ઉદાહરણ 39 : સરવાળો કરો :

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \ldots$ n પદો $(x \neq 0, x \neq \pm 1)$

ઉકેલ : $\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right) + \ldots$ n પદો

$= (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots +$ n પદો$) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots\right.$ n પદો$\left.\right) + (2 + 2 + 2 + \ldots$ n પદો$)$

$= \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}} + 2n$

$= \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^{2n} - 1}{(x^2 - 1) \cdot x^{2n}} + 2n$

સ્વાધ્યાય 7

1. 5, 0, −5, −10,... શ્રેણીનું 30 મું પદ શોધો. તેનું કેટલામું પદ −200 થશે ?
2. એક સમાંતર શ્રેણીનું 12મું પદ 64 અને 20મું પદ 112 હોય તો તે શ્રેણી મેળવો.
3. રામુ 40 કિમી./ક.ની ઝડપે મુસાફરી કરે છે. જો તે તેની ઝડપ દર કલાકે 4 કિમી ઓછી કરતો હોય, તો 216 કિમી અંતર કાપતાં તેને કેટલો સમય લાગશે ?
4. 200 લાકડાના લંબઘનને હારમાં એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે જેથી સૌથી નીચેની હારમાં 20 લંબઘન, તેની ઉપરની હારમાં 19, આ હારની તરત જ ઉપરની હારમાં 18 આ પ્રમાણે લંબઘન ગોઠવ્યાં છે. આ લંબઘનની કેટલી હાર થશે ? સૌથી ઉપરની હારમાં કેટલા લંબઘન હશે ?
5. સમગુણોત્તર શ્રેણીના p, q અને r મા પદો અનુક્રમે 1, 5 અને 25 છે. સાબિત કરો કે p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે.
6. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો અને a, $c - b$, $b - a$ સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો $a : b : c$ શોધો.
7. $6 + 6.6 + 6.66 + 6.666 + ...$ n પદ સુધી સરવાળો મેળવો.
8. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n, $2n$, $3n$ પદોનો સરવાળા અનુક્રમે α, β, γ હોય, તો સાબિત કરો કે $\gamma = 3(\beta - \alpha)$.
9. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $t_3 = 7$ અને t_7 એ t_3ના ત્રણ ગણાં કરતાં 2 વધારે હોય તો S_{20} શોધો.
10. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો, a^2, b^2, c^2 સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો અને $a + b + c = \frac{3}{2}$ હોય તો a શોધો. $(a < b < c)$
11. જો $a_n = 3 - 5n$, તો S_n શોધો.
12. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $S_{30} = 1635$ અને $t_{30} = 98$ હોય, તો સમાંતર શ્રેણી મેળવો.
13. જો બે ધન સંખ્યાઓ a અને b માટે તેમનો સમાંતર મધ્યક એ તેમના સમગુણોત્તર મધ્યક કરતાં ત્રણ ગણો હોય તો $a : b$ શોધો.
14. સરવાળો કરો : $1 + \frac{1^3 + 2^3}{2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{3} + ... + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 20^3}{20}$.
15. સમાંતર શ્રેણીના છ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 48 અને પ્રથમ તથા છેલ્લી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 39 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
16. સમગુણોત્તર શ્રેણીના પાંચ ક્રમિક પદોનો ગુણાકાર 243 છે. જો બીજી અને ચોથી સંખ્યાનો સરવાળો $\frac{51}{4}$ હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
17. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) શ્રેણી $\left\{\frac{n + (-1)^n}{2}\right\}$ માં 12મા અને 21મા પદોનો તફાવત ...... થાય. ☐

(a) 0 (b) $\frac{-1}{2}$ (c) $\frac{7}{2}$ (d) $\frac{33}{2}$

(2) સમાંતર શ્રેણીનું 5મું પદ 7 હોય, તો પ્રથમ 9 પદોનો સરવાળો ...... થાય. ☐

(a) 36 (b) 49 (c) 45 (d) 63

(3) સમાંતર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 9 અને દશમું પદ 21 હોય, તો તેનાં પ્રથમ 12 પદોનો સરવાળો ...... થાય. ☐

(a) 180 (b) 360 (c) 150 (d) 210

(4) બે ધન સંખ્યાઓનો સમાંતર મધ્યક 2 છે, જો મોટી સંખ્યામાં 1 ઉમેરવામાં આવે તો તેમનો ગુણોત્તર મધ્યક પણ 2 થાય, તો તે બે સંખ્યાઓ ...... છે. ☐

(a) 1, 3 (b) $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{3}$ (d) 0.7, 3.3

(5) સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $r = \frac{1}{3}$ અને $S_4 = \frac{80}{27}$ હોય, તો a = ...

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 3 (c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

(6) જો 25, $x - 6$ અને $x - 12$ સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો x = ...

(a) 8 (b) 12 (c) 16 (d) 20

(7) $\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{r} m\right)$ = ...

(a) $\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ (b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (c) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (d) $\frac{n(n+1)(2n-1)}{12}$

(8) જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n_1, n_2, n_3 પદોના સરવાળા અનુક્રમે S_1, S_2 અને S_3 હોય, તો

$\frac{2S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{2S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{2S_3}{n_3}(n_1 - n_2)$ = ...

(a) 0 (b) 1 (c) $S_1\ S_2\ S_3$ (d) $n_1\ n_2\ n_3$

(9) જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય, તો તેના 5મા પદથી 10મા પદ સુધીનો સરવાળો ...... થાય.

(a) 2976 (b) 3024 (c) 1488 (d) 3114

(10) 3 + 4 + 8 + 9 + 13 + 14 + 18 + 19 +... 20 પદ સુધીનો સરવાળો ...... થાય.

(a) 511 (b) 536 (c) 549 (d) 520

(11) જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 3 હોય, તો પ્રથમ પાંચ પદોનો ગુણાકાર ...... થાય.

(a) 3^5 (b) 5^3 (c) 3^3 (d) 5^5

(12) a અને b વચ્ચે બે સમાંતર મધ્યકો A_1 અને A_2 તથા G_1 અને G_2 બે ગુણોત્તર મધ્યકો મૂકવામાં આવે, તો $\frac{G_1G_2}{A_1 \cdot A_2}$ = ...

(a) $\frac{a-b}{2ab}$ (b) $\frac{a-b}{ab}$ (c) $\frac{2ab}{a \cdot b}$ (d) $\frac{ab}{a \cdot b}$

(13) જો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો તેના લઘુકોણનાં *cosines* ...... થાય.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ (c) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$

(14) જો $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1}$, $n \in N$, હોય, તો ....

(a) $S_{100} < 100$ (b) $S_{100} > 100$ (c) $S_{200} = 100$ (d) $S_{200} > 200$

(15) $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જો તેનો સામાન્ય તફાવત d હોય તો

$\sin d\,[\operatorname{cosec} a_1 \cdot \operatorname{cosec} a_2 + \operatorname{cosec} a_2 \cdot \operatorname{cosec} a_3 + ... + \operatorname{cosec} a_{n-1} \cdot \operatorname{cosec} a_n]$ = ...

(a) $\operatorname{cosec} a_1 - \operatorname{cosec} a_n$ (b) $\sec a_1 - \sec a_n$

(c) $\cot a_1 - \cot a_n$ (d) $\tan a_1 - \tan a_n$

(16) સમાંતર શ્રેણી માટે જો $4t_4 = 7t_7$, તો t_{11} = ...

(a) −1 (b) 0 (c) 11 (d) 44

(17) $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$, તો $sin^3\theta + cosec^3\theta$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) શક્ય નથી.

(18) જો a, b, c, d, e, f સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $d - b$ = ...

(a) $2(c - a)$ (b) $2(f - c)$ (c) $2(d - c)$ (d) $2(f - b)$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. જો S_n નું સૂત્ર આપ્યું હોય, તો a_n નું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :
$a_1 = S_1$; $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n > 1$
2. સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a + (n - 1)d$, જ્યાં a પ્રથમ પદ, d સામાન્ય તફાવત છે.
3. સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$.
4. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું nમું પદ $t_n = ar^{n-1}$, $a \ne 0$, $r \ne 0$, જ્યાં a પ્રથમ પદ અને r સામાન્ય ગુણોત્તર છે.
સમગુણોત્તર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} & r \ne 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$
5. બે સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a+b}{2}$ થાય. જો a અને b વચ્ચે n સમાંતર મધ્યકો મૂકવામાં આવે તો $d = \frac{b-a}{n+1}$ થાય અને k મો મધ્યક $A_k = a + k\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, જ્યાં $k = 1, 2, 3, ... n$.
6. બે ધન સંખ્યાઓ a અને b નો સમગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{ab}$ થાય. જો a અને b વચ્ચે n સમગુણોત્તર મધ્યક મૂકવામાં આવે તો $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ થાય; k મો મધ્યક $G_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$, જ્યાં $k = 1, 2, 3, ... n$
7. $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

—❖—

Bhaskara (1114–1185), also known as Bhaskara II and Bhaskaracharya ("Bhaskara the teacher"), was an Indian mathematician and astronomer. He was born near Vijayvada. Bhaskara is said to have been the head of an astronomical observatory at Ujjain, the leading mathematical center of ancient India.

Bhaskara and his works represent a significant contribution to mathematical and astronomical knowledge in the 12th century. He has been called the greatest mathematician of medieval India. His main work was the *Siddhanta Shiromani*, Sanskrit for "Crown of treatises," is divided into four parts called *Lilavati* , *Bijaganita*, *Grahaganita* and *Goladhyaya*. These four sections deal with arithmetic, algebra, mathematics of the planets, and spheres respectively.

પ્રકરણ 8

શાંકવો

Proof is an idol before whom the pure mathematician tortures himself.

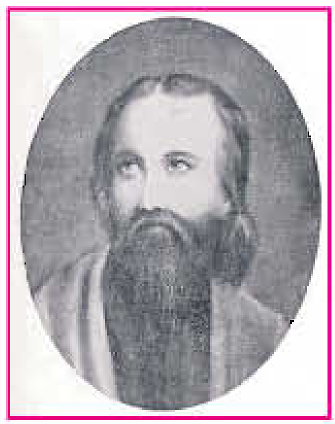
– *Arthur Stanely Eddington*

In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In mathematics alone each generation adds a new story to the old structure.

– *Hermann Hankel*

8.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક વિશેષ વક્રો જેવા કે વર્તુળ, ઉપવલય, પરવલય, અતિવલયનો અભ્યાસ કરીશું. આ વક્રો દ્વિશંકુના સમતલ સાથેના છેદ તરીકે મેળવી શકાય છે. આ વક્રો **શાંકવો (Conics)** તરીકે ઓળખાય છે. પરવલય, અતિવલય વગેરે નામ **એપોલોનીયસે (Apollonius)** આપ્યા હતા. તે ખરેખર આવા વક્રોના અભ્યાસનો પ્રણેતા ગણાય છે. આ વક્રોનો ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ધ્વનિ, પ્રકાશ વગેરે ઘણા ક્ષેત્રોમાં બહોળો ઉપયોગ થાય છે. સોળમી સદીમાં **ગેલેલીયો (Galileo)**એ દર્શાવ્યું કે મુક્ત રીતે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો પથ પરવલય હોય છે. આ હકીકતનો ઉપયોગ હવે તોપખાનાની રચનામાં થાય છે. સત્તરમી સદીમાં વ્યાપક અવલોકનો બાદ **કેપ્લરે** ગ્રહોની ગતિના નિયમ આપ્યા. તે મુજબ પૃથ્વી અને અન્ય ગ્રહોની સૂર્ય ફરતે **કક્ષા (Orbit)** ઉપવલય આકારની હોય છે. ત્યારબાદ **ન્યૂટને (Newton)** **કેપ્લર (Keplar)**ના નિયમોની વ્યાપક પરિસ્થિતિમાં સૈદ્ધાંતિક સાબિતી આપી. આધુનિક સમયમાં ટેલીવિઝન તેમજ સંદેશાવ્યવહારમાં વપરાતા ડિશ એન્ટેનાની રચના શાંકવોના ગુણધર્મો પરથી કરવામાં આવે છે. આમ શાંકવોનો અભ્યાસ અતિ મહત્ત્વનો છે; અને તેનો ઉપયોગ યંત્રશાસ્ત્ર, અવકાશ વિજ્ઞાન, સંદેશા વ્યવહાર, પ્રકાશશાસ્ત્ર વગેરેમાં બહોળા પ્રમાણમાં થાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ વક્રોનાં સમીકરણ અને તેમના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું.



Apollonius (262 BC - 190 BC)

8.2 વર્તુળ

આપણે જાણીએ છીએ કે ચોક્કસ બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલા સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગણને **વર્તુળ** કહેવાય છે. ચોક્કસ બિંદુને તે વર્તુળનું **કેન્દ્ર (Centre)** અને ચોક્કસ અંતરને વર્તુળની **ત્રિજ્યા (Radius)** કહેવાય છે.

(h, k) કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યા વાળા વર્તુળનું કાર્તેઝીય સમીકરણ :

ધારો કે બિંદુ $C(h, k)$ એક વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને r તેની ત્રિજ્યા છે અને $P(x, y)$ વર્તુળ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. હવે, વર્તુળની ત્રિજ્યા r આપેલ હોવાથી,

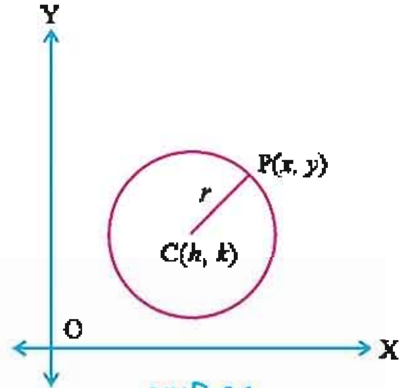
$CP = r \Leftrightarrow CP^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

આમ, $C(h, k)$ કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું કાર્તેઝીય સમીકરણ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

વર્તુળના આ સમીકરણને વર્તુળનું **કેન્દ્ર-ત્રિજ્યા સ્વરૂપનું સમીકરણ** પણ કહે છે.



આકૃતિ 8.1

8.3 વર્તુળના સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

વર્તુળના સમીકરણનું **પ્રમાણિત સ્વરૂપ (Standard form)** વર્તુળનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ લઈ મેળવવામાં આવે છે. આમ, વર્તુળના પ્રમાણિત સમીકરણમાં કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ તેમજ ત્રિજ્યા r લેતાં, $h = 0$, $k = 0$ મુકવાથી વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = r^2$ મળે છે. વર્તુળના આ સમીકરણને **વર્તુળનું પ્રમાણિત સમીકરણ** કહે છે.

વધુમાં, જો $r = 1$ હોય તો વર્તુળના સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ $x^2 + y^2 = 1$ થાય છે. આને **એકમ વર્તુળનું સમીકરણ** કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : $(1, -1)$ કેન્દ્ર અને 2 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, વર્તુળનું કેન્દ્ર $(1, -1)$ અને ત્રિજ્યા 2 હોવાથી વર્તુળનું સમીકરણ

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ એ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુ $(2\sin\alpha, 2\cos\alpha)$; $\alpha \in R$ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ ઉપર આવેલું છે તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : જો કોઈ બિંદુના યામ વર્તુળના સમીકરણનું સમાધાન કરે તો તે બિંદુ વર્તુળ ઉપર આવેલું હોય છે. આપેલ સમીકરણમાં $x = 2\sin\alpha$, $y = 2\cos\alpha$ મૂકતાં,

ડા.બા. $= (2\sin\alpha)^2 + (2\cos\alpha)^2 = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4 =$ જ.બા.

$\therefore$ $(2\sin\alpha, 2\cos\alpha)$ એ $\alpha \in R$ માટે વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ પર છે.

ઉદાહરણ 3 : જે વર્તુળનું કેન્દ્ર રેખાઓ $x + y = 1$ અને $4x + 3y = 0$નું છેદબિંદુ હોય અને જેની ત્રિજ્યા 5 હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : રેખાઓનું છેદબિંદુ, બંને રેખાઓ ઉપર હોય. આમ, તેના યામ સમીકરણો $x + y = 1$ અને $4x + 3y = 0$નું સમાધાન કરે. આ સમીકરણો ઉકેલતાં, વર્તુળનું કેન્દ્ર $(-3, 4)$ મળે.

વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 હોવાથી માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ,

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$, એટલે કે $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ એ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.

નોંધ : જો કેન્દ્ર બે રેખાઓનું છેદબિંદુ હોય, તો આ રેખાઓ વર્તુળના વ્યાસને સમાવે છે.

ઉદાહરણ 4 : જો વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2x + 448y + k = 0$ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતું હોય તો k શોધો.

ઉકેલ : વર્તુળ ઊગમબિંદુ $(0, 0)$ માંથી પસાર થતું હોવાથી $(0, 0)$ વર્તુળના સમીકરણનું સમાધાન કરે. આથી, $0 + 0 - 0 + 0 + k = 0$. આમ, $k = 0$.

નોંધ : જો વર્તુળના સમીકરણમાં અચળ પદ શૂન્ય હોય તો અને તો જ વર્તુળ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય.

ઉદાહરણ 5 : સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ અને $z_1 = 1 - 2i$ માટે $|z - z_1| = 5$ થાય તેવી સંકર સંખ્યાઓ z ના ગણનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલું છે કે, $|z - z_1| - 5$

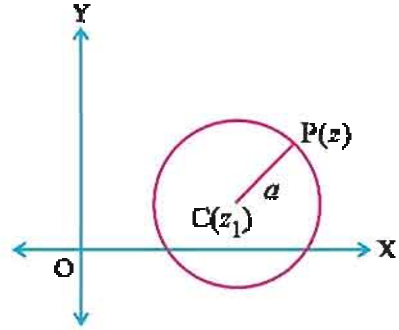
$\therefore \quad |z - z_1|^2 = 5^2$

$\therefore \quad |(x + iy) - (1 - 2i)|^2 = 25$

$\therefore \quad |(x - 1) + i(y + 2)|^2 = 25$

$\therefore \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25 \qquad$ (i)

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 - 0$



આકૃતિ 8.2

સમીકરણ (i) ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે આ ગણ (1, −2) કેન્દ્ર અને 5 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે.

નોંધ : વ્યાપક રીતે, $|z - z_1| = a$, $a \in R^+$ હોય તેવી તમામ સંકર સંખ્યાઓનો ગણ z_1 કેન્દ્ર અને a ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. આપેલ વર્તુળનો **આર્ગન્ડ (Argand)** આલેખ આકૃતિ 8.2 માં દર્શાવ્યો છે. જો આર્ગન્ડ સમતલમાં C અને P અનુક્રમે z_1 અને z દર્શાવે અને $CP = |z - z_1| = a$ હોય, તો બિંદુ P એ C કેન્દ્ર અને a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પર છે.

ઉદાહરણ 6 : X-અક્ષને સ્પર્શતાં a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનાં સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : વર્તુળની ત્રિજ્યા a છે. કેન્દ્ર C ના યામ $(h, \pm a)$ અથવા $(-h, \pm a)$ થાય. (આકૃતિ 8.3).

આવાં વર્તુળોનાં સમીકરણ

$(x - h)^2 + (y \pm a)^2 - a^2$

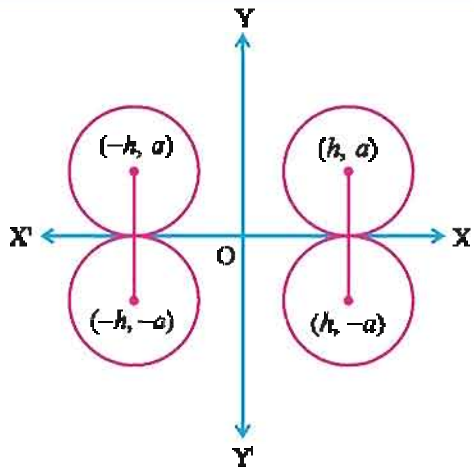
અથવા

$(x + h)^2 + (y \pm a)^2 = a^2$

$x^2 + y^2 - 2hx \pm 2ay + h^2 = 0$

અથવા

$x^2 + y^2 + 2hx \pm 2ay + h^2 = 0$



આકૃતિ 8.3

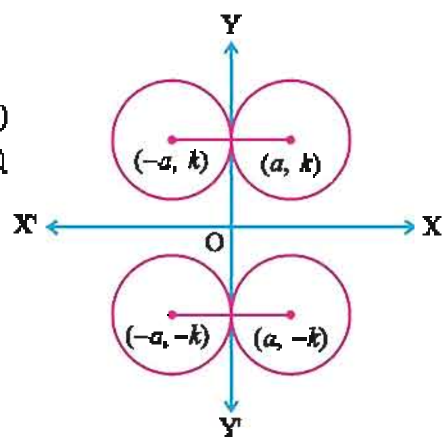
આમ, આ ચાર સમીકરણો માંગેલ વર્તુળો દર્શાવે છે.

નોંધ : જો a ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ Y-અક્ષને સ્પર્શે તો તેનું કેન્દ્ર $(\pm a, k)$ અથવા $(\pm a, -k)$ થાય. (આકૃતિ 8.4) આવા વર્તુળોનાં સમીકરણ નીચે મુજબ થાય :

$x^2 + y^2 \pm 2ax + 2ky + k^2 = 0$

અથવા

$x^2 + y^2 \pm 2ax - 2ky + k^2 = 0$



આકૃતિ 8.4

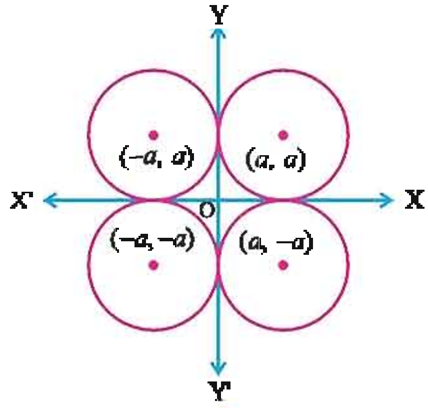
ઉદાહરણ 7 : બંને અક્ષોને સ્પર્શતા અને પ્રથમ ચરણમાં આવેલ તથા a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : બંને અક્ષોને સ્પર્શતા પ્રથમ ચરણમાં આવેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $C(a, a)$ થાય. (આકૃતિ 8.5) અને ત્રિજ્યા a છે. તેનું સમીકરણ $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ છે.

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.

નોંધ : અન્ય ચરણમાં આવેલા બંને અક્ષોને સ્પર્શતા અને a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્રના યામ નીચે કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. (સાથે આકૃતિ 8.5 પણ જુઓ.)

ચરણ	કેન્દ્ર
I	(a, a)
II	$(-a, a)$
III	$(-a, -a)$
IV	$(a, -a)$



આકૃતિ 8.5

સ્વાધ્યાય 8.1

1. નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળોનાં સમીકરણ મેળવો :

ક્રમ	કેન્દ્ર	ત્રિજ્યા
1.	$(-2, 3)$	5
2.	$(-1, 1)$	$\sqrt{2}$
3.	$(-4\cos\alpha, 4\sin\alpha)$	5
4.	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{5})$	$\sqrt{5}$
5.	$(1, 0)$	1

2. જેના વ્યાસને સમાવતી રેખાઓ $x - y = 5$, $2x + y = 4$ હોય અને જેની ત્રિજ્યા 5 હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

3. $(-2, -5)$ કેન્દ્રવાળા Y-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

4. બંને અક્ષોને સ્પર્શતા 3 ત્રિજ્યાવાળા તૃતીય ચરણમાં આવેલ વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

5. ઉગમ બિંદુમાંથી પસાર થતું, $\sqrt{5}$ ત્રિજ્યાવાળું અને જેનું કેન્દ્ર $\overrightarrow{OX}$ પર હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

*

8.4 વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ

ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ પ્રત્યેક વર્તુળને અનન્ય કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા હોય છે. ધારો કે, એક વર્તુળનું કેન્દ્ર (h, k) અને ત્રિજ્યા r છે. આથી વર્તુળનું સમીકરણ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ અથવા $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ હોય. અહીં h અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને r ધન સંખ્યા છે. આ સમીકરણ ઉપરથી નીચેનાં તારણો મેળવી શકાય :

(1) કોઈ પણ વર્તુળનું સમીકરણ દ્વિચલ-દ્વિઘાત સમીકરણ હોય છે.

(2) x^2 અને y^2 ના સહગુણકો શૂન્યેતર અને સમાન હોય છે. (આપણે આ સહગુણકો 1 લઈશું.)

(3) સમીકરણમાં xy-પદ નથી એટલે કે xy-પદનો સહગુણક શૂન્ય છે.

આમ, વર્તુળના સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ લઈશું.

હવે, જો વર્તુળનું સમીકરણ ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપ્યું હોય તો તેનાં કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા નક્કી કરવા જોઈએ. આ માટે પદોનું પુનર્ગઠન કરી સમીકરણને કેન્દ્ર-ત્રિજ્યા સ્વરૂપમાં ગોઠવવું પડે. આમ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\Leftrightarrow \; x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \; (x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

જો $g^2 + f^2 - c > 0$, હોય તો ઉપરોક્ત સમીકરણને,

$(x + g)^2 + (y + f)^2 = \left(\sqrt{g^2 \cdot f^2 - c}\right)^2$ તરીકે લખી શકાય.

ઉપરોક્ત સમીકરણ પરથી કહી શકાય કે બિંદુ $P(x, y)$નું બિંદુ $C(-g, -f)$ થી અંતર $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ છે.

જો અચળાંકો g, f અને c માટે $g^2 + f^2 - c > 0$ હોય તો સમીકરણ (i) વર્તુળ દર્શાવે છે; અને તે સંજોગોમાં વર્તુળનું કેન્દ્ર $C(-g, -f)$ છે અને ત્રિજ્યા $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ છે. સમીકરણ (i)ને વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે.

નોંધ : જો $g^2 + f^2 - c = 0$, હોય તો ફક્ત $(-g, -f)$ સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 8 : સમીકરણ $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$ વર્તુળ દર્શાવે છે ? જો હા, તો તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને વર્તુળના વ્યાપક સમીકરણ સાથે સરખાવતાં, $g = 3$, $f = -4$ અને $c = 20$. આમ,

$g^2 + f^2 - c = 3^2 + (-4)^2 - 20 = 5 > 0$.

આમ, આપેલ સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે.

વર્તુળનું કેન્દ્ર $(-g, -f) = (-3, 4)$ અને ત્રિજ્યા $\sqrt{g^2 \cdot f^2 - c} = \sqrt{5}$.

બીજી રીત :

આપેલ સમીકરણને વર્ગોના સરવાળા તરીકે દર્શાવવા પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$$

$$\therefore \; x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 5 = 0$$

$$\therefore \; (x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 5$$

આ $C(-3, 4)$ કેન્દ્ર અને $r - \sqrt{5}$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 9 : નીચેનાં પૈકી કયાં સમીકરણો વર્તુળ દર્શાવે છે તે નક્કી કરો. જે સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

(1) $x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$

(2) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + y - \frac{91}{4} - 0$

(4) $x^2 + y^2 - 2x\cos\beta + 2y\sin\beta = 0$; $\beta \in R$

(5) $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6y + 22x - 1008 = 0$

(6) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

ઉકેલ : (1) આ સમીકરણમાં x^2 અને y^2ના સહગુણકો સમાન નથી માટે તે વર્તુળનું સમીકરણ નથી.

(2) આપેલ સમીકરણને 2 વડે ભાગતાં $x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$ મળે. તે ઉપરથી $g = -\frac{1}{2}$, $f = \frac{3}{2}$ અને $c = -4$ મળે. હવે, $g^2 + f^2 - c = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{13}{2} > 0$, માટે આ સમીકરણ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ કેન્દ્ર અને $\sqrt{\frac{13}{2}}$ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

(3) અહીં, $g = -\sqrt{2}$, $f = \frac{1}{2}$ અને $c = -\frac{91}{4}$. હવે, $g^2 + f^2 - c = 2 + \frac{1}{4} + \frac{91}{4} = 25 > 0$ માટે સમીકરણ $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$ કેન્દ્ર અને 5 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

(4) અહીં, $g = -cos\beta$, $f = sin\beta$ અને $c = 0$. હવે,

$g^2 + f^2 - c = cos^2\beta + sin^2\beta = 1 > 0$. માટે, આ સમીકરણ $(cos\beta, -sin\beta)$ કેન્દ્ર અને 1 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

(5) આ સમીકરણમાં xy વાળું પદ હોવાથી તે વર્તુળનું સમીકરણ નથી.

(6) અહીં, $g = -2$, $f = -3$ અને $c = 13$. હવે, $g^2 + f^2 - c = (-2)^2 + (-3)^2 - 13 = 0$. માટે આપેલ સમીકરણ વર્તુળનું સમીકરણ નથી.

નોંધ : ઉપરનાં ઉદાહરણમાં સમીકરણો (2), (3), (4) અને (6)માં પદાવલિને પૂર્ણવર્ગોના સરવાળા તરીકે દર્શાવવાની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શકાય. વળી $c < 0$ હોય, તો હંમેશાં $g^2 + f^2 - c > 0$ હોય જ. આમ, $c < 0$ હોય તો $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ હંમેશાં વર્તુળ દર્શાવે જ.

ઉદાહરણ 10 : રેખા $x + 3y - 1 = 0$ ઉપર જેનું કેન્દ્ર હોય તથા જે (1, 1) અને (–5, 1)માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ છે. **(i)**

આપેલ શરતોની મદદથી અચળાંકો g, f અને c નાં મૂલ્યો મેળવવા જોઈએ. સમીકરણ (i) માં આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $(-g, -f)$ છે. આપેલ શરત મુજબ વર્તુળનું કેન્દ્ર રેખા $x + 3y - 1 = 0$ ઉપર આવેલ છે. આથી $(-g, -f)$ આપેલ રેખાના સમીકરણનું સમાધાન કરે. આથી,

$-g - 3f - 1 = 0$ એટલે કે $g + 3f + 1 = 0$ **(ii)**

(1, 1) અને (–5, 1) બંને માંગેલ વર્તુળ પર છે.

આપેલા બિંદુઓના યામ સમીકરણ (i) માં મૂકતાં અન્ય બે સમીકરણો નીચે મુજબ મળે,

$2g + 2f + c + 2 = 0$ **(iii)**

$-10g + 2f + c + 26 = 0$

એટલે કે $10g - 2f - c - 26 = 0$ **(iv)**

સમીકરણ (ii), (iii) અને (iv) ત્રણ અજ્ઞાત f, g અને c માં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ આપે છે.

સમીકરણ (iii) + (iv) કરતાં, $12g - 24 = 0$

$\therefore$ $g = 2$,

$\therefore$ $g + 3f + 1 = 0$ પરથી $f = -1$

વળી, $2g + 2f + c + 2 = 0$

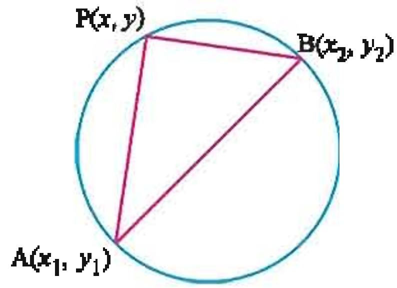
$\therefore$ $4 - 2 + c + 2 = 0$ **($g = 2$ અને $f = -1$ લેતાં)**

$\therefore$ $c = -4$.

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ છે.

ઉદાહરણ 11 : $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ વર્તુળનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ હોય તો વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ વર્તુળનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ છે અને $P(x, y)$ વર્તુળ ઉપર આવેલ A અને B સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ છે. ધોરણ 10માં શીખ્યા તે પ્રમાણે અર્ધવર્તુળમાં વ્યાસે આંતરેલો ખૂણો કાટકોણ હોય છે. આમ, ΔPAB કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle P$ કાટખૂણો છે. પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ,



આકૃતિ 8.6

$$PA^2 + PB^2 = AB^2.$$

$$PA^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$PB^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$$

$$= x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x_1x_2 - 2y_1y_2 = x^2 - 2xx_1 + y^2 - 2yy_1 + x^2 - 2xx_2 + y^2 - 2yy_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2xx_2 - 2yy_2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - xx_1 - yy_1 - xx_2 - yy_2 + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

આ સમીકરણને $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ પ્રમાણે પણ લખી શકાય. **(i)**

$A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ પણ સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે છે.

આમ, સમીકરણ (i) $\overline{AB}$ વ્યાસવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

બીજી રીત :

$\overline{AB}$ વ્યાસ હોવાથી કેન્દ્ર $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ છે અને

ત્રિજ્યા $= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$ છે.

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ,

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + \frac{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

વર્તુળના આ સમીકરણને વ્યાસાંત બિંદુ સ્વરૂપે વર્તુળનું સમીકરણ કહે છે.

નોંધ : રેખાખંડો $\overline{AP}$ અને $\overline{BP}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી તેમના ઢાળનો ગુણાકાર -1 થાય. આ ઉપરથી પણ $\overline{AB}$ વ્યાસવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 8.2

1. નીચેનાં સમીકરણો પૈકી ક્યાં સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે ? જે સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો :

(1) $x - y + 4 = 0$ (2) $x^2 + y^2 = 1$

(3) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (4) $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 1008$

(5) $x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$ (6) $3x^2 + 3y^2 - 5x + 6y + 8 = 0$

(7) $x^2 + y^2 - x + y = 0$ (8) $9x^2 - 6x + 9y - 35 = 0$

(9) $x^2 + y^2 - 2x\,tan\alpha + 2y\,sec\alpha + 2\,tan^2\alpha = 0; \left(\alpha \in R, \alpha \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in Z\right)$

(10) $x^2 + y^2 - 2xy\,tan\alpha + 2y\,sec\alpha + 2\,tan^2\alpha = 0; \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને (3, 4) કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

3. (2, −1) માંથી પસાર થતા અને જેનું કેન્દ્ર બંને રેખાઓ $x + y = 5$ અને $4x + y = 5$ ઉપર હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

4. (−6, 3) માંથી પસાર થતા અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

5. સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ અને $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ નાં કેન્દ્રો સમરેખ છે. વધુમાં સાબિત કરો કે તેમની ત્રિજ્યાઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

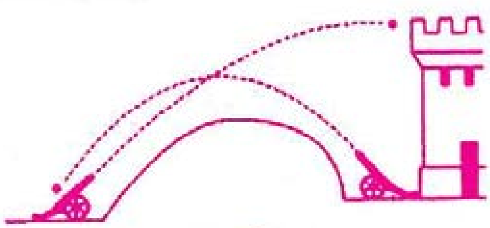
6. વ્યાસાંત બિંદુઓ આપેલ હોય તો તે પરથી રેખાખંડોના ઢાળની મદદથી વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

*

8.5 ઉત્કેન્દ્રતા

શાંકવોની ભૌમિતિક વ્યાખ્યા : જે બિંદુના એક નિશ્ચિત બિંદુથી અંતર તથા તે નિશ્ચિત બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખાથી લંબઅંતરનો ગુણોત્તર અચળ હોય તેવા બિંદુઓના ગણને શાંકવ (Conic) કહે છે. નિશ્ચિત બિંદુને શાંકવની નાભિ (Focus) તથા નિશ્ચિત રેખાને શાંકવની નિયામિકા (Directrix) કહે છે. આ અચળ ગુણોત્તરને શાંકવની ઉત્કેન્દ્રતા (Eccentricity) કહે છે તથા તેને સંકેત e દ્વારા દર્શાવાય છે.

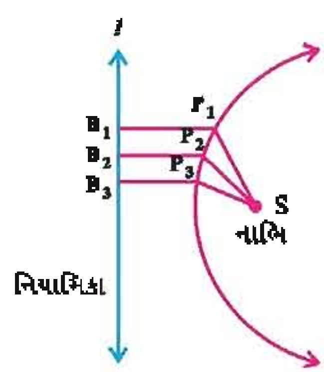
8.6 પરવલય



આકૃતિ 8.7

સત્તરમી સદીમાં ગેલીલીયોએ શોધી કાઢ્યું કે, જ્યારે કોઈ વસ્તુ, ઉદાહરણ તરીકે, પથ્થરને હવામાં ફેંકવામાં આવે છે ત્યારે તેનો ગતિમાર્ગ **પરવલય** હોય છે. આ હકીકતના આધારે પથનું નામ **parabola** આપવામાં આવ્યું છે. અહીં 'para' નો અર્થ 'માટે' (for) અને 'bola' નો અર્થ 'ફેંકવું' (throwing) એવો થાય છે. આથી વક્રનું નામ પડ્યું 'parabola'. ગેલીલીયોની આ શોધથી તોપચીઓ માટે ચોક્કસ ખૂણાથી હવામાં છોડેલા તોપગોળાના પથની ધારણા કરવાનું શક્ય બન્યું. પરવલયની વિધિવત્ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે :

વ્યાખ્યા : કોઈ નિશ્ચિત રેખા અને રેખા પર ન હોય તેવા નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગણને પરવલય (Parabola) કહે છે. (આકૃતિ 8.8). અહીં રેખાથી બિંદુનું અંતર એટલે રેખાથી બિંદુનું લંબઅંતર.



આકૃતિ 8.8

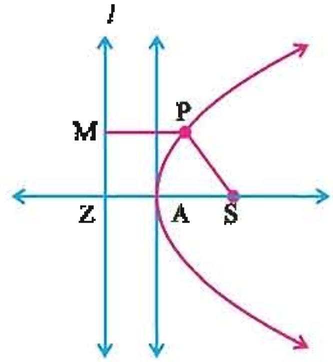
$B_1P_1 = SP_1$, $B_2P_2 = SP_2$, $B_3P_3 = SP_3$, તે જ રીતે પરવલય પરનાં તમામ બિંદુઓ માટે પરિણામ સત્ય છે.

ધારો કે નિશ્ચિત બિંદુ S અને નિશ્ચિત રેખા l છે. S ને પરવલયની નાભિ તથા l ને પરવલયની નિયામિકા કહે છે. પરવલય પર કોઈ પણ

બિંદુ P હોય તથા P નું નિયામિકાથી લંબઅંતર PM હોય તો વ્યાખ્યા અનુસાર SP = PM.

$\therefore \quad \frac{SP}{PM} = 1$

$\therefore$ શાંકવની વ્યાખ્યા અનુસાર પરવલય જેની ઉત્કેન્દ્રતા 1 હોય તેવો શાંકવ છે.



આકૃતિ 8.9

ધારો કે નાભિ S પરથી નિયામિકા l પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ Z છે. ધારો કે $\overline{ZS}$ નું મધ્યબિંદુ A છે. આમ, SA = AZ તથા $\overline{ZS}$ નિયામિકા પરનો લંબ છે. આથી A પરવલય પરનું બિંદુ છે. A ને ઊગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરતાં $\overleftrightarrow{AS}$ એ X-અક્ષ અને $\overrightarrow{AS}$ની દિશાને X-અક્ષની ધન દિશા લઈએ. અંતર ZS = $2a$ લેતાં, S(a, 0) થશે અને Z($-a$, 0) થશે. આમ નિયામિકા l નું સમીકરણ $x = -a$ થશે. (તે શિરોલંબ રેખા થશે.)

ધારો કે P(x, y) પરવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે અને P પરથી નિયામિકા l પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ M છે, M ના યામ ($-a$, y) થશે. બિંદુ P પરવલય પરનું બિંદુ હોવાથી,

$SP = PM$

$\therefore \quad SP^2 = PM^2$

$\therefore \quad (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$

$\therefore \quad y^2 = (x + a)^2 - (x - a)^2$

$\therefore \quad y^2 = 4ax$ **(i)**

આથી ઊલટું, જો કોઈ બિંદુ P(x, y) સમીકરણ $y^2 = 4ax$નું સમાધાન કરે તો (ઉપરના સોપાન ઊલટા ક્રમમાં લખતાં) SP = PM થાય એટલે કે બિંદુ P પરવલય પર હોય.

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ થાય.

આ સમીકરણને પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ કહે છે.

ઉદાહરણ 12 : જેની નાભિ (4, 0) હોય અને જેની નિયામિકાનું સમીકરણ $x + 4 = 0$ હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : નાભિ (4, 0) છે અને નિયામિકા $x + 4 = 0$ હોવાથી $a = 4$ થાય. પરવલયનું સમીકરણ

$y^2 = 4(4)x$

$\therefore \quad y^2 = 16x$

8.7 કેટલીક વ્યાખ્યાઓ અને પરવલય અંગે કેટલાંક તારણો

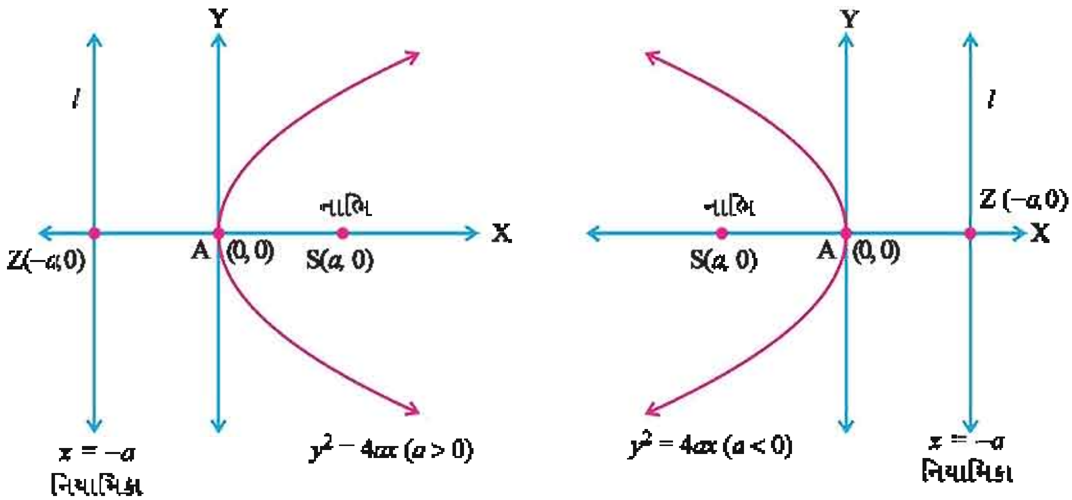
(1) **નાભિમાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને લંબ રેખા પરવલયનો અક્ષ કહેવાય છે. આમ, પરવલય $y^2 = 4ax$નો અક્ષ X-અક્ષ થાય.**

(2) **પરવલય અને તેના અક્ષનું છેદબિંદુ પરવલયનું શિરોબિંદુ (vertex) કહેવાય છે. પરવલય $y^2 = 4ax$ નું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ છે.**

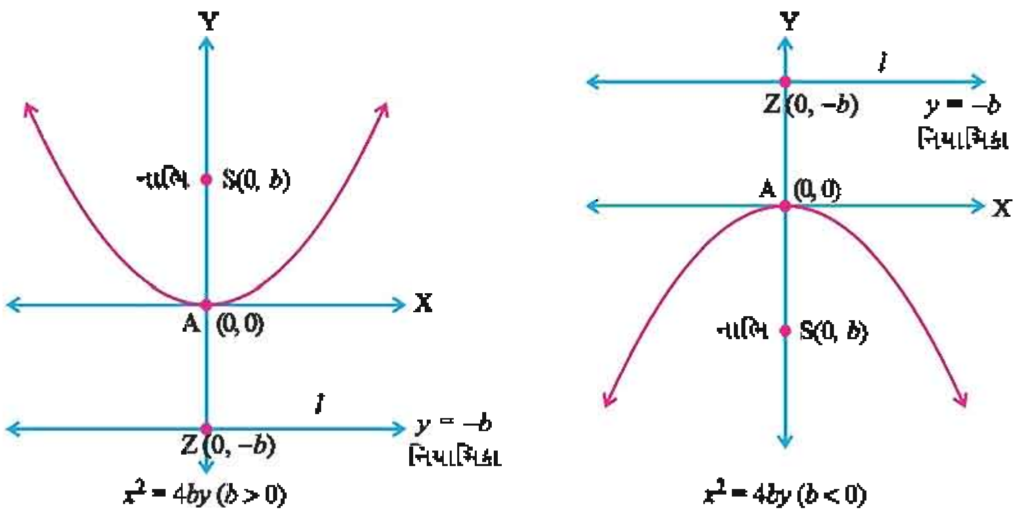
(3) **જો ઊગમબિંદુને શિરોબિંદુ તથા Y-અક્ષને પરવલયના અક્ષ તરીકે પસંદ કરીએ, તો પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4by$ સ્વરૂપમાં મળે છે.** (આકૃતિ 8.10(ii)). આ કિસ્સામાં પરવલયની નાભિના યામ (0, b) થાય તથા નિયામિકાનું સમીકરણ $y = -b$ થાય. અહીં $| b |$ એ પરવલયના શિરોબિંદુથી નાભિનું અંતર દર્શાવે છે.

(4) જો બિંદુ $P(x, y)$ પરવલય $y^2 = 4ax$ પર આવેલું હોય તો $P(x, -y)$ પણ પરવલય પર હોય. આમ પરવલય $y^2 = 4ax$, X-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત (symmetric) હોય છે. (એટલે કે y ને સ્થાને $-y$ લખતાં સમીકરણ બદલાતું નથી.) તે જ રીતે, પરવલય $x^2 = 4by$, Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે. (એટલે કે x ને સ્થાને $-x$ લેતાં સમીકરણ બદલાતું નથી.)

(5) પરવલયો $y^2 = 4ax$ અને $x^2 = 4by$ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે. ($a \neq 0$, $b \neq 0$).



આકૃતિ 8.10 (i)



આકૃતિ 8.10(ii)

(6) **પરવલયના કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને પરવલયની જીવા (chord) કહે છે. પરવલયની નાભિમાંથી પસાર થતી જીવાને પરવલયની નાભિજીવા (focal chord) કહે છે. પરવલયના અક્ષને લંબ હોય તેવી નાભિજીવાને પરવલયનો નાભિલંબ (Latus-rectum) કહે છે.**

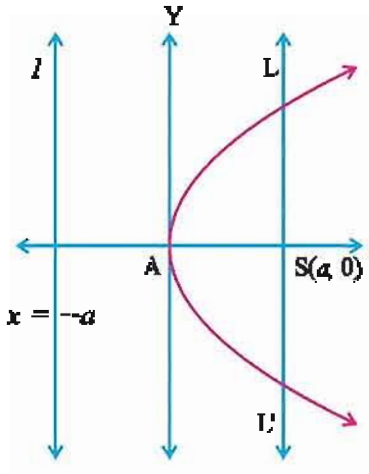
8.8 પરવલયનો નાભિલંબ

ધારો કે પરવલય $y^2 = 4ax$ ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ L અને L' છે. આથી $\overleftrightarrow{LL'}$ શિરોલંબ રેખા છે. આ રેખા નાભિ $(a, 0)$માંથી પસાર થતી હોવાથી તેનું સમીકરણ $x = a$ છે. હવે, બિંદુઓ L અને L' પરવલય ઉપર આવેલા હોવાથી $y^2 = 4ax = 4a \cdot a = 4a^2$. આથી $y = \pm 2a$. આમ, નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓના યામ $L(a, 2|a|)$ અને $L'(a, -2|a|)$ થશે. નાભિલંબની લંબાઈ LL' થાય,

નાભિલંબની લંબાઈ $= LL'$

$= \sqrt{(a-a)^2 + (2|a| + 2|a|)^2}$

$= 4|a|$



આકૃતિ 8.11

નોંધ : પરવલય $x^2 = 4by$ માટે નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ $L(2|b|, b)$ અને $L'(-2|b|, b)$ થશે અને તેથી નાભિલંબની લંબાઈ $4|b|$ થશે.

8.9 પરવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો

કોઈ પણ વાસ્તવિક પ્રચલ t માટે, $x = at^2$ અને $y = 2at$, સમીકરણ $y^2 = 4ax$ નું સમાધાન કરે છે. ધારો કે (x_1, y_1) પરવલય $y^2 = 4ax$ ઉપર છે. હવે જો $t = \frac{y_1}{2a}$ લઈએ તો $x_1 = at^2$. આમ, પરવલય પરના કોઈ પણ બિંદુને સંગત, $x = at^2$ અને $y = 2at$ થાય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યા t મળે.

આમ, $(at^2, 2at)$ પરવલય $y^2 = 4ax$ ઉપર હોય અને પરવલયનું કોઈ પણ બિંદુ $(at^2, 2at)$; $t \in R$ પ્રકારનું હોય.

$x = at^2$, $y = 2at$ ને પરવલય $y^2 = 4ax$ નાં પ્રચલ સમીકરણો કહેવાય છે. બિંદુ $P(at^2, 2at)$ ને પરવલયનું t-બિંદુ કહેવાય છે અને તે $P(t)$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ 13 : જેની નાભિ (2, 3) હોય તથા નિયામિકા $3x + 4y - 10 = 0$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ પરવલય પર કોઈ પણ બિંદુ છે. હવે પરવલયની વ્યાખ્યા અનુસાર નાભિ S હોય તથા PM એ Pનું નિયામિકાથી લંબઅંતર હોય તો,

$SP = PM$ એટલે કે $SP^2 = PM^2$

$\therefore \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{3x + 4y - 10}{\sqrt{9+16}}\right)^2 = \frac{(3x+4y-10)^2}{25}$

$\therefore \quad 25(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = 9x^2 + 16y^2 + 24xy - 60x - 80y + 100$

$\therefore \quad 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 40x - 70y + 125 = 0$ એ માંગેલ પરવલયનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 14 : ઊગમબિંદુનું (4, 3) આગળ સ્થાનાંતર કરી પરવલય $(y-3)^2 = 16(x-4)$ની નાભિના યામ તથા નિયામિકાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : જો નવા ઊગમબિંદુને સાપેક્ષ $P(x, y)$ના યામ (x', y') હોય, તો

$x = x' + h = x' + 4, \quad y = y' + k = y' + 3$

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ $(y')^2 = 16x'$ બને.

$\therefore \quad 4a = 16$ એટલે કે $a = 4$

નાભિના નવા યામ $(x', y') = (a, 0) = (4, 0)$

$x = x' + 4, \quad y = y' + 3$

$\therefore$ નાભિના મૂળ યામ $= (8, 3)$

∴ નિયામિકાનું નવી યામ પદ્ધતિમાં સમીકરણ : $x' + a = 0$

એટલે કે $x' + 4 = 0$ થાય.

∴ તેનું સમીકરણ $x - 4 + 4 = 0$

∴ નિયામિકાનું સમીકરણ $x = 0$ થાય.

ચકાસણી : SP = PM પરથી $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = x^2$

∴ $(y - 3)^2 = x^2 - (x^2 - 16x + 64) = 16(x - 4)$ પરવલયનું સમીકરણ મળે.

ઉદાહરણ 15 : નીચેના પ્રત્યેક સમીકરણ માટે પરવલયની નાભિના યામ, નિયામિકાનું સમીકરણ, નાભિલંબની લંબાઈ તથા નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ શોધો.

(1) $x^2 = -8y$ (2) $y^2 = 8x$ (3) $x^2 = 3y$ (4) $y^2 = -10x$

ઉકેલ : (1) $x^2 = -8y$ ને પરવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ $x^2 = 4by$ સાથે સરખાવતાં, $b = -2$ મળે. અહીં પરવલયનો અક્ષ Y-અક્ષ છે. આથી નાભિના યામ $(0, b) = (0, -2)$ થશે.

નિયામિકાનું સમીકરણ $y = -b$, એટલે કે $y = 2$ થશે.

નાભિલંબની લંબાઈ $4|b| = 8$.

નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ $L(2|b|, b) = L(4, -2)$ અને $L'(-2|b|, b) = L'(-4, -2)$ થાય.

(2) $y^2 = 8x$ ને $y^2 = 4ax$ સાથે સરખાવતાં $a = 2$ મળે. પરવલયનો અક્ષ X-અક્ષ છે.

નાભિ $(a, 0) = (2, 0)$ થાય.

નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -a$ હોવાથી તે $x = -2$ થાય. આમ $x + 2 = 0$ નિયામિકાનું સમીકરણ છે.

નાભિલંબની લંબાઈ $4|a| = 8$.

નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ $L(a, 2|a|) = L(2, 4)$ અને $L'(a, -2|a|) = L'(2, -4)$ છે.

(3) સમીકરણ $x^2 = 3y$ ને $x^2 = 4by$ સાથે સરખાવતાં $4b = 3$ એટલે કે $b = \frac{3}{4}$ મળે. અહીં પરવલયનો અક્ષ Y-અક્ષ છે.

નાભિ $(0, b) = \left(0, \frac{3}{4}\right)$ થાય.

નિયામિકાનું સમીકરણ $y = -b$ એટલે કે $y = -\frac{3}{4}$. આમ $4y + 3 = 0$ નિયામિકાનું સમીકરણ છે.

નાભિલંબની લંબાઈ $4|b| = 3$.

નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ $L(2|b|, b) = L\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ અને $L'(-2|b|, b) = L'\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ છે.

(4) $y^2 = -10x$ ને $y^2 = 4ax$ સાથે સરખાવતા $a = -\frac{5}{2}$ મળે. અહીં પરવલયનો અક્ષ X-અક્ષ છે.

નાભિ $(a, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ થાય.

નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -a$ એટલે કે $x = \frac{5}{2}$. આમ $2x - 5 = 0$ નિયામિકાનું સમીકરણ થાય.

નાભિલંબની લંબાઈ $4|a| = 10$ થાય.

નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ $L(a, 2|a|) = L\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ અને $L'(a, -2|a|) = L'\left(-\frac{5}{2}, -5\right)$ છે.

ઉદાહરણ 16 : જેનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય, નાભિના યામ (0, −3) અને નિયામિકાનું સમીકરણ $y = 3$ હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં નાભિ (0, −3) Y-અક્ષ પર છે અને નિયામિકા $y = 3$, X-અક્ષને સમાંતર છે. આમ પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4by$ પ્રકારનું હોય, જ્યાં $b = -3$. આમ, માગેલ પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = -12y$ છે.

ઉદાહરણ 17 : X-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય, શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય અને (5, −5)માંથી પસાર થતા હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : પરવલય X-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે તેમજ શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ છે તેમ આપેલું છે. આથી પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $y^2 = 4ax$ થાય. વધુમાં, પરવલય (5, −5) માંથી પસાર થાય છે.

$(-5)^2 = 4a(5)$

$\therefore \quad 25 = 20a$

$\therefore \quad a = \frac{5}{4}$. આથી પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 5x$ છે.

8.10 પરવલયના ગુણધર્મો

ગુણધર્મ 1 : ધારો કે $P(t_1)$ અને $Q(t_2)$ પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુઓ છે. જો $\overline{PQ}$ નાભિજીવા હોય તો $t_1t_2 = -1$.

સાબિતી : બિંદુઓ P અને Q યામ અનુક્રમે $(at_1^2, 2at_1)$ અને $(at_2^2, 2at_2)$ થાય. પરવલય $y^2 = 4ax$ ની નાભિ Sના યામ $(a, 0)$ છે. $\overline{PQ}$ નાભિજીવા હોવાથી બિંદુઓ P, Q અને S સમરેખ બિંદુઓ છે.

ધારો કે $\overline{PQ}$ નાભિલંબ છે.

તો $P(a, 2a)$ થાય.

$\therefore \quad at_1^2 = a, \quad 2at_1 = 2a$

$\therefore \quad t_1 = 1$

તે જ રીતે $Q(a, -2a)$ માટે $t_2 = -1$

$\therefore \quad t_1t_2 = -1$

હવે ધારો કે $\overline{PQ}$ નાભિલંબ નથી.

$\therefore \quad at_1^2 \neq a, \quad at_2^2 \neq a.$

હવે, $\overleftrightarrow{SP}$નો ઢાળ = $\overleftrightarrow{SQ}$નો ઢાળ

$$\therefore \quad \frac{2at_1}{at_1^2 - a} = \frac{2at_2}{at_2^2 - a}$$

$$\therefore \quad \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1}$$

$\therefore \quad t_1(t_2^2 - 1) = t_2(t_1^2 - 1)$

$\therefore \quad t_1t_2^2 - t_1 = t_2t_1^2 - t_2$

$\therefore \quad t_1t_2^2 - t_2t_1^2 = t_1 - t_2$

$\therefore \quad t_1t_2\,(t_2 - t_1) = -(t_2 - t_1)$

$\therefore \quad t_1t_2 = -1 \qquad (\because t_1 \neq t_2)$

ગુણધર્મ 2 : જો પરવલય $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ની નાભિ S હોય અને $\overline{PQ}$ નાભિજીવા હોય, તો $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a}$.

સાબિતી : ધારો કે, $P(t_1)$ અને $Q(t_2)$ નાભિજીવાનાં અંત્યબિંદુઓ છે. નાભિના યામ $(a, 0)$ છે. બિંદુઓ P અને Q ના યામ અનુક્રમે $(at_1^2, 2at_1)$ અને $(at_2^2, 2at_2)$ છે.

$$SP^2 = (at_1^2 - a)^2 + (2at_1)^2$$

$$= (at_1^2 - a)^2 + 4a^2t_1^2$$

$$= (at_1^2 + a)^2$$

$\therefore$ $SP = a(t_1^2 + 1)$. તે જ રીતે, $SQ = a(t_2^2 + 1)$ $\qquad (a > 0)$

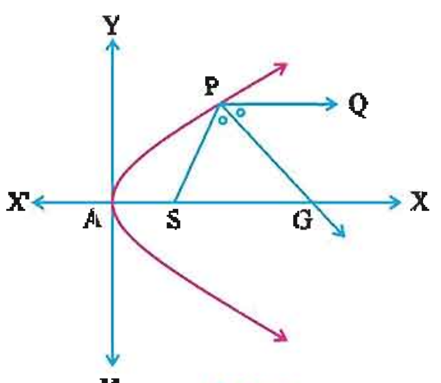
હવે, $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a(t_1^2 + 1)} + \frac{1}{a(t_2^2 + 1)}$

$$= \frac{1 + t_1^2 + t_2^2 + 1}{a(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)}$$

$$= \frac{1 + t_1^2 + t_2^2 + t_1^2t_2^2}{a(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)} \qquad (t_1t_2 = -1)$$

$$= \frac{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)}{a(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)} = \frac{1}{a}$$

ગુણધર્મ 3 : ધારો કે પરવલય $y^2 = 4ax$ ની નાભિ S છે અને P પરવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. ધારો કે $\overrightarrow{PQ}$ પરવલયના અક્ષને સમાંતર છે. $\angle SPQ$ નો દ્વિભાજક પરવલયના અક્ષને બિંદુ G માં છેદે તો $\overline{SP} \cong \overline{SG}$.



આકૃતિ 8.12

સાબિતી : અહીં, $\overrightarrow{PQ}$ પરવલયના અક્ષને સમાંતર છે એટલે કે, X-અક્ષને સમાંતર છે વધુમાં $\overrightarrow{PG}$, $\angle SPQ$ ને દુભાગે છે. આથી આકૃતિ 8.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\overleftrightarrow{PG}$ સમાંતર રેખાઓ $\overleftrightarrow{PQ}$ અને $\overleftrightarrow{SG}$ની છેદિકા છે. આથી $m\angle SGP = m\angle QPG$. વળી, $m\angle SPG = m\angle QPG$ આથી $m\angle SGP = m\angle SPG$ આથી, ΔSPG સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ થાય અને તેથી $\overline{SP} \cong \overline{SG}$.

નોંધ : પરવલયના આ ગુણધર્મનો વ્યવહારુ ઉપયોગ પ્રકાશશાસ્ત્રમાં અરીસાઓ તૈયાર કરવામાં થાય છે. જો પ્રકાશનો સ્રોત પરવલયાકાર અરીસાની નાભિ પાસે હોય તો પ્રકાશ પરાવર્તિત થઈ અરીસાના અક્ષને સમાંતર ગતિ કરે. આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ મોટરગાડીની હેડલાઈટમાં થાય છે. તે જ રીતે પરવલયકાર અરીસાના અક્ષને સમાંતર પ્રકાશના કિરણો નાભિ પાસે પરાવર્તિત થાય છે. આનો ઉપયોગ ટેલિવીઝન માટેના ડિશ એન્ટેનામાં થાય છે.

સ્વાધ્યાય 8.3

1. નીચેનાં પરવલયો માટે નાભિના યામ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણો મેળવો અને તેમનો સ્થૂળ આલેખ દોરો :

(1) $2y^2 = x$ (2) $x^2 = -4y$ (3) $4x^2 = -y$ (4) $y^2 = 12x$

2. નીચેની શરતો પ્રમાણે પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો :

(1) શિરોબિંદુ (0, 0), નાભિ (0, −2)

(2) શિરોબિંદુ (0, 0), X-અક્ષ પરવલયના અક્ષ તરીકે તેમજ (1, −4) માંથી પસાર થાય.

3. (1) જેની નાભિ (−1, 2) હોય તથા નિયામિકા $x - y + 1 = 0$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

(2) જેની નાભિ (−3, −4) હોય તથા નિયામિકા $3x - 4y - 5 = 0$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

4. ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (−1, −2) આગળ કરી $(x + 1)^2 = 4(y + 2)$ના નાભિલંબની લંબાઈ તથા તેની નિયામિકાનું સમીકરણ શોધો.

5. પરવલય $x^2 = 12y$ નું શિરોબિંદુ અને તેના નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ દ્વારા રચાતાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

6. પરવલય $y^2 = 4ax$ ની કોઈ નાભિજીવાનું એક અંત્યબિંદુ $(at_1^2, 2at_1)$ હોય તો તેનું બીજું અંત્યબિંદુ શોધો. આ પરથી બતાવો કે નાભિજીવાની લંબાઈ $\left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right)^2$ છે.

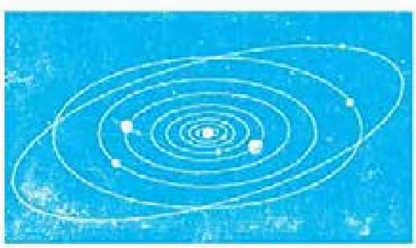
7. પરવલય $y^2 = 12x$ પરના કોઈ બિંદુ P નું નાભિ S થી અંતર SP = 6 એકમ હોય, તો બિંદુ P ના યામ શોધો.

*

8.11 ઉપવલય

કોઈ નળાકારને ત્રાંસો કાપતાં તેનો આડછેદ ઉપવલય થાય છે. આના નિદર્શન માટે પાણી ભરેલા ગ્લાસને ત્રાંસો કરતાં પ્રવાહીની ઉપરી સપાટી ઉપવલીય આકાર ધારણ કરે. (આકૃતિ 8.14) તેમજ સલાડમાં કાકડીને ત્રાંસી કાપી ઉપવલીય પતીકા મેળવવામાં આવે છે.

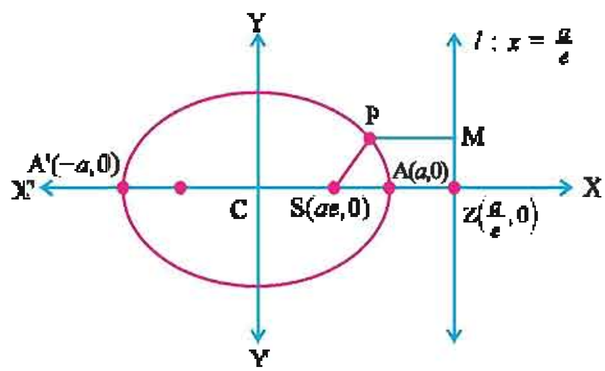
આકૃતિ 8.13



આકૃતિ 8.14

પ્રાચીન ગ્રીક અવકાશશાસ્ત્રીઓની માન્યતા હતી કે પૃથ્વી સ્થિર છે અને ગ્રહો તેની ફરતે વર્તુળાકાર કક્ષામાં પરિભ્રમણ કરે છે; કારણ કે વર્તુળ એ સૌથી સરળ વક્ર છે. 17મી સદીમાં જ્હોનીસ કેપ્લરે શોધી કાઢ્યું કે ગ્રહોની કક્ષા ઉપવલીય હોય છે, જેમાં સૂર્ય એક નાભિ સ્થાને હોય છે.

આપણે શાંકવની ઉત્કેન્દ્રતા વિષે જાણીએ છીએ. જો શાંકવની ઉત્કેન્દ્રતા $e < 1$ હોય, તો મળતા શાંકવને ઉપવલય કહે છે.



આકૃતિ 8.15

ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ :

ધારો કે કોઈ ઉપવલયની નાભિ S, નિયામિકા l અને ઉત્કેન્દ્રતા e છે. ધારો કે P એ ઉપવલય પર આવેલું કોઈ પણ બિંદુ છે. ધારો કે P પરથી રેખા l પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ M છે.

ઉત્કેન્દ્રતાની વ્યાખ્યા પરથી $e = \frac{SP}{PM}$ **(i)**

ધારો કે S થી l પર દોરેલ લંબનો લંબપાદ Z છે. ધારો કે, બિંદુ A અને A' એ $\overline{SZ}$ નું અનુક્રમે $e : 1$ અને $-e : 1$ ગુણોત્તરમાં S તરફથી વિભાજન કરે છે.

$\frac{SA}{AZ} = e$ અથવા $SA = e(AZ)$. તેમજ $\frac{SA'}{A'Z} = e$ આથી, $SA' = eA'Z$.

SA = S થી Aનું અંતર. AZ = A થી lનું લંબઅંતર. તે જ રીતે A' માટે પણ સત્ય છે.

તથા $\frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = e$. આથી, A અને A' બંને ઉપવલય પર છે. ધારો કે $\overline{AA'}$ નું મધ્યબિંદુ C છે. ધારો કે, C ઉગમબિંદુ છે અને $\overrightarrow{CA}$ દિશા X-અક્ષની ધન દિશા છે. ધારો કે $CA = a$. આથી A અને A' નાં યામ અનુક્રમે $(a, 0)$ અને $(-a, 0)$ છે. ધારો કે S ના યામ $(p, 0)$ અને Z ના યામ $(q, 0)$ છે. બિંદુ $A(a, 0)$ એ $\overline{SZ}$ નું S તરફથી $e : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું હોવાથી,

$$a = \frac{eq + p}{e + 1} \qquad \textbf{(ii)}$$

તે જ રીતે A' માટે વિભાજનનો ગુણોત્તર $-e : 1$ હોવાથી

$$-a = \frac{-eq + p}{-e + 1} \qquad \textbf{(iii)}$$

(ii) અને (iii) પરથી,

$eq + p = ae + a$ અને $-eq + p = ae - a$. આ સમીકરણોને p અને q માટે ઉકેલતાં,

$p = ae$ અને $q = \frac{a}{e}$ મળે.

આમ, નાભિના યામ $S(ae, 0)$ છે અને Z ના યામ $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ છે. નિયામિકા શિરોલંબ રેખા છે અને Z માંથી પસાર થાય છે. આથી તેનું સમીકરણ $x = \frac{a}{e}$ થાય.

હવે, $P(x, y)$ ઉપવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો (i) ઉપરથી,

$$\frac{SP}{PM} = e \iff SP = e(PM)$$

$$\iff SP^2 = e^2(PM^2) \qquad \textbf{(iv)}$$

અહીં, PM = $P(x, y)$નું રેખા l થી અંતર

= $P(x, y)$નું રેખા $x - \frac{a}{e} = 0$ થી અંતર

$$= \frac{\left|x - \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1 + 0}} \qquad \left(\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ પરથી}\right)$$

$$= \left|x - \frac{a}{e}\right|$$

$$\therefore \quad PM^2 = \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \qquad \textbf{(v)}$$

તેમજ $SP^2 = (x - ae)^2 + y^2$ **(vi)**

(v) અને (vi) નો (iv) માં ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{SP}{PM} = e \Leftrightarrow (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - \frac{2ax}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2aex + y^2 + a^2e^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \qquad \text{(vii)}$$

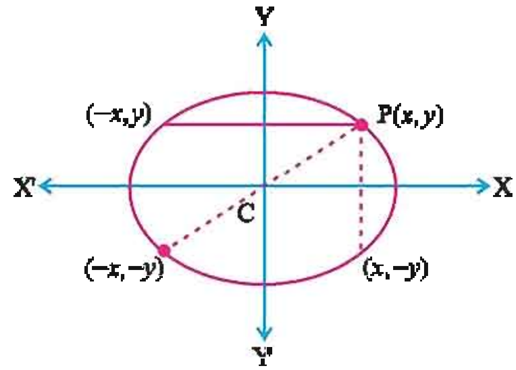
હવે, $a > 0$ અને $e < 1$. આથી $a^2(1 - e^2) > 0$

આમ, $a^2(1 - e^2) = b^2$ થાય તેવી ધન વાસ્તવિક સંખ્યા b મળી શકે. આથી, (vii) ને

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ તરીકે લખી શકાય.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ને ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ કહે છે.

કેટલાંક તારણો :



આકૃતિ 8.16

(1) ઉપવલયના સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, પરથી $b^2 = a^2(1 - e^2)$ $(a > b)$ નો ઉપયોગ કરી ઉત્કેન્દ્રતા શોધી શકાય.

(2) સંમિતતા :

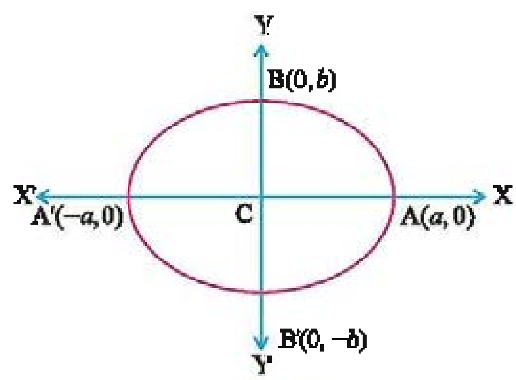
ઉપવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ ઉપરથી ઉપવલય પરના કોઈ પણ બિંદુ P(x, y) માટે નીચેનાં અવલોકનો સ્પષ્ટ છે.

(i) બિંદુ (x, $-y$) પણ ઉપવલય પર છે, એટલે કે ઉપવલય X-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

(ii) બિંદુ ($-x$, y) ઉપવલય પર છે, એટલે કે, ઉપવલય Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

(iii) બિંદુ ($-x$, $-y$) ઉપવલય પર છે. આમ, ઉપવલય ઊગમબિંદુ પ્રત્યે સંમિત છે તેમ કહેવાય. આ બિંદુ C(0, 0) ને ઉપવલયનું કેન્દ્ર કહેવાય છે. આમ, ઉપવલયને **કેન્દ્રીય શાંકવ (Central conic)** પણ કહે છે.

(3) યામાક્ષો સાથે છેદ :



આકૃતિ 8.17

ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવવામાં આપણે બિંદુઓ A(a, 0) અને A'($-a$, 0) ઉપવલય પર લીધાં છે, આમ ઉપવલય X-અક્ષને $x = \pm a$ માં છેદે છે. ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ નો Y-અક્ષ સાથે છેદગણ શોધવા માટે $x = 0$ લેતાં, $y = \pm b$ મળે, આમ ઉપવલય Y-અક્ષને બિંદુઓ B(0, b) અને B'(0, $-b$) માં છેદે છે. (આકૃતિ 8.18). આવી જ રીતે $y = 0$ લેતાં ઉપવલય X-અક્ષને A અને A' બિંદુમાં છેદે છે તે જોઈ શકાય છે. આ બિંદુઓ A, A', B અને B'ને ઉપવલયના **શિરોબિંદુઓ** કહે છે.

(4) નાભિ અને નિયામિકાની બે જોડ :

ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ છે. **(i)**

આપણે જાણીએ છીએ કે, $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

$\therefore \quad x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$

$\therefore \quad x^2 - x^2e^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$

$\therefore \quad x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = x^2e^2 + a^2 + 2aex$

$\therefore \quad (x + ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$ **(ii)**

(ii)ના અર્થઘટન માટે $S' = (-ae, 0)$ અને રેખા l' નું સમીકરણ $x + \frac{a}{e} = 0$ લઈએ.

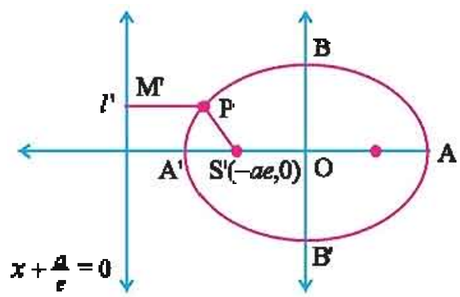
ધારો કે M' એ P માંથી રેખા $x + \frac{a}{e} = 0$ પરનો લંબપાદ છે.

હવે, l' થી Pનું લંબઅંતર PM' થાય છે.

$$PM' = \frac{\left|x + \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1+0}} = \left|x + \frac{a}{e}\right|$$

$\therefore \quad PM'^2 = \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$ **(iii)**

તેમજ $S'P^2 = (x + ae)^2 + y^2$ **(iv)**



આકૃતિ 8.18

(iii) અને (iv) ઉપરથી (ii) દ્વારા

$$(S'P)^2 = e^2 (PM')^2$$

$\therefore \quad \frac{S'P}{PM'} = e$

ઉત્કેન્દ્રતાની વ્યાખ્યા મુજબ S' ને નાભિ અને l' ને નિયામિકા તરીકે લઈ શકાય. આમ, ઉપવલયને બે નાભિઓ $(\pm ae, 0)$ અને તેમને અનુરૂપ બે નિયામિકાઓ $x \mp \frac{a}{e} = 0$ હોય છે.

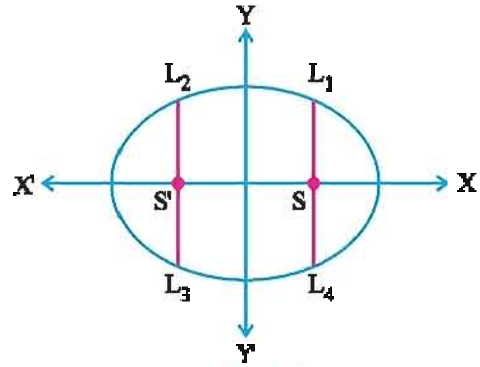
(5) આપણે જોયું કે ઉપવલય $\overline{AA'}$ અને $\overline{BB'}$ પ્રત્યે સંમિત હોય છે, આ રેખાખંડોને **ઉપવલયના અક્ષો** કહેવાય છે. ઉપરાંત, $AA' = 2a$ અને $BB' = 2b$ અને $b < a$, આમ, **$\overline{AA'}$ ને પ્રધાન અક્ષ (major axis) અને $\overline{BB'}$ ને ગૌણ અક્ષ (minor axis) કહે છે. b ને ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ (length of semi minor axis) તેમજ a ને પ્રધાન અક્ષની અર્ધલંબાઈ (length of semi major axis) કહે છે.**

અહીં પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષની દિશામાં છે. જો પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષની દિશામાં હોય તેવા સંજોગોમાં ઉપવલયની નાભિઓ Y-અક્ષ પર હોય અને નિયામિકાઓ X-અક્ષને સમાંતર હોય. આવા ઉપવલયનું સમીકરણ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ થાય, જ્યાં $b > a$ અને $a^2 = b^2(1 - e^2)$.

નાભિઓના યામ $(0, \pm be)$ અને નિયામિકાઓનાં સમીકરણ $y \mp \frac{b}{e} = 0$ થાય.

(6) ઉપવલયના બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને ઉપવલયની જીવા કહે છે. ઉપવલયની નાભિમાંથી પસાર થતી જીવાને તેની નાભિજીવા કહે છે. જો નાભિજીવા ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષને લંબ હોય તો તેને ઉપવલયનો નાભિલંબ કહે છે. (આકૃતિ 8.20). આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે નાભિલંબોના અંત્યબિંદુઓ જુદા જુદા ચરણમાં હોય. તેમને L_1, L_2, L_3 અને L_4 થી દર્શાવ્યા છે, $\overline{L_1L_4}$ અને $\overline{L_2L_3}$ બે નાભિલંબો છે.



આકૃતિ 8.19

(7) નાભિલંબોની લંબાઈ :

નાભિલંબ $\overline{L_1L_4}$ નાભિ $S(ae, 0)$ માંથી પસાર થાય છે તેનો વિચાર કરીએ. $\overline{L_1L_4}$ Y-અક્ષને સમાંતર હોવાથી તેની લંબાઈ, L_1 અને L_4ના y-યામોના તફાવત જેટલી થાય. L_1 અને L_4ના y-યામ નક્કી કરવા માટે ઉપવલયના સમીકરણ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ માં } x = ae \text{ મૂકતાં,}$$

$$e^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\therefore \quad y^2 = b^2(1 - e^2)$

પરંતુ $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$

$\therefore \quad y^2 = \frac{b^4}{a^2}$

$\therefore \quad y = \pm \frac{b^2}{a}$

$\therefore$ L_1 અને L_4 ના y-યામ અનુક્રમે $\frac{b^2}{a}$ અને $-\frac{b^2}{a}$ થાય. આથી,

$$L_1L_4 = \frac{b^2}{a} - \left(-\frac{b^2}{a}\right) = \frac{2b^2}{a}$$

$L_1\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$ અને $L_4\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ થાય.

તે જ રીતે $L_2\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right)$ અને $L_3\left(-ae, -\frac{b^2}{a}\right)$.

$\therefore$ **નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a}$.**

ઉદાહરણ 18 : જેની એક નાભિના યામ (2, 0) હોય, સંગત નિયામિકાનું સમીકરણ $x - 5 = 0$ હોય તથા ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{\sqrt{2}}$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે P(x, y) ઉપવલયનું કોઈ પણ બિંદુ છે. S નાભિ છે અને PM એ Pનું નિયામિકાથી લંબઅંતર છે.

$\therefore \quad SP^2 = e^2PM^2$

$\therefore \quad (x - 2)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (x - 5)^2$

$\therefore \quad 2(x^2 - 4x + 4 + y^2) = x^2 - 10x + 25$

$\therefore \quad x^2 + 2y^2 + 2x - 17 = 0$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 19 : ઊગમબિંદુનું (1, 2) આગળ સ્થાનાંતર કરી સાબિત કરો કે $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે. તેની નાભિના યામ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : પ્રમાણિત સંકેતમાં $x = x' + 1$, $y = y' + 2$ લેતાં,

પરિવર્તિત સમીકરણ $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{9} = 1$ મળે, જે એક ઉપવલય દર્શાવે છે.

$a^2 = 16$, $b^2 = 9$, અહીં $a^2 > b^2$ હોવાથી

$b^2 = a^2(1 - e^2)$ પરથી $9 = 16(1 - e^2)$

$\therefore \quad e^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\therefore \quad e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ **($e > 0$)**

નાભિના યામ $(\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ $x' \mp \frac{16}{\sqrt{7}} = 0$ **($x' - y'$ યામ પદ્ધતિમાં)**

$\therefore$ મૂળ યામ પદ્ધતિમાં નાભિના યામ $= \left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4}, 2\right)$ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ $x - 1 \mp \frac{16}{\sqrt{7}} = 0$ થાય.

ઉદાહરણ 20 : નીચેના ઉપવલયોની નાભિઓના યામ, નિયામિકાઓનાં સમીકરણ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો :

(1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ **(2)** $4x^2 + y^2 = 25$

ઉકેલ : (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ઉપરથી $a^2 = 9$, $b^2 = 1$. આથી, $a = 3$, $b = 1$.

$a > b$ હોવાથી પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ પર છે.

(i) ઉત્કેન્દ્રતા : આપણે જાણીએ છીએ કે, $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

$\therefore \quad 1 = 9(1 - e^2)$

$\therefore \quad \frac{1}{9} = 1 - e^2$

$\therefore \quad e^2 = \frac{8}{9}$

$\therefore \quad e = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(ii) નાભિઓ : $(\pm ae, 0) = \left(\pm 3\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right), 0\right) = (\pm 2\sqrt{2}, 0)$

(iii) નિયામિકાઓ : $x = \pm\frac{a}{e}$

$\therefore \quad x = \pm 3\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \pm\frac{9}{\sqrt{8}} = \pm\frac{9}{2\sqrt{2}}$

નિયામિકાઓનાં સમીકરણ $x \pm \frac{9}{2\sqrt{2}} = 0$ છે.

(iv) નાભિલંબની લંબાઈ : $\frac{2b^2}{a} = \frac{2}{3}$

(2) આપેલ સમીકરણ ઉપરથી $\frac{4x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$ એટલે કે $\frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} + \frac{y^2}{25} = 1$

આમ, $a^2 = \frac{25}{4}$, $b^2 = 25$.

$\therefore$ $a = \frac{5}{2}$, $b = 5$. આથી, $b > a$

$\therefore$ પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષ ઉપર છે.

(i) ઉત્કેન્દ્રતા : $a^2 = b^2(1 - e^2)$.

$\therefore$ $\frac{25}{4} = 25(1 - e^2)$

$\therefore$ $1 - e^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $e^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore$ $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) નાભિઓ : $(0, \pm be) = \left(0, \pm 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(0, \pm\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(iii) નિયામિકાઓ : $y = \pm\frac{b}{e} = \pm 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore$ $y \pm \frac{10}{\sqrt{3}} = 0$ નિયામિકાઓનાં સમીકરણ છે.

(iv) નાભિલંબની લંબાઈ : $\frac{2a^2}{b} = 2\left(\frac{25}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{2}$

ઉદાહરણ 21 : નીચેના પ્રત્યેક માટે ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો :

(1) પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{3}$ અને પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ ઉપર.

(2) નાભિલંબની લંબાઈ 8, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{\sqrt{2}}$, અને પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષ ઉપર.

ઉકેલ : (1) અહીં પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ ઉપર છે અને પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6 છે.

$\therefore$ $2a = 6$. માટે, $a = 3$

આથી $a^2 = 9$. વધુમાં $e = \frac{1}{3}$

હવે, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\therefore$ $b^2 = 9(1 - e^2) = 9\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 9\left(\frac{8}{9}\right) = 8$

$\therefore$ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ મળે.

(2) અહીં પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષ ઉપર છે.

$\therefore$ નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2a^2}{b} = 8$. આથી $a^2 = 4b$. **(i)**

વળી, ઉત્કેન્દ્રતા $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $a^2 = b^2(1 - e^2) = b^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ $a^2 = \frac{1}{2}b^2$ **(ii)**

(i) અને (ii) પરથી,

$\frac{1}{2}b^2 = 4b$ એટલે કે $b^2 - 8b = 0$

$\therefore \quad b = 8$ કારણ કે $b \neq 0$.

$\therefore \quad b^2 = 64$. આથી $a^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$

આમ, ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{64} = 1$ છે.

ઉદાહરણ 22 : પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ ઉપર હોય, ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ 4 હોય અને જેની બે નાભિઓ વચ્ચે અંતર 5 હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ $b = 4$. **(પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ પર છે.)**

ધારો કે, S(ae, 0) અને S'($-ae$, 0) નાભિઓ છે. તેમની વચ્ચેનું અંતર SS' = $2ae = 5$.

$\therefore \quad ae = \frac{5}{2}$ **(i)**

વળી, $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - a^2e^2$

$16 = a^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{25}{4}$ **((i) પરથી)**

$\therefore \quad a^2 = 16 + \frac{25}{4} = \frac{89}{4}$

આમ, માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{\frac{89}{4}} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$\therefore \frac{4x^2}{89} + \frac{y^2}{16} = 1$.

સ્વાધ્યાય 8.4

1. નીચેના પ્રત્યેક માટે ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ શોધો :

(1) નાભિઓ (± 2, 0), ઉત્કેન્દ્રતા = $\frac{1}{2}$

(2) નાભિઓ (± 4, 0), શિરોબિંદુઓ (± 5, 0)

(3) ગૌણ અક્ષની અર્ધ-લંબાઈ 6, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{4}{5}$; X-અક્ષ પર પ્રધાન અક્ષ.

(4) એક નાભિ (0, 4), ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{4}{5}$

(5) ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{2}{3}$, નાભિલંબની લંબાઈ 5; X-અક્ષ પર પ્રધાન અક્ષ.

(6) પ્રધાન અક્ષની અર્ધલંબાઈ 4, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{2}$; X-અક્ષ પર પ્રધાન અક્ષ.

(7) ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ 8, નાભિ (0, 6).

2. જેની નાભિઓ (± 3, 0) હોય અને જે (4, 1) માંથી પસાર થતો હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ શક્ય હોય તો મેળવો.

3. નીચેનાં ઉપવલયો માટે નાભિના યામ, ઉત્કેન્દ્રતા, નિયામિકાઓનાં સમીકરણો અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો :

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ (3) $x^2 + 2y^2 = 100$

(4) $\frac{x^2}{43} + \frac{7y^2}{688} = 1$ (5) $5x^2 + 9y^2 = 81$

4. એક ઉપવલયની બે નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર તેની નાભિઓ વચ્ચેના અંતરથી ત્રણ ગણું હોય તો તેની ઉત્કેન્દ્રતા શોધો.

5. ઉપવલય $16x^2 + 25y^2 = 1600$ ની નિયામિકાઓનાં સમીકરણ મેળવો. સાબિત કરો કે, બિંદુ $(5\sqrt{3}, 4)$ ઉપવલય ઉપર છે. આ બિંદુના કોઈ નિયામિકાથી અંતર અને તેને સંગત નાભિથી અંતરનો ગુણોત્તર શોધો.

6. સાબિત કરો કે, રેખા $x + y = 3$ ઉપવલય $20x^2 + 36y^2 = 405$ ની નાભિજીવાને સમાવે છે. (એટલે કે તે કોઈ નાભિમાંથી પસાર થાય છે.)

7. બિંદુઓ $(4, 3)$ અને $(-1, 4)$ માંથી પસાર થતાં ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

8. જેની નાભિ $(3, 2)$, સંગત નિયામિકાનું સમીકરણ $y = 5$ તથા ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{2}$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

9. $(2, 1)$ આગળ ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કરી સાબિત કરો કે $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે તથા તેની નાભિઓના યામ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ શોધો.

*

8.12 ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો

ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.

આથી, $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ એકમ વર્તુળ પર છે.

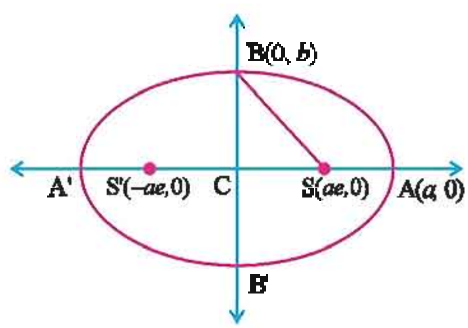
$\therefore$ જેથી $\exists\, \theta \in (-\pi, \pi]$, જેથી $\frac{x}{a} = \cos\theta$, $\frac{y}{b} = \sin\theta$

$\therefore$ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$,

વધુમાં $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ માંથી θ નો લોપ કરતાં $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ મળે. આમ, જોઈ શકાય છે કે, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો છે. ઉપવલય પરના બિંદુ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ને **θ-બિંદુ** કહેવાય છે.

ઉપવલયના ગુણધર્મો :

ગુણધર્મ 1 : ઉપવલયની નાભિનું ગૌણ અક્ષના કોઈ પણ અંત્યબિંદુથી અંતર પ્રધાન અક્ષની અર્ધ-લંબાઈ જેટલું થાય.



આકૃતિ 8.20

સાબિતી : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના ગૌણ અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ $B(0, b)$ છે. કોઈ એક નાભિ S ના યામ $(ae, 0)$ છે.

$\therefore$ $SB^2 = a^2e^2 + b^2 = a^2e^2 + a^2(1 - e^2) = a^2$

$\therefore$ $SB = a$

તે જ રીતે, $S'(-ae, 0)$ માટે, $S'B^2 = a^2e^2 + b^2 = a^2$

$\therefore$ $S'B = a$

તેમજ, ગૌણ અક્ષના બીજા અંત્યબિંદુ $B'(0, -b)$ માટે પણ $SB' = a = S'B'$ દર્શાવી શકાય.

ગુણધર્મ 2 : જો S એ નાભિ હોય અને A અને A' પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ હોય તો $AS \cdot A'S = b^2$.

સાબિતી : અહીં નાભિ $S(ae, 0)$, $A(a, 0)$ અને $A'(-a, 0)$ છે.

$$\therefore \quad AS \cdot A'S = \sqrt{(a-ae)^2}\sqrt{(a+ae)^2}$$

$$= a(1-e)\,a(1+e) \qquad \textbf{(0 < e < 1)}$$

$$= a^2(1-e^2) = b^2$$

ગુણધર્મ 3 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરના કોઈ પણ બિંદુ $P(x, y)$ માટે, $SP + S'P = 2a$, જ્યાં S અને S' નાભિઓ છે અને $b < a$.

સાબિતી : ઉપવલયની નિયામિકાઓનાં સમીકરણ $x \pm \frac{a}{e} = 0$ છે. આમ, બિંદુ $P(x, y)$ નાં નિયામિકાઓથી અંતર અનુક્રમે, $\left|\frac{a}{e} \mp x\right|$ થાય. ઉપવલયની વ્યાખ્યા મુજબ,

$$SP = e\left|\frac{a}{e} - x\right| = |a - ex|$$

$$S'P = e\left|\frac{a}{e} + x\right| = |a + ex|$$

વળી, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. તેથી $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$

$\therefore \quad |x| \leq a$. વળી, $e < 1$

$\therefore \quad |ex| < a$ અથવા $-a < ex < a$

$\therefore \quad a - ex > 0$. તે જ રીતે $a + ex > 0$

$\therefore \quad$ **$SP = a - ex$, $S'P = a + ex$**

$\therefore \quad$ **$SP + S'P = 2a$**

ઉપરના ગુણધર્મનું પ્રતીપ પણ સાચું છે. એટલે કે, સમતલમાંના એવા બિંદુઓનો ગણ, કે જેમનાં સમતલમાંના કોઈ બે નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો સરવાળો અચળ હોય, તે ઉપવલય હોય છે, જેના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ તે અચળ અંતર જેટલી છે.

આની સાબિતી નીચે મુજબ છે :

ધારો કે, $S(c, 0)$ અને $S'(-c, 0)$ સમતલમાંના નિશ્ચિત બિંદુઓ છે. અક્ષો એવી રીતે પસંદ કર્યા છે જેથી $\overline{SS'}$નું મધ્યબિંદુ ઉગમબિંદુ થાય અને $\overrightarrow{CS}$ ની દિશા X-અક્ષની ધન દિશા થાય. ધારો કે સમતલમાંનું કોઈ બિંદુ એવું P છે, જેથી $SP + S'P = 2a$, a અચળ છે. $(a \neq c)$

$\therefore \quad P \notin \overline{SS'}$ **(જો $P \in \overline{SS'}$ તો $SP + S'P = SS'$ એટલે કે $2a = 2c$)**

અહીં, $SP + S'P > SS'$.

$2a > 2c$ **(i)**

હવે, $SP + S'P = 2a$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\therefore \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$\therefore \quad a\sqrt{(x-c)^2 - y^2} = a^2 - cx$

$\therefore \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$

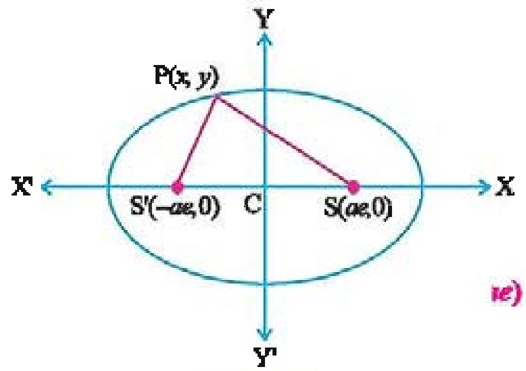
$\therefore \quad \frac{c}{a} = e$ લેતાં, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex$

$\therefore \quad (x - ae)^2 + y^2 = (a - ex)^2$

$\therefore \quad x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$

$\therefore \quad x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$

$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$



આકૃતિ 8.21

(i) પરથી $a > c$, $e = \frac{c}{a} < 1$. આથી, $a^2(1 - e^2) > 0$.

$\therefore$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા b મળે જેથી $b^2 = a^2(1 - e^2)$

આમ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ મળે.

તે પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $2a$ હોય તેવો ઉપવલય છે. **આ પ્રમેયને ઉપવલયની વ્યાખ્યા તરીકે પણ લેવામાં આવે છે.**

ઉપવલયની અગત્યની વ્યવહારુ ઉપયોગીતા

જો ઉપવલય આકારના અરીસામાં નાભિ S એ પ્રકાશનું (ધ્વનિનું અથવા વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ તરંગનું) ઉદ્‌ગમસ્થાન હોય, તો S માંથી નીકળતા પ્રકાશનાં કિરણો અરીસામાંથી પરાવર્તિત થઈ ઉપવલયની બીજી નાભિ S' માં કેન્દ્રીત થાય છે.

ઉપવલયના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ ભારતીય પ્રાચીન સ્થપતિઓએ વિશિષ્ટ ધ્વનિકક્ષના નિર્માણમાં કર્યો હતો. આવાં ધ્વનિકક્ષ કર્ણાટકમાં બિજાપુરમાં અને હૈદરાબાદના ગોલકોંડાના કિલ્લામાં જોવા મળે છે. ટેલિસ્કોપના નિર્માણમાં ઉપવલયના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ થાય છે.

તબીબીશાસ્ત્રમાં મૂત્રપિંડ તેમજ મૂત્રાશયની પથરી તોડવા લિથોટ્રીપર (Lithotripper) મશીનનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આમાં પણ ઉપવલયનો આ ગુણધર્મ વપરાય છે. અહીં લિથોટ્રીપરને ઉપવલયની એક નાભિ પાસે મૂકવામાં આવે છે અને ઉપવલયની બીજી નાભિ પાસે ઉચ્ચ આવૃત્તિવાળા આઘાતી તરંગો આપાત કરવામાં આવે છે પરાવર્તિત થઈ મૂત્રપિંડની પથરી તોડી નાખે છે.

ઉદાહરણ 23 : ઉપવલય $3x^2 + 5y^2 = 15$ નાં પ્રચલ સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણને 15 વડે ભાગતાં, $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

આમ, $a = \sqrt{5}$ અને $b = \sqrt{3}$. આથી ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = \sqrt{5}\cos\theta$, $y = \sqrt{3}\sin\theta$. $\theta \in (-\pi, \pi]$.

ઉદાહરણ 24 : ઉપવલય $x = 2\cos\theta$, $y = 5\sin\theta$ ની ઉત્કેન્દ્રતા, નાભિના યામ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $b = 5$. વળી, $b > a$ હોવાથી પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષનો ઉપગણ હોય.

(1) ઉત્કેન્દ્રતા : અહીં $a^2 = b^2(1 - e^2)$

$\therefore \quad 4 = 25(1 - e^2)$

$\therefore \quad \frac{4}{25} = 1 - e^2$

$\therefore \quad e^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$ આથી $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

(2) નાભિઓના યામ : $(0, \pm be) \quad = \left(0, \pm 5\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = (0, \pm\sqrt{21})$

(3) નિયામિકાઓનાં સમીકરણ : $y = \pm\frac{b}{e} = \pm 5 \times \frac{5}{\sqrt{21}} = \pm\frac{25}{\sqrt{21}}$

સ્વાધ્યાય 8.5

1. નીચે ઉપવલયોનાં પ્રચલ સમીકરણો મેળવો :

(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

(3) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ (4) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ (5) $x^2 + 2y^2 - 18 = 0$

2. નીચેના ઉપવલયોની ઉત્કેન્દ્રતા તેમજ નાભિઓ મેળવો :

(1) $x = 2cos\theta, y = 3sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$

(2) $3x = 5cos\theta, 5y = 7sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$

(3) $x = 4cos\theta, y = 3sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$

3. જો બે બિંદુ S(1, 0) તથા S'(−1, 0) થી ચલ બિંદુ P નાં અંતરોનો સરવાળો અચળ 8 હોય તો P બિંદુગણ શોધો.

*

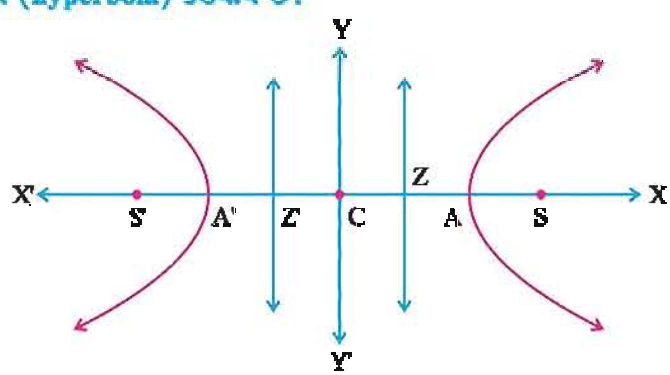
8.13 અતિવલય

અતિવલય યુદ્ધવિદ્યામાં ઉપયોગી એક અગત્યનો વક્ર છે. ઉદાહરણ તરીકે ગોળીબારનું ઉદ્‌ભવસ્થાન અતિવલયના ગુણધર્મ અને ધ્વનિની તિવ્રતા ઉપરથી નક્કી કરી શકાય છે.

જેની ઉત્કેન્દ્રતા $e > 1$ હોય તેવો શાંકવ અતિવલય (hyperbola) કહેવાય છે.

અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ :

ધારો કે, બિંદુ S અતિવલયની નાભિ, રેખા l નિયામિકા અને e એ અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા દર્શાવે છે. બિંદુ S માંથી નિયામિકા l પરનો લંબપાદ Z લો. હવે, $\overline{SZ}$ નું S તરફથી $e : 1$ અને $-e : 1$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓ અનુક્રમે A અને A' લો. $\frac{SA}{AZ} = e$ તથા $\frac{SA'}{A'Z} = e$ હોવાથી A અને A' અતિવલય પર છે.



આકૃતિ 8.22

ધારો કે, AA' = $2a$ અને C એ $\overline{AA'}$ નું મધ્યબિંદુ છે. CA = CA' = a.

ધારો કે, C ઉગમબિંદુ છે તથા $\overrightarrow{CA}$ ની દિશા એ X-અક્ષની ધન દિશા તરીકે લેતાં, A = $(a, 0)$ અને A' = $(-a, 0)$. ધારો કે, S તથા Z ના યામ અનુક્રમે $(p, 0)$ તથા $(q, 0)$ છે. A તથા A' એ $\overline{SZ}$ નું S તરફથી e તથા $-e$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતાં હોવાથી,

$$\frac{eq + p}{e + 1} = a \text{ તથા } \frac{-eq + p}{-e + 1} = -a$$

$\therefore \quad eq + p = ae + a$ તથા $-eq + p = ae - a$

$\therefore \quad p = ae$ તથા $q = \frac{a}{e}$

∴ નાભિ S ના યામ $(ae, 0)$ છે તથા નિયામિકા l નું સમીકરણ $x = \frac{a}{e}$ છે.

ધારો કે, $P(x, y)$ એ અતિવલય પરનું કોઈ બિંદુ છે તથા P માંથી નિયામિકા l પરનો લંબપાદ M છે. આથી M ના યામ $\left(\frac{a}{e}, y\right)$ થાય.

હવે, $\frac{SP}{PM} = e \Leftrightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

$$\Leftrightarrow (x - ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

$$\Leftrightarrow (e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

અહીં $a^2 > 0$ તથા $e > 1$ હોવાથી $e^2 - 1 > 0$

$\therefore \quad a^2(e^2 - 1) > 0$ થાય. આથી ધન વાસ્તવિક સંખ્યા b મળે કે જેથી $a^2(e^2 - 1) = b^2$.

∴ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ એ અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ છે.

અતિવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ પરથી નીચે મુજબનાં તારણો મેળવી શકાય :

(1) સંમિતતા :

અતિવલય બંને અક્ષો પ્રત્યે તેમજ ઊગમબિંદુ પ્રત્યે સંમિત છે. ઉપરાંત, ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર છે. આમ અતિવલય પણ કેન્દ્રીય શાંકવ છે.

(2) યામાક્ષો સાથે છેદ :

અતિવલયનો યામાક્ષો સાથે છેદ મેળવવા $y = 0$ લેતાં,

$\frac{x^2}{a^2} = 1$. આમ $x = \pm a$ મળે.

આમ, અતિવલય X-અક્ષને બિંદુઓ $A(a, 0)$ અને $A'(-a, 0)$માં છેદે છે. A અને A' ને અતિવલયનાં શિરોબિંદુઓ કહેવાય છે.

હવે અતિવલયના સમીકરણમાં $x = 0$ મૂકતાં, $y^2 = -b^2$ મળે, $b \neq 0$ હોવાથી, y ના કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે $y^2 = -b^2$ ન થાય. આમ અતિવલય Y-અક્ષને છેદે નહીં. ઉપવલયની માફક બિંદુઓ $B(0, b)$ અને $B'(0, -b)$ ને પણ અતિવલયનાં શિરોબિંદુઓ કહેવાય છે, અહીં નોંધીએ કે આ બિંદુઓ અતિવલય પર આવેલા નથી. અતિવલય માટે $\overline{AA'}$ અને $\overline{BB'}$ ને અનુક્રમે **મુખ્ય અક્ષ (Transverse axis) અને અનુબદ્ધ અક્ષ (Conjugate axis) કહેવાય છે.**

અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, Y-અક્ષને છેદે નહીં પરંતુ તે Y-અક્ષની બંને બાજુ આવેલ હોય છે. અતિવલયના આ બંને ભાગોને કોઈ સામાન્ય બિંદુ હોતું નથી અને તેમને અતિવલયની **શાખાઓ (Branches)** કહેવાય છે.

(3) નાભિ અને નિયામિકાની બીજી જોડ :

અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

$\therefore \quad (e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore \quad x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 + 2aex + e^2x^2$

$\therefore \quad (x + ae)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{a}{e}\right)^2$

ધારો કે, $S'(-ae, 0)$ છે, તથા રેખા $l' : x + \frac{a}{e} = 0$

$P(x, y)$ માંથી l' પરનો લંબપાદ M' છે.

$\therefore \quad (S'P)^2 = e^2(PM')^2$

$\therefore$ અતિવલય માટે બીજી નિયામિકા $x + \frac{a}{e} = 0$ મળે તથા બીજી નાભિ $(-ae, 0)$ છે.

આમ, અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને બે નાભિ $(\pm ae, 0)$ તથા અનુરૂપ બે નિયામિકાઓ $x \mp \frac{a}{e} = 0$ છે.

(4) જીવાઓ, નાભિજીવાઓ અને નાભિલંબો

અતિવલયના બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને અતિવલયની **જીવા** કહે છે. જો આ જીવા અતિવલયની નાભિમાંથી પસાર થાય તો તેને અતિવલયની **નાભિજીવા** કહે છે. અતિવલયના મુખ્ય અક્ષને લંબ નાભિજીવાને અતિવલયનો **નાભિલંબ** કહે છે.

(5) નાભિલંબની લંબાઈ :

ધારો કે, $\overline{L_1L_4}$ નાભિ $S(ae, 0)$માંથી પસાર થતો નાભિલંબ છે. (આકૃતિ 8.24). આ નાભિલંબને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $x = ae$ છે. આમ, $\overleftrightarrow{L_1L_4}$ બંનેના x-યામ ae છે.

આમ, અતિવલયના સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ માં $x = ae$ મૂકતાં,

$$\frac{(ae)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

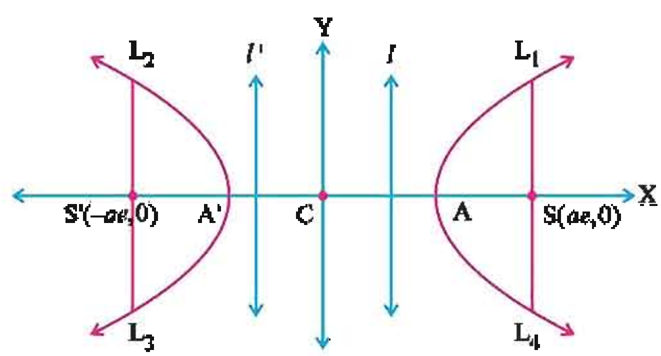
$$\therefore \quad \frac{y^2}{b^2} = e^2 - 1$$

$$\therefore \quad y^2 = b^2(e^2 - 1)$$

$$= b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^4}{a^2}$$

$$\therefore \quad y = \pm \frac{b^2}{a}$$



આકૃતિ 8.23

$\therefore \quad L_1\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$ અને $L_4\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ બને.

$\therefore \quad L_1L_4 = \frac{2b^2}{a}$

(6) અતિવલયના સમીકરણનું અન્ય સ્વરૂપ :

ઉપવલયની માફક અતિવલય માટે મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષના ઉપગણ તરીકે લઈએ તો તેનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

આ અતિવલયને અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને **અનુબદ્ધ અતિવલય (conjugate hyperbola)** કહેવાય.

અતિવલયનાં પ્રચલ સમીકરણ :

સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$ સાથે સરખાવતાં,

અતિવલય પરના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) માટે $-\pi < \theta \le \pi$ હોય અને $\theta \ne \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ એવો θ મળે કે જેથી, $x = a\, sec\theta$, $y = b\, tan\theta$.

આથી ઊલટું, કોઈ પણ $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$ માટે $x = a\, sec\theta$, $y = b\, tan\theta$, લઈએ તો બિંદુ (x, y), અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ પર આવે. અહીં θ એ પ્રચલ છે. અગાઉ જણાવ્યા મુજબ **બિંદુ $(a\, sec\theta, b\, tan\theta)$ ને અતિવલયનું θ-બિંદુ** કહેવાય છે.

આ જ રીતે **$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ નાં પ્રચલ સમીકરણો $x = a\, tan\theta$, $y = b\, sec\theta$, $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$ છે.**

લંબાતિવલય :

અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ માટે જો $a^2 = b^2$ હોય તો તે અતિવલયને **લંબાતિવલય (Rectangular hyperbola)** કહેવાય છે. આમ લંબાતિવલયનું સમીકરણ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{અથવા} \quad x^2 - y^2 = a^2 \text{ થાય.}$$

ઉત્કેન્દ્રતા : અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા મેળવવા માટે $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ વપરાય છે. લંબાતિવલય માટે $a^2 = b^2$ છે.

$\therefore \quad a^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore \quad e^2 = 2$

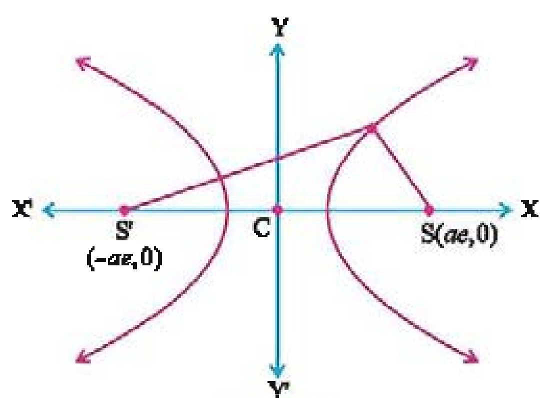
$\therefore \quad e = \sqrt{2}$ **(કારણ કે $e > 1$)**

θ-બિંદુ : લંબાતિવલય માટે θ-બિંદુ $(a\, sec\theta, a\, tan\theta)$ છે.

નાભિલંબની લંબાઈ : અતિવલય માટે નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ છે. અહીં $b^2 = a^2$ હોવાથી નાભિલંબની લંબાઈ $2a$ થશે.

અતિવલયના ગુણધર્મો :

જો S અને S' અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ની નાભિઓ હોય અને બિંદુ P અતિવલયનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો | SP − S'P | અચળ હોય છે.



આકૃતિ 8.24

સાબિતી : S(ae, 0) અને S(−ae, 0) નાભિઓ છે.

હવે, SP = ePM

$= e\left|x - \frac{a}{e}\right|$

અહીં, $\overline{PM}$ એ બિંદુ P(x, y) થી નિયામિકા $x = \frac{a}{e}$ પરનો લંબ છે.

$\therefore \quad SP = ePM = e\left|x - \frac{a}{e}\right| = |ex - a|$

$\therefore \quad SP = |ex - a|$. તે જ રીતે $S'P = |ex + a|$

$\therefore \quad (SP - S'P)^2 = SP^2 + S'P^2 - SP \cdot S'P$

$= (ex - a)^2 + (ex + a)^2 - 2\,|e^2x^2 - a^2|$

$= (ex - a)^2 + (ex + a)^2 - 2(e^2x^2 - a^2) \qquad (e^2 > 1, x^2 \ge a^2 \Rightarrow e^2x^2 > a^2)$

$= 4a^2$

$\therefore \quad |SP - S'P| = 2a$

ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. આમ, 'અતિવલય એટલે (સમતલમાંના) એવા બિંદુઓનો ગણ કે જેના બે નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો તફાવત અચળ હોય' તેવી વ્યાખ્યા મળે.

અતિવલયની આ વ્યાખ્યાની મદદથી પણ અતિવલયનું સમીકરણ મેળવી શકાય.

ધારો કે S અને S' એ નિશ્ચિત બિંદુ છે તથા P સમતલનું એવું બિંદુ છે કે, જેથી $|SP - S'P| = 2a$

ધારો કે S તથા S'ના યામ અનુક્રમે $(c, 0)$ તથા $(-c, 0)$ છે અને $\overline{SS'}$ નું મધ્યબિંદુ C ઉગમબિંદુ છે.

$\therefore \quad \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$

$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$

$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$

$\therefore \quad (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$

$\therefore \quad cx - a^2 = \pm\, a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\therefore \quad \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$

$\frac{c}{a} = e$ લેતાં $c = ae$

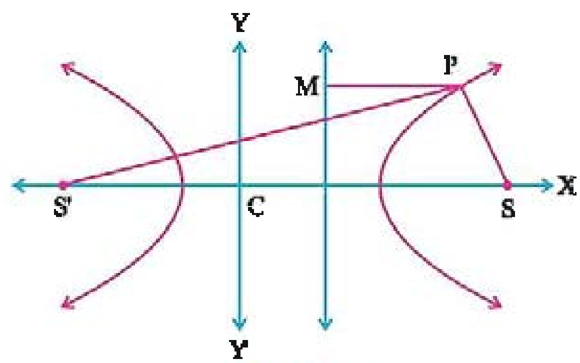
$\therefore \quad (ex - a)^2 = (x - ae)^2 + y^2$

$\therefore \quad (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \qquad$ (i)

વળી, $S = (c, 0) = (ae, 0)$

ધારો કે $l : x - \frac{a}{e} = 0$ રેખા દર્શાવે છે.

M એ P માંથી l પરનો લંબપાદ છે.



આકૃતિ 8.25

$\therefore \quad (SP)^2 = e^2(PM)^2$

$\therefore \quad \frac{SP}{PM} = e$

તદ્ઉપરાંત $|SP - S'P| = 2a < SS' = 2c \qquad \left(P \notin \overleftrightarrow{SS'} - \overline{SS'}\right)$

$\therefore \quad \frac{c}{a} > 1$

$\therefore \quad e > 1$

Pનો બિંદુગણ ઉત્કેન્દ્રતા e વાળો એક અતિવલય છે.

ઉદાહરણ 25 : જેની નાભિ (0, 1) હોય, નિયામિકાનું સમીકરણ $x + 3 = 0$ હોય તથા ઉત્કેન્દ્રતા $\sqrt{2}$ હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : $SP^2 = e^2PM^2$ પરથી,

$\therefore \quad x^2 + (y - 1)^2 = 2(x + 3)^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2(x^2 + 6x + 9)$

$\therefore \quad x^2 - y^2 + 12x + 2y + 17 = 0$ માંગેલ અતિવલયનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 26 : ઊગમબિંદુનું $(-1, -2)$ આગળ સ્થાનાંતર કરી સાબિત કરો કે સમીકરણ $(x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 16$ અતિવલય દર્શાવે છે. તેની ઉત્કેન્દ્રતા, નાભિઓનાં યામ તથા નિયામિકાઓનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : પ્રમાણિત સંકેતમાં $x = x' - 1$, $y = y' - 2$ લેતાં,

$(x')^2 - (y')^2 = 16$

આ સમીકરણ લંબાતિવલય દર્શાવે છે. $a = b = 4$ તથા $e = \sqrt{2}$.

$\therefore$ નાભિનાં યામ $(\pm 4\sqrt{2}, 0)$ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ $x' \mp 2\sqrt{2} = 0$ **($x' - y'$ પદ્ધતિમાં)**

$\therefore$ મૂળ યામ પદ્ધતિમાં નાભિનાં યામ $(\pm 4\sqrt{2} - 1, -2)$ છે.

અને નિયામિકાનાં સમીકરણ $x + 1 \pm 2\sqrt{2} = 0$ છે.

ઉદાહરણ 27 : P એવું ચલબિંદુ છે કે તેના એકબીજાથી 12 જેટલા અંતરે આવેલા નિશ્ચિત બિંદુઓ S તથા S' થી અંતરોનો તફાવત અચળ છે અને 8 જેટલો છે તો P નો બિંદુગણ મેળવો.

ઉકેલ : $| SP - S'P | = 2a = 8$

$\therefore \quad a = 4$, $SS' = 2c = 12$. આથી $c = 6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

હવે, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 16\left(\frac{9}{4} - 1\right) = 36 - 16 = 20$

$\therefore$ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ છે.

ઉદાહરણ 28 : નીચેના અતિવલય માટે નાભિઓના યામ, નિયામિકાઓનાં સમીકરણ, ઉત્કેન્દ્રતા, નાભિલંબની લંબાઈ અને મુખ્ય અક્ષ તેમજ અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ શોધો :

(1) $x^2 - 16y^2 = 16$ (2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$

(3) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ (4) $x^2 - y^2 = 4$

ઉકેલ : (1) સમીકરણને $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1$ તરીકે લખતાં, $a = 4$, $b = 1$

હવે, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$, $\quad 1 = 16(e^2 - 1)$

$\therefore \quad e^2 - 1 = \frac{1}{16}$ અથવા $e^2 = \frac{17}{16}$

$\therefore \quad e = \frac{\sqrt{17}}{4}$

નાભિઓ : $(\pm ae, 0) = \left(\pm 4\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right), 0\right) = (\pm\sqrt{17}, 0)$

નિયામિકાઓ : $x = \pm \frac{a}{e}$ i.e. $x = \pm 4\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\therefore \quad x = \pm \frac{16}{\sqrt{17}}$ નિયામિકાઓનાં સમીકરણ છે.

નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $= 2a = 8$, અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ $= 2b = 2$

(2) અહીં, $a^2 = 25$, $b^2 = 24$

$\therefore \quad b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\therefore \quad 24 = 25(e^2 - 1)$

$\therefore \quad e^2 - 1 = \frac{24}{25}$

$\therefore \quad e^2 = \frac{49}{25}$

$\therefore \quad e = \frac{7}{5}$

નાભિઓ : $(\pm ae, 0) = \left(\pm 5\left(\frac{7}{5}\right), 0\right) = (\pm 7, 0)$

નિયામિકાઓ : $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{\left(\frac{7}{5}\right)} = \pm \frac{25}{7}$

$\therefore$ નિયામિકાઓનાં સમીકરણ $x = \pm \frac{25}{7}$ છે.

નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(24)}{5} = \frac{48}{5}$

મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $= 2a = 10$

અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ $= 2b = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$

(3) આ અતિવલયની નિયામિકાઓ X-અક્ષને સમાંતર છે. અહીં, $a^2 = 9$, $b^2 = 25$

$a^2 = b^2(e^2 - 1)$

$\therefore \quad 9 = 25(e^2 - 1)$

$\therefore \quad e^2 = 1 + \frac{9}{25} = \frac{34}{25}$. આથી $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$

નાભિઓ : $(0, \pm be) = \left(0, \pm 5\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)\right) = (0, \pm\sqrt{34})$

નિયામિકાઓ : $y = \pm \frac{b}{e} = \pm 5\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = \pm \frac{25}{\sqrt{34}}$

$\therefore \quad y = \pm \frac{25}{\sqrt{34}}$ અતિવલયની નિયામિકાઓનાં સમીકરણ છે.

નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \cdot 9}{5} = \frac{18}{5}$

મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $= 2b = 10$, અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ $= 2a = 6$

(4) સમીકરણને $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ તરીકે લખી શકાય. આ લંબાતિવલય છે. $a^2 = b^2 = 4$

ઉત્કેન્દ્રતા : $e = \sqrt{2}$. નાભિઓના યામ $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$. નિયામિકાઓનાં સમીકરણ $x = \pm\sqrt{2}$

નાભિલંબની લંબાઈ $2a = 4$

મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $2a = 4$, અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ $2b = 4$

ઉદાહરણ 29 : નીચે આપેલ શરતો પ્રમાણે અતિવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો મેળવો :

(1) નાભિઓ $(\pm 7, 0)$, શિરોબિંદુઓ $(\pm 5, 0)$

(2) નાભિઓ $(0, \pm 3)$, ઉત્કેન્દ્રતા $= 2$

(3) નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર 16 (નાભિઓ X-અક્ષ પર છે), ઉત્કેન્દ્રતા $= \sqrt{2}$

ઉકેલ : (1) નાભિઓ $(\pm ae, 0) = (\pm 7, 0)$

$\therefore \quad ae = 7$ **(i)**

શિરોબિંદુઓ $(\pm 5, 0)$ હોવાથી, $a = 5$ **(ii)**

$\therefore \quad ae = 5e = 7$

$\therefore \quad e = \frac{7}{5}$

હવે, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 25\left(\frac{49}{25} - 1\right) = 24$

$\therefore$ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ મળે.

(2) નાભિઓ $(0, \pm 3)$. નાભિઓ Y-અક્ષ પર છે. આમ નિયામિકાઓ X-અક્ષને સમાંતર થાય.

વળી, $e = 2$ આપેલું છે.

હવે, $be = 3$

$\therefore \quad 2b = 3$

$\therefore \quad b = \frac{3}{2}$

હવે, $a^2 = b^2(e^2 - 1) = \frac{9}{4}(4 - 1) = \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{4}$

$\therefore$ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ પ્રમાણે $\frac{y^2}{\frac{9}{4}} - \frac{x^2}{\frac{27}{4}} = 1$ થાય.

$\therefore \quad \frac{4y^2}{9} - \frac{4x^2}{27} = 1$ માંગેલ અતિવલયનું સમીકરણ છે.

(3) નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર $= 2ae = 16$. આથી $ae = 8$ **(i)**

$e = \sqrt{2}$. આથી લંબાતિવલય છે.

$\therefore \quad a\sqrt{2} = 8$

$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} = b$

$\therefore$ અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$ અથવા $x^2 - y^2 = 32$ થાય.

સ્વાધ્યાય 8.6

1. નીચે આપેલ અતિવલયોની નાભિઓના યામ, નિયામિકાનાં સમીકરણો, નાભિલંબની લંબાઈ, મુખ્ય અક્ષ તેમજ અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ શોધો.

(1) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{25} = 1$ (2) $x^2 - y^2 = 64$ (3) $2x^2 - 3y^2 = 5$

(4) $9y^2 - 16x^2 = 144$ (5) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$

2. નીચેના પ્રત્યેક કિસ્સામાં અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો તેમજ તેનાં પ્રચલ સમીકરણો લખો :

(1) ઉત્કેન્દ્રતા $e = \frac{4}{3}$, શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 7)$

(2) નાભિઓ $(\pm\sqrt{13}, 0)$, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{\sqrt{13}}{3}$

(3) નાભિઓ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, નાભિલંબની લંબાઈ = 8

(4) નાભિઓ $(0, \pm 8)$, ઉત્કેન્દ્રતા $\sqrt{2}$

(5) Y-અક્ષ પરની નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર = 10, ઉત્કેન્દ્રતા = $\frac{5}{4}$

3. જો e_1 અને e_2 અનુક્રમે $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ અને $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા હોય તો સાબિત કરો કે, $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 e_2^2$.

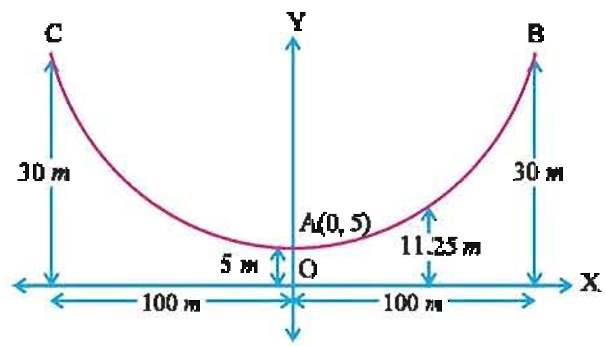
4. અતિવલયના શિરોબિંદુનું નાભિઓથી અંતર 9 અને 1 હોય તો અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.

5. અતિવલય $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ નાં પ્રચલ સમીકરણ લખો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 30 : પરવલયાકારના ઝૂલતા પુલના બે આધાર સ્તંભો 30 મીટર ઊંચા અને 200 મીટરના અંતરે આવેલા છે. પુલ તેની મધ્યમાં જમીનથી 5 મીટર ઊંચો છે. પુલના એક આધાર સ્તંભની ઊંચાઈ 11.25 મીટર હોય તો તેનું કેન્દ્રથી અંતર શોધો.



આકૃતિ 8.26

ઉકેલ : આકૃતિ 8.26માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે CAB પરવલયાકારનો ઝૂલતો પુલ છે. તેનું કેન્દ્ર પરવલયનું શિરોબિંદુ છે. તેની ઊંચાઈ 5 મીટર છે. A ને ઉગમબિંદુ તરીકે લઈએ અને $\overleftrightarrow{OA}$ ને Y-અક્ષ તરીકે લઈએ તો પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ થાય. હવે, Oના યામ $(0, -5)$, આમ, ઉગમબિંદુનું સ્થાનાંતર O પર કરવાથી પરવલયનું સમીકરણ,

$$(x')^2 = 4a(y - 5) \quad \text{(i)}$$

આધાર સ્તંભ C અને B માટે, તેમના યામો અનુક્રમે $(-100, 30)$ અને $(100, 30)$ આપેલા છે. આનો ઉપયોગ (i) માં કરતાં,

$$(100)^2 = 4a(30 - 5)$$

$$\therefore \quad 10000 = 100a$$

$$\therefore \quad a = 100$$

આમ, (i) પરથી પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 400(y - 5)$ છે. **(ii)**

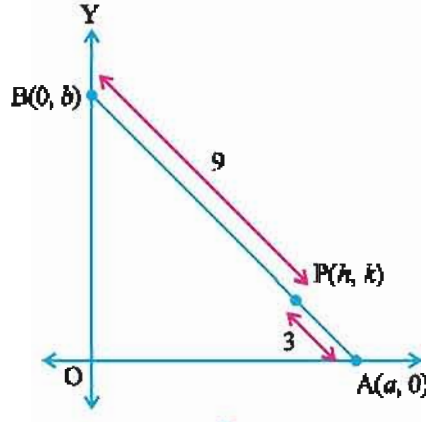
હવે, 11.25 મીટર ઊંચાઈના આધાર સ્તંભનું અંતર શોધવા માટે સમીકરણ (ii)માં $y = 11.25$ મૂકતાં,

$$x^2 = 400(11.25 - 5) = 400(6.25) = 2500$$

$$\therefore \quad x = \pm 50$$

આમ, કેન્દ્રની બંને બાજુ, કેન્દ્રથી 50 મીટર અંતરે 11.25 મીટર ઊંચાઈના આધાર સ્તંભ આવેલા હોય.

ઉદાહરણ 31 : 12 મી લંબાઈનો એક સળિયો એવી રીતે ખસે છે, કે જેથી તેનાં અંત્યબિંદુઓ યામાક્ષો પર રહે. X-અક્ષ પરના અંત્યબિંદુથી 3 મી અંતરે આવેલા સળિયા પરના બિંદુનો બિંદુગણ શોધો.



આકૃતિ 8.27

ઉકેલ : ધારો કે, 12 મી લંબાઈના સળિયા $\overline{AB}$ નાં અંત્યબિંદુઓ $A(a, 0)$ અને $B(0, b)$ છે. બિંદુ A થી 3 મી અંતરે આવેલું સળિયા પરનું બિંદુ $P(h, k)$ છે.

આમ, AP = 3 મી અને PB = 9 મી

$\therefore$ બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી 1 : 3ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે.

$\therefore \quad h = \frac{3a}{4}$ અને $k = \frac{b}{4}$

$\therefore \quad a = \frac{4h}{3}$ અને $b = 4k$

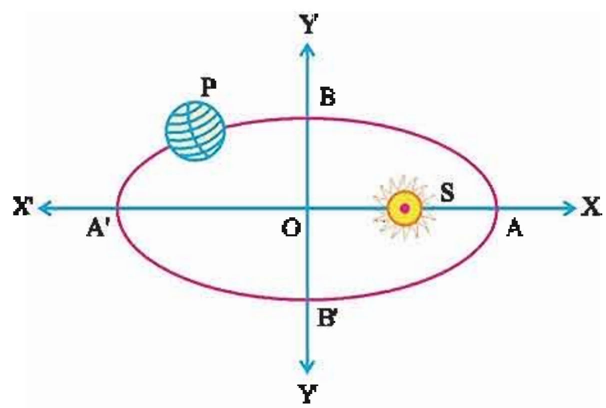
હવે કાટકોણ ΔAOBમાં $OA^2 + OB^2 = AB^2$. આથી, $a^2 + b^2 = 144$

$\therefore \quad \frac{16h^2}{9} + \frac{16k^2}{1} = 144$

$\therefore \quad \frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{9} = 1.$

$\therefore$ આમ, બિંદુ P નો બિંદુગણ $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ છે. અને તે એક ઉપવલય છે.

ઉદાહરણ 32 : પૃથ્વીનો સૂર્યની આસપાસનો ગતિમાર્ગ એક ઉપવલય છે. સૂર્ય આ ઉપવલયની એક નાભિ છે. જો આ ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 300 મિલિયન કિમી હોય અને ગતિમાર્ગની ઉત્કેન્દ્રતા 0.0167 હોય, તો પૃથ્વીનું સૂર્યથી ન્યૂનતમ અને મહત્તમ અંતર શોધો.



આકૃતિ 8.28

ઉકેલ : અહીં સૂર્ય ઉપવલયની નાભિ S છે તથા પૃથ્વી ઉપવલય પરનું બિંદુ P છે. $SP = a(1 - e\cos\theta)$ થાય.

વળી, $2a = 3 \times 10^8$ કિમી

$\therefore \quad a = 1.5 \times 10^8$ કિમી

$\therefore \quad SP = 1.5 \times 10^8$ કિમી $(1 - 0.0167 \cos\theta)$ કિમી

અહીં $\cos\theta = 1$ ત્યારે અંતર SP ન્યૂનતમ થાય અને $\cos\theta = -1$ ત્યારે અંતર SP મહત્તમ થાય.

ન્યૂનતમ $SP = 1.5 \times 10^8 (1 - 0.0167)$

$= 147{,}495{,}000$ કિમી

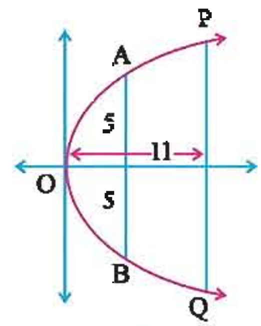
(પૃથ્વી મુખ્ય અક્ષના બીજા અંત્યબિંદુ આગળ હોય ત્યારે પૃથ્વીનું સૂર્યથી અંતર મહત્તમ થાય.)

પૃથ્વીનું સૂર્યથી મહત્તમ અંતર

$1.5 \times 10^8 (1 + 0.0167)$ કિમી $= 152{,}505{,}000$ કિમી

સ્વાધ્યાય 8

1. જેનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ (1, 2), (2, −3) હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
2. બિંદુઓ (4, 0), (−4, 0) અને (0, 8) માંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
3. વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ ને સમકેન્દ્રી હોય અને X-અક્ષને સ્પર્શતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
4. પરવલય $y^2 = x$ ની નાભિ અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો.
5. જેની નાભિઓ X-અક્ષ પર હોય અને એકબીજાથી 8 અંતરે હોય તથા જેની ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{3}$ હોય તેવા ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.
6. જેની નિયામિકા X-અક્ષને સમાંતર હોય તેવા અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.
7. જેની નાભિ (−4, 0) હોય અને નિયામિકા $x = 2$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ વ્યાખ્યાની મદદથી મેળવો.
8. એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો આડછેદ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. નાભિ પાસે મુખ $\overline{AB}$ની પહોળાઈ 10 સેમી છે. પરવલયનું સમીકરણ શોધો. શિરોબિંદુથી 11 સેમી દૂર આવેલ મુખ $\overline{PQ}$ની પહોળાઈ શોધો. (આકૃતિ 8.30 જુઓ.)



આકૃતિ 8.29

9. એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો વ્યાસ 24 સેમી છે અને ઊંડાઈ 6 સેમી છે. તેની નાભિના યામ શોધો. તે ક્યા સ્થાને છે ?
10. એક અર્ધ-ઉપવલયાકારની કમાન 10 મી પહોળી અને તેની કેન્દ્ર પાસે ઊંચાઈ 4 મી છે. આ કમાનની તેના એક છેડેથી 2 મી અંતરે ઊંચાઈ શોધો.
11. રમકડાની એક ટ્રેન, એવી રીતે ફરે છે કે જેથી તેના બે સિગ્નલોથી અંતરનો સરવાળો અચળ રહે અને 10 મી જેટલો થાય. બે સિગ્નલો વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય તો તે ટ્રેનનો ગતિપથ મેળવો.
12. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) વર્તુળો $x^2 + y^2 + 6x - 14y = 1$ અને $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 2$ ના કેન્દ્રો જેનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ... ☐

(a) $x^2 + y^2 + x - 2y - 41 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + x + 2y - 41 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + x + 2y + 41 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - x - 2y - 41 = 0$

(2) વર્તુળ $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 5 = 0$ ના વ્યાસનું એક અંત્યબિંદુ (−3, 2), હોય તો બીજા અંત્યબિંદુના યામ ...... થાય. ☐

(a) (5, 3) (b) (6, 2) (c) (1, −8) (d) (11, 2)

(3) જેનું કેન્દ્ર X-અક્ષ પર, ત્રિજ્યા 5 હોય અને જે (2, 3) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ... ☐

(a) $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 12x - 11 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 4x + 12y = 0$

(4) (4, 5) કેન્દ્રવાળા અને વર્તુળ $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ ના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ ☐

(a) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 1 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 1 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 1 = 0$

(5) (1, 2) કેન્દ્રવાળા અને બિંદુ (4, 6) માંથી પસાર થતા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ ...... થાય. ☐

(a) 30π ચો એકમ (b) 5π ચો એકમ (c) 15π ચો એકમ (d) 25π ચો એકમ

(6) બિંદુઓ (0, 0), (a, 0), (0, b) માંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રના યામ ...... થાય. ☐

(a) $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ (c) (b, a) (d) (a, b)

(7) સમીકરણ પરવલય $x^2 = 4ay$ નાં પ્રચલ સમીકરણ ...... છે. ☐

(a) $x = at^2$, $y = at^2$ (b) $x = 2at$, $y = 2at$ (c) $x = 2at$, $y = at^2$ (d) $x = 2at^2$, $y = at$

(8) રેખા $2x - 3y + 8 = 0$ પરવલય $y^2 = 8x$ ને P અને Q માં છેદે છે. $\overline{PQ}$ ના મધ્યબિંદુના યામ ...... થાય.

(a) (2, 4) (b) (8, 8) (c) (5, 6) (d) (6, 5) ☐

(9) જેના નાભિલંબની લંબાઈ ગૌણ અક્ષ કરતાં અડધી હોય તેવા ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા ...... થાય. ☐

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\sqrt{2}$

(10) જેના ગૌણ અક્ષની લંબાઈ નાભિઓ વચ્ચેના અંતર જેટલી હોય તેવા ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા ...... થાય. ☐

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(11) ઉપવલય $9x^2 + 25y^2 = 225$ ની ઉત્કેન્દ્રતા .... ☐

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) 0

(12) ઉપવલય $4x^2 + 9y^2 = 1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ .... ☐

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{2}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$

(13) ઉપવલય $9x^2 + 4y^2 = 36$ ની એક નાભિ ...... છે. ☐

(a) $(\sqrt{5}, 0)$ (b) $(0, \sqrt{5})$ (c) $(3\sqrt{5}, 0)$ (d) $(0, 3\sqrt{5})$

(14) ઉપવલય $25x^2 + 9y^2 - 1$ ના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ ...... છે. ☐

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{9}$

(15) અતિવલય $9x^2 - 16y^2 = 144$ ની નાભિઓ ...... છે. ☐

(a) $(\pm 4, 0)$ (b) $(0, \pm 4)$ (c) $(\pm 5, 0)$ (d) $(0, \pm 5)$

(16) અતિવલય $16x^2 - 9y^2 = 144$ ના નાભિલંબની લંબાઈ ...... છે. ☐

(a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{16}{3}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

(17) અતિવલય $16y^2 - 9x^2 = 144$ ની ઉત્કેન્દ્રતા ...... છે. ☐

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{4}{5}$

(18) અતિવલય $x^2 - 4y^2 = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા ...... છે.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(19) જો પરવલય $y^2 = 4ax$ બિંદુ $(2, -6)$ માંથી પસાર થતો હોય તો નાભિલંબની લંબાઈ ...... થાય.

(a) 9 (b) 16 (c) 18 (d) 8

(20) ઉપવલય $5x^2 + 9y^2 = 45$ ના નાભિલંબની લંબાઈ ...... છે.

(a) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{10}{3}$

*

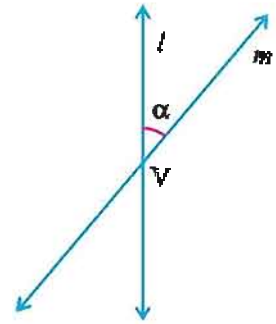
સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

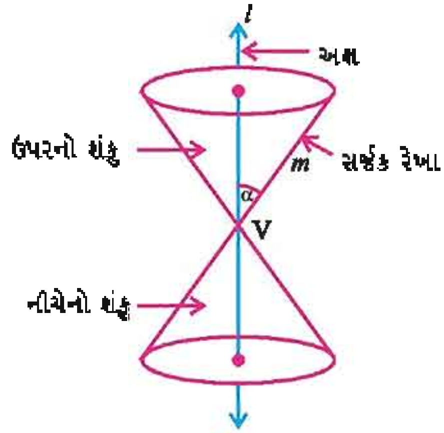
1. વર્તુળનું પ્રમાણિત સમીકરણ $x^2 + y^2 = r^2$ છે.
   વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ છે.
2. સમીકરણ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ માટે જો $g^2 + f^2 - c > 0$ થાય તો તે વર્તુળ દર્શાવે છે, અન્યથા નહીં. જો તે વર્તુળ દર્શાવે તો તેનું કેન્દ્ર $(-g, -f)$ અને ત્રિજ્યા $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ થાય.
3. પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $y^2 = 4ax$. આ પરવલયનાં પ્રચલ સમીકરણ $x = at^2$, $y = 2at$, $t \in$ R.
   નાભિલંબની લંબાઈ $4|a|$
4. પરવલયની નાભિજીવા માટે $t_1t_2 = -1$
5. પરવલયનો અગત્યનો ગુણધર્મ $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{|a|}$
6. ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **$(a > b)$**
   તેની નાભિઓ $(\pm ae, 0)$ અને તેમને અનુરૂપ નિયામિકાઓનાં સમીકરણ $x \mp \frac{a}{e} = 0$. આ ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$; $\theta \in (-\pi, \pi]$, નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $2a$; ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b$.
7. ઉપવલયની નાભિઓ S અને S' હોય અને P ઉપવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો $SP + S'P = 2a$
8. અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
   નાભિઓ $(\pm ae, 0)$, તેમને અનુરૂપ નિયામિકાઓ $x \mp \frac{a}{e} = 0$
   પ્રચલ સમીકરણ $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$, $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
   નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$
9. અતિવલયનો અગત્યનો ગુણધર્મ : $|SP - S'P| = 2a$

દ્વિશંકુ અને સમતલનો છેદ :

ધારો કે l એક નિશ્ચિત શિરોલંબ રેખા છે અને m એ અન્ય કોઈ રેખા છે. તે l ને નિશ્ચિત બિંદુ V માં છેદે છે. ધારો કે l અને m વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) છે. તે આકૃતિ A.1માં દર્શાવેલ છે. ધારો કે રેખા m ને l આસપાસ એવી રીતે પરિભ્રમણ આપવામાં આવે છે કે જેથી ખૂણો α અચળ રહે છે. આ રીતે સર્જાતી સપાટીને શંકુ કહેવાય છે. રેખાઓનું છેદબિંદુ V શંકુને બે ભાગમાં વહેંચે છે. આથી આવા શંકુને દ્વિશંકુ કહે છે, સરળતા ખાતર આપણે તેને શંકુ કહીશું.



આકૃતિ A.1

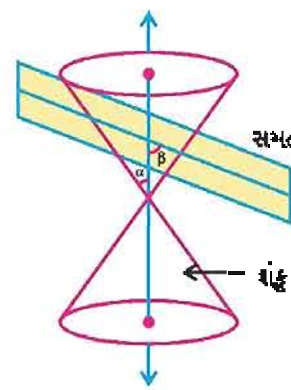


આકૃતિ A.2

શંકુનો વ્યાપ બંને દિશામાં અનંત હોય છે. (આકૃતિ A.2). બિંદુ V ને શંકુનું **શિરોબિંદુ (Vertex)** કહે છે. રેખા l ને **શંકુનો અક્ષ** કહે છે અને રેખા m ની કોઈ પણ સ્થિતિમાં તેને **શંકુની સર્જક રેખા (Generator)** કહે છે. જ્યારે શંકુના ભાગને **ફલક (Lateral surface)** કહે છે. અહીં જુઓ કે શંકુને જોઈને રેખા m નિશ્ચિત કરી શકાય નહીં. ખરેખર તો શંકુની સપાટી પરની કોઈ પણ રેખાને સર્જક રેખા તરીકે લઈ શકાય.

હવે શંકુના કોઈ સમતલ સાથેના છેદનો વિચાર કરીએ, આવા છેદને **શાંકવ (Conic)** કહે છે. અહીં **શંકુનો છેદ લેવાનો હોવાથી નામ શાંકવ આપવામાં આવ્યું છે.**

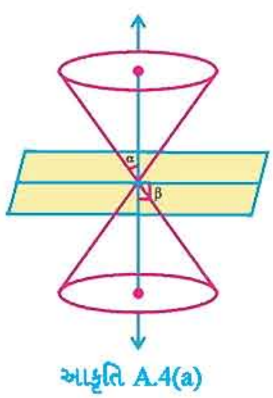
જ્યારે શંકુનો સમતલ સાથે છેદ લેવાનો હોય ત્યારે, સમતલનું સ્થાન તેણે શંકુના અક્ષ સાથે બનાવેલ ખૂણા વગેરેના આધારે, ઘણી બધી શક્યતાઓ રહેલી છે. આકૃતિ A.3 માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે, સમતલ શંકુના શિરોલંબ અક્ષ સાથે β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) માપનો ખૂણો રચે છે. હવે બે શક્યતાઓ જોઈએ : (1) સમતલ શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. અથવા (2) સમતલના શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતું નથી. આ શક્યતાઓ મુજબ છેદ શિરોબિંદુ બને અથવા શંકુના શિરોબિંદુથી ઉપરના અથવા નીચેના ફલકમાં છેદગણ મળે.



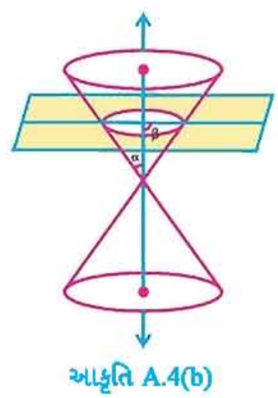
આકૃતિ A.3

હવે આપણે છેદની વિવિધ પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરીશું, દરેક પરિસ્થિતિમાં ઉપરોક્ત બંને શક્યતાઓની ચર્ચા કરીશું.

ધારો કે સમતલ શંકુના અક્ષ સાથે કાટકોણ બનાવે છે. એટલે કે, $\beta = \frac{\pi}{2}$. જો સમતલ શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય, તો બંનેના છેદ શિરોબિંદુ મળે. (આકૃતિ A.4 (a)) અને જો સમતલ શિરોબિંદુમાંથી પસાર ન થાય તો તેમનો છેદ વર્તુળ થાય.



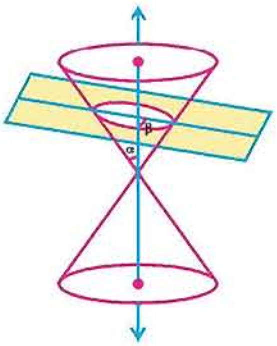
આકૃતિ A.4(a)



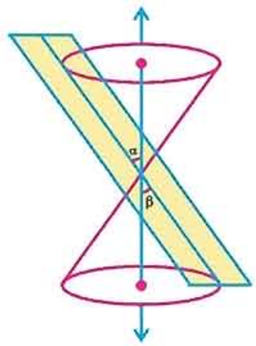
આકૃતિ A.4(b)

સમતલના સ્થાન પ્રમાણે વર્તુળ શંકુના ઉપરી ફલક અથવા નિમ્ન ફલકમાં મળે. (આકૃતિ A.4 (b)) પ્રથમ કિસ્સામાં છેદ એક બિંદુ મળે છે જે વર્તુળનું વિસર્જીત રૂપ છે.

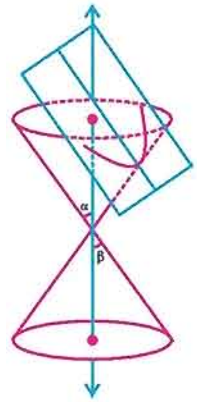
ધારો કે, $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. જો સમતલ શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય તો છેદ ફરી એક વખત શિરોબિંદુ જ મળે. જો આમ ન હોય તો છેદ ઉપવલય મળે. અહીં પણ બિંદુ એ ઉપવલયનું વિસર્જીત રૂપ છે. (આને સાદશ કરવાનો પ્રયત્ન કરો.) (આકૃતિ A.5(a)).



આકૃતિ A.5(a)



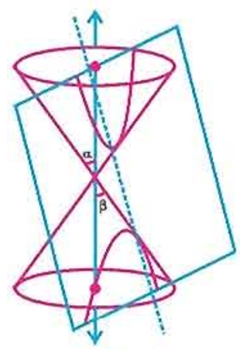
આકૃતિ A.5(b)



આકૃતિ A.5(c)

હવે જો $\alpha = \beta$નો વિચાર કરીએ. આ કિસ્સામાં સમતલ સર્જક રેખાને સમાંતર હોય. જો સમતલ શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય તો છેદ સુરેખા મળે. (આકૃતિ A.6). જુઓ કે છેદમાં મળેલ સુરેખા શંકુની એક સર્જક રેખા જ છે. જો શિરોબિંદુ સમતલમાં ન હોય, તો આકૃતિ A.5(c) માં દર્શાવ્યા મુજબ છેદ પરવલય મળે. પ્રથમ કિસ્સામાં મળેલી રેખા પરવલયનું વિસર્જીત રૂપ છે.

અંતમાં, $\beta < \alpha$ નો વિચાર કરીએ. આ કિસ્સામાં સમતલ બંને ફલકને છેદે છે, જે આગળના બંને કિસ્સામાં બન્યું ન હતું. આ છેદ ગણ અતિવલય છે અને તેને બે શાખાઓ છે, જે આકૃતિ A.6 માં દર્શાવેલ છે. અહીં પણ વિસર્જીત કિસ્સો $\beta = 0$ માં મળે છે, આમાં સમતલ શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય છે અને છેદ, રેખાયુગ્મ મળે છે.



આકૃતિ A.6

Some of Bhaskara's contributions to mathematics include the following :

- A proof of the Pythagorean theorem by calculating the same area in two different ways and then cancelling out terms to get $a^2 + b^2 = c^2$.
- In Lilavati, solutions of quadratic, cubic and quartic indeterminate equations are explained.
- Solutions of indeterminate quadratic equations (of the type $ax^2 + b = y^2$).
- A cyclic *Chakravala* method for solving indeterminate equations of the form $ax^2 + bx + c = y$. The solution to this equation was traditionally attributed to William Brouncker in 1657, though his method was more difficult than the *chakravala* method.
- The first general method for finding the solutions of the problem $x^2 - ny^2 = 1$ (so-called "Pell's equation") was given by Bhaskara II.

પ્રકરણ 9

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ

As far as the laws of mathematics refer to reality they are not certain and as far as they are certain they do not refer to reality.

– Albert Einstein

9.1 પ્રાસ્તાવિક

સત્તરમી સદીની શરૂઆતમાં ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી રેને દ'કાર્તે (René Descartes) અને તે જ સમયગાળામાં ફર્મા (Fermat) એ સમતલમાં યામભૂમિતિની શરૂઆત કરી હતી. તેને વ્યવસ્થિત કરવાનું કાર્ય 18મી સદીમાં બર્નુલી (Bernoulli) અને ઓઈલર (Euler) દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું. 19મી સદીમાં તેનું ઉચ્ચ પરિમાણમાં વ્યાપ્ત સ્વરૂપ ઉપયોગમાં આવ્યું હતું. અને તેનો રસપ્રદ ઉપયોગ ગઈ સદીમાં કરવામાં આવ્યો હતો.

આ પ્રકરણમાં ગણિત તથા વિજ્ઞાનમાં ઉપયોગી એવા સદિશોની પાયાની સમજણ મેળવીશું. આ ઉપરાંત સમતલમાંની યામભૂમિતિનો ત્રિપરિમાણમાં વિસ્તાર કરીશું એટલે કે અવકાશમાં યામભૂમિતિની ચર્ચા કરીશું. અવકાશમાં આવેલ ઘન પદાર્થો અને આપણી આસપાસના અવકાશમાં આવેલી વસ્તુઓના અભ્યાસમાં આ સમજણ ઉપયોગી છે. ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ માટે આપણે સદિશોનો સાધન તરીકે ઉપયોગ કરીશું.

9.2 સદિશો

અમુક ભૌતિક રાશિઓના પૂર્ણ વર્ણન તેમજ તેના ઉપયોગ માટે દિશા અને માન બંનેની જરૂર પડે. આવી રાશિને સદિશ (vectors) કહેવાય છે. વેગ એ સદિશ છે કારણ કે તેના પૂર્ણ અર્થ માટે માન તેમજ દિશા બંનેની જરૂર પડે. અન્યથા તેનો અર્થ અધૂરો રહે. સંકર સંખ્યાની આર્ગન્ડ સમતલમાં રજૂઆત વિષે તો આપણે જાણીએ જ છીએ. તેની ધ્રુવીય રજૂઆત $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ માં બે અગત્યના પ્રચલ r તથા θ છે. r તેનું માન છે તથા θ પરથી દિશા નક્કી થાય છે અને સંકર સંખ્યાની રજૂઆત મળે છે. આમ પ્રત્યેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા એક સદિશ છે અને તેને માન તથા દિશા બંને છે. ધારો કે દેવ પૂર્વ તરફ 300 મી ચાલે તથા ઉત્તર તરફ 400 મીટર ચાલે છે. આમ તેના મૂળ સ્થાનથી અંતિમ સ્થાનની માહિતી મેળવવા તેણે ચાલેલાં બંને અંતર તથા દિશા જાણવા જરૂરી છે. આ પણ સદિશની એક પ્રાથમિક ઘટના છે.

ગણિતમાં પણ જેમને માન અને દિશા બંને હોય તેવી રાશિઓનો વિચાર કરી શકાય. દાખલા તરીકે, આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડીઓના ગણ તરીકે R^2 થી માહિતગાર છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે, R^2 અને સમતલના બિંદુઓ

વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. બિંદુ O(0, 0)ને ઊગમબિંદુ લઈ, O સિવાયના કોઈ પણ ઘટક દા.ત., (1, −2) સાથે માન અને દિશા સાંકળી શકીએ. ધારો કે બિંદુ P એ (1, −2)નું સમતલમાં નિરૂપણ કરે છે, તો (1, −2) સાથે $\overline{OP}$ લંબાઈ (એટલે કે $OP = \sqrt{(1)^2 - (-2)^2}$) અને $\overrightarrow{OP}$ની દિશા સાંકળી શકાય. આમ, (1, −2) ને સદિશ તરીકે લઈ શકાય. તે જ રીતે ક્રમયુક્ત ત્રયના ગણ R^3 ના ઘટકોને પણ સદિશ તરીકે લઈ શકાય.

R^2 અથવા R^3 ના ઘટકોને સદિશ તરીકે લઈ તેમના સમુચ્ચય R^2 અથવા R^3 ને **'સદિશ અવકાશ'** તરીકે લઈ શકાય.

9.3 R^2 અને R^3માં સદિશો

R^2 અને R^3 ને અનુક્રમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત યુગ્મ તથા ત્રયના ગણ તરીકે લઈ, R^2 અથવા R^3 ના ઘટકોને $\overline{x}$થી દર્શાવીશું. આમ, R^3 નો ઘટક $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, જ્યારે R^2 નો ઘટક $\overline{x} = (x_1, x_2)$ લઈશું.

સૌ પ્રથમ આપણે R^2 અને R^3 માં બે ઘટકોની સમાનતા વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

R^2 માં જો $x_1 = y_1$ અને $x_2 = y_2$ હોય, તો $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ લઈશું.

R^3 માં જો $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ અને $x_3 = y_3$ હોય, તો $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ લઈશું.

આમ, R^2 માં (1, 2) અને (2, 1) ભિન્ન ઘટકો છે.

હવેની ચર્ચામાં આપણે R^3 નો વિચાર કરીશું. આ બધાં જ પરિણામો R^2 માં પણ સત્ય છે.

વ્યાખ્યા : ધારો કે, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ એ R^3 ના બે ઘટકો છે. તેમનો સરવાળો $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$થી વ્યાખ્યાયિત થાય છે. આમ, જો $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ તથા $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ હોય, તો $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$, $z_3 = x_3 + y_3$.

સ્પષ્ટ છે કે, જો $\overline{x} \in R^3$, $\overline{y} \in R^3$ હોય, તો $\overline{x} + \overline{y} \in R^3$ એટલે કે, ઉપર વ્યાખ્યાયિત કરેલ સરવાળો સંવૃત્તતાનો ગુણધર્મ ધરાવે છે. $\overline{x} + \overline{y}$ને $\overline{x}$ અને $\overline{y}$નો સરવાળો કહેવાય છે.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. $k \in R$. k વડે $\overline{x}$ નો ગુણાકાર, $k\overline{x} = (kx_1, kx_2, kx_3)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

દેખીતું છે કે, $k \in R$ અને $\overline{x} \in R^3$ તો $k\overline{x} \in R^3$.

કેટલાંક દેખીતાં પરિણામો :

કોઈ પણ $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in R^3$ અને $k, l \in R$ માટે,

(i) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ (ક્રમનો નિયમ)

(ii) $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$ (જૂથનો નિયમ)

(iii) એક ઘટક $\overline{0} = (0, 0, 0)$ મળે છે, જેથી $\overline{0} = (0, 0, 0)$ માટે $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ (તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ)

તટસ્થ ઘટક $\overline{0}$ અનન્ય છે.

(iv) પ્રત્યેક $\overline{x} \in R^3$ માટે $\overline{y} \in R^3$ મળે જેથી $\overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$ (વિરોધી ઘટકનું અસ્તિત્વ)

જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ હોય, તો $\overline{y} = (-x_1, -x_2, -x_3)$ લેવાથી $\overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$ સાબિત કરી શકાય.

$\overline{y}$ ને $\overline{x}$ નો વિરોધી ઘટક કહે છે અને તે પ્રત્યેક $\overline{x}$ ને સંગત અનન્ય છે. $\overline{x}$ ના વિરોધી ઘટક માટે સંકેત $(-\overline{x})$ વપરાય છે.

$\therefore \quad -\overline{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$

(v) $k(\overline{x} + \overline{y}) = k\overline{x} + k\overline{y}$

(vi) $(k + l)\overline{x} = k\overline{x} + l\overline{x}$

(vii) $(kl)\overline{x} = k(l\overline{x})$

(viii) $1\overline{x} = \overline{x}$.

ઉપરોક્ત ગુણધર્મો વાળા ગણ R^3 ને R ઉપરનો સદિશ અવકાશ (Vector Space) કહે છે. યોગ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત સરવાળા અને Rના ઘટકો વડે અદિશ ગુણાકાર વાળા આ ગુણધર્મોવાળા ઘણા સદિશ અવકાશો હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રની પરિભાષામાં સદિશ અવકાશના ઘટકોને સદિશ (Vector) કહેવાય છે. આમ R^3 નો કોઈ પણ ઘટક સદિશ કહેવાય છે. R^2 પણ R ઉપરનો સદિશ અવકાશ છે.

R^3 (અથવા R^2) માં વ્યાખ્યાયિત ઉપરના સરવાળાને સદિશ સરવાળો (Vector Addition) કહેવાય છે. જ્યારે R^3 ને (અથવા R^2) R ઉપરના સદિશ અવકાશ તરીકે લઈએ ત્યારે R ના ઘટકોને અદિશ (Scalar) કહેવાય છે, આ પરિપ્રેક્ષ્યમાં વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અદિશ રાશિઓ છે. આથી, $k \in R$, $\bar{x} \in R^3$ માટે $k\bar{x}$ ને સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર કહે છે. અહીં ગુણાકાર $k\bar{x}$ એ સદિશ છે. $\bar{0} = (0, 0, 0)$ ને શૂન્ય સદિશ કહે છે.

9.4 સદિશનું માન

જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ હોય તો $\bar{x}$ના માનની વ્યાખ્યા $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ તરીકે આપવામાં આવે છે અને $\bar{x}$ ના માનને $|\bar{x}|$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

આમ, $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

આ જ રીતે, R^2 માંના સદિશ $\bar{x}$, એટલે કે $\bar{x} = (x_1, x_2)$ માટે, $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

નીચેનાં પરિણામો સ્વયં સ્પષ્ટ છે :

(1) $|\bar{x}| \geq 0$ કારણ કે, $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \geq 0$

(2) $|\bar{x}| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

(3) $|k\bar{x}| = |(kx_1, kx_2, kx_3)|$

$$= \sqrt{k^2x_1^2 - k^2x_2^2 + k^2x_3^2}$$

$$= \sqrt{k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

$$= \sqrt{k^2}\sqrt{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2}$$

$|k\bar{x}| = |k||\bar{x}|$.

અહીં $\sqrt{k^2} = |k|$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા kનો માનાંક છે અને

$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ સદિશ $\bar{x}$ નું માન છે.

વ્યાખ્યા : કોઈ સદિશ $\bar{x}$ માટે $|\bar{x}| = 1$ હોય તો તેને **એકમ સદિશ** કહેવાય છે.

R^2 માં એકમ સદિશના કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (1, 0), (0, −1), $\alpha \in R$ માટે $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ R^2 માં એકમ સદિશો છે. R^3 માં કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, (1, 0, 0), $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\alpha \in R$ માટે $(\cos\theta \sin\alpha, \cos\theta \cos\alpha, \sin\theta)$ એ R^3 માં એકમ સદિશો છે.

ઉદાહરણ 1 : જો $\bar{u} = (3, -1, 4)$, $\bar{v} = (1, -2, -3)$ હોય, તો $3\bar{u} + \bar{v}$ મેળવો.

ઉકેલ : $3\bar{u} + \bar{v} = 3(3, -1, 4) + (1, -2, -3)$

$$= (9, -3, 12) + (1, -2, -3)$$

$$= (9 + 1, -3 - 2, 12 - 3) = (10, -5, 9)$$

ઉદાહરણ 2 : $\overline{x} = (1, -1, 3)$, $\overline{y} = (1, 1, 1)$ હોય, તો $\overline{x} - 2\overline{y}$ મેળવો.

ઉકેલ : $\overline{x} - 2\overline{y} = \overline{x} + (-2)\overline{y}$

$= (1, -1, 3) + (-2)(1, 1, 1)$

$= (1, -1, 3) + (-2, -2, -2)$

$= (1 - 2, -1 - 2, 3 - 2) = (-1, -3, 1)$

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, R^3ના સદિશો $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ માટે $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + \overline{z} \Rightarrow \overline{y} = \overline{z}$

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ અને $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + \overline{z}$

$\therefore \ (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) + (z_1, z_2, z_3)$

$\therefore \ (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3)$

$\therefore \ x_1 + y_1 = x_1 + z_1, x_2 + y_2 = x_2 + z_2, x_3 + y_3 = x_3 + z_3$

$\therefore \ y_1 = z_1, y_2 = z_2, y_3 = z_3$

$\therefore \ (y_1, y_2, y_3) = (z_1, z_2, z_3)$

$\therefore \ \overline{y} = \overline{z}$

બીજી રીત :

$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + \overline{z}$

$\therefore \ (-\overline{x}) + (\overline{x} + \overline{y}) = (-\overline{x}) + \overline{x} + \overline{z}$ **($-\overline{x}$ અનન્ય છે.)**

$\therefore \ (-\overline{x} + \overline{x}) + \overline{y} = (-\overline{x} + \overline{x}) + \overline{z}$

$\therefore \ \overline{0} + \overline{y} = \overline{0} + \overline{z}$

$\therefore \ \overline{y} = \overline{z}$

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલો : $x(3, 1) + y(4, 2) = (1, 0)$

ઉકેલ : $x(3, 1) + y(4, 2) = (1, 0) \Leftrightarrow (3x, x) + (4y, 2y) = (1, 0)$

$\Leftrightarrow (3x + 4y, x + 2y) = (1, 0)$

$\Leftrightarrow 3x + 4y = 1, x + 2y = 0$

$\therefore \ x = 1, \ y = -\frac{1}{2}$

સ્વાધ્યાય 9.1

1. નીચેના સરવાળા મેળવો :

(1) $x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$; $(x_1, x_2 \in R)$

(2) $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$; $(x, y, z \in R)$

(3) $2(1, 2, 1) + 3(1, -2, 0)$ (4) $2(1, -1, -1) - 2(-1, 1, 1)$

(5) $-2(1, 2, 3) + (1, 0, -1)$ (6) $3(1, -1, 0) - (2, 2, 2)$

2. નીચેનાં સમીકરણો x અને y માટે ઉકેલો :

(1) $x(3, 2) + y(1, -1) = (2, 3)$ (2) $x(1, 1) + y(1, -1) = (0, 0)$

(3) $y(1, 2) = x(3, 1) + (1, 3)$ (4) $x(1, 0) + y(0, 1) = \overline{0}$

3. નીચેના સદિશોનાં માન મેળવો :

(1) $(1, 1, 1)$ (2) $(1, -1, -1)$ (3) $(3, -4, 0)$

(4) $(-1, -2, -3)$ (5) $(2, 3, -5)$ (6) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4. નીચે આપેલા સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે $|\bar{x} + \bar{y}| \le |\bar{x}| + |\bar{y}|$ ચકાસો.

(1) $\bar{x} = (1, -1, 2)$, $\bar{y} = (1, 2, 4)$

(2) $\bar{x} = \left(\frac{-3}{2}, 9, -9\right)$, $\bar{y} = (-1, 6, -6)$

5. $\bar{u} = (2, 3)$ અને $\bar{v} = (2k, k + 2)$ સમાન સદિશો હોય, તો kનું મૂલ્ય શોધો.

6. $\bar{u} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{5}, 0\right)$ અને $\bar{v} = \left(\frac{1}{6}, \frac{-2}{3}, 0\right)$ હોય, તો $3\bar{u} - 2\bar{v}$ શોધો.

*

9.5 સદિશની દિશા

અગાઉ જણાવ્યા મુજબ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં સદિશની સાથે તેના માન અને દિશા સંગત કરવામાં આવે છે. હવે આપણે પ્રત્યેક શૂન્યેતર સદિશ સાથે દિશાને સાંકળીશું. આપણે આ ચર્ચાને બે શૂન્યેતર સદિશોની દિશાની સમાનતા, વિરુદ્ધ દિશા ધરાવતાં બે શૂન્યેતર સદિશો અને ભિન્ન દિશા ધરાવતાં બે શૂન્યેતર સદિશો વ્યાખ્યાયિત કરવા પૂરતું સીમિત રાખીશું. આ ચર્ચા R^2 અથવા R^3 માં સદિશોની ભૌમિતિક સમજણમાં ઉપયોગી થશે.

ધારો કે, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એ R^2 અથવા R^3 માં શૂન્યેતર સદિશો છે. જો કોઈ $k > 0$ માટે $\bar{y} = k\bar{x}$ થાય તો $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ની દિશા સમાન છે તેમ કહેવાય અને $k < 0$ માટે $\bar{y} = k\bar{x}$ થાય તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે તેમ કહેવાય. વધુમાં જો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ની દિશાઓ સમાન કે વિરુદ્ધ ન હોય તો તેમની દિશાઓ ભિન્ન છે તેમ કહેવાય. જો $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ની દિશા સમાન હોય તો તેમને સમદિશ સદિશો પણ કહેવાય છે. $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય તો તેમને વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો કહે છે.

આમ, $(1, -1, 1)$ અને $(2, -2, 2)$ની દિશાઓ સમાન છે, કારણ કે,

$(2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$ અને $2 > 0$

વધુમાં, $(-1, 1, -1) = (-1)(1, -1, 1)$ હોવાથી $(1, -1, 1)$ અને $(-1, 1, -1)$ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

સદિશો $(1, -1, 1)$ અને $(2, 0, 2)$ ને ભિન્ન દિશાઓ છે કારણ કે, $(1, -1, 1) = k(2, 0, 2)$ થાય તેવો $k \in R$ મળે નહિ. (કેમ ?)

શૂન્યેતર સદિશ (x_1, x_2, x_3) વડે નક્કી થતી દિશાને $<x_1, x_2, x_3>$ થી દર્શાવવામાં આવે છે. $<x_1, x_2, x_3>$ ની વિરુદ્ધ દિશાને $-<x_1, x_2, x_3>$ થી દર્શાવવામાં આવે છે.

જો $k > 0$ હોય, તો $<kx_1, kx_2, kx_3> = <x_1, x_2, x_3>$ અને

જો $k < 0$ હોય, તો $<kx_1, kx_2, kx_3> = <-x_1, -x_2, -x_3>$.

અહીં નોંધીએ કે $k = 1$ સિવાય $(kx_1, kx_2, kx_3) = (x_1, x_2, x_3)$ લખી શકાય નહિ.

9.6 સદિશનાં માન અને દિશા અને એકમ સદિશ

પ્રમેય 1 : જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ અને $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ની દિશાઓ સમાન હોય તો અને તો જ $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ સમાન સદિશો થાય.

સાબિતી : ધારો કે, $\bar{x} = \bar{y}$

$\therefore \quad (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$

$\therefore \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$

$\therefore \quad |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = |\bar{y}|$

તેમજ, $\bar{x} = \bar{y}$ હોવાથી, $k = 1 > 0$ માટે $\bar{x} = k\bar{y}$

$\therefore \quad \bar{x}$ અને $\bar{y}$ની દિશાઓ સમાન છે.

એટલે કે, $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$

આમ, $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow |\bar{x}| = |\bar{y}|$ અને $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશાઓ સમાન છે.

આથી ઉલટું, ધારો કે, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$, $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ અને $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશાઓ સમાન છે.

હવે, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ની દિશાઓ સમાન હોવાથી કોઈક $k > 0$ માટે $\bar{y} = k\bar{x}$.

$\therefore \quad |\bar{y}| = |k\bar{x}| = |k|\,|\bar{x}|$

પરંતુ $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ આપેલું છે. આથી $|\bar{x}| = |k|\,|\bar{x}|$

વળી $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોવાથી $|\bar{x}| \neq 0$.

$\therefore \quad |k| = 1.$

$\therefore \quad k = \pm 1$. પરંતુ $k > 0$

$\therefore \quad k = 1$

$\therefore \quad \bar{y} = k\bar{x} = 1\bar{x} = \bar{x}$

$\therefore \quad |\bar{x}| = |\bar{y}|$ અને $\bar{x}$, $\bar{y}$ ની દિશાઓ સમાન છે $\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

આ પ્રમેય, ભૌતિકશાસ્ત્રમાં આપવામાં આવતી સદિશની વ્યાખ્યાને પ્રસ્થાપિત કરે છે.

પ્રમેય 2 : જો $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોય તો $\bar{x}$ની દિશામાં અનન્ય એકમ સદિશનું અસ્તિત્વ હોય.

સાબિતી : $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોવાથી $|\bar{x}| \neq 0$.

ધારો કે, $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = k\bar{x}$, જ્યાં $k = \frac{1}{|\bar{x}|} > 0$

$$\therefore \quad |\bar{y}| = |k\bar{x}| = |k|\,|\bar{x}| = \left|\frac{1}{|\bar{x}|}\right| |\bar{x}| = \frac{1}{|\bar{x}|}\,|\bar{x}| = 1 \qquad (\,||\bar{x}|| = |\bar{x}|\,)$$

$\therefore \quad \bar{y}$નું માન 1 છે. વળી, $k > 0$ માટે $\bar{y} = k\bar{x}$ હોવાથી $\bar{y}$ તથા $\bar{x}$ની દિશા સમાન છે.

આવો એકમ સદિશ અનન્ય હોય તેવું સાબિત કરવા માટે ધારો કે $\bar{z}$ પણ $\bar{x}$ની દિશામાં એકમ સદિશ છે. હવે, $|\bar{y}| = |\bar{z}| = 1$ અને $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ નો દિશા સમાન છે. ($\bar{x}$ની દિશા).

$\therefore$ પ્રમેય-1 પરથી, $\bar{y} = \bar{z}$

આમ, આપેલા શૂન્યેતર સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ અનન્ય હોય.

આપણે $\bar{x} = (2, 1, 2)$ ની દિશામાં એકમ સદિશ મેળવીએ.

$$|\bar{x}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

આમ, $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ માંગેલ $\bar{x}$ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

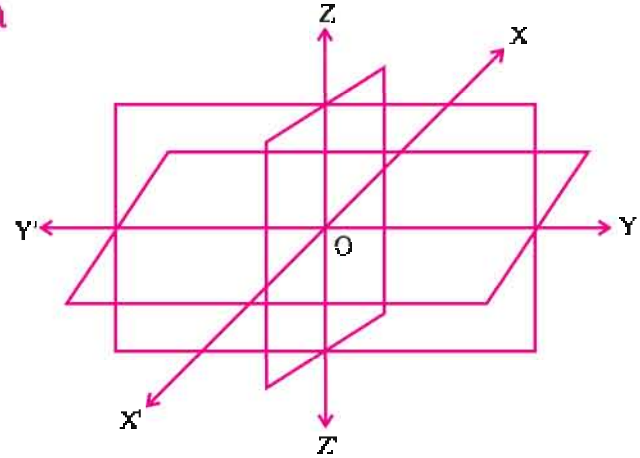
9.7 ત્રિપરિમાણીય યામ ભૂમિતિ

આપણો અત્યાર સુધીનો ભૂમિતિનો અભ્યાસ સમતલ સુધી સીમિત હતો. ઘણી વખત આપણે સમતલમાં ન હોય તેવી વસ્તુઓનો અભ્યાસ કરવાનો હોય છે. ખરેખર તો રોજબરોજના જીવનમાં સમતલનો ખ્યાલ અપૂરતો છે. દાખલા તરીકે, અવકાશમાં ફેંકેલ દડાની પ્રત્યેક ક્ષણે સ્થિતિનો વિચાર કરીએ અથવા જ્યારે આકાશમાં પતંગ ઊડતો હોય ત્યારે તેની સ્થિતિ અવકાશમાં સતત બદલાતી હોય છે. યાદ કરો કે, સમતલમાં કોઈ બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે સમતલમાંની પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે રેખાઓની જરૂર પડે છે. આ રેખાઓને **યામાક્ષો** અથવા **અક્ષો** કહે છે અને તેમને **X-અક્ષ અને Y-અક્ષ** એવાં નામ અપાય છે. અને બિંદુના યામનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય એટલે યામાક્ષોથી બિંદુનું લંબઅંતર. આમ, આ રેખાઓની મદદથી સમતલના કોઈ પણ બિંદુ સાથે વાસ્તવિક સંખ્યાનું અનન્ય ક્રમયુક્ત યુગ્મ સંગત કરી શકાય છે. તેમજ વાસ્તવિક સંખ્યાના કોઈ પણ ક્રમયુક્ત યુગ્મને સંગત સમતલમાં એક અનન્ય બિંદુ મળે, જેના યામ આપેલ વાસ્તવિક સંખ્યાનું ક્રમયુક્ત યુગ્મ હોય. આમ, સમતલનાં બિંદુઓ અને R^2 વચ્ચે એક-એક સંગતતા મળે છે.

જો અવકાશમાંના કોઈ બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવું હોય તો બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પૂરતી નથી. દાખલા તરીકે છત પર લટકતા પંખાનું કેન્દ્ર નક્કી કરવા માટે ઓરડાની પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે દીવાલોથી તેનું અંતર તેમજ કેન્દ્રની ભોંયતળિયાથી ઊંચાઈની જરૂર પડે. આમ, ત્રણ પરસ્પર લંબ સમતલો, એટલે કે ભોંયતળિયું તથા અન્ય બે પરસ્પર લંબ દીવાલોથી અંતર એમ કુલ ત્રણ સંખ્યાની જરૂરત પડે. વ્યાપક રીતે, અવકાશના કોઈ પણ બિંદુનું સ્થાન પરસ્પર લંબ હોય તેવા ત્રણ સમતલથી બિંદુના લંબઅંતર દ્વારા નક્કી કરી શકાય. આ લંબઅંતરો પરથી બિંદુના યામ નિશ્ચિત કરી શકાય. આ પરસ્પર લંબ સમતલોને **યામ સમતલ** કહેવાય છે. XY-સમતલમાંના બિંદુના યામની માફક અવકાશમાંના બિંદુ માટે પણ યામ ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે છે. આથી, અવકાશના કોઈ પણ બિંદુને ત્રણ યામ હોય છે. તેમજ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓના આપેલ ક્રમયુક્ત ત્રય માટે અવકાશમાં એક બિંદુ એવું મળે કે જેના યામ આપેલ ત્રય હોય. આ પ્રકરણમાં આપણે **ત્રિપરિમાણીય (Three dimentional)** અવકાશની ભૂમિતિની પ્રાથમિક ચર્ચા કરીશું. અહીં નોંધીએ કે R^3 ના ઘટકો અને ત્રિપરિમાણીય અવકાશનાં બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે.

9.8 ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં યામાક્ષો અને યામ સમતલો

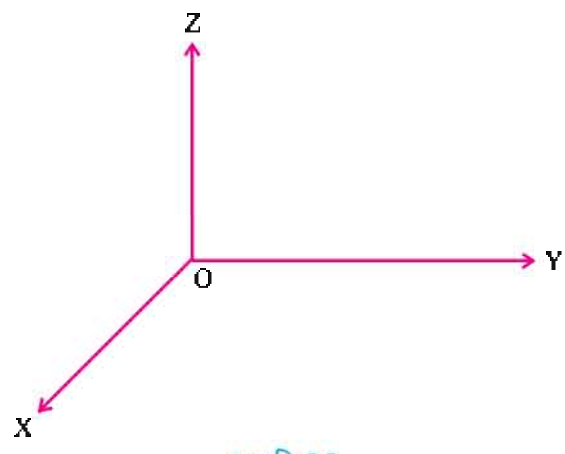
સમતલના કિસ્સામાં બે પરસ્પર લંબ રેખાઓને સંદર્ભ રેખાઓ તરીકે લેવામાં આવે છે. અવકાશમાંના બિંદુના યામ નક્કી કરવા માટે પરસ્પર લંબ હોય, તેવા ત્રણ સમતલોને સંદર્ભ તરીકે લેવામાં આવે છે. બિંદુ O માં પરસ્પર છેદતાં અને પરસ્પર લંબ હોય તેવા ત્રણ સમતલોનો વિચાર કરીએ. (આકૃતિ 9.1). આ ત્રણ સમતલો પૈકી બબ્બેની જોડમાં સમતલો રેખા X'OX, Y'OY અને Z'OZ માં છેદે છે. આ રેખાઓને અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ કહેવાય છે. અહીં નોંધીએ કે આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે. આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી તેઓ **લંબ યામ પદ્ધતિ (Rectangular Co-ordinate System)**નું નિર્માણ કરે છે. બિંદુ O માંથી પસાર થતી આ પરસ્પર લંબરેખાઓને **યામાક્ષો** અથવા સરળતા ખાતર **અક્ષો** કહીશું. (આકૃતિ 9.2).



આકૃતિ 9.1

બિંદુ O ને યામ પદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ કહેવાય છે. સમતલો XOY, YOZ અને ZOXને અનુક્રમે **XY-તલ, YZ-તલ અને ZX-તલ** કહેવાય છે અને તેમને **યામ સમતલો** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આપણે આ કાગળના સમતલને XOY સમતલ તરીકે લઈશું અને O માંથી પસાર થતી તેને લંબરેખાને Z'OZ તરીકે લઈશું. જો કાગળનું સમતલ સમક્ષિતિજ હોય, તો રેખા Z'OZ શિરોલંબ રેખા થશે.

સમતલના કિસ્સામાં આપણે જોયું છે કે યામાક્ષો સમતલને ચાર ભાગમાં વહેંચે છે, જેને ચરણ કહે છે. તે જ રીતે યામ સમતલો અવકાશને **અષ્ટાંશ (Octant)** તરીકે ઓળખાતા આઠ ભાગમાં વહેંચે છે. આ અષ્ટાંશોને XOYZ, X'OYZ, X'OY'Z, XOY'Z, XOYZ', X'OYZ', X'OY'Z' અને XOY'Z' એમ નામ આપી શકાય. તે અનુક્રમે I, II, III, ..., VIII અષ્ટાંશ તરીકે દર્શાવાય છે.



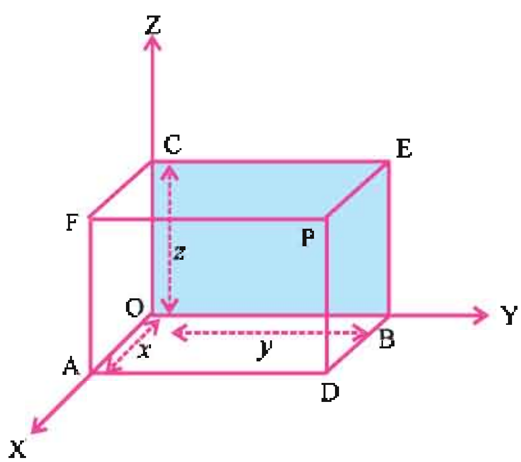
આકૃતિ 9.2

નોંધ : ઉપર ચર્ચા કરેલી યામ પદ્ધતિ, અવકાશમાં કોઈ બિંદુના યામ આપવાની પદ્ધતિઓમાંની એક છે. આ યામ પદ્ધતિને ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી રેને દ'કાર્ત (René Descartes)ના નામ ઉપરથી કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિ કહેવાય છે. આ સિવાયની યામ પદ્ધતિઓ પણ પ્રચલિત છે.

અવકાશમાંના બિંદુના યામ :

ઊગમબિંદુ અને યામાક્ષોની મદદથી સમતલમાં આવેલ કોઈ પણ બિંદુના યામ નક્કી કરવાની પદ્ધતિને અનુસરીને, અવકાશમાં આવેલ કોઈ બિંદુના ત્રણ યામ કેવી રીતે નક્કી કરવા તેની હવે ચર્ચા કરીશું. તેમજ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના આપેલ ક્રમયુક્ત ત્રયને સંગત અવકાશમાં બિંદુ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું.

બિંદુ P માંથી આકૃતિ 9.3માં બતાવ્યા પ્રમાણે યામ સમતલોને સમાંતર ત્રણ સમતલો દોરો. ધારો કે, તે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુઓ A, B અને Cમાં છેદે છે. જો A(x, 0, 0), B(0, y, 0) અને C(0, 0, z), હોય તો બિંદુ P ના યામ x, y અને z થશે. P ને આપણે P(x, y, z) તરીકે લખીશું. આથી ઊલટું આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x, y અને z ને સંગત X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ ઉપર અનુક્રમે બિંદુઓ A(x, 0, 0), B(0, y, 0) અને C(0, 0, z) મેળવીશું. હવે, A, B અને C માંથી અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષને લંબ સમતલો દોરો. આ ત્રણ સમતલો ADPF, BDPE અને CEPF નું છેદબિંદુ P છે. તે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત ત્રય (x, y, z) ને સંગત બિંદુ છે. અહીં જુઓ કે P(x, y, z) અવકાશનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો $|x|$, $|y|$ અને $|z|$ અનુક્રમે YZ, ZX અને XY સમતલથી અંતરો છે. આમ, સમતલના બિંદુઓ અને વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત ત્રય વચ્ચે એક-એક સંગતતા મળે. આમ, અવકાશ અને ક્રમયુક્ત ત્રયનો ગણ R^3 સમરૂપ છે.



આકૃતિ 9.3

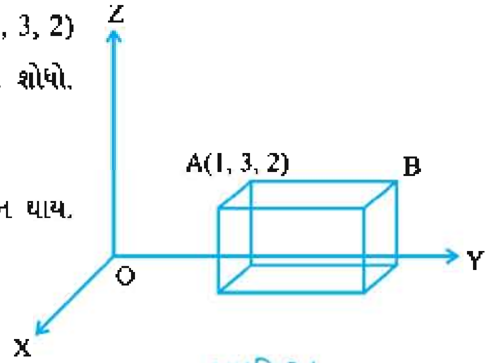
નોંધ : ઊગમબિંદુના યામ (0, 0, 0) છે. X-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ (x, 0, 0) અને YZ-સમતલના કોઈ પણ બિંદુના યામ (0, y, z) થાય. આ જ રીતે અન્ય યામાક્ષ અને યામ સમતલના બિંદુઓના યામ લખી શકાય.

નોંધ : ધન અને ઋણ યામોની ગોઠવણી પરથી બિંદુને સમાવતું અષ્ટાંશ નક્કી કરી શકાય. નીચેના કોષ્ટકમાં આ માહિતી દર્શાવી છે :

કોષ્ટક 9.1

અષ્ટાંશ → યામ ↓	I OXYZ	II OX'YZ	III OX'Y'Z	IV OXY'Z	V OXYZ'	VI OX'YZ'	VII OX'Y'Z'	VIII OXY'Z'
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 9.4 માં બતાવ્યા મુજબ લંબઘનનું એક શિરોબિંદુ A(1, 3, 2) છે. તેની બાજુ $\overline{AB}$ એ Z-અક્ષને લંબ છે. શિરોબિંદુ Bનો z-યામ શોધો. બાજુ $\overline{AB}$ ની લંબાઈ 3 હોય, તો બિંદુ B નો y-યામ શોધો.



આકૃતિ 9.4

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$ એ Z-અક્ષને લંબ હોવાથી A તથા B ના z-યામ સમાન થાય.

આમ બિંદુ Bનો z-યામ 2 છે.

હવે, $\overline{AB}$ એ Y-અક્ષને સમાંતર છે.

આમ, B નો y-યામ = Aનો y-યામ + 3 = 3 + 3 = 6.

સ્વાધ્યાય 9.2

1. નીચેના કોષ્ટકમાં પ્રથમ સ્તંભમાં આપેલ બિંદુને સમાવતા અષ્ટાંશનું નામ બીજા સ્તંભમાં પૂરો :

બિંદુ	અષ્ટાંશ
(1, 2, 3)	
(1, −2, −4)	
($\sqrt{2}$, 2, −1)	
(−1, −2, 0)	
(−1, −1, −1)	

2. રામ, બિંદુ (−1, 2, 0)થી ચાલવાનું શરૂ કરે છે. તે $\overrightarrow{OX}$ની દિશામાં 1 એકમ ચાલે છે. ત્યારબાદ $\overrightarrow{OY'}$ દિશામાં વધુ 2 એકમ ચાલે છે. રામનું અંતિમ સ્થાન શું હશે ?

*

9.9 સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ

ધારો કે, બિંદુ P યામ સમતલનું ઊગમબિંદુ સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ છે. O થી P ની દિશા એટલે કે, $\overrightarrow{OP}$ની દિશાના $\overline{OP}$ ને $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ વડે દર્શાવીશું. આમ, $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ એ $\overrightarrow{OP}$ ની દિશામાંનો દિશાયુક્ત રેખાખંડ છે.

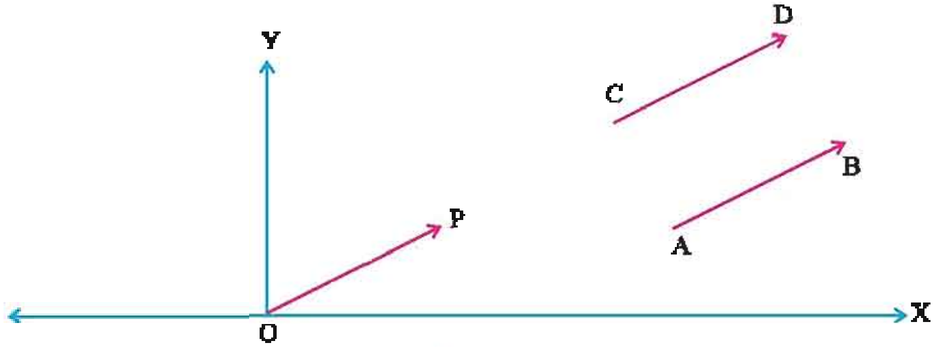
આપણે જાણીએ છીએ કે યામ સમતલમાંના કોઈ પણ બિંદુ P ને વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મ (x_1, x_2) સાથે સંગત કરી શકાય, આથી ઊલટું વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મને સંગત સમતલમાં એક બિંદુ મળે. બિંદુના યામ (x_1, x_2) છે તેમ કહેવાય. આમ, સમતલ અને ક્રમયુક્ત યુગ્મનો ગણ R^2 એકરૂપ છે, આથી આપણે R^2 અને સમતલનો સમાનાર્થી શબ્દ તરીકે ઉપયોગ કરીશું.

સ્થાનસદિશ : ધારો કે સમતલમાં Pના યામ (x_1, x_2) છે. P ઊગમબિંદુ નથી. દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overrightarrow{OP}$ ને, ઊગમબિંદુ O ને સાપેક્ષ બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ (Position Vector) કહેવાય છે. x_1 તથા x_2 ને $\overrightarrow{OP}$ ના ઘટક કહે છે. સરળતા ખાતર (x_1, x_2) ને બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ કહીશું.

ઊગમબિંદુના સ્થાનસદિશના ઘટકો 0 અને 0 થાય. બે સદિશોના સરવાળા અને અદિશ દ્વારા ગુણાકારની વ્યાખ્યાની મદદથી બે સ્થાનસદિશોના સરવાળા અને અદિશ વડે ગુણાકાર સરળતાથી વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

હવે કોઈ રેખાખંડ $\overline{AB}$ નો વિચાર કરો. તો તેની સાથે પણ સ્થાનસદિશની માફક દિશા સાંકળી શકાય. રેખાખંડ $\overrightarrow{AB}$ ની દિશા પણ બિંદુ A થી બિંદુ B તરફના કિરણ $\overrightarrow{AB}$ની દિશા થાય. આમ, AB લંબાઈવાળા અને કિરણ $\overrightarrow{AB}$ ની દિશાવાળા દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overrightarrow{AB}$ ને બિંદુ B ના બિંદુ A ને સાપેક્ષ સ્થાનસદિશ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. કોઈ પણ બિંદુનો પોતાના સાપેક્ષ સ્થાનસદિશ શૂન્ય સદિશ થાય.

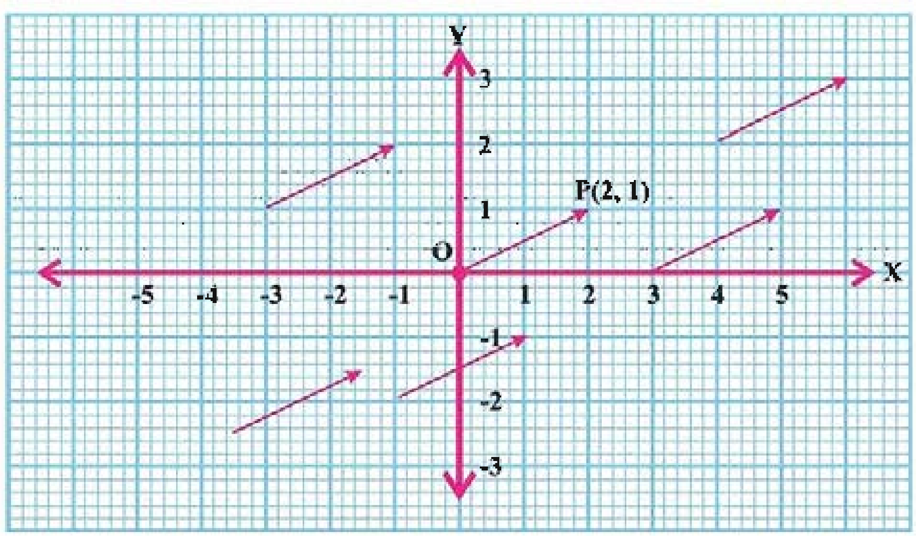
નીચેની આકૃતિ જુઓ :



આકૃતિ 9.5

બે સદિશોની સમાનતાની વ્યાખ્યા અનુસાર બે દિશાયુક્ત રેખાખંડોની સમાનતા વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આમ, જો AB = CD અને $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ ની દિશા સમાન હોય તો $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ લઈશું. પ્રત્યેક $\overrightarrow{AB}$ માટે એવો દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overrightarrow{OP}$ એવો મળે કે જેથી $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$. આકૃતિમાં $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ તેમજ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$. સમતલમાં સમાન હોય તેવા અનંત દિશાયુક્ત રેખાખંડો મળે પણ રેખાખંડ તરીકે તેઓ ભિન્ન હોય. પ્રત્યેક દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overrightarrow{AB}$ માટે $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ થાય તેવો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OP}$ મળે. આમ, $\overrightarrow{OP}$ એ દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overrightarrow{AB}$ને સમાન હોય તેવા રેખાખંડોના સમૂહનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે. $\overrightarrow{OP}$ જેવા સ્થાનસદિશો **નિયત સદિશો (bound vectors)** કહેવાય છે. કારણ કે તેમનું એક અંત્યબિંદુ O નિશ્ચિત હોય છે, જ્યારે $\overrightarrow{OP}$ને સમાન અન્ય દિશાયુક્ત રેખાખંડો (જેમકે $\overrightarrow{AB}$) ને **મુક્ત સદિશો (free vectors)** કહેવાય છે કારણ કે તેમનાં બંને અંત્યબિંદુઓ, સદિશ બદલ્યા વિના યથેચ્છ રીતે પસંદ કરી શકાય છે.

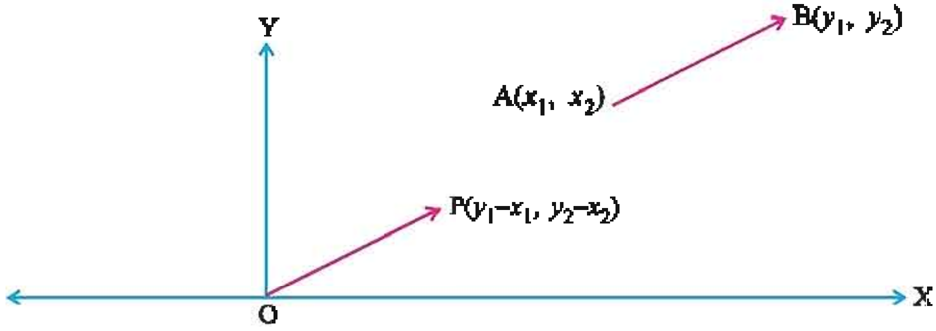
હવે આકૃતિ 9.6 જુઓ :



આકૃતિ 9.6

અહીં તમામ રેખાખંડો સમાન રીતે દિશાયુક્ત છે અને તેના શરૂઆતના બિંદુને જમણી તરફ 2 એકમ અને ત્યારબાદ 1 એકમ ઉપરની દિશામાં (જાણે ચેસ બોર્ડના ઘોડાની ચાલ) ચાલી અંત્યબિંદુ મળે છે. આનો અર્થ એ કે આ બધાં જ સ્થાનસદિશ (2, 1)ને સમાન છે. બીજા શબ્દોમાં (2, 1), આકૃતિ 9.6ના બધા જ સદિશો દર્શાવે છે.

ધારો કે $A(x_1, x_2)$, $B(y_1, y_2)$ તથા $P(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ સમતલનાં બિંદુઓ છે.



આકૃતિ 9.7

આકૃતિ 9.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\overrightarrow{AB}$ની દિશા = $\overrightarrow{OP}$ની દિશા અને

$AB = OP = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.

આમ, મુક્ત સદિશ $\overrightarrow{AB}$ અને નિયત સદિશ $\overrightarrow{OP}$ સમાન સદિશો છે. તેમજ,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$$
$$= (y_1, y_2) - (x_1, x_2)$$
= **Bનો સ્થાનસદિશ − Aનો સ્થાનસદિશ**

આ જ રીતે, આપણે અવકાશમાં સ્થાનસદિશની વ્યાખ્યા આપી શકીએ, તેમજ અવકાશમાં મુક્ત સદિશ તેમજ નિયત સદિશની વ્યાખ્યા આપીશું. ધારો કે $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$ તથા $P(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ બિંદુઓ હોય, તો મુક્ત સદિશ $\overrightarrow{AB}$ માટે,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$
$$= (y_1, y_2, y_3) - (x_1, x_2, x_3)$$
= **Bનો સ્થાનસદિશ − Aનો સ્થાનસદિશ**

વધુમાં, આ મુક્ત સદિશ $\overrightarrow{AB}$ને સંગત, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ થાય તેવો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OP}$ મળે.

આ રીતે અવકાશમાંના સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ થાય.

ઉદાહરણ 5 : નીચે આપેલ સદિશોની પ્રત્યેક જોડ માટે સદિશોની દિશા સમાન, વિરુદ્ધ કે ભિન્ન છે તે નક્કી કરો :

(1) (1, 1, 1), (2, 2, 2)　　(2) (1, −1, 2), (0.5, −0.5, 1)

(3) (1, −1, 0), (0, 1, −1)　　(4) (3, 6, −9), (−1, −2, 3)

(5) (1, 0, 0), (0, 1, 0)　　(6) (2, 5, 7), (−2, 5, −7)

ઉકેલ : (1) (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1). અહીં, $k = 2 > 0$

$\therefore$ સદિશોની દિશા સમાન છે. $<2, 2, 2> = <1, 1, 1>$

(2) $(0.5, -0.5, 1) = (0.5)(1, -1, 2)$,

અહીં, $k = 0.5 > 0$

$\therefore$ સદિશોની દિશા સમાન છે. $<0.5, -0.5, 1> = <1, -1, 2>$

(3) શક્ય હોય, તો ધારો કે, કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $(0, 1, -1) = k(1, -1, 0)$,

$\therefore$ $0 = k$, $1 = -k$, $-1 = 0$ જે શક્ય નથી.

આમ, કોઈ પણ $k \in R - \{0\}$ ના મળે જેથી $(0, 1, -1) = k(1, -1, 0)$.

આથી આ સદિશોની દિશાઓ ભિન્ન છે.

(4) $(3, 6, -9) = -3(-1, -2, 3)$; અહીં, $k = -3 < 0$

$\therefore$ સદિશો વિરુદ્ધ દિશાઓ ધરાવે છે. $<3, 6, -9> = -<-1, -2, 3>$

(5) ઉપર (3)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પણ $k \in R$ માટે,

$(1, 0, 0) = k(0, 1, 0)$ ન થાય.

$\therefore$ સદિશો (1, 0, 0) તથા (0, 1, 0)ની દિશાઓ ભિન્ન છે.

(6) શક્ય હોય તો ધારો કે, કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે,

$(2, 5, 7) = k(-2, 5, -7)$

$2 = -2k$, $5 = 5k$, $7 = -7k$

આ શક્ય નથી કારણ કે પ્રથમ સમીકરણનું $k = -1$ માટે સમાધાન થાય છે. પરંતુ બીજા સમીકરણનું સમાધાન થતું નથી. આમ સદિશોની દિશાઓ ભિન્ન છે.

નોંધ : (1) ધારો કે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ શૂન્યેતર સદિશો છે અને $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$

જો $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = k$ હોય, તો $k > 0$ અથવા $k < 0$ હોય તે અનુસાર $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન હોય કે વિરુદ્ધ હોય. જો $\frac{y_1}{x_1} \neq \frac{y_2}{x_2}$ અથવા $\frac{y_2}{x_2} \neq \frac{y_3}{x_3}$ અથવા $\frac{y_3}{x_3} \neq \frac{y_1}{x_1}$ હોય તો તેમની દિશાઓ ભિન્ન થાય.

(2) જો $x_1 = 0 = y_1$ અને $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = k > 0$, તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ને સમાન દિશા હોય અને જો $k < 0$ હોય તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ વિરુદ્ધ દિશાઓ ધરાવે છે. $\frac{y_2}{x_2} \neq \frac{y_3}{x_3}$ હોય તો તેમની દિશાઓ ભિન્ન થાય.

$x_2 = 0 = y_2$ અથવા $x_3 = 0 = y_3$ માટે પણ આવાં જ પરિણામો સત્ય છે.

(3) જો $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ હોય, તો $\frac{y_3}{x_3} > 0$ માટે તેમની દિશા સમાન થાય અને $\frac{y_3}{x_3} < 0$ માટે તેમની દિશાઓ વિરુદ્ધ થાય.

$\overline{0} = (0, 0, 0)$ની દિશા વ્યાખ્યાયિત નથી તે ફરી યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : $\bar{u} = (6, -7, 6)$ની દિશામાં એકમ સદિશ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $|\bar{u}| = \sqrt{6^2+(-7)^2+6^2} = \sqrt{121} = 11$

$\therefore$ $\bar{u}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ, $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \left(\frac{6}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

ઉદાહરણ 7 : $\bar{x} = (4, 7, -2)$, $\bar{y} = (1, 2, 2)$ આપેલ છે. $\bar{x} - 2\bar{y}$ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં એકમ સદિશ મેળવો.

ઉકેલ : $\bar{x} - 2\bar{y} = (4, 7, -2) - 2(1, 2, 2) = (2, 3, -6) = \bar{z}$ (ધારો)

હવે, $|\bar{z}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ $\bar{z}$ ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં એકમ સદિશ, $-\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

ઉદાહરણ 8 : નીચે આપેલ બિંદુઓ A અને B માટે $\overrightarrow{AB}$ મેળવો :

(1) A(1, −1), B(1, 2) (2) A(1, −1, 1), B(1, 1, −1)

(3) A(1, 2, 3), B(4, 5, 6) (4) A(1, −2, 1), B(−1, 1, 1)

ઉકેલ : $\overrightarrow{AB}$ = Bનો સ્થાનસદિશ − Aનો સ્થાનસદિશ

(1) $\overrightarrow{AB} = (1, 2) - (1, -1) = (0, 3)$.

(2) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1) - (1, -1, 1) = (0, 2, -2)$.

(3) $\overrightarrow{AB} = (4, 5, 6) - (1, 2, 3) = (3, 3, 3)$.

(4) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) - (1, -2, 1) = (-2, 3, 0)$.

સ્વાધ્યાય 9.3

1. નીચે આપેલ સદિશોના યુગ્મ માટે તેમની દિશા સમાન, વિરુદ્ધ કે ભિન્ન છે તે નક્કી કરો :

(1) A(2, −5, 3), B(0.4, −1, 0.6) (2) (1, 2, 4), (3, 4, 6)

(3) A(2, 4, −6), B(−1, −2, 3) (4) (1, 0, 1), (0, 1, 1)

2. નીચેના સદિશોની દિશામાં એકમ સદિશ મેળવો :

(1) $\bar{x} = (3, -4)$ (2) $\bar{y} = (-3, -4)$ (3) $\bar{x} = (1, 3, 5)$

(4) $\bar{y} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (5) $\bar{y} = (1, 0, 0)$ (6) $\bar{y} = (-5, 12)$

3. જો $\bar{x} = (x_1, x_2)$ અને $\bar{x} = \alpha(1, 2) + \beta(2, 1)$ હોય, તો α અને β શોધો.

*

9.10 અંતરસૂત્ર

ધારો કે બિંદુઓ A અને Bના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\bar{r}_1$ અને $\bar{r}_2$ છે અને $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\overrightarrow{AB}$ = Bનો સ્થાનસદિશ − Aનો સ્થાનસદિશ

$= (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$

$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\therefore \quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

આને અંતરસૂત્ર કહેવાય છે અને તે R^3ના બે બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$ અને $B(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે.

નોંધ : XY-સમતલમાં કોઈ પણ બિંદુનો z-યામ શૂન્ય હોય છે. આમ ઉપરોક્ત અંતરસૂત્રમાં $z_1 = z_2 = 0$ લેતાં સમતલમાં અંતરસૂત્ર મળે, જેનો આપણે ધોરણ 10 માં અભ્યાસ કર્યો હતો.

ઉદાહરણ 9 : બિંદુઓ (1, −1, 2) અને (−2, 1, 8) વચ્ચેનું અંતર મેળવો.

ઉકેલ : P(1, −1, 2) અને Q(−2, 1, 8) લેતાં,

$$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-1)^2 + (2-8)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

આમ, બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર 7 છે.

ઉદાહરણ 10 : અંતરસૂત્ર દ્વારા બિંદુઓ P(4, −3, −1), Q(5, −7, 6) અને R(3, 1, −8) સમરેખ છે, તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : અહીં, $PQ = \sqrt{(4-5)^2 + (-3+7)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66}$

$$QR = \sqrt{(5-3)^2 + (-7-1)^2 + (6+8)^2} = \sqrt{4+64+196} = 2\sqrt{66}$$

$$PR = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-1)^2 - (-1+8)^2} = \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66}$$

આમ, PQ + PR = QR એટલે કે Q–P–R.

$\therefore$ આપેલ બિંદુઓ સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 11 : બિંદુઓ A(1, 2, 4), B(1, 2, 0) અને C(1, 5, 0) માટે ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $AB^2 = (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (4 - 0)^2 = 16$. તેથી AB = 4

$BC^2 = (1 - 1)^2 + (2 - 5)^2 + (0 - 0)^2 = 9$. તેથી BC = 3

$AC^2 = (1 - 1)^2 + (5 - 2)^2 + (0 - 4)^2 = 25$. તેથી AC = 5

$\therefore$ બિંદુઓ સમરેખ નથી અને તેઓ ત્રિકોણ રચે છે.

અને $AC^2 = AB^2 + BC^2$. આથી ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle B$ કાટખૂણો છે.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુ A(2, −1, 1) થી $3\sqrt{3}$ અંતરે આવેલ X-અક્ષ પરના બિંદુઓ શોધો.

ઉકેલ : X-અક્ષ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(x, 0, 0)$ હોય. હવે,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (0+1)^2 + (0-1)^2} = 3\sqrt{3}$$

$\therefore \quad x^2 - 4x + 4 + 1 + 1 = 27$

$\therefore \quad x^2 - 4x + 4 = 25$

$\therefore \quad (x - 2)^2 = 25$

$\therefore \quad x - 2 = \pm 5$

$\therefore \quad x = 7$ અથવા $x = -3$

આમ, x પર બે બિંદુઓ P(7, 0, 0) અને P(−3, 0, 0) માંગ્યા પ્રમાણે મળે.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ (2, −1, 1) અને (1, 3, 1)થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુઓના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ બિંદુઓ (2, −1, 1) અને (1, 3, 1) થી સમાન અંતરે આવેલ કોઈ બિંદુ યામ (x, y, z) છે.

આમ, $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2$

$\therefore \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

$\quad\quad = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1$

$\therefore \quad -4x + 2y + 5 = -2x - 6y + 10$

$\therefore \quad 2x - 8y + 5 = 0$ માંગેલ બિંદુગણનું આ સમીકરણ છે.

નોંધ : સમતલમાં આ પ્રકારના બિંદુગણને આપેલ રેખાખંડનો **લંબદ્વિભાજક (Perpendicular Bisector)** કહેવામાં આવે છે. અવકાશમાં આને આપેલ રેખાખંડનું **લંબદ્વિભાજક સમતલ (Perpendicular Bisector Plane)** કહેવાય છે. તે આપેલ રેખાખંડના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતું રેખાખંડને લંબ હોય તેવું સમતલ છે.

સ્વાધ્યાય 9.4

1. નીચે આપેલ બિંદુયુગ્મ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

(1) (1, −1, 3), (1, −1, 3) (2) (1, 2, 3), (3, 4, 5)

(3) (2, −3, 18), (0, 1, 14) (4) $(1, \sqrt{2}, -1), (3, 3\sqrt{2}, 1)$

(5) (1, −2, 5014), (4, 2, 5014) (6) (1, 1, 0), (0, 1, 0)

2. નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહિ તે અંતરસૂત્રની મદદથી નક્કી કરો :

(1) P(1, 3, 2), Q(1, 2, 1), R(2, 3, 1)

(2) A(0, 1, 0), B(0, −1, 0), C(0, 2, 0)

(3) L(1, 2, 3), M(−3, −1, 1), A(−3, 2, 7)

(4) V(1, 2, 3), A(2, 3, 1), H(3, 1, 2)

3. આપેલ બિંદુઓ A(0, 7, 10), B(−1, 6, 6), C(−4, 9, 6), માટે ΔABCનો પ્રકાર નક્કી કરો.

4. બિંદુઓ (−2, 1, 3) થી $\sqrt{14}$ અંતરે આવેલ Z-અક્ષ પરનાં બિંદુઓ શોધો.

5. બિંદુઓ A(3, 4, 5), B(−1, 2, 7) માટે $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ થાય તેવા બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો. $k \in R$

6. O(0, 0, 0), A(2, −3, 6), B(0, −7, 0) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ દર્શાવો.

*

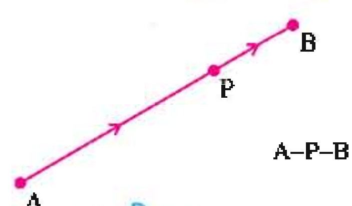
9.11 વિભાજન સૂત્ર

R^2 માં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના વિભાજન સૂત્રની ચર્ચા અગાઉ કરેલ છે. હવે આપણે R^3 ના બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના વિભાજનનું સૂત્ર સદિશોની મદદથી મેળવીશું.

ધારો કે અવકાશનાં બિંદુઓ અનુક્રમે A અને B ના સ્થાનસદિશો $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ છે. ધારો કે, $P \in \overleftrightarrow{AB}$ $(P \neq A, P \neq B)$. બિંદુઓ A, B અને P એક જ રેખા પર આવેલા હોવાથી $\overrightarrow{AP}$ અને $\overrightarrow{PB}$ ની દિશાઓ સમાન અથવા વિરુદ્ધ હોય. આમ, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$, જ્યાં, $k \neq 0$.

$\therefore \quad |\overrightarrow{AP}| = |k|\,|\overrightarrow{PB}|$ અથવા $AP = |k|\,PB$

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = |k|$



આકૃતિ 9.8

ધારો કે, બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ $\bar{r} = (x, y, z)$.

(i) જો A–P–B અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$ અને $\lambda > 0$ તો બિંદુ P એ $\overline{AB}$નું A તરફથી અંતઃવિભાજન કરે છે તેમ કહીશું. (આકૃતિ 9.8)

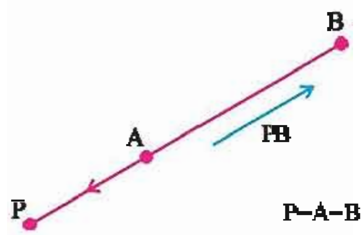
$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = |k| = \lambda$

વધુમાં, $\overrightarrow{AP}$ અને $\overrightarrow{PB}$ ની દિશા સમાન હોવાથી $k > 0$.

આથી, $|k| = k$.

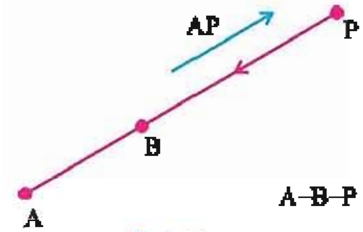
આથી, $|k| = \lambda$ હોવાથી $k = \lambda$.

આમ, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$.



આકૃતિ 9.9

(ii) જો P–A–B અથવા A–B–P તથા $\frac{AP}{PB} = -\lambda$ અને $\lambda < 0$ હોય તો આ કિસ્સામાં P એ $\overline{AB}$નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે તેમ કહેવાય. આકૃતિ 9.9 અને 9.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\overrightarrow{AP}$ અને $\overrightarrow{PB}$ ની દિશાઓ વિરુદ્ધ હોય. આથી $k < 0$.



આકૃતિ 9.10

$\therefore \quad |k| = -k$

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = -\lambda = -k$ $\qquad (|k| = -k$ અને $\frac{AP}{PB} = -\lambda)$

આથી, $k = \lambda$.

$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$.

આમ, બંને કિસ્સામાં $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$. $\qquad (\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{PB})$

$\therefore \quad \bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r})$

$\therefore \quad \bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda\bar{r}_2 - \lambda\bar{r}$

$\therefore \quad (1 + \lambda)\bar{r} = \lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1$

વિભાજનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $\lambda \neq -1$ હોવાથી,

$\therefore \quad \bar{r} = \frac{1}{\lambda + 1}(\lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1)$

$$(x, y, z) = \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda(x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1))$$

$$= \frac{1}{(\lambda + 1)}(\lambda x_2 + x_1, \lambda y_2 + y_1, \lambda z_2 + z_1)$$

$$\therefore \quad (x, y, z) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right)$$

આને **વિભાજન સૂત્ર** કહે છે અને તે રેખાખંડ $\overline{AB}$નું $A(x_1, y_1, z_1)$ તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ આપે છે.

જો ગુણોત્તર $\lambda = m : n$ હોય, તો ઉપરોક્ત સૂત્ર પરથી,

$$\bar{r} = \frac{1}{\frac{m}{n} + 1}\left(\frac{m}{n}\bar{r}_2 + \bar{r}_1\right) = \frac{1}{m - n}(m\bar{r}_2 + n\bar{r}_1); \quad m + n \neq 0$$

9.12 વિભાજન સૂત્રના ઉપયોગો

(i) મધ્યબિંદુના યામ : જો P એ $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ હોય, તો AP = PB અને A–P–B.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \lambda = 1$

$\therefore$ P નો સ્થાનસદિશ $\bar{r}$ નીચે મુજબ મળે :

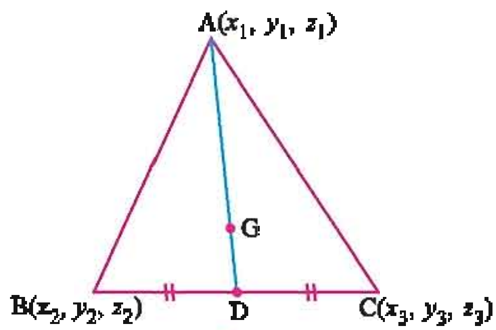
જો $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\bar{r} = (x, y, z)$ હોય, તો વિભાજન સૂત્રની મદદથી

$$(x, y, z) = \frac{1}{2}\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) \qquad (\lambda = 1)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$\therefore$ $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુનો સ્થાનસદિશ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ થી મળે.

(ii) ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર : ધારો કે R^3 માં ΔABC આપેલ છે. ધારો કે, A, B અને C ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\bar{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ છે.



આકૃતિ 9.11

આકૃતિ 9.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ D છે.

આથી તેનો સ્થાનસદિશ $\frac{\bar{r}_2 + \bar{r}_3}{2}$ થશે.

$\overline{AD}$નું A તરફથી 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું બિંદુ G હોય તો G નો સ્થાનસદિશ,

$\frac{1}{2+1}\left(2 \cdot \frac{1}{2}(\bar{r}_2 + \bar{r}_3) + \bar{r}_1\right) = \frac{1}{3}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3)$ થાય.

ઉપરોક્ત પરિણામની સંમિતતા ઉપરથી જોઈ શકાય છે કે બિંદુ G ત્રણેય મધ્યગાઓ ઉપર હોય. આમ, કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણેય મધ્યગાઓ સંગામી હોય છે અને તેઓ પરસ્પર G માં છેદે છે.

G એ ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર કહેવાય છે અને તેનો સ્થાનસદિશ $\frac{1}{3}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3)$ છે.

આથી G ના યામ $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ છે.

ઉદાહરણ 14 : બિંદુઓ A(2, 3, −1) અને B(1, −3, 5) ને જોડતા $\overline{AB}$નું A તરફથી (i) 3 : 5 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતાં (ii) 3 : 5 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.

ઉકેલ : (i) ધારો કે, P(x, y, z) એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી 3 : 5 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે, આમ $m = 3$, $n = 5$. હવે, A તરફથી વિભાજન સૂત્ર,

$$x = \frac{3(1) + 5(2)}{3 + 5} = \frac{3 + 10}{8} = \frac{13}{8}$$

$$y = \frac{3(-3) + 5(3)}{3 + 5} = \frac{-9 + 15}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$z = \frac{3(5) + 5(-1)}{3 + 5} = \frac{15 - 5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

આમ, બિંદુ $\left(\frac{13}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી 3 : 5 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે.

(ii) અહીં બહિર્વિભાજન હોવાથી,

$m = -3, n = 5$

$$x = \frac{-3(1) + 5(2)}{-3 + 5} = \frac{-3 + 10}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{-3(-3) + 5(3)}{-3 + 5} = \frac{9 + 15}{2} = 12$$

$$z = \frac{-3(5) - 5(-1)}{-3 + 5} = \frac{-15 - 5}{2} = -10$$

આમ, $\overline{AB}$નું A તરફથી 3 : 5 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ $\left(\frac{7}{2}, 12, -10\right)$ છે.

ઉદાહરણ 15 : વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરી બિંદુઓ (1, –3, 3), (3, 7, 1), (1, 1, 1) સમરેખ છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : જો બિંદુઓ A(1, –3, 3), B(3, 7, 1) અને C(1, 1, 1) સમરેખ બિંદુઓ હોય, તો તે પૈકી કોઈ એક બિંદુ બાકીના બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું કોઈક ગુણોત્તર $k : 1$ માં વિભાજન કરે. ધારો કે B એ $\overline{AC}$નું કોઈક ગુણોત્તર k માં અંતઃવિભાજન કે બહિર્વિભાજન કરે છે.

$$\therefore \quad 3 = \frac{k(1) + 1}{k + 1} = \frac{k + 1}{k + 1} = 1$$

જે શક્ય નથી. આથી બિંદુઓ સમરેખ નથી.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે (–1, 6, 6), (–4, 9, 6) અને (0, 7, 10) શિરોબિંદુઓ વાળો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. વધુમાં ચકાસો કે કર્ણનું મધ્યબિંદુ તમામ શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલું છે.

ઉકેલ : ધારો કે, A(–1, 6, 6), B(–4, 9, 6) અને C(0, 7, 10).

હવે, $AB^2 = (-4 + 1)^2 + (9 - 6)^2 + (6 - 6)^2 = 9 + 9 = 18$

$BC^2 = (0 + 4)^2 + (7 - 9)^2 + (10 - 6)^2 = 16 + 4 + 16 = 36$

$AC^2 = (0 + 1)^2 + (7 - 6)^2 + (10 - 6)^2 = 1 + 1 + 16 = 18$

$\therefore \quad AB^2 + AC^2 = BC^2$

આમ, ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\overline{BC}$ કર્ણ છે.

ધારો કે $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ M(x, y, z) છે, તો

$$(x, y, z) = \left(\frac{0 - 4}{2}, \frac{7 + 9}{2}, \frac{10 + 6}{2}\right) = (-2, 8, 8).$$

હવે, M એ $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ હોવાથી અને $BC = \sqrt{36} = 6$ હોવાથી,

BM = CM = 3

તેમજ, $AM = \sqrt{(-2+1)^2 + (8-6)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$

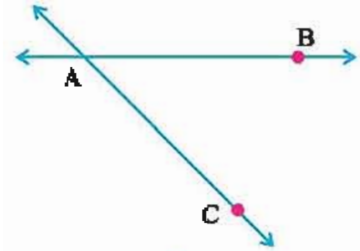
આમ, AM = BM = CM એટલે કે, M, ΔABC નાં શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

સમતલમાં આપેલ ચાર બિંદુઓ પૈકી કોઈ પણ ત્રણ સમરેખ ન હોય તો તેઓ એક **ચતુષ્કોણ (quadrilateral)** રચે. અંતર-સૂત્ર અને વિભાજન સૂત્રની મદદથી ચતુષ્કોણનો પ્રકાર નક્કી કરી શકાય. અવકાશના કિસ્સામાં જો આપેલ ચાર બિંદુઓ **સમતલીય (coplanar)** હોય તો તેઓ ચતુષ્કોણ રચી શકે. આમ, ચતુષ્કોણનો પ્રકાર નક્કી કરતા પહેલા તેઓ સમતલીય હોવાની ખાતરી કરવી પડે. નીચેના ઉદાહરણો આ હકીકત ઉપર આધારિત છે :

ઉદાહરણ 17 : બિંદુઓ A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1) ચતુષ્કોણના શિરોબિંદુઓ છે કે કેમ તે નક્કી કરો. જો તેઓ ચતુષ્કોણ બનાવે તો તેનો પ્રકાર નક્કી કરો.

ઉકેલ : $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 0, 1)$.

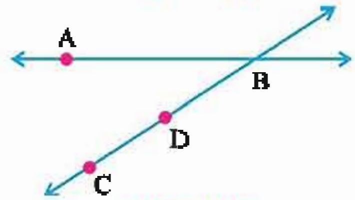


આકૃતિ 9.12(i)

$\overrightarrow{AC}$ અને $\overrightarrow{BD}$ ની દિશા ભિન્ન છે. તેથી $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$.

હવે આપણે ચકાસીશું કે તે એક બિંદુમાં છેદે છે કે નહિ.

જો તે એક બિંદુમાં છેદે તો શક્ય છે કે છેદબિંદુ A અથવા B અથવા C અથવા D હોય.



આકૃતિ 9.12(ii)

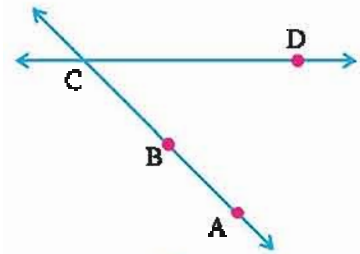
$\overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 0, 1)$. **(i)**

$\overrightarrow{AC}$ અને $\overrightarrow{AD}$ ની દિશા ભિન્ન છે.

$\therefore$ A, C, D સમરેખ ન હોઈ શકે.

$\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 0, 1)$. **(ii)**

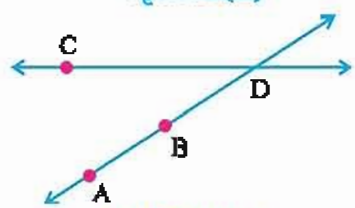
$\therefore$ B, C અને D સમરેખ ન હોઈ શકે.



આકૃતિ 9.12(iii)

તે જ રીતે, (i) અને (ii) પરથી A, B, C અથવા A, B, D સમરેખ નથી.

હવે, ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ અને $\overleftrightarrow{CD}$ A અથવા B અથવા C અથવા D સિવાયના કોઈ બિંદુ P માં છેદે છે.



આકૃતિ 9.12(iv)

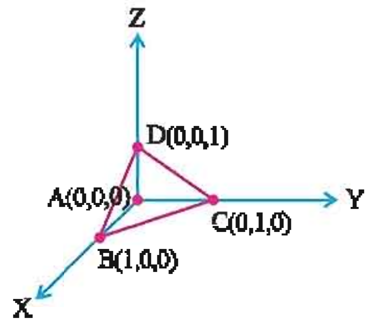
આમ $P \in \overleftrightarrow{AC}$ અને $P \in \overleftrightarrow{BD}$. ધારો કે બિંદુ P, $\overline{AC}$નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં અને તે $\overline{BD}$નું B તરફથી μ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. ($\lambda \in R - \{0, -1\}$, $\mu \in R - \{0, -1\}$). વિભાજન સૂત્ર ઉપરથી,

$$\left.\begin{aligned} P \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow x &= \frac{\lambda(0) + 0}{\lambda + 1} = 0 \\ y &= \frac{\lambda(1) + 0}{\lambda + 1} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \\ z &= \frac{\lambda(0) + 0}{\lambda + 1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(iii)}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{અને } P \in \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow x &= \frac{\mu(0) + 1}{\mu + 1} = \frac{1}{\mu + 1} \\ y &= \frac{\mu(0) + 0}{\mu + 1} = 0 \\ z &= \frac{\mu(1) + 0}{\mu + 1} = \frac{\mu}{\mu + 1} \end{aligned}\right\} \quad \text{(iv)}$$

આમ, (iii) અને (iv) ઉપરથી $x = 0 = \frac{1}{\mu + 1}$ જે શક્ય નથી આથી $\overleftrightarrow{AC}$ અને $\overleftrightarrow{BD}$ એકબીજાને છેદે નહીં. આમ, $\overleftrightarrow{AC}$ અને $\overleftrightarrow{BD}$ પરસ્પર સમાંતર નથી કે એકબીજાને છેદતી નથી. આમ, બિંદુઓ A, B, C અને D સમતલીય નથી. આથી તેઓ ચતુષ્કોણના શિરોબિંદુઓ નથી.

નોંધ : અવકાશના ચાર અસમતલીય બિંદુઓ **ચતુષ્ફલક (Tetrahedron)** નામની ભૌમિતિક આકૃતિ બનાવે છે. (આકૃતિ 9.12(v)) ચતુષ્ફલકને ચાર ત્રિકોણાકાર સપાટીઓ અને છ બાજુઓ હોય છે.



આકૃતિ 9.12(v)

ઉદાહરણ 18 : બિંદુઓ P(1, 1, 1), Q(−2, 4, 1), R(−1, 5, 5) અને S(2, 2, 5)ની સમતલીયતા ચકાસો. જો તેઓ ચતુષ્કોણ રચતા હોય તો તેનો પ્રકાર નક્કી કરો.

ઉકેલ : $\overline{PR}$નું મધ્યબિંદુ M(0, 3, 3) છે.

$\overline{QS}$નું મધ્યબિંદુ M(0, 3, 3) છે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PR}$ અને $\overleftrightarrow{QS}$ બિંદુ M માં છેદે છે.

$\therefore$ P, Q, R, S સમતલીય છે.

હવે, $\overrightarrow{PQ} = (-2, 4, 1) - (1, 1, 1) = (-3, 3, 0)$

$\overrightarrow{QR} = (-1, 5, 5) - (-2, 4, 1) = (1, 1, 4)$

$\overrightarrow{SR} = (-1, 5, 5) - (2, 2, 5) = (-3, 3, 0)$

$\overrightarrow{PS} = (2, 2, 5) - (1, 1, 1) = (1, 1, 4)$

હવે, $\overrightarrow{PQ}$ અને $\overrightarrow{SR}$ ની દિશા સમાન છે; અને $\overrightarrow{QR}$ અને $\overrightarrow{PS}$ ની દિશા સમાન છે. વધુમાં,

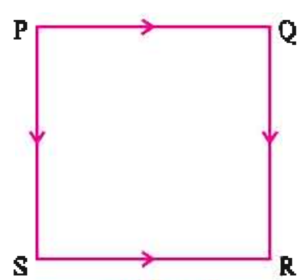
$PQ = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + 0} = \sqrt{18} = RS$

$QR = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = PS$

તેમજ ઉપર જણાવ્યા મુજબ વિકર્ણો $\overline{PR}$ અને $\overline{QS}$ એકબીજાને દુભાગે છે.

$PR = \sqrt{(1+1)^2 + (1-5)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$

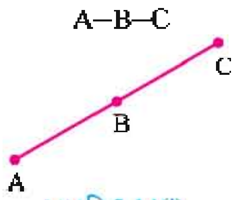
$QS = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+4+16} = 6$



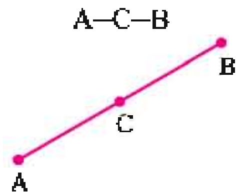
આકૃતિ 9.13

આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSની ચારેય બાજુઓની લંબાઈ સરખી છે. તેમજ તે વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે તેમજ તેમની લંબાઈ સમાન છે. આમ, □PQRS ચોરસ છે.

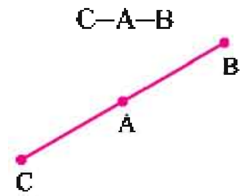
અત્યાર સુધી ત્રણ બિંદુઓની સમરેખતાની ચકાસણી અંતર-સૂત્ર અને વિભાજન સૂત્રથી પણ કરી હતી. જો ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C આપેલા હોય, તો તેઓ નીચેનું કોઈ એક સાચું હોય તો જ સમરેખ થાય.



આકૃતિ 9.14(i)



આકૃતિ 9.14(ii)



આકૃતિ 9.14(iii)

આ ત્રણેય કિસ્સામાં $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BC}$ ને સમાન અથવા વિરુદ્ધ દિશાઓ હોય. આથી જો $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BC}$ની દિશાઓ સમાન અથવા વિરુદ્ધ હોય તો જ બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ થાય. નીચેના ઉદાહરણો આ હકીકત પર આધારિત છે :

ઉદાહરણ 19 : નીચે આપેલ બિંદુઓના ત્રયની સમરેખતા દિશાની મદદથી ચકાસો :

(1) A(0, 2), B(2, 4), C(−2, 0) (2) P(1, −1, 0), Q(−3, 1, 2), R(−1, 0, 1)

(3) A(1, 2, 3), P(5, 2, 2), S(2, 3, 1) (4) L(0, 0), M(1, 0), N(0, 1)

ઉકેલ : (1) $\overrightarrow{AB} = (2, 4) - (0, 2) = (2, 2)$

$\overrightarrow{BC} = (-2, 0) - (2, 4) = (-4, -4)$

સ્પષ્ટ છે કે, $\overrightarrow{BC} = (-2)\overrightarrow{AB}$

આથી, $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BC}$ ની દિશાઓ વિરુદ્ધ છે. આમ, બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે. $(\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC})$

(2) $\overrightarrow{PQ} = (-3, 1, 2) - (1, -1, 0) = (-4, 2, 2)$

$\overrightarrow{QR} = (-1, 0, 1) - (-3, 1, 2) = (2, -1, -1)$

અહીં $\overrightarrow{PQ} = (-2)\overrightarrow{QR}$. સદિશ $\overrightarrow{PQ}$ તથા $\overrightarrow{QR}$ ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ છે. આથી P, Q, R સમરેખ છે.

(3) $\overrightarrow{AP} = (5, 2, 2) - (1, 2, 3) = (4, 0, -1)$

$\overrightarrow{PS} = (2, 3, 1) - (5, 2, 2) = (-3, 1, -1)$

શક્ય હોય તો ધારો કે, કોઈ શૂન્યેતર $k \in R$ માટે

$\overrightarrow{AP} = k(\overrightarrow{PS})$

$\therefore$ $(4, 0, -1) = k(-3, 1, -1)$

$\therefore$ $4 = -3k,\ 0 = k,\ -1 = -k$

કોઈ પણ $k \in R$ આ તમામને સંતોષે નહીં. આથી $\overrightarrow{AP}$ તથા $\overrightarrow{PS}$ ની દિશા ભિન્ન છે. આથી A, P અને S અસમરેખ છે.

(4) $\overrightarrow{LM} = (1, 0) - (0, 0) = (1, 0)$

$\overrightarrow{MN} = (0, 1) - (1, 0) = (-1, 1)$

શક્ય હોય તો ધારો કે $k \in R - \{0\}$ માટે,

$\overrightarrow{LM} = k(\overrightarrow{MN})$

$\therefore$ $(1, 0) = k(-1, 1)$

$\therefore$ $1 = -k,\ k = 0$

જે શક્ય નથી. આથી $\overrightarrow{LM}$ તથા $\overrightarrow{MN}$ ની દિશા ભિન્ન છે. આથી આપેલ બિંદુઓ અસમરેખ છે.

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે A(1, 2, 3), B(−1, −2, −1), C(2, 3, 2) તથા D(4, 7, 6) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ રચે છે.

ઉકેલ : $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ = $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\overline{BD}$ નું મધ્યબિંદુ = $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

∴ $\overline{AC}$ તથા $\overline{BD}$ પરસ્પર દુભાગે છે અને મધ્યબિંદુમાં છેદતી હોવાથી $\overleftrightarrow{AC}$ તથા $\overleftrightarrow{BD}$ સમતલીય છે.

∴ A, B, C, D સમતલીય ચતુષ્કોણ રચે છે અને તેના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગતા હોવાથી □ ABCD સ.બા.ચ. છે.

બીજી રીત :

$\overrightarrow{AB} = (-2, -4, -4)$, $\overrightarrow{BC} = (3, 5, 3)$, $\overrightarrow{DC} = (-2, -4, -4)$

∴ $\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{DC}$ સમદિશ છે.

∴ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ અથવા A, B, C, D સમરેખ છે. પરંતુ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{DC}$ની દિશા ભિન્ન છે.

∴ $C \notin \overleftrightarrow{AB}$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

તે જ રીતે $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. $(\overrightarrow{AD} = (3, 5, 3))$

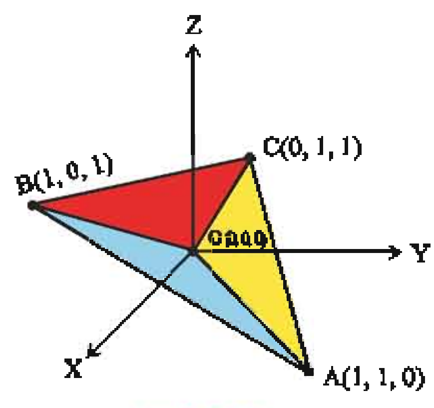
∴ A, B, C, D સમતલીય છે અને □ ABCD સ.બા.ચ. છે.

નોંધ : નીચેની રીતનો ઉકેલ યોગ્ય નથી.

$AB = \sqrt{4+16+16} = 6$, $CD = \sqrt{4+16+16} = 6$, $AD = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43} = BC$

∴ સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોવાથી □ ABCD સ.બા.ચ. છે. □ ABCD સમતલીય હોય તો જ આ નિર્ણય યોગ્ય ઠરે. A, B, C, Dની સમતલીયતા સિદ્ધ કરવી જરૂરી છે. નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 1) માટે OA = AB = BC = AC = OB = OC, પરંતુ O, A, B, C દ્વારા સ.બા.ચ. ન બને.



આકૃતિ 9.15

ઉકેલ : $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$

∴ $OA = OB = OC = AB = BC = AC = \sqrt{2}$.

પરંતુ કોઈ પણ બે સદિશની દિશા સમાન કે વિરુદ્ધ નથી.

∴ O, A, B, C દ્વારા સ.બા.ચ. ન બને.

આ બિંદુઓ સમતલીય નથી તે સિદ્ધ કરી શકાય. આ બિંદુઓ O, A, B, C ચતુષ્ફલક (Tetrahedron) બનાવે છે.

સ્વાધ્યાય 9.5

1. જો A(1, 3, −2), B(2, 4, −1) તો $\overline{AB}$નું ત્રિ-વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ મેળવો.

2. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરી નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહિ તે ચકાસો :

(1) P(1, −1, 1), Q(1, 0, 3), R(2, 0, 0) (2) A(5, 6, −1), B(1, −1, 3), C(1, 1, 1)

(3) L(2, −3, 4), M(−1, 2, 1), N$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ (4) O(0, 0, 0), A(1, 1, 1), B(2, 2, 2)

(5) L(1, 2, 3), M(−1, −2, −3), N(1, −2, 3)

સ્વાધ્યાય 9

1. બિંદુઓ A(–2, –3, –1), B(2, 1, 1), C(–3, –2, –2) અને D(–7, –6, –4) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ રચે છે તેમ દર્શાવો. શું તે લંબચોરસ છે ?

2. આપેલ બિંદુઓ A(0, 1, 2), B(2, –1, 3), C(1, –3, 1) માટે ΔABCનો પ્રકાર નક્કી કરો.

3. બિંદુઓ (1, 2, 3) અને (3, 2, –1)થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુઓના ગણનું સમીકરણ મેળવો.

4. નીચેના ત્રિકોણો માટે મધ્યગાઓની લંબાઈ તેમજ મધ્યકેન્દ્રના યામ મેળવો :

(1) A(1, 0, 1), B(1, 2, 0), C(1, 1, 2)

(2) P(1, 2, 3), Q(–1, 1, 0), R(0, 0, 3)

(3) L(–1, –2, –3), M(1, 2, 3), N(1, 2, 1)

5. ધારો કે ΔABC ની બાજુઓના મધ્યબિંદુઓ P(1, 2, –3), Q(3, 0, 1) અને R(–1, 1, 4) છે તો ΔABCનું મધ્યકેન્દ્ર શોધો.

6. સદિશોની મદદથી નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે કેમ તે ચકાસો તથા સમરેખ હોય તો તેમાંનું કોઈ પણ બિંદુ બાકીના બેને જોડતા રેખાખંડનું ક્યા ગુણોત્તરમાં કોના તરફથી વિભાજન કરે છે તે શોધો :

(1) A(5, 4, 6), B(1, –1, 3), C(4, 3, 2)

(2) A(2, 3, 4), B(–4, 1, –10), C(–1, 2, –3)

(3) A(1, 2, 3), B(0, 4, 1), C(–1, –1, –1)

(4) L(3, 2, –4), M(5, 4, –6), N(9, 8, –10)

(5) P(2, 3, 4), Q(3, 4, 5), R(1, 2, 3)

7. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $(1, -\sqrt{2})$ અને $(2, \sqrt{2})$ સદિશોના સરવાળાનું માન ...... છે. ☐

(a) –3 (b) 3 (c) 9 (d) –9

(2) બિંદુઓ A(1, 0, 1), B(2, –1, 3) અને C(3, –2, 5) સમરેખ છે તો C એ $\overline{AB}$નું A તરફથી ...... ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. ☐

(a) 2 : 1 (b) –3 : 2 (c) 1 : 2 (d) –2 : 1

(3) જેના શિરોબિંદુઓ P(1, –2, 1), Q(2, 3, –1), R(1, –1, –1) હોય તે ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર ...... છે. ☐

(a) (1, 2, 1) (b) $\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ (c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ (d) $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(4) જો A તથા B ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે (1, 1, 0) તથા (0, 1, 1) હોય, તો $\overrightarrow{AB}$ = ... ☐

(a) (0, 0, 0) (b) (1, 0, –1) (c) (–1, 0, 1) (d) (1, 2, 1)

(5) (1, 1, 2) તથા (2, 1, 0) ની દિશા ...... છે. ☐

(a) સમાન (b) વિરુદ્ધ (c) ભિન્ન (d) અવ્યાખ્યાયિત

(6) $\langle 2, 2, 2 \rangle$ = ... ☐

(a) $-\langle -4, -4, -4 \rangle$ (b) $\langle 1, 1, -1 \rangle$ (c) $\langle -1, 1, -1 \rangle$ (d) $\langle 0, 0, 0 \rangle$

(7) $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$ = ... ☐

(a) $\langle 1, 1, -1 \rangle$ (b) $\langle \cos\theta \cos\alpha, \cos\theta \sin\alpha, \sin\theta \rangle$

(c) $\langle 5, 5, 5 \rangle$ (d) $\langle 3, 3, -3 \rangle$

(8) (2, 2, −1) ની દિશામાં એકમ સદિશ ...... છે.

(a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (c) (2, 2, 1) (d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(9) (1, 0, 0) ની દિશામાં એકમ સદિશ ...... છે.

(a) (0, 1, 0) (b) (0, 0, 1) (c) (−1, 0, 0) (d) (1, 0, 0)

(10) A(1, 1, 1), B(2, 1, 2), C(x, y, z) થી બનતા ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર (0, 0, 0) હોય, તો (x, y, z) = ...

(a) (3, 2, 3) (b) (0, 0, 0) (c) (−3, −2, −3) (d) (1, −1, 1)

(11) જો A(1, 1, 2), B(2, 1, 2), C(2, 2, 1) તો A, B, C ...... છે.

(a) ત્રિકોણના શિરોબિંદુ (b) સમરેખ (c) અક્ષો પર (d) અસમતલીય

(12) જો A(1, 2, 1), B(2, 3, 2), C(2, 1, 3), D(3, 2, 4) માટે $\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{CD}$ ની દિશા ...... છે.

(a) સમાન (b) પરસ્પર વિરુદ્ધ (c) ભિન્ન (d) અવ્યાખ્યાયિત

(13) જો A(1, 2, 1), B(2, 3, 2), C(2, 1, 3), D(3, 2, 4) તો ......

(a) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (b) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$

(c) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ એકાકી ગણ છે. (d) $C \in \overleftrightarrow{AB}$

(14) (0, 0, 0) સદિશ ....

(a) ને દિશા નથી (b) ને માન નથી

(c) (1, 1, 1) ને સમદિશ છે (d) (−1, −1, −1) ની વિરુદ્ધ દિશાનો સદિશ છે.

(15) P(2, 3, 1) તથા Q(7, 15, 1) તો $|\overrightarrow{PQ}|$ = ...

(a) 5 (b) 12 (c) 13 (d) 17

(16) (3, 6, 2) ની દિશામાં 4 માનવાળો સદિશ ...... છે.

(a) $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (b) (12, 24, 8) (c) $\left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{8}{7}\right)$ (d) (−12, −24, −8)

(17) (2, −2, 1) ની વિરુદ્ધ દિશામાં એકમ સદિશ .... છે.

(a) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ (b) (−2, 2, −1) (c) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(18) ($cos\alpha$, $sin\alpha$) તથા ($cos(\pi + \alpha)$, $sin(\pi + \alpha)$) ($\alpha \in$ R) ની દિશાઓ ....

(a) સમાન છે (b) પરસ્પર વિરુદ્ધ છે (c) ભિન્ન છે (d) (1, 0) ને સમાન છે

(19) જો $\bar{x}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય તથા $k > 0$, $k \neq 1$ તો $\frac{-k\bar{x}}{|\bar{x}|}$ ....

(a) $\bar{x}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

(b) $\bar{x}$ ની દિશાનો k માનવાળો સદિશ છે.

(c) $\bar{x}$ ની વિરુદ્ધ દિશાનો એકમ સદિશ છે.

(d) $\bar{x}$ ની વિરુદ્ધ દિશાનો k માનવાળો સદિશ છે.

(20) જો $\bar{x}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય તથા $k < 0$, $k \neq -1$ તો $\frac{k\bar{x}}{|\bar{x}|}$ ....

(a) $\bar{x}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

(b) $\bar{x}$ ની વિરુદ્ધ દિશાનો એકમ સદિશ છે.

(c) $\bar{x}$ ની વિરુદ્ધ દિશાનો $|k|$ માનવાળો સદિશ છે.

(d) $\bar{x}$ ની દિશાનો $|k|$ માનવાળો સદિશ છે.

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

1. વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મ અને ક્રમયુક્ત ત્રયના ગણ અનુક્રમે R^2 અને R^3 ગણ R ઉપર સદિશ અવકાશ બનાવે છે.
2. સદિશ $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$નું માન $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ છે. જો $\bar{x} \in R^2$ અને $\bar{x} = (x_1, x_2)$ હોય, તો $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
3. $|\bar{x}| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

   $|k\bar{x}| = |k||\bar{x}|$
4. બે શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે જો $\bar{x} = k\bar{y}$ હોય અને $k > 0$ હોય, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ની દિશા સમાન છે અને જો $k < 0$ હોય, તો તેમની દિશાઓ વિરુદ્ધ છે. આમ ન બને તો $\bar{x}$, $\bar{y}$ ની દિશા ભિન્ન છે.
5. બિંદુઓ A અને B માટે $\overrightarrow{AB}$ = Bનો સ્થાનસદિશ – Aનો સ્થાનસદિશ
6. બે બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$ અને $B(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર

   $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ છે.
7. બિંદુઓ A અને B ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\bar{r}_1$ અને $\bar{r}_2$ હોય અને બિંદુ P એ $\overline{AB}$નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું હોય તો તેનો સ્થાનસદિશ $\frac{\lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1}{\lambda + 1}$ છે.
8. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3)$ તો ΔABCના મધ્યકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ છે.

—❖—

Bhaskara II

- Solutions of Diophantine equations of the second order, such as $61x^2 + 1 = y^2$. This very equation was posed as a problem in 1657 by the French mathematician Pierre de Fermat, but its solution was unknown in Europe until the time of Euler in the 18th century.
- Solved quadratic equations with more than one unknown, and found negative and irrational solutions.
- Preliminary concept of infinitesimal calculus, along with notable contributions towards integral calculus.
- Conceived differential calculus, after discovering the derivative and differential coefficient.
- Stated Rolle's theorem, a special case of one of the most important theorems in analysis, the mean value theorem. Traces of the general mean value theorem are also found in his works.
- Calculated the derivatives of trigonometric functions and formulae.
- In *Siddhanta Shiromani*, Bhaskara developed spherical trigonometry along with a number of other trigonometric results.

Bhaskara II gave the formula : $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

Bhaskaracharya studied Pell's equation $px^2 + 1 = y^2$ for p = 8, 11, 32, 61 and 67. When p = 61, he found the solutions x = 226153980, y = 1776319049. When p = 67 he found the solutions x = 5967, y = 48842. He studied many Diophantine problems.

The topics covered in Lilavati thirteen chapters of the book are: definitions; arithmetical terms; interest; arithmetical and geometrical progressions; plane geometry; solid geometry; the shadow of the gnomon; the kuttaka; combinations.

પ્રકરણ 10

લક્ષ

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realise how complicated life is.

– John Louis Von Neumann

10.1 પ્રાસ્તાવિક અને લક્ષનો ઈતિહાસ

હવે આપણે કલનશાસ્ત્રનો અભ્યાસ કરીશું. અત્યાર સુધીનો આપણો અભ્યાસ પ્રાક્કલન અભ્યાસ હતો. *Calculus* એ એક લેટીન શબ્દ છે. તેનો અર્થ ગણતરી કરવા માટેનો નાનો પથ્થર એવો થાય છે. જેમ ભૂમિતિ એ આકારોનો અભ્યાસ છે, બીજગણિત ક્રિયાઓનો અભ્યાસ છે અને તેનો ઉપયોગ સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવવા થાય છે, તે જ પ્રમાણે કલનશાસ્ત્ર એ સતત બદલાતી જતી રાશિઓનો અભ્યાસ છે. કલનશાસ્ત્રનો વિજ્ઞાન, અર્થશાસ્ત્ર અને ઈજનેરી જેવી શાખાઓમાં બહોળો ઉપયોગ થાય છે.

પુરાણકાળના કેટલાક વિચારો આપણને અનિયત સંકલન તરફ દોરી જાય છે. ઈજિપ્તના **મૉસ્કો પેપીરસ (Moscow Papyrus)** (1820 B.C.) ગ્રંથમાં ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળને લગતી ગણતરી અનિયત સંકલનથી જોવા મળે છે. પરંતુ તેને લગતા સૂત્રો ફક્ત માહિતી સ્વરૂપે છે અને તેમાનાં કેટલાંક ખોટાં પણ છે. જો કે ગ્રીક ગણિતજ્ઞ **યુડોક્ષસે (Eudoxus)** (408-335 B.C.) ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધવા માટે ક્રમશઃ સૂક્ષ્મ ભાગ કરવાની પદ્ધતિ (Method of exhaustion)નો ઉપયોગ કરી **લક્ષ (Limit)**ની સંકલ્પના આપી. **આર્કિમીડિઝે (Archimedes)** (287-212 B.C.) આ સંકલ્પનાને આગળ વિકસાવી. ત્રીજી સદીમાં ચીની ગણિતજ્ઞ **લીહુએ (Lie Hue)** એ ક્રમશઃ સૂક્ષ્માતિસૂક્ષ્મ ભાગોની સંકલ્પનાનો ફરી ઉપયોગ કરી વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ મેળવ્યું.

બ્રહ્મગુપ્તનું **યુક્તિભાષા (Yuktibhasha)** કલનશાસ્ત્ર પરનું પ્રથમ પુસ્તક ગણાય છે. ભાસ્કરનું કલનશાસ્ત્ર પરનું કાર્ય ન્યૂટન તથા **લીબનીટ્ઝના** કાળ કરતાં ઘણું પહેલાનું છે. **ભાસ્કર-2એ** વિકલ-કલનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ ખગોળશાસ્ત્રના પ્રશ્નોમાં કર્યો. એવો નક્કર આધાર છે કે **ભાસ્કર** વિકલ-કલનના કેટલાક સિદ્ધાંતોના કામમાં અગ્રેસર હતા. ચલના મધ્યકમાન પ્રમેયનું વિધાન પણ તેમણે કર્યું હતું. તેમના પુસ્તક **સિદ્ધાંત શિરોમણી**માં ગાણિતીય વિશ્લેષણ અને શૂન્યાભિલક્ષી કલનની પ્રાથમિક સંકલ્પના જોવા મળે છે.

આ બધા વિચારો દ્વારા વિકલ-કલનના વિકાસનું શ્રેય **ગોટફ્રી વિલિયમ લીબનીટ્સ (Gottfried Wilhelm Leibnitz)**ના ફાળે જાય છે. તેણે **ન્યુટન (Newton)**ના સમયમાં જ સ્વતંત્ર રીતે કલનની શોધ કરી. કલનશાસ્ત્રના શોધનો યશ **લીબનીટ્ઝ**

અને ન્યૂટન બંનેના ફાળે જાય છે. ન્યૂટને કલનના પરિણામ પહેલાં તારવ્યા પરંતુ લીબનીટ્ઝે તેને પ્રથમ પ્રકાશિત કર્યા. બંનેએ એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે પરિણામ મેળવ્યા. પરંતુ લીબનીટ્ઝે અનિયત સંકલનથી શરૂઆત કરી અને ન્યૂટને વિકલનથી શરૂઆત કરી. કલનશાસ્ત્ર એવું નામ એ લીબનીટ્ઝે આપ્યું. ઓગણીસમી સદીમાં કોશી (Cauchy), રીમાન (Riemann) અને વાયરસ્ટ્રાસે (Weirstrass) કલનનો આગળ વિકાસ કર્યો. લક્ષની ε-δ ની આધુનિક વ્યાખ્યા વાયરસ્ટ્રાસની ઉપજ છે.

વિધેયના લક્ષની આધુનિક સંકલ્પના એ બોલ્ઝાનોના સમયની છે. તેણે ε-δ ની રીત વિધેયના સાતત્ય માટે ઈ.સ. 1817 માં વાપરી હતી. કોશીએ *Cours d' analyse* (1821)માં 1821 માં લક્ષની ચર્ચા કરી હતી. પણ તેણે ફક્ત અનૌપચારિક વ્યાખ્યા આપી હતી. વાયરસ્ટ્રાસે ε-δ સ્વરૂપે લક્ષની આધુનિક વ્યાખ્યા આપી. તેનો આજે ઉપયોગ થાય છે. તેણે *lim* અને lim $x \to x_0$ ના સંકેતો આપ્યા. હાર્ડીએ 1908 માં તેના પુસ્તક *'A course of pure mathematics'*માં $\lim\limits_{x \to x_0}$ જેવો હાલમાં પ્રચલિત છે તેવો સંકેત આપ્યો.

10.2 લક્ષનો સાહજિક ખ્યાલ

હવે આપણે કલનશાસ્ત્રના મૂળભૂત ખ્યાલ લક્ષ પર આવીએ. લક્ષની વ્યાખ્યા આપતાં પહેલા આપણે લક્ષનો સાહજિક ખ્યાલ મેળવીએ. હવે આપણે આગળ જે ચર્ચા કરીશું તે આપણને લક્ષ વિશે સાહજિક ખ્યાલ આપશે અને ઉદાહરણોની ચર્ચા આપણને લક્ષની સંકલ્પના તરફ દોરી જશે.

જ્યારે કોઈ ચલ તેના પ્રદેશમાં સતત બદલાતો હોય અને તે કોઈ ચોક્કસ કિંમતની નજીક જાય ત્યારે તે વિધેયનું 'લક્ષ' જો અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો તે એ વિધેયનું અંતિમ મૂલ્ય (Ultimate Value) છે. ચાલો, વધુ સ્પષ્ટતા કરીએ. જ્યારે x ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક જાય ત્યારે વિધેય $f(x) = (3x + 2)$નું લક્ષ $\lim\limits_{x \to 1} 3x + 2$ એમ લખાય. હવે તે કેવી રીતે શોધવું તે જોઈએ. x અને $f(x)$નાં કેટલાંક મૂલ્યોનું કોષ્ટક બનાવીએ.

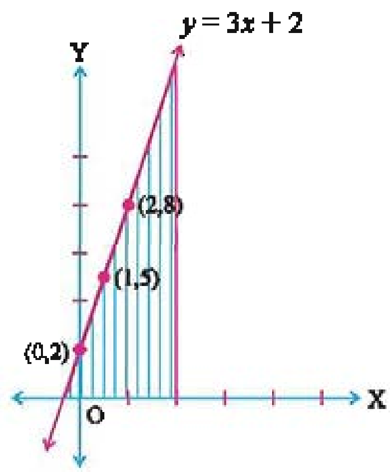
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	4.7	4.97	4.997	4.9997	5.3	5.03	5.003	5.0003

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય કે જેમ x ની કિંમતો 1 થી નાની રહીને 1ની વધુ ને વધુ નજીક જાય છે, તેમ $f(x)$ની કિંમતો 5ને અનુલક્ષે છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવવા આ પ્રમાણે વિધાન કરાય છે. 'જેમ x એ 1 ને ડાબી બાજુથી અનુલક્ષે છે, તેમ $f(x)$ નું લક્ષ 5 છે.' આને માટે સંકેત $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 5$ લખાય છે. તે જ પ્રમાણે જેમ xની કિંમતો 1થી મોટી રહીને 1ની વધુ ને વધુ નજીક જાય ત્યારે 'જેમ x એ 1 ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે છે તેમ $f(x)$નું લક્ષ 5 છે.' અથવા $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 5$ લખાય છે. વળી અહીં, $f(1) = 3 + 2 = 5$ છે પરંતુ આ જરૂરી નથી.

જો $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને બંને સમાન હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે અને તે $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ અથવા $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ બરાબર છે.

ચાલો હવે એને આલેખ પરથી સમજીએ.

અહીં જોઈ શકાય છે કે જેમ $x \to 1-$, y-યામ 5 ને અનુલક્ષે છે અને તેવું જ $x \to 1+$ માટે થાય છે. અહીં લક્ષની ચર્ચામાં આપણે નોંધીએ કે $f(1) = 5$.



આકૃતિ 10.1

ઉદાહરણ 1 થી 13 લક્ષની સંકલ્પનાની સમજૂતી માટે જ છે. તે પરીક્ષામાં પૂછવાના પ્રશ્નો નથી.

ઉદાહરણ 1 : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$ કોષ્ટકની મદદથી ચકાસો. $\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$

x	0.49	0.499	0.4999	0.51	0.501	0.5001
$f(x)$	1.98	1.998	1.9998	2.02	2.002	2.0002

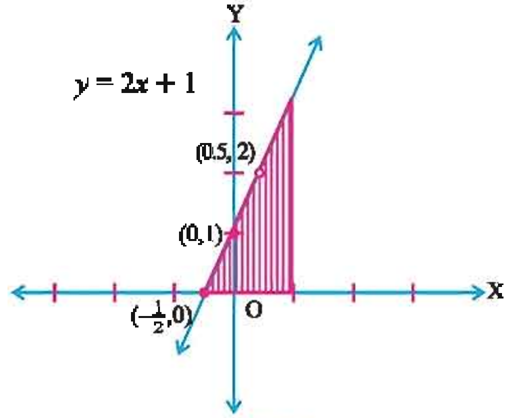
જુઓ કે,

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$$

$$= 2x + 1, \text{ જ્યાં } x \neq \frac{1}{2}.$$

આમ, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 2.$$



આકૃતિ 10.2

સમજૂતી : જેમ x એ $\frac{1}{2}$ ને જમણી કે ડાબી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ એ 2ને અનુલક્ષે છે. અહીં આલેખ પર $x = \frac{1}{2}$ ને અનુરૂપ બિંદુ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી. આમ, જેમ x એ 1 ને અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ નું 'અંતિમ મૂલ્ય' 2 છે.

ઉદાહરણ 2 : $\lim\limits_{x \to 0} |x|$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

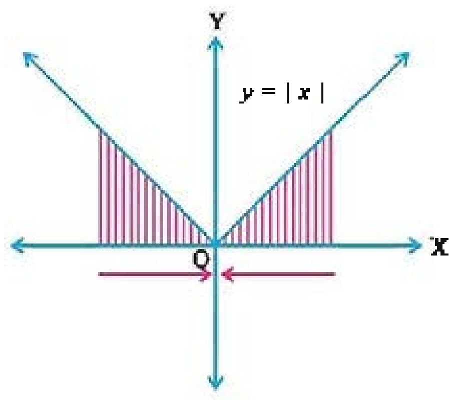
તેથી,

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.1	0.01	0.001

આમ, અનુમાન કરી શકાય કે,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

જુઓ કે $f(0) = 0$.



આકૃતિ 10.3

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, $\lim\limits_{x \to 2} [x]$ નું અસ્તિત્વ નથી.

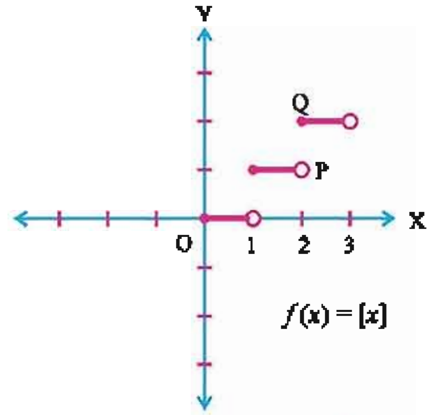
ઉકેલ : $f(x) = [x] = \begin{cases} 1 & \text{જ્યાં } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{જ્યાં } 2 \leq x < 3 \end{cases}$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.1	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	1	1	1	1	2	2	2	2

આમ, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$ અને $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 2$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

સમજૂતી : અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે P અને Q વચ્ચે અવકાશ છે. જમણી બાજુનું લક્ષ અને ડાબી બાજુનું લક્ષ સમાન નથી.



આકૃતિ 10.4

ઉદાહરણ 4 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$ વિશે શું કહી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{જ્યાં } x > 0 \\ -1 & \text{જ્યાં } x < 0 \end{cases}$

f એ $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	−1	−1	−1	1	1	1

સ્પષ્ટ છે કે, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

નોંધ : ઉદાહરણ 1માં $f\left(\frac{1}{2}\right)$ વ્યાખ્યાયિત નથી પણ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$નું અસ્તિત્વ છે.

ઉદાહરણ 2માં $f(0)$ વ્યાખ્યાયિત છે અને $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

ઉદાહરણ 3માં $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2+} f(x)$. અહીં $f(2)$નું અસ્તિત્વ છે. પણ લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 4માં $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ અને $f(0)$નું અસ્તિત્વ નથી. લક્ષનું અસ્તિત્વ પણ નથી.

હવે આપણી પાસે નક્કર આધાર છે કે જેના પરથી આપણે તારણ પર આવી શકીએ કે $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ નું મૂલ્ય કે અસ્તિત્વ તેનાં a આગળનાં મૂલ્ય $f(a)$ કે $f(a)$ ના અસ્તિત્વ પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 5 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ શોધો, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ 3 - x & x \geq 0 \end{cases}$

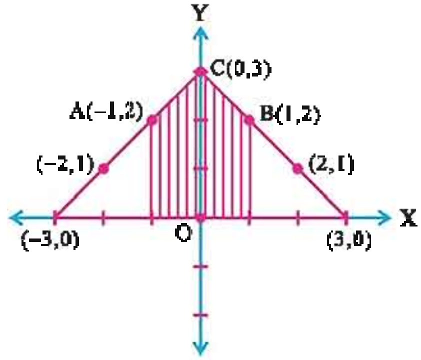
ઉકેલ : અહીં $x < 0$ માટે $f(x) = x + 3$ અને $x > 0$ માટે $f(x) = 3 - x$.

$\therefore$ કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે થશે :

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	2.9	2.99	2.999

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 3$

આમ, $\lim_{x \to 0} f(x) = 3.$



આકૃતિ 10.5

સમજૂતી : (0, 3) એ આલેખ પરનું બિંદુ છે અને જેમ $x \to 0-$ તેમ બિંદુ A એ C તરફ જાય છે અને જેમ $x \to 0+$ તેમ B એ C તરફ જશે. આથી $\lim_{x \to 0+} f(x)$ અને $\lim_{x \to 0-} f(x)$ સમાન થશે.

વળી, $f(0) = 3$. આમ ત્રણેય સમાન છે.

ઉદાહરણ 6 : $\lim_{x \to 1} f(x)$ શોધો, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x > 1 \\ 10 & x = 1 \\ x + 5 & x < 1 \end{cases}$

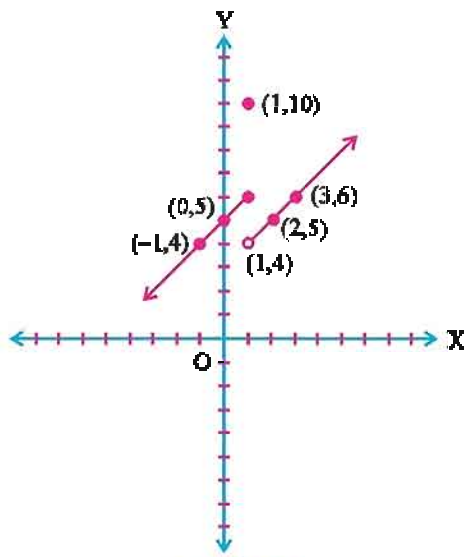
ઉકેલ :

x	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	4.1	4.01	4.001

$x < 1$ $\quad$ $x > 1$

આમ, $\lim_{x \to 1-} f(x)$ એ 6 હોય તેમ લાગે છે અને $\lim_{x \to 1+} f(x)$ એ 4 હોય તેવું લાગે છે. આમ, $\lim_{x \to 1} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

વળી, $f(1) = 10$. ત્રણેય ભિન્ન છે.



આકૃતિ 10.6

સમજૂતી :

આમ, $\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$

અને બંને ભિન્ન છે.

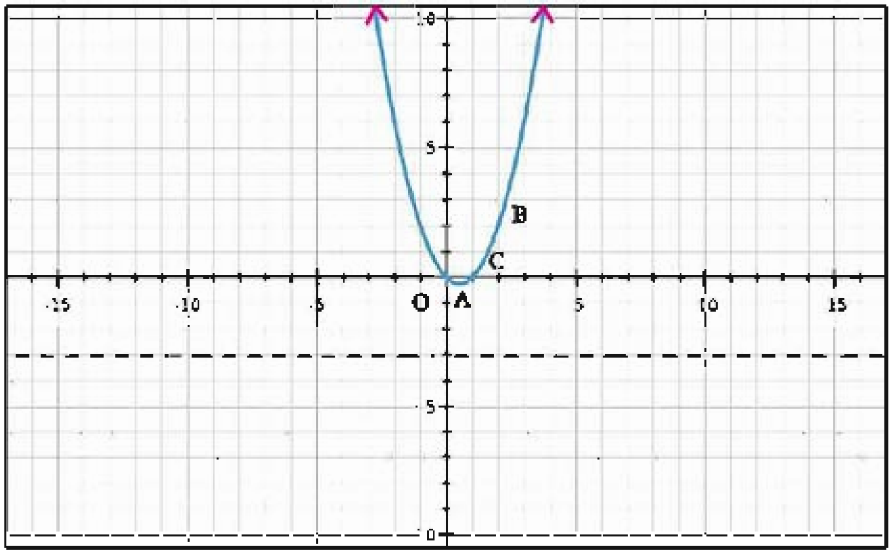
ઉદાહરણ 7 : $\lim_{x \to 1} (x^2 - x)$ શોધો.

ઉકેલ :

x	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	−0.09	−0.0099	−0.000999	0.11	0.0101	0.001001

આમ, $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 0,\ f(1) = 1^2 - 1 = 0$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$



આકૃતિ 10.7

સમજૂતી : જેમ, $x \to 1-$, A એ C ને અનુલક્ષે છે અને જેમ $x \to 1+$ તેમ B એ Cને અનુલક્ષે છે.

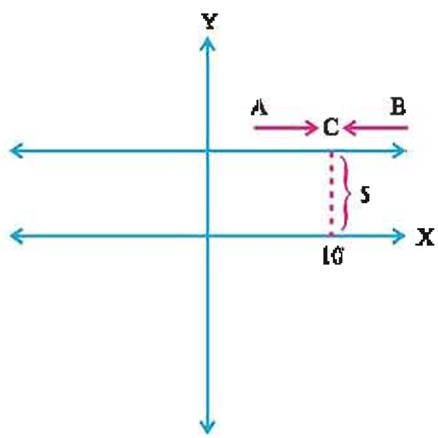
$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 0$

ઉદાહરણ 8 : $f : R \to R$, $f(x) = 5$ માટે $\lim_{x \to 10} f(x)$ શોધો.

ઉકેલ :

x	9.9	9.99	9.999	10.1	10.01	10.001
$f(x)$	5	5	5	5	5	5

$\therefore \quad \lim_{x \to 10} f(x) = 5$



આકૃતિ 10.8

સમજૂતી : જેમ, $x \to 10-$, તેમ A એ C ને અનુલક્ષે છે અને જેમ $x \to 10+$, તેમ B એ C ને અનુલક્ષે છે. C(10, 5) છે.

$\lim_{x \to 10} f(x) = 5$

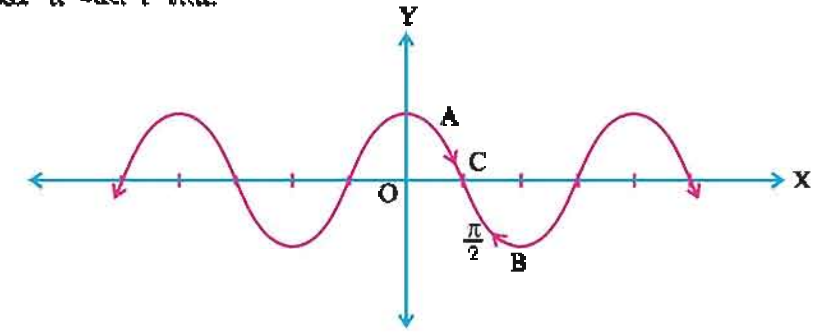
ઉદાહરણ 9 : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} cosx$ શોધો.

ઉકેલ :

x	$\frac{\pi}{2} - 0.1$	$\frac{\pi}{2} - 0.01$	$\frac{\pi}{2} - 0.001$	$\frac{\pi}{2} + 0.1$	$\frac{\pi}{2} + 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.001$
$f(x)$	0.099833	0.009999833	0.0009999998	−0.099833	−0.009999833	−0.0009999998

આમ, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} cosx = 0$

સમજૂતી : $cosx$ નો આલેખ જોતા.



આકૃતિ 10.9

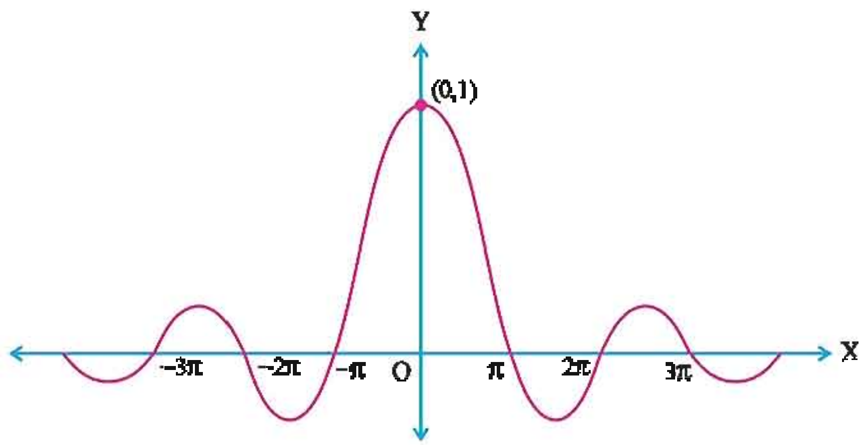
જેમ, $x \to \frac{\pi}{2}-$ અને $x \to \frac{\pi}{2}+$ તેમ અનુક્રમે A એ C ને અને B પણ C ને અનુલક્ષે છે.

$\therefore \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} cosx = 0$

ઉદાહરણ 10 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1, (x \neq 0)$ ચકાસો.

ઉકેલ :

x	−0.7	−0.2	−0.05	0.4	0.3	0.03	0.01
$f(x)$	0.92031	0.993347	0.999583	0.97275	0.98506	0.99985	0.999983



આકૃતિ 10.10

સમજૂતી : નોંધીએ કે $\frac{sinx}{x}$ એ યુગ્મ વિધેય છે. એટલે કે, $\frac{sin(-x)}{-x} = \frac{-sinx}{-x} = \frac{sinx}{x}$.

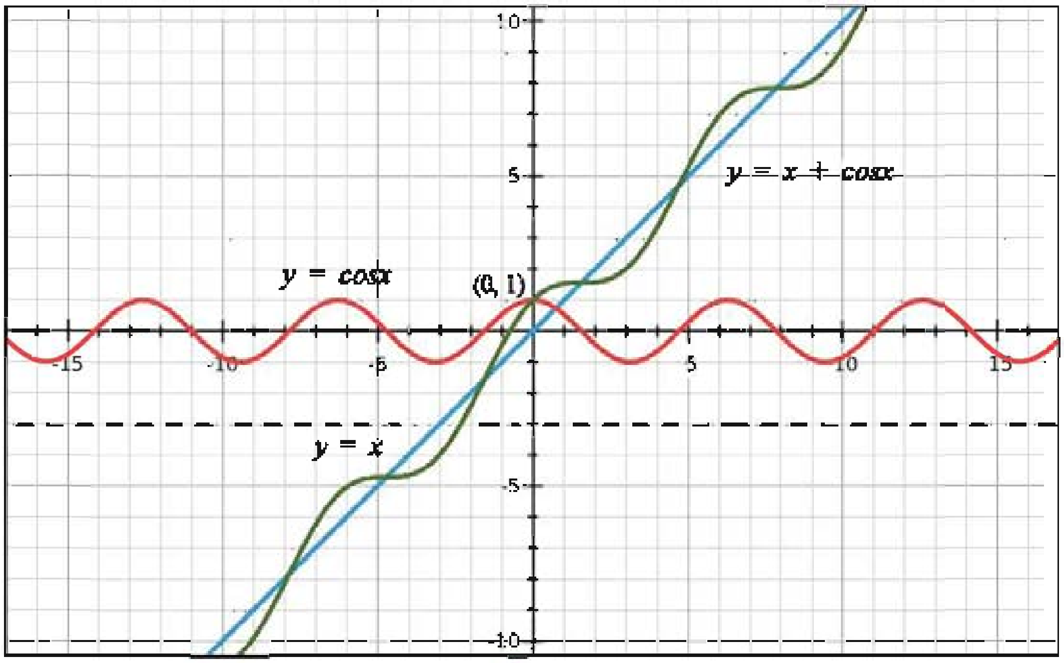
તેથી આપણે $x > 0$ જ લઈશું. એમ અનુમાન કરી શકાય કે, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. જે આલેખ પરથી પણ જોઈ શકાય છે અને તે આપણે આ પ્રકરણમાં આગળ સાબિત પણ કરીશું.

ઉદાહરણ 11 : $\lim_{x \to 0} (x + \cos x)$ શોધો.

ઉકેલ :

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.895004165	0.98995	0.9989995	1.095004165	1.009995	1.0009995

સમજૂતી : કોષ્ટક પરથી અનુમાન કરી શકાય કે, $\lim_{x \to 0} (x + \cos x) = 1$.



આકૃતિ 10.11

જુઓ, $\lim_{x \to 0} x = 0$, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

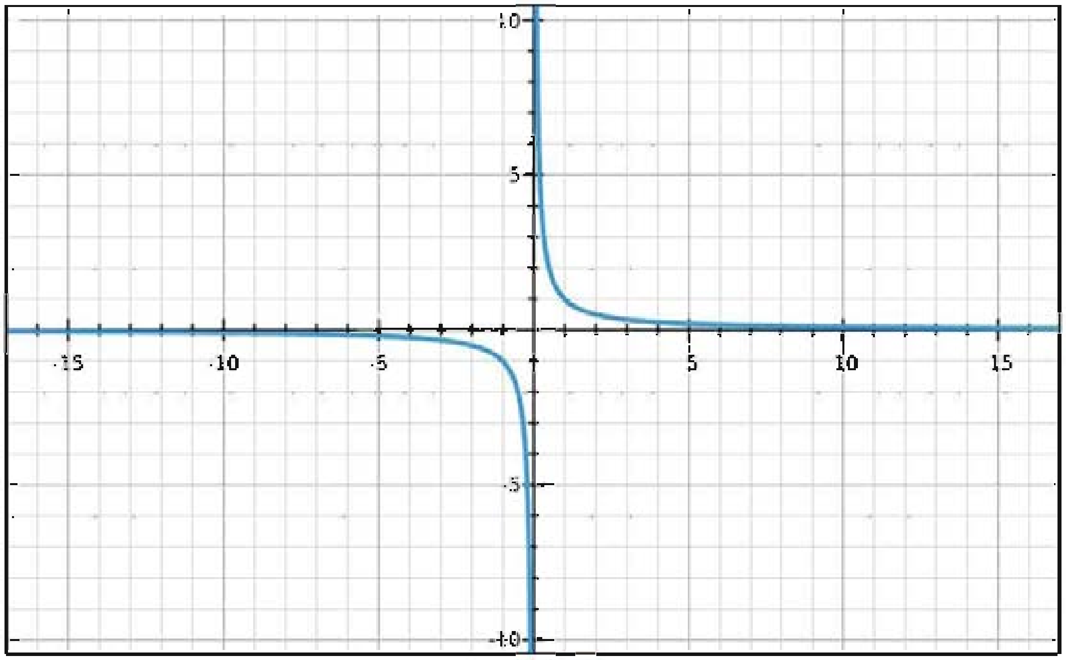
$\therefore \quad \lim_{x \to 0} (x + \cos x) = \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} \cos x$

ઉદાહરણ 12 : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ ના અસ્તિત્વ વિશે ચર્ચા કરો.

ઉકેલ :

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	-10	-100	-1000	10	100	1000

સમજૂતી : અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ $x \to 0+$ તેમ $\frac{1}{x}$ અપરિમિત રીતે વધે અને જેમ $x \to 0-$ તેમ $\frac{1}{x}$ અપરિમિત રીતે ઘટે છે. તેથી $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x}$ અથવા $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x}$નું અસ્તિત્વ નથી. જેમ $x \to 0+$, $\frac{1}{x} \to \infty$ તથા જેમ $x \to 0-$ તેમ $\frac{1}{x} \to -\infty$ કહેવાય. તેથી $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ નું અસ્તિત્વ નથી.



આકૃતિ 10.12

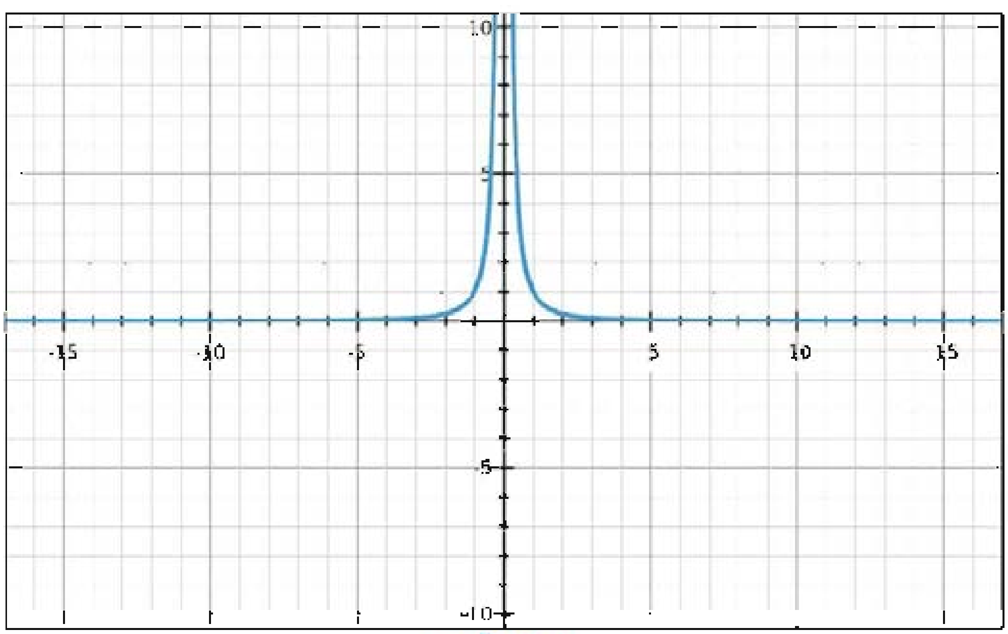
$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ અથવા $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ કહેવું ખોટું છે. અહીં આપણે નોંધીશું કે ∞ અને $-\infty$ એ માત્ર સંકેતો છે અથવા વિસ્તૃત વાસ્તવિક સંખ્યા સંહતિના ઘટકો છે. આપણે તો વાસ્તવિક સંખ્યા સંહતિમાં જ લક્ષ શોધીએ છીએ.

ઉદાહરણ 13 : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ વિશે ચર્ચો.

ઉકેલ :

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^2	10^4	10^6

સમજૂતી : અહીં, જેમ $x \to 0+$ કે $x \to 0-$, $\frac{1}{x^2}$ એ અપરિમિત રીતે વધે છે અથવા $\frac{1}{x^2} \to \infty$ પણ આપણે $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ લખતાં નથી. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

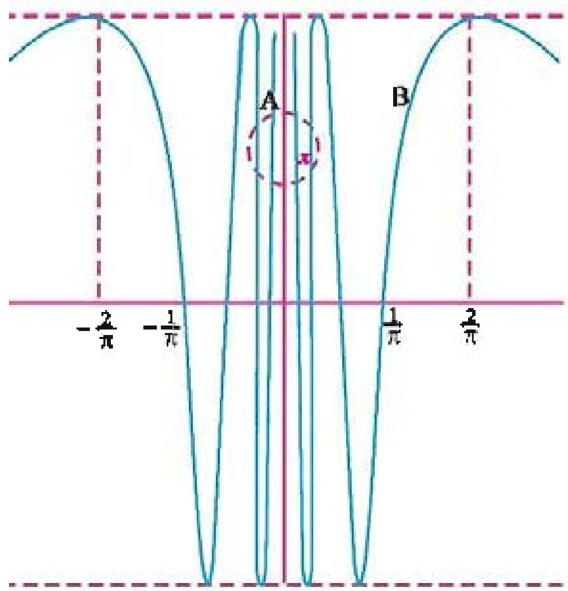


આકૃતિ 10.13

10.3 લક્ષની ઔપચારિક વ્યાખ્યા

હવે આપણે લક્ષની ઔપચારિક વ્યાખ્યા આપવા તૈયાર છીએ. અત્યાર સુધી આપણે કોષ્ટકો અને આલેખોના આધારે વિધેયોના લક્ષ વિશે અનુમાન બાંધ્યું. પણ તે વ્યવહારુ નથી. ઘણીવાર બહુ સરળ દાખલા વિશે પણ અનુમાન બાંધી શકાતું નથી તથા તેનું કોષ્ટક આપણને ગેરમાર્ગે પણ દોરે છે. $sin\frac{1}{x}$ નો આલેખ જુઓ (આકૃતિ 10.14). શું આપણે $\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ વિશે અનુમાન બાંધી શકીએ ? જ્યારે x, $\frac{1}{k\pi}$, $k \in Z - \{0\}$ શ્રેણીની કોઈ પણ કિંમત લે તો $sin\frac{1}{x} = 0$, જ્યારે $x = \frac{2}{(4m-1)\pi}$ ત્યારે $sin\frac{1}{x} = 1$ અને $x = \frac{2}{(4m+3)\pi}$ માટે $sin\frac{1}{x} = -1$. તે સિવાયની પણ x ની કિંમતોને આપણે લક્ષમાં લીધી નથી. આમ, $\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ વિશે કશું પણ અનુમાન બાંધવું મુશ્કેલ છે.

વ્યાખ્યા : વિધેયનું લક્ષ : ધારો કે વિધેય $f(x)$ એ a ને સમાવતા કોઈ અંતરાલમાં a સિવાયની વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વ્યાખ્યાયિત છે. (a એ f ના પ્રદેશમાં ન પણ હોય.) જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ માટે $\delta > 0$ એવો મળે કે જેથી,



આકૃતિ 10.14

$a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ તો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ તેમ કહેવાય અથવા જેમ x એ a ને અનુલક્ષે છે તેમ $f(x)$નું લક્ષ l છે.

અહીં જોઈ શકાય છે કે $\delta > 0$ એ કોઈ પણ ધન સંખ્યા છે. આપણે $f(x)$ને lની વધુ નજીક લઈ જવા $-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$ અથવા $|f(x) - l| < \varepsilon$ લઈ શકાય તે માટે δની અનુરૂપ પસંદગી કરવી પડે કે જેથી $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$ અથવા $-\delta < x - a < \delta$, $x \neq a$ એટલે કે $|x - a| < \delta$, $x \neq a$.

આમ, આપણે $\delta > 0$ એવો પસંદ કરીએ કે જેથી x ને aની વધુ નજીક લવાય અને તેથી $f(x)$ પણ l ની વધુ નજીક આવે.

ડાબી બાજુનું લક્ષ : જો વિધેય $f(x)$ કોઈ અંતરાલ $(a - h, a)$, $(h > 0)$ માં વ્યાખ્યાયિત છે. અને પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ને સંગત $\delta > 0$ મળે કે જેથી, પ્રત્યેક $x \in (a - \delta, a)$ અને $\delta < h$ માટે $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, તો જેમ $x \to a-$ તેમ $f(x)$નું (ડાબી બાજુનું) લક્ષ l છે તેમ કહેવાય અથવા $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$.

જમણી બાજુનું લક્ષ : જો વિધેય $f(x)$ કોઈક અંતરાલ $(a, a + k)$, $(k > 0)$ માં વ્યાખ્યાયિત છે. અને પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ ને સંગત $\delta > 0$ એવો મળે કે પ્રત્યેક $x \in (a, a + \delta)$, $\delta < k$, માટે $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, તો જેમ $x \to a+$ તેમ $f(x)$નું (જમણી બાજુનું) લક્ષ l છે તેમ કહેવાય અથવા $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l$.

નોંધ : (1) વ્યાખ્યામાં એવું ક્યાંય પણ નથી કે a એ fના પ્રદેશમાં હોવો જોઈએ. $f(x)$ એ aને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં a સિવાયની કિંમતો માટે વ્યાખ્યાયિત હોવું જોઈએ. a એ fના પ્રદેશમાં હોઈ પણ શકે કે ના પણ હોય.

(2) $\varepsilon > 0$ આપેલ સંખ્યા છે અને f પર આધારિત $\delta > 0$ શોધવો પડે.

હવે આપણે વ્યાખ્યા સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો : $\lim_{x \to 2} (3x + 2) = 8$.

ઉકેલ : ધારો કે $\varepsilon > 0$ એ આપેલ ધન સંખ્યા છે.

આપણે $8 - \varepsilon < 3x + 2 < 8 + \varepsilon$ મેળવવા ઇચ્છીએ છીએ. $(l = 8)$

$$8 - \varepsilon < 3x + 2 < 8 + \varepsilon \Leftrightarrow 6 - \varepsilon < 3x < 6 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$2 - \delta < x < 2 + \delta$ સાથે સરખાવતાં $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ લેવાનું સૂચન મળે છે. $(a = 2)$

આમ, $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ લેતાં,

$$\therefore \quad 2 - \delta < x < 2 + \delta, x \neq 2 \Rightarrow 2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow 6 - \varepsilon < 3x < 6 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow 8 - \varepsilon < 3x + 2 < 8 + \varepsilon$$

આ જ આપણે મેળવવા ઇચ્છતા હતા અને $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ એવો મળે છે કે જેથી

$$2 - \delta < x < 2 + \delta, x \neq 2 \Rightarrow 8 - \varepsilon < 3x + 2 < 8 + \varepsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 2} (3x + 2) = 8.$$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો : $\lim_{x \to a} x = a$.

ઉકેલ : ધારો કે $\varepsilon = \delta$, $\varepsilon > 0$ તો, $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} x = a.$$

નોંધ : એ દેખીતું નથી કે જેમ $x \to a$ તેમ $x \to a$. પણ તે આપણે વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કર્યું.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $\lim_{x \to a} (mx + c) = ma + c \quad (m \neq 0)$

ઉકેલ : ધારો કે $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$, $\varepsilon > 0$.

$$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow a - \frac{\varepsilon}{|m|} < x < a + \frac{\varepsilon}{|m|}$$

$$\Rightarrow ma - \frac{\varepsilon}{|m|}m < mx < ma + \frac{\varepsilon}{|m|}m \quad (m > 0 \text{ લેતાં})$$

$$\Rightarrow ma - \varepsilon < mx < ma + \varepsilon$$

$$\Rightarrow ma - \varepsilon + c < mx + c < ma + \varepsilon + c$$

$l = ma + c$ લેતાં,

$$\therefore \quad a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow l - \varepsilon < mx + c < l + \varepsilon$$

$\therefore$ જો $m > 0$ તો $\lim_{x \to a} (mx + c) = ma + c$.

તે જ પ્રમાણે, $m < 0$ માટે પણ સાબિત કરી શકાય.

$$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow ma + c + \varepsilon > mx + c > ma + c - \varepsilon \quad (|m| = -m)$$

$$\Rightarrow ma + c - \varepsilon < mx + c < ma + c + \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x \to a} (mx + c) = ma + c.$

10.4 લક્ષનું બીજગણિત

બધે જ લક્ષની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરવો મુશ્કેલ અને અઘરો હોવાથી આપણે વિધેયનું લક્ષ શોધવા માટે કેટલાંક કાર્યનિયમો જોઈશું. તેમને સાબિત કરી શકાય પણ આપણે તે સાબિતી વિના સ્વીકારીશું.

ધારો કે $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ તથા $\lim\limits_{x \to a} g(x)$નું અસ્તિત્વ છે અને તેમનાં મૂલ્યો અનુક્રમે l તથા m છે.

તો (1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$નું અસ્તિત્વ છે અને

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = l + m$$

(2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\, g(x))$નું અસ્તિત્વ છે અને

$$\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = lm$$

(3) જો $m \neq 0$, તો $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$નું અસ્તિત્વ છે અને $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{l}{m}$

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો કે જો $f(x)$ એ અચળ વિધેય છે અને જો $f(x) = c$, તો $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ અથવા બીજા શબ્દોમાં $\lim\limits_{x \to a} c = c$ અને તે પરથી તારવો કે જો, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તો $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = c$ અને $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$. ધારો કે $l = c$.

$$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow |f(x) - l| = |c - c| = 0 < \varepsilon \text{ જ્યાં } 0 < \varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ એટલે કે, $\lim\limits_{x \to a} c = c$

જો $\lim\limits_{x \to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = \lim\limits_{x \to a} c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$$= c \lim_{x \to a} f(x)$$

નોંધ : $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ તથા $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$ નો ઉપયોગ કરીને આપણે $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$ સાબિત કરી શકીએ.

જો $c = -1$ તો, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} (f(x) + (-1)g(x))$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

પ્રમેય 1 : સાબિત કરો : $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \qquad n \in N$

સાબિતી : આ પ્રમેય આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરીશું.

ધારો કે P(n) : $\lim_{x \to a} x^n = a^n \quad n \in N$

આપણે સાબિત કર્યું કે, $\lim_{x \to a} x = a$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore \lim_{x \to a} x^k = a^k$

ધારો કે $n = k + 1$

$\therefore \lim_{x \to a} x^{k-1} = \lim_{x \to a} x^k \cdot x$

$= \lim_{x \to a} x^k \lim_{x \to a} x$ **(લક્ષના ગુણાકાર માટેનો કાર્યનિયમ)**

$= a^k \cdot a = a^{k-1}$ **(P(k) અને P(1))**

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત દ્વારા P(n), $\forall n \in N$ સત્ય છે.

પ્રમેય 2 : જો $\lim_{x \to a} f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim_{x \to a} f_n(x)$$

સાબિતી : આ પરિણામ આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરીશું.

ધારો કે,

P(n) : $\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim_{x \to a} f_n(x)$

$n = 1$ માટે પરિણામ સ્પષ્ટ છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore \lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim_{x \to a} f_k(x)$

ધારો કે $n = k + 1$

$\therefore \lim_{x \to a} (f_1(x) + ... + f_k(x) + f_{k+1}(x))$

$= \lim_{x \to a} (f_1(x) + ... + f_k(x)) + \lim_{x \to a} f_{k+1}(x)$ $\left(\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)\right)$

$= \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim_{x \to a} f_k(x) + \lim_{x \to a} f_{k+1}(x)$ **(P(k))**

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત દ્વારા P(n), $\forall n \in N$ સત્ય છે.

બહુપદી વિધેયનું લક્ષ :

આપણે જાણીએ છીએ કે $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0$, $x \in R$ $(c_n \neq 0, c_0, c_1 ... c_n \in R)$

n ઘાત વાળી બહુપદી છે.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0)$$

$$= \lim_{x \to a} c_n x^n + \lim_{x \to a} c_{n-1} x^{n-1} + ... + \lim_{x \to a} c_0$$ (ઉપપ્રમેય 1)

$$\left(\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)\right)$$

$$= \lim_{x \to a} c_n \lim_{x \to a} x^n + \lim_{x \to a} c_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + ... + \lim_{x \to a} c_0$$

$$\left(\lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)\right)$$

$$= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + ... + c_0 \qquad \left(\lim_{x \to a} x^n = a^n, \lim_{x \to a} c_k = c_k\right)$$

$$= f(a)$$

આમ, જેમ $x \to a$ તેમ બહુપદીનું લક્ષ આપણે બહુપદીમાં $x = a$ મૂકવાથી મેળવી શકીએ.

(આ ગુણધર્મને બહુપદી વિધેયનું **'સાતત્ય'** કહે છે.)

ઉદાહરણ 18 : $\lim_{x \to 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x + 1)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1$

$$= 16 + 12 - 10 + 1 = 19$$

સંમેય વિધેયનું લક્ષ :

ધારો કે $p(x)$ અને $q(x)$ બહુપદીઓ જ્યાં $q(x) \neq 0$ તેવા પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત છે. $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહે છે.

જો $p(x)$ અને $q(x)$ એ a ને સમાવતા પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોય અને $q(a) \neq 0$ તો,

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to a} p(x)}{\lim_{x \to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = h(a).$$

આમ, સંમેય વિધેય $h(x)$ પણ **સતત** વિધેય છે.

ઉદાહરણ 19 : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 4}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $x = 1$ માટે $x^2 + 3x + 4 \neq 0$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

આમ જો $q(a) \neq 0$ તો સંમેય વિધેય $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ માટે $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$ આપણને $h(x)$ માં $x = a$ મૂકવાથી મળશે. પરંતુ જો $q(a) = 0$ હોય તો ?

શેષ પ્રમેય મુજબ $x - a$ એ $q(x)$નો અવયવ થાય. હવે આપણે કેટલાંક વિકલ્પો જોઈશું.

વિકલ્પ (1) : $p(x) = (x - a)^k f(x)$

$$q(x) = (x - a)^k g(x), f(a) \neq 0, g(a) \neq 0, k \in N$$

હવે, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^k f(x)}{(x-a)^k g(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{(લક્ષની ચર્ચામાં } x \neq a\text{)}$$

$$= \frac{f(a)}{g(a)}$$

આમ, $(x - a)$ની સમાન ઘાત અંશ અને છેદમાં હોય તો આપણે તેને દૂર કરી ત્યાર બાદ $x = a$ મૂકી લક્ષ મેળવીશું.

ઉદાહરણ 20 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{4x^3 - 5x^2 + 3x}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{4x^3 - 5x^2 + 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 3x + 1)}{x(4x^2 - 5x + 3)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 5x + 3} = \frac{1}{3}$$

ઉદાહરણ 21 : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 1}{3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 10x + 6}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 1}{3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 10x + 6} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 - 6x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(3x^3 - 2x^2 + 4x - 6)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 2x - 1}{3x^3 - 2x^2 + 4x - 6}$$

$$= \frac{-4}{-1} = 4$$

નોંધ : અહીં $p(1) = q(1) = 0$, તેથી $(x - 1)$ એ $p(x)$ અને $q(x)$નો અવયવ છે. $p(x)$ અને $q(x)$ના અવયવો પાડ્યા બાદ $(x - 1)$ને અંશ અને છેદમાંથી દૂર કરી, $x = 1$ લેતાં લક્ષ મળે.

ઉદાહરણ 22 : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}$ શોધો.

ઉકેલ : $p(2) = 8 - 20 + 16 - 4 = 0$, $q(2) = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$

$\therefore$ $(x - 2)$ એ $p(x)$ અને $q(x)$નો અવયવ છે.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2(2x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{3}$$

અહીં, $(x - 2)^2$ એ $p(x)$ તથા $q(x)$ બંનેનો અવયવ છે.

વિકલ્પ (2) : હવે જો $(x - a)^k$ અને $(x - a)^m$ અનુક્રમે $p(x)$ અને $q(x)$ના અવયવો હોય જ્યાં $k \neq m$ અને $\frac{p(x)}{(x-a)^k}$ અને $\frac{q(x)}{(x-a)^m}$ નો અવયવ $x - a$ ન હોય તો શું થાય તે હવે આપણે જોઈએ.

હવે, જો $k > m$ તો $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-a)^k f(x)}{(x-a)^m g(x)} = \frac{(x-a)^{k-m} f(x)}{g(x)}$

અહીં, $k - m \in N$.

$\therefore \quad f(a) \neq 0, g(a) \neq 0.$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} h(a) = \frac{0 \cdot f(a)}{g(a)} = 0$$

આમ, જો $p(x)$માં $(x - a)$નો ઘાતાંક વધુ હોય તો, $\lim_{x \to a} h(x) = 0$.

વિકલ્પ (3) : જો $p(x) = (x - a)^k f(x)$, $q(x) = (x - a)^m g(x)$ જ્યાં $k < m$ અને $\frac{p(x)}{(x-a)^k} = f(x)$ અને $\frac{q(x)}{(x-a)^m} = g(x)$ એ $x = a$ માટે શૂન્યેતર છે તો,

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^k f(x)}{(x-a)^m g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^{m-k} g(x)}$$

હવે, $f(a)$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. $(a - a)^{m-k} g(a) = 0$

$\therefore$ જેમ $x \to a$ તેમ $h(x)$નો છેદ અસિમિત થશે અને $\lim_{x \to a} h(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 23 : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+1)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

ઉદાહરણ 24 : $\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - x^3 - x^2}{x^6 - x^5 + x}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - x^3 \cdot x^2}{x^6 - x^5 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x^2 - x + 1)}{x(x^5 - x^4 + 1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - x + 1)}{x^5 - x^4 + 1} = \frac{0 \cdot 1}{1} = 0$$

એક અગત્યનું લક્ષ :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \quad n \in N \ (x \neq a), x, a \in R$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આ એક સંમેય વિધેય છે.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} \cdot x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1})}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1} = na^{n-1}$$

નોંધ : આ પરિણામ પ્રત્યેક $n \in R$ માટે સત્ય છે. આપણે તેનો ઉપયોગ $x \in R^+$, $a \in R^+$, $x \neq a$ માટે આગળ કરીશું.

ઉદાહરણ 25 : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{18} - 1}{x^{16} - 1}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{18} - 1}{x^{16} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{18} - 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{x^{16} - 1}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{18} - 1}{x - 1}}{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{16} - 1}{x - 1}}$$

$$= \frac{18(1)^{17}}{16(1)^{15}} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

ઉદાહરણ 26 : $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x^3 + 8}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x^3 + 8} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5 - (-2)^5}{x^3 - (-2)^3}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5 - (-2)^5}{x - (-2)}}{\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 - (-2)^3}{x - (-2)}}$$

$$= \frac{5(-2)^4}{3(-2)^2} = \frac{5 \cdot 16}{3 \cdot 4} = \frac{20}{3}$$

ઉદાહરણ 27 : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2}}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 - x + 1)}{x - 2}}$

$$= \frac{4 \cdot 2^3}{4 - 2 + 1} = \frac{32}{3}$$

આદેશનો નિયમ અથવા સંયોજિત વિધેયના લક્ષનો નિયમ :

ધારો કે $\lim\limits_{x \to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ છે અને $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ તથા $\lim\limits_{y \to b} g(y)$નું અસ્તિત્વ છે અને $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$, તો $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = l$.

અહીં, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ છે એટલે f એ કોઈક $\delta > 0$ માટે $(a - \delta, a + \delta) - \{a\}$માં વ્યાખ્યાયિત છે અને $y = f(x)$. g એ કોઈક $\delta' > 0$ માટે $(b - \delta', b + \delta') - \{b\}$માં વ્યાખ્યાયિત છે.

ઉદાહરણ 28 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x + 2)^5 - 32}{x}$ શોધો.

ઉકેલ : જો $y = f(x) = x + 2$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = b$.

$$\lim_{y \to 2} g(y) = \lim_{y \to 2} \frac{y^5 - 2^5}{y - 2} = 5 \cdot 2^4 = 80$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{(x + 2)^5 - 32}{x} = 80$$

વ્યવહારમાં આપણે $y = x + 2$ આદેશ લઈશું અને દાખલામાં જેમ $x \to 0$ તેમ $y \to 2$ થશે. **'સતત'** વિધેય માટે આ સત્ય છે.

બીજી રીત :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 2)^5 - 32}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 2^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 2^3 + \binom{5}{4}x \cdot 2^4 + \binom{5}{5}2^5 - 32}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x^4 + \binom{5}{1}2x^3 + \binom{5}{2}4x^2 + \binom{5}{3}8x + \binom{5}{4}2^4\right) = 5 \cdot 16 = 80$$

ઉદાહરણ 29 : $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x - h} - \sqrt{x}}{h}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = x + h$. આથી, $h \to 0$ તો $y \to x$ થશે.

$$\therefore \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{y \to x} \frac{y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{y - x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ઉદાહરણ 30 : $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3x + 2}}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3x + 2}}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3x + 2}\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2}\right)}{(x^2 + x + 2) - (3x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2}\right)}{x^2 - 2x}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2}\right)}{x(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)\left(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2}\right)}{x}$$

$$= \frac{(12)(\sqrt{8} + \sqrt{8})}{2} = 6(4\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}$$

$\left(\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{\lim_{x \to 2} (x^2 + x + 2)} = \sqrt{8}\right.$ **સંયોજિત વિધેયના લક્ષનો નિયમ**$\left.\right)$

બે અગત્યના નિયમો :

(1) જો સમાન પ્રદેશમાં $f(x) < g(x)$, $\forall x$ અને જો $\lim_{x \to a} f(x)$ અને $\lim_{x \to a} g(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તો $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$.

(2) જો સમાન પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયો માટે $g(x) < f(x) < h(x)$, $\forall x$. જો $\lim_{x \to a} g(x)$ અને $\lim_{x \to a} h(x)$નું અસ્તિત્વ હોય અને બંને l હોય, તો $\lim_{x \to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય અને તે પણ l થાય.

આને **સેન્ડવીચ પ્રમેય (Sandwich Theorem)** કે **સ્વીઝ પ્રમેય (Squeeze Theorem)** કહે છે. આપણે આ પ્રમેયને સાબિત નહિ કરીએ.

ઉદાહરણ 31 : સાબિત કરો : $\lim_{x \to 0} x sin\frac{1}{x} = 0$. $(x \ne 0)$

ઉકેલ : $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$

$\therefore \quad -x \le x sin\frac{1}{x} \le x \qquad (x > 0)$

$\lim_{x \to 0+} x = 0$, $\lim_{x \to 0+} -x = -\lim_{x \to 0+} x = 0$

$\therefore$ સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી, $\lim_{x \to 0+} x sin\frac{1}{x} = 0$.

તે જ પ્રમાણે, $\lim_{x \to 0-} x sin\frac{1}{x} = 0$.

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} x sin\frac{1}{x} = 0$

નોંધ : નીચે પ્રમાણેનો તર્ક ખોટો છે.

$\lim_{x \to 0} x sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$

$= 0$ (−1 અને 1 વચ્ચેની કોઈ પણ સંખ્યા)

$= 0$

જ્યારે બધાં જ ઘટક વિધેયનું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય ત્યારે જ ગુણાકારનો નિયમ વપરાય. અહીં $\lim_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ નું અસ્તિત્વ નથી. (જુઓ આકૃતિ 10.14)

ઉદાહરણ 32 : સાબિત કરો : $\lim_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$. $(x \ne 0)$

ઉકેલ : $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$

$\therefore \quad -x^2 \le x^2 sin\frac{1}{x} \le x^2 \qquad (x^2 > 0)$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \to 0} -x^2 = -\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\therefore$ સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી $\lim_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં કિંમતોના કોષ્ટક પરથી આપણને ચોક્કસ પરિણામ નથી મળતું તેથી આપણે વ્યાખ્યાની મદદથી આગળ વધી શકીએ.

ધારો કે $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

$\varepsilon > 0$ હોવાથી $\delta > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે.

$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow 0 < |x|^2 < \varepsilon$

હવે, જો $0 < |x - 0| < \delta$ તો $\left|x^2 sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x^2 sin\frac{1}{x}\right| \le |x|^2 < \varepsilon$

કારણ કે $\left|sin\frac{1}{x}\right| \le 1$

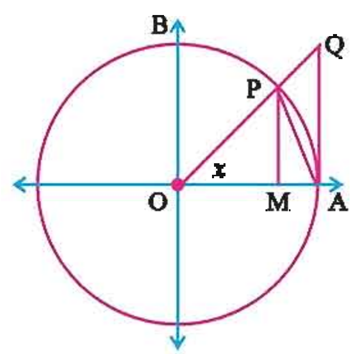
$\therefore \lim\limits_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$

10.5 ત્રિકોણમિતીય લક્ષ

આપણે કેટલાંક ત્રિકોણમિતીય પરિણામો મેળવીશું.

પૂર્વપ્રમેય 1 : $cosx < \frac{sinx}{x} < 1; \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

સાબિતી : જો x એ $\angle AOP$નું રેડિયન માપ હોય, જ્યાં $0 < x < \frac{\pi}{2}$, તો $P(x) \in \widehat{AB}$. અત્રે $\odot(O, OA)$ એકમ વર્તુળ છે. A આગળનો વર્તુળનો સ્પર્શક $\overrightarrow{OP}$ ને Q માં છેદે છે. $\overline{PM} \perp$ X-અક્ષ અને $M \in \overline{OP}$.



આકૃતિ 10.15

સ્પષ્ટ છે કે, ΔOAPનું ક્ષેત્રફળ < વૃત્તાંશ OAPનું ક્ષેત્રફળ < ΔOAQનું ક્ષેત્રફળ **(i)**

હવે, $PM = sinx$, $AQ = \frac{AQ}{OA} \cdot OA = OA\ tanx = tanx$

$\therefore \frac{1}{2}OA \cdot PM < \frac{1}{2}(OA)^2 x < \frac{1}{2}OA \cdot AQ$ **((i) અને વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}r^2\theta$)**

$\therefore sinx < x < tanx$ **(OA = 1)**

$\therefore 1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$ **($sinx > 0$)**

$\therefore cosx < \frac{sinx}{x} < 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

જો $x < 0$ તો, ધારો કે $x = -y$, તો $y > 0$

$\therefore cosy < \frac{siny}{y} < 1 \qquad 0 < y < \frac{\pi}{2}$

$\therefore cos(-x) < \frac{sin(-x)}{-x} < 1 \qquad 0 < -x < \frac{\pi}{2}$

$\therefore cosx < \frac{sinx}{x} < 1 \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ **($|x| = -x$)**

પૂર્વપ્રમેય 2 : $|sinx| \le |x| \qquad \forall x \in R$

સાબિતી : જો $|x| \ge 1$, તો $|sinx| \le 1 \le |x|$ સત્ય છે.

$x = 0$ માટે $|sin0| = 0 \le 0 = |0|$

હવે આપણે આ પરિણામ $0 < |x| < 1$ માટે સાબિત કરીશું.

આપણે જોયું કે, $\frac{sinx}{x} < 1 \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

ધારો કે $0 < x < 1$

$\therefore \quad 0 < x < 1 < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \frac{sinx}{x} < 1$ (પૂર્વપ્રમેય 1)

$\therefore \quad sinx < x$ $(x > 0)$

$\therefore \quad |sinx| \le |x|$ કારણ કે $0 < x < \frac{\pi}{2}$ હોવાથી $x > 0$, $sinx > 0$

જો $-1 < x < 0$ તો $x = -y$ લેતાં,

$-1 < -y < 0$ અથવા $0 < y < 1$

$\therefore \quad |siny| < |y|$

$\therefore \quad |sin(-x)| < |-x|$

$\therefore \quad |-sinx| < |-x|$. આથી $|sinx| < |x|$

$\therefore \quad |sinx| \le |x| \qquad \forall x \in R$

પૂર્વપ્રમેય 3 : $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

સાબિતી : $\varepsilon = \delta$ લેતાં, $-\delta < x < \delta \Rightarrow |x| < \delta$

$\Rightarrow |x| < \varepsilon$ $(\delta = \varepsilon)$

$\Rightarrow ||x|| < \varepsilon$ $((||x||) = |x|)$

$\Rightarrow ||x| - 0| < \varepsilon$

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0$

પૂર્વપ્રમેય 4 : જો $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$ તો, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

સાબિતી : $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$\lim_{x \to 0} -|f(x)| = -\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0, \quad \lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$

$\therefore$ **સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી,** $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

પૂર્વપ્રમેય 5 : $\lim_{x \to 0} sinx = 0$

સાબિતી : $0 \le |sinx| \le |x| \quad \forall x \in R$

$\lim_{x \to 0} 0 = 0, \ \lim_{x \to 0} |x| = 0$

$\lim_{x \to 0} |sinx| = 0$ (સેન્ડવીચ પ્રમેય)

$\therefore \lim_{x \to 0} sinx = 0$ (પૂર્વપ્રમેય 4)

પૂર્વપ્રમેય 6 : $1 - \frac{x^2}{2} \le cosx \le 1 \quad \forall x \in R$

સાબિતી : આપણે જાણીએ છીએ કે, $1 - cosx = 2sin^2\frac{x}{2}$

વળી, $|sinx| \le |x|$

$\therefore \left|sin\frac{x}{2}\right| \le \left|\frac{x}{2}\right|$

$\therefore sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{4}$

$\therefore 1 - cosx = 2sin^2\frac{x}{2} \le 2 \times \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$

$\therefore 1 - \frac{x^2}{2} \le cosx \le 1$

પ્રમેય 3 : $\lim_{x \to 0} cosx = 1$

સાબિતી : $1 - \frac{x^2}{2} \le cosx \le 1$

$\lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - 0 = 1$ અને $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ (બહુપદીનું લક્ષ)

$\therefore$ સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી, $\lim_{x \to 0} cosx = 1$.

પ્રમેય 4 : $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

સાબિતી : $cosx < \frac{sinx}{x} < 1 \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 0} cosx = 1, \ \lim_{x \to 0} 1 = 1$

$\therefore$ સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી, $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

પ્રમેય 5 : $\lim_{x \to a} sinx = sina$

સાબિતી : ધારો કે $x - a = h$ તો $x = a + h$

$\therefore x \to a$ તો $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \sin h = \lim_{h \to 0} \sin (a + h) = \lim_{h \to 0} (\sin a \cos h + \cos a \sin h)$$

$$= \sin a \lim_{h \to 0} \cos h + \cos a \lim_{h \to 0} \sin h$$ (લક્ષનાં કાર્યનિયમો)

$$= \sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0$$ $\left(\lim_{h \to 0} \cos h = 1, \lim_{h \to 0} \sinh = 0\right)$

$$= \sin a$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \sin x = \sin a$$

પ્રમેય 6 : $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

સાબિતી : $x = a + h$ લેતાં, જેમ $x \to a$ તેમ $h \to 0$

હવે, $\lim_{h \to 0} \cos h = 1$ તથા $\lim_{h \to 0} \sin h = 0$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \lim_{h \to 0} \cos (a + h) = \lim_{h \to 0} (\cos a \cos h - \sin a \sin h)$$

$$= \cos a \lim_{h \to 0} \cos h - \sin a \lim_{h \to 0} \sin h$$ (લક્ષનાં કાર્યનિયમો)

$$= \cos a \cdot 1 + \sin a \cdot 0$$

$$= \cos a$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

પ્રમેય 7 : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

સાબિતી : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x}$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \to 0} \cos x}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \to 0} \cos x = 1\right)$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

હવે આપણે આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરી ઉદાહરણો ગણીશું.

ઉદાહરણ 33 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ શોધો. $a, b \neq 0$

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot a}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot b}$

$$= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

ઉદાહરણ 34 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2} \cdot 2}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{x}{2} \cdot 2}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

બીજી રીત : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)(1+\cos x)}{(1+\cos 2x)(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x(1-\cos x)}{\sin^2 x(1-\cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{4x^2} \frac{4x^2}{\sin^2 x} \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos 2x)}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot \frac{(2)}{(2)} = 4$$

ઉદાહરણ 35 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin ax}{x} + b}{a - \frac{\sin bx}{x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{a\frac{\sin ax}{ax} + b}{a + b\frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

ઉદાહરણ 36 : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{\frac{\pi}{2} - x}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{\pi}{2} - x = \alpha$. તો જેમ $x \to \frac{\pi}{2}$ તેમ $\alpha \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan(\pi - 2\alpha)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{-\tan 2\alpha}{2\alpha} \cdot 2 = -2$$

ઉદાહરણ 37 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x \cdot 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{x \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 38 : $\lim_{x \to 0} \frac{cosecx - cotx}{x}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0} \frac{cosecx - cotx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{sinx \cdot x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2sin\frac{x}{2} \cdot sin\frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2} \frac{x}{sinx}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

અથવા $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{sinx \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - cosx)(1 + cosx)}{(1 + cosx)\, xsinx}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sin^2 x}{xsinx\,(1 + cosx)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x(1 + cosx)}$$

$$= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 39 : $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{sinx - cosx}{\frac{\pi}{4} - x}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{sinx - cosx}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sinx - \frac{1}{\sqrt{2}}cosx\right)}{\frac{\pi}{4} - x}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(sinx\, cos\frac{\pi}{4} - sin\frac{\pi}{4}cosx\right)}{\frac{\pi}{4} - x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\, sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sqrt{2}\, sin\,\alpha}{-\alpha} \qquad \left(\alpha = x - \frac{\pi}{4} \text{ લેતાં } \alpha \to 0\right)$$

$$= -\sqrt{2}$$

પ્રકીર્ણ દાખલા :

ઉદાહરણ 40 : $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1}\right)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1 - 2}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 41 : $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 + 4x + 12}{x^3 - 3x + 2}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 + 4x + 12}{x^3 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x^2 - x + 6)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 1)}$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

$= \dfrac{4 + 2 + 6}{4 + 4 + 1}$

$= \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

ઉદાહરણ 42 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x + 1 - x - 1}{x^2\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \dfrac{1}{2}$

ઉદાહરણ 43 : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x\tan x - \dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x\tan x - \dfrac{\pi}{2}\sec x\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x\sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

$= \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha - \frac{\pi}{2}}{\sin\alpha}$ $\qquad \left(\dfrac{\pi}{2} - x = \alpha, \alpha \to 0\right)$

$= \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2}(\cos\alpha - 1)}{\sin\alpha} - \dfrac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$= \lim\limits_{\alpha \to 0} \left(\dfrac{-\frac{\pi}{2}\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{\alpha}{\tan\alpha}\right)$

$= \lim\limits_{\alpha \to 0} \left(-\dfrac{\pi}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{\tan\alpha}\right)$

$= -1$

ઉદાહરણ 44 : $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $1 - x = \alpha$ તો $x \to 1$ તેમ $\alpha \to 0$.

$$\therefore \lim_{x \to 1} (1 - x)\, tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{\alpha \to 0} \alpha\, tan \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \alpha\, tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \alpha\, cot \frac{\pi\alpha}{2}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{\frac{\pi}{2} tan \frac{\pi\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

ઉદાહરણ 45 : $\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n}\right)$ શોધો. $(m, n \in N)$

ઉકેલ : $\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{m(1 - x^n) - n(1 - x^m)}{(1 - x^n)(1 - x^m)}$

ધારો કે $x = 1 + h$. આમ જો $x \to 1$ તો $h \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m[1 - (1 + h)^n] - n[1 - (1 + h)^m]}{[(1 + h)^m - 1][(1 + h)^n - 1]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m\left(1 - 1 - nh - \binom{n}{2}h^2 - \binom{n}{3}h^3 - ... - h^n\right) - n\left(1 - 1 - \binom{m}{1}h - \binom{m}{2}h^2 - ... - h^m\right)}{\left(\binom{m}{1}h + \binom{m}{2}h^2 + ... + h^m\right)\left(\binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + ... + h^n\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(-mn - m\binom{n}{2}h - m\binom{n}{3}h^2 - ... - mh^{n-1} + nm + n\binom{m}{2}h + n\binom{m}{3}h^2 + ... + nh^{m-1}\right)}{h\left(\binom{m}{1} + \binom{m}{2}h + ... + h^{m-1}\right) \cdot h\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}h + ... + h^{n-1}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(-m\binom{n}{2} - m\binom{n}{3}h - ... - mh^{n-2} + n\binom{m}{2} + n\binom{m}{3}h + ... + nh^{m-2}\right)}{h\left(\binom{m}{1} + \binom{m}{2}h + ... + h^{m-1}\right)\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}h + ... + h^{n-1}\right)}$$

$$= \frac{-m\binom{n}{2} - n\binom{m}{2}}{\binom{m}{1}\binom{n}{1}}$$

$$= \frac{\frac{-mn(n-1)}{2} + \frac{nm(m-1)}{2}}{mn}$$

$$= \frac{m - 1 - n + 1}{2}$$

$$= \frac{m - n}{2}$$

સ્વાધ્યાય 10

લક્ષના બીજગણિત તથા વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી નીચેના સાબિત કરો : (1 થી 3)

1. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ **2.** $\lim_{x \to 1} |x|^2 = 1$ **3.** $\lim_{x \to 3} x^3 = 27$

સાબિત કરો કે નીચેનાં લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી : (4 થી 6)

4. $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ **5.** $\lim_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ **6.** $\lim_{x \to 2} [x]$

7. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $x \neq 3$, $f(3) = 6$ માટે સાબિત કરો કે $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

8. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $x \neq -1$, $f(-1) = 5$ માટે સાબિત કરો કે $\lim_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$

9. જો કોઈક $\delta > 0$ માટે પ્રત્યેક $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ માટે $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ તો એમ કહી શકાય કે પ્રત્યેક $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ માટે $f(x) = g(x)$?

10. જો $x^2 + 1 \leq f(x) \leq 2x^4 + x^2 + 1$ તો સાબિત કરો કે $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

નીચેનાં લક્ષ શોધો : (11 થી 32)

11. $\lim_{x \to 64} \frac{x^{\frac{1}{6}} - 2}{\sqrt{x} - 8}$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan mx}{\tan nx}$

13. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$

14. $\lim_{x \to \alpha} \frac{9\sin x - 40\cos x}{x - \alpha}$ જ્યાં, $\tan\alpha = \frac{40}{9}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

15. $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{h}$

16. $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}$

17. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 3x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}$

18. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

19. $\lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^3-1}}$ (કેમ $x \to 1+$?)

20. $\lim_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$; $n \in N$

21. $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$

22. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x + \cos 3x}{x - \frac{\pi}{4}}$

23. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$; $m, n \in N$

24. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{10 \cdot cosx} - 3}{(\pi - x)^2}$

25. $\lim_{x \to 0} \frac{cos5x - cos7x}{x^2}$

26. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + cosx}}{x^2}$

27. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{secx - tanx}{\frac{\pi}{2} - x}$

28. $\lim_{h \to 0} \frac{sin(a + 3h) - 3sin(a + 2h) - 3sin(a + h) - sina}{h^3}$

29. $\lim_{x \to 0} \frac{sin(3 + x) - sin(3 - x)}{x}$

30. $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a + 3x} - \sqrt{x + 4a}}{\sqrt{3a + 2x} - \sqrt{4x + a}}$

31. $\lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^2 \, sin \, (a + h) - a^2 sina}{h}$

32. $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h) \, sec \, (x + h) - xsecx}{h}$

33. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - sinx}{cosx} = ...$ ☐

(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) 2

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ ...... ☐

(a) 1 છે. (b) −1 છે. (c) શૂન્ય છે. (d) નું અસ્તિત્વ નથી.

(3) $\lim_{x \to \pi} \frac{tanx}{\pi - x}$ ...... ☐

(a) 1 છે. (b) −1 છે. (c) નું અસ્તિત્વ નથી. (d) 0 છે.

(4) જો $\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$, તો n = ... છે. ☐

(a) −3 (b) 2 (c) 5 (d) 6

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosmx}{1 - cosnx}$ ...... છે. ☐

(a) $\frac{m}{n}$ (b) $\frac{m^2}{n^2}$ (c) $\frac{m^3}{n^3}$ (d) 0

(6) $\lim_{x \to 0+} \frac{|sinx|}{x}$ .... ☐

(a) 1 છે. (b) −1 છે. (c) નું અસ્તિત્વ નથી. (d) 0 છે.

(7) $\lim_{x \to 0-} \frac{sin[x]}{[x]}$ ...... $(-1 < x < 0, x \in R)$ ☐

(a) 1 છે. (b) શૂન્ય છે. (c) −1 છે. (d) $sin1$ છે.

(8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}} = \ldots\ldots$ છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) −1

(9) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(2x - 3)}{2x^2 + x - 3}$ ......

(a) નું અસ્તિત્વ નથી. (b) 1 છે. (c) $\frac{1}{10}$ છે. (d) $-\frac{1}{10}$ છે.

(10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - 2\sin 3x \cdot \sin 5x}{x}$ ...... છે.

(a) 5 (b) 6 (c) 0 (d) 10

(11) If $1 \le f(x) \le x^2 + 2x + 2 \quad \forall x \in R$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ...... છે.

(a) 2 (b) 0 (c) −1 (d) 1

(12) $\lim\limits_{x \to 0-} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{|x|}\right)$ ...... છે.

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) −1

(13) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ...... જ્યાં $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ 3x + 2 & x > 2 \end{cases}$

(a) 5 છે. (b) 3 છે. (c) 2 છે. (d) નું અસ્તિત્વ નથી.

(14) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \ldots\ldots$ જ્યાં, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x < 0 \\ 3x^2 + 1 & x \ge 0 \end{cases}$

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) $\frac{1}{3}$

(15) $\lim\limits_{x \to 5+} [x]$ ...... છે.

(a) 6 (b) 5 (c) −5 (d) 4

(16) $\lim\limits_{x \to -4-} [x]$ ...... છે.

(a) 5 (b) −5 (c) −4 (d) 4

(17) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$ ...... થાય.

(a) $\cos a$ (b) $\sin a$ (c) a (d) 0

(18) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ $(a > 0)$ ...... છે.

(a) $\cos a$ (b) $\dfrac{\cos a}{2\sqrt{a}}$ (c) $2\sqrt{a}\cos a$ (d) $2\sqrt{a}$

(19) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - 5x}{7x - \sin x}$ ...... છે.

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{-2}{3}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $\frac{-5}{7}$

(20) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}}$ $(a > 0)$ ...... છે.

(a) $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{5}}$ (b) $\frac{1}{5}a^{\frac{1}{15}}$ (c) $\frac{5}{3}a^{\frac{5}{3}}$ (d) $\frac{5}{3}a^{\frac{2}{15}}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. લક્ષનો ઇતિહાસ
2. આલેખ અને કોષ્ટકથી લક્ષનું અનુમાન
3. લક્ષની ઔપચારિક વ્યાખ્યા અને ઉપયોગ.
4. લક્ષનું બીજગણિત. જો $\lim_{x \to a} f(x)$ અને $\lim_{x \to a} g(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તો,

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} (f(x)\ g(x)) = \lim_{x \to a} f(x)\ \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$ (જ્યાં, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$)

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ અને આદેશની રીત
6. સેન્ડવીચ પ્રમેય અને ત્રિકોણમિતીય લક્ષ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

—❖—

Bhaskara I

Bhaskara stated theorems about the solutions of today so called Pell equations. For instance, he posed the problem: "Tell me, O mathematician, what is that square which multiplied by 8 becomes - together with unity - a square?" In modern notation, he asked for the solutions of the Pell equation $8x^2 + 1 = y^2$. It has the simple solution $x = 1$, $y = 3$, or shortly $(x,y) = (1,3)$, from which further solutions can be constructed, e.g., $(x,y) = (6,17)$.

પ્રકરણ 11

વિકલન

Mathematics is as much an aspect of culture as it is a collection of algorithms.

*– **Carl Boyer** (in a Calculus Textbook)*

11.1 પ્રાસ્તાવિક

કલનશાસ્ત્રમાં, કોઈ વિધેયનું તેના ચલ ને સાપેક્ષ થતાં ફેરફારનું માપ વિકલિત કહેવાય છે. સ્થૂળ ભાષામાં વિકલન એટલે કોઈ રાશિમાં અન્ય કોઈ રાશિ ને સાપેક્ષ થતો ફેરફાર એમ કહી શકાય. કોઈ પદાર્થનો, સમયને સાપેક્ષ સ્થિતિમાં થતો ફેરફાર **તાત્ક્ષણિક વેગ (Instantaneous Velocity)** કહેવાય છે.

કોઈ વિધેયનું વિકલન તેના ચલની આપેલ કિંમત આગળનું 'સૌથી સારું' સુરેખ આસન્ન મૂલ્ય હોય છે. વાસ્તવિક ચલના વાસ્તવિક વિધેય માટે કોઈ બિંદુ આગળ વિધેયનું વિકલિત, તે વિધેયના આલેખના તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

કોઈ 'નાની' સંખ્યા h માટે બિંદુઓ $(a, f(a))$ અને $(a + h, f(a + h))$ માંથી પસાર થતી રેખાને વક્ર $y = f(x)$ની **છેદક રેખા (Secant line)** કહે છે. h શૂન્યાભિલક્ષી હોય તો છેદિકાનો ઢાળ વક્ર $y = f(x)$ ના $(a, f(a))$ આગળના સ્પર્શકના ઢાળનું આસન્ન મૂલ્ય આપે છે, તથા h નું મૂલ્ય જેટલું નાનું હોય તેટલું ઢાળનું આસન્ન મૂલ્ય સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્યની વધારે નજીક મળે છે.

રેખાનો બિંદુ $(a, f(a))$ આગળ ઢાળ

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ થી મળે.

આને **ન્યૂટનનો તફાવત ગુણોત્તર (Newton's Difference Quotient)** કહેવાય છે.

જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય તો તેને f નું a આગળ વિકલિત કહેવાય છે. અને તેને $f'(a)$ વડે દર્શાવાય છે. આ રાશિ વક્ર $y = f(x)$ના બિંદુ $(a, f(a))$ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

હવે, $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

$$= f'(a) - f'(a)$$

$$= 0$$

આમ, $f(a + h) \cong f(a) + hf'(a)$ એટલે કે hના અત્યંત નાના મૂલ્ય માટે $f(a + h)$ એ $f(a) + hf'(a)$નું સુરેખ આસન્ન મૂલ્ય દર્શાવે છે.

જો $Q(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ લઈએ તો, $Q(h)$ બિંદુઓ $(a, f(a))$ તથા $(a + h, f(a + h))$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ આપે છે. જો fનો આલેખ **'સળંગ'** હોય અને વચ્ચે તૂટક ના હોય અને $\lim_{h \to 0} Q(h)$ અસ્તિત્વ ધરાવે તો તેને fનું a આગળ વિકલિત કહેવાય છે, અને f એ $x = a$ આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય છે.

રોકેટશાસ્ત્રમાં વૈજ્ઞાનિકોને રોકેટની ઊંચાઈની માહિતી પરથી, ઉપગ્રહ છોડવાની ગતિની ગણતરી કરવાની હોય છે. કોઈ શેરના વર્તમાન ભાવ ઉપરથી તેમાં થનારા ફેરફારની આગાહી નાણાસંસ્થાઓ કરતી હોય છે. આ બધામાં કોઈ રાશિ (સાપેક્ષ ચલ)માં, અન્ય કોઈ રાશિ (નિરપેક્ષ ચલ)ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારની માહિતી જરૂરી છે.

11.2 વ્યાખ્યા અને ઉદાહરણો

વ્યાખ્યા : **ધારો કે f એ અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. ધારો કે $c \in (a, b)$ અને h એટલો 'નાનો' છે કે $c + h \in (a, b)$.**

જો $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય તો તેને f નું c આગળ વિકલિત કહે છે, અને તેને $f'(c)$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ 1 : $f : R \to R$, $f(x) = 3x + 5$ છે. જો $f'(1)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)+5-8}{h}$ **($f(1) = 8$)**

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$\therefore$ $f'(1)$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને $f'(1) = 3$

ઉદાહરણ 2 : $f : R \to R$, $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ માટે જો $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h - 1 - (-1)}{h}$ **($f(0) = -1$)**

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2h + 3) = 3$$

$\therefore$ $f'(0)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(0) = 3$

ઉદાહરણ 3 : $f : R \to R$, $f(x) = sinx$ માટે જો $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sinh - 0}{h}$ **($sin0 = 0$)**

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sinh}{h} = 1$$

$\therefore$ $f'(0)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(0) = 1$

ઉદાહરણ 4 : $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ માટે $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}$ $\quad (f(0) = 0)$

$= \lim\limits_{h \to 0} \sin\frac{1}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી. (જુઓ પ્રકરણ 10)

$\therefore$ $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ને $x = 0$ આગળ વિકલિત નથી.

ઉદાહરણ 5 : $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ માટે $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$ $\quad (f(0) = 0)$

$= \lim\limits_{h \to 0} h\sin\frac{1}{h}$

હવે, $0 \leq \left|\sin\frac{1}{h}\right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|h\sin\frac{1}{h}\right| \leq |h|$ અને $\lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} |h| = 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{h \to 0} \left|h\sin\frac{1}{h}\right| = 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{h \to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$

$\therefore$ $f'(0)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(0) = 0$

વ્યાખ્યા : ધારો કે f એ (a, b) ઉપર વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે $x \in (a, b)$ અને h એટલો 'નાનો' છે કે જેથી $x + h \in (a, b)$. જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય તો f એ x આગળ વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને f નું x આગળનું વિકલિત કહીશું. આની મદદથી આપણે પ્રત્યેક વિધેય $f(x)$ને સંગત એક વિધેય $\frac{d}{dx} f(x)$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ. (a, b) નાં જે બિંદુઓ આગળ f વિકલનીય હોય તે બિંદુઓ માટે

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ એમ લખીશું.}$$

(અહીં f એ (a, b)ના ઓછામાં ઓછા એક બિંદુ આગળ વિકલનીય છે તેમ ધારી લીધું છે.)

જો $y = f(x)$ લખીએ તો $\frac{d}{dx} f(x)$ને $\frac{dy}{dx}$ લખી શકાય. તેનું $x = c$ આગળનું મૂલ્ય $\left[\frac{d}{dx} f(x)\right]_{x=c}$ અથવા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c}$ અથવા ક્યારેક $[D f(x)]_{x=c}$ અથવા $f'(c)$ એમ વિવિધ રીતે લખી શકાય.

ઉદાહરણ 6 : $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ માટે $f'(x)$ અને $f'(0)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{[a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - (ax^2 + bx + c)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{[a(x^2 + 2hx + h^2) + bx + bh + c] - (ax^2 + bx + c)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2ahx + ah^2 + bh}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b)$$

$$= 2ax + b$$

∴ $\forall x \in R$, $f'(x)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(x) = 2ax + b$

∴ $f'(0) = b$ ($f'(x)$ માં $x = 0$ લેતાં)

નોંધ : જો $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ની મદદથી $f'(0)$ મેળવીએ તો પણ $f'(0) = b$ મળે.

ઉદાહરણ 7 : $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$ માટે $f'(x)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

∴ $f'(x)$નું અસ્તિત્વ છે, તેમજ $f'(x) = a$, $\forall x \in R$

ઉદાહરણ 8 : $f : R \to R$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ માટે $f'(x)$ અને $f'(0)$ મેળવો. અહીં, $x \neq \frac{-d}{c}$.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a(x+h)+b}{c(x+h)+d} - \frac{ax+b}{cx+d}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ax + ah + b)(cx + d) - (ax + b)(cx + ch + d)}{(cx + ch + d)(cx + d)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(acx + ad - acx - bc)}{(cx + ch + d)(cx + d)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ad - bc)}{(cx + ch + d)(cx + d)}$$

$$= \frac{(ad - bc)}{(cx + d)^2} \qquad \text{(i)}$$

∴ $f'(x)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

∴ $f'(0) = \frac{ad - bc}{d^2}$

નોંધ : (i) માં $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ લેતાં $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$

11.3 વિકલિત પરની બૈજિક ક્રિયાઓ

ધારો કે f અને g બંને (a, b) ઉપર વિકલનીય છે.

તો, **(1) $f + g$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને**

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

(2) $f - g$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

(3) $f \times g$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}(f(x)\ g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

(4) $\frac{f}{g}$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

આને વિકલિત માટેના કાર્યનિયમો પણ કહે છે.

અગત્યનાં પરિણામો :

(1) $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$

આપણે જોયું કે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ધારો કે $x + h = t$ તો જેમ $h \to 0$ તેમ $t \to x$

$\therefore \quad f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$

(2) અચળ વિધેયનું વિકલિત શૂન્ય થાય છે.

ધારો કે $f(x) = c,\ \forall x \in R.$

$\therefore \quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} c = 0$

(3) $\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$ ($k \in R$ અચળ છે.)

$\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}k$ ((2) પરથી)

$= k\frac{d}{dx}f(x) + f(x) \cdot 0$

$= k\frac{d}{dx}f(x)$

ઉદાહરણ 9 : $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ અને $\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$ ઉપરથી $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x) + (-1)g(x))$

$= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(-1)g(x)$

$= \frac{d}{dx}f(x) + (-1)\frac{d}{dx}g(x)$

$= \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

ઉદાહરણ 10 : $k \in R$ માટે $\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} k \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **(લક્ષનો નિયમ)**

$= k\frac{d}{dx}f(x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો :

(1) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad n \in N, x \in R$

સાબિતી : $\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right) - x^n}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \ldots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$

બીજી સાબિતી : આપણે આ સાબિતી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપીશું.

ધારો કે, P(n) : $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

આપણે જોયું કે, $\frac{d}{dx}x^1 = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$. વળી $1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot 1 = 1$ **($x \neq 0$)**

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore \quad \frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$.

ધારો કે, $n = k + 1$

$\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{d}{dx}x^k \cdot x$

$= x^k \frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}x^k$

$= x^k \cdot 1 + x \cdot kx^{k-1}$

$= x^k + kx^k$

$= (k+1)x^k$

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ $\forall n \in N$, P(n) સત્ય છે.

ત્રીજી સાબિતી : $\frac{d}{dx}x^n = \lim_{t \to x}\frac{t^n - x^n}{t - x}$

$$= \lim_{t \to x}\frac{(t - x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1})}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x}(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

નોંધ : આપણે $n \in$ N અને $x \in$ R માટે સાબિત આપી, પરંતુ આ પરિણામ $n \in$ R, $x \in$ R$^+$ માટે પણ સત્ય છે. આની સાબિતી આપણે આપીશું નહિ.

(2) બહુપદીનું વિકલિત :

ધારો કે $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, $n \in$ N, $a_n \neq 0$, $a_i \in$ R

(i = 0, 1, 2,..., n)

એ n-કક્ષાની બહુપદી છે.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}P(x) = \frac{d}{dx}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0)$$

$$= \frac{d}{dx}a_n x^n + \frac{d}{dx}a_{n-1}x^{n-1} + \frac{d}{dx}a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \frac{d}{dx}a_0$$

(સરવાળાનું વિકલિત)

$$= a_n\frac{d}{dx}x^n + a_{n-1}\frac{d}{dx}x^{n-1} + a_{n-2}\frac{d}{dx}x^{n-2} + \ldots + \frac{d}{dx}a_0$$

$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \ldots + 0)$$

$$\left(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right)$$

(3) સંમેય વિધેયનું વિકલિત :

ધારો કે, $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ સંમેય વિધેય છે. અહીં $p(x)$ અને $q(x)$ બહુપદી વિધેય છે. $q(x) \neq 0$

$\therefore \quad h'(x) = \frac{q(x)\,p'(x) - p(x)\,q'(x)}{[q(x)]^2}$, અહીં $p'(x)$ અને $q'(x)$ પરિણામ (2) પરથી મેળવી શકાય.

(4) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $x \in$ R

$$\lim_{h \to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

(5) $\frac{d}{dx} cosx = -sinx, \quad x \in R$

$$\lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cosx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2sin\left(x+\frac{h}{2}\right) sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right) sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -sinx$$

$\therefore \frac{d}{dx} cosx = -sinx$

(6) $\frac{d}{dx} tanx = sec^2x \qquad x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \middle| k \in Z\right\}$

$$\frac{d}{dx} tanx = \frac{d}{dx} \frac{sinx}{cosx}$$

$$= \frac{cosx \frac{d}{dx} sinx - sinx \frac{d}{dx} cosx}{cos^2 x} \qquad \left(\frac{d}{dx}\frac{f}{g}\text{ના નિયમ મુજબ}\right)$$

$$= \frac{cosx(cosx) - sinx(-sinx)}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{cos^2 x}$$

$$= sec^2 x$$

(7) $\frac{d}{dx} cotx = -cosec^2x, \quad x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$$\frac{d}{dx} cotx = \frac{d}{dx} \frac{cosx}{sinx}$$

$$= \frac{sinx \frac{d}{dx} cosx - cosx \frac{d}{dx} sinx}{sin^2 x} \qquad \left(\frac{d}{dx}\frac{f}{g}\text{ના નિયમ મુજબ}\right)$$

$$= \frac{sinx(-sinx) - cosx \cdot cosx}{sin^2 x}$$

$$= \frac{-(sin^2 x + cos^2 x)}{sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{sin^2 x}$$

$$= -cosec^2 x$$

(8) $\frac{d}{dx} secx = secx\ tanx, \quad x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \middle| k \in Z\right\}$

$$\frac{d}{dx} secx = \frac{d}{dx} \frac{1}{cosx}$$

$$= \frac{cosx \frac{d}{dx} 1 - 1 \frac{d}{dx} cosx}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cosx \cdot 0 - 1(-sinx)}{cos^2 x}$$

$$= \frac{sinx}{cos^2 x}$$

$$= secx \ tanx$$

(9) $\frac{d}{dx} cosecx = -cosecx \ cotx, \quad x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$$\frac{d}{dx} cosecx = \frac{d}{dx} \frac{1}{sinx}$$

$$= \frac{sinx \frac{d}{dx} 1 - 1 \frac{d}{dx} sinx}{sin^2 x}$$

$$= \frac{sinx \cdot 0 - 1(cosx)}{sin^2 x}$$

$$= \frac{-cosx}{sin^2 x}$$

$$= -cosecx \ cotx$$

નોંધ : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ને વ્યાખ્યા અથવા પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવેલું વિકલિત કહેવાય છે. ઉપરના પ્રમાણિત રૂપો (6) થી (9) પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવી શકાય છે.

$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x)) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x)$નું વ્યાપક રૂપ

$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + ... + \frac{d}{dx} f_n(x)$

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી મેળવી શકાય. આપણે આ પરિણામ બહુપદીના વિકલિતમાં ઉપયોગમાં લીધું છે.

અહીં નોંધીએ કે આ પરિણામ ફક્ત n-પદોના સાન્ત સરવાળા માટે જ સત્ય છે, અનંત સરવાળામાં આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય, એટલે કે $\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x) + ...) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + ...$ સત્ય ન પણ હોય. આની ચર્ચા માટે શ્રેઢીના **એકરૂપ અભિસાર (Uniform convergence)** અને અભિસાર વિષેની માહિતીની જરૂર પડે, જે આ તબક્કે આપણે કરી શકીએ નહિ.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 11 : $f(x) = cos^2 x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} cos^2 x = \frac{d}{dx} cosx \ cosx$

$$= cosx \frac{d}{dx} cosx + cosx \frac{d}{dx} cosx$$

$$= 2cosx \ (-sinx)$$

$$= -2sinx \ cosx$$

$$= -sin2x$$

ઉદાહરણ 12 : $xsin \, x$ નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} xsin \, x = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \, sin(x+h) - xsin \, x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - (x+h)\sin x + (x+h)\sin x - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (x+h)\left(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\, 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} + \lim_{h \to 0} \sin x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \sin x \qquad \left(\lim_{h \to 0} c = c\right)$$

$$= x\cos x + \sin x$$

ઉદાહરણ 13 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\frac{d}{dx}\tan x$ મેળવો. $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\tan x = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h-x)}{h}(1 + \tan x \tan(x+h)) \qquad (\tan(A - B) \text{ ના સૂત્ર મુજબ})$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} \lim_{h \to 0} (1 + \tan x \tan(x+h))$$

$$= 1 \cdot (1 + \tan^2 x)$$

$$= \sec^2 x$$

ઉદાહરણ 14 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\frac{d}{dx}\sec x$ મેળવો. $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\sec x = \lim_{h \to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{-h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \frac{1 \cdot \sin x}{\cos x\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

ઉદાહરણ 15 : $\frac{d}{dx} sin2x$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} sin2x = \frac{d}{dx} 2sinx\ cosx$

$= 2\left[sinx \frac{d}{dx} cosx + cosx \frac{d}{dx} sinx\right]$

$= 2[sinx(-sinx) + cosx \cdot cosx]$

$= 2(cos^2x - sin^2x)$

$= 2cos\ 2x$

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + ... + x + 1$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + x + 1\right) = \frac{nx^{n-1}}{n} + \frac{(n-1)x^{n-2}}{n-1} + \frac{(n-2)x^{n-3}}{n-2} + 1 + 0.$

$= x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1$

$= \frac{x^n - 1}{x - 1}$ **(સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો)**

ઉદાહરણ 17 : $\frac{d}{dx}(ax + b)^n$ મેળવો અને તે પરથી $\frac{d}{dx}(ax + b)^m (cx + d)^n$ તારવો.

ઉકેલ :

$\frac{d}{dx}(ax + b)^n = \frac{d}{dx}\left(a^nx^n + \binom{n}{1}(ax)^{n-1}b + \binom{n}{2}(ax)^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1} ax \cdot b^{n-1} + b^n\right)$

$= a^n n \cdot x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}a^{n-1}b + (n-2)\binom{n}{2}x^{n-3}a^{n-2}b^2$

$+ ... + \binom{n}{n-1} a \cdot 1 \cdot b^{n-1} + 0$

$= na\left[a^{n-1}x^{n-1} + (n-1)(ax)^{n-2}b + \frac{(n-2)(n-1)}{2}(ax)^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right]$

$= na\left((ax)^{n-1} + (n-1)(ax)^{n-2}b + \binom{n-1}{2}(ax)^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right)$

$= na(ax + b)^{n-1}$

હવે, $\frac{d}{dx}(ax + b)^m (cx + d)^n = (cx + d)^n \frac{d}{dx}(ax + b)^m + (ax + b)^m \frac{d}{dx}(cx + d)^n$

$= (cx + d)^n ma(ax + b)^{m-1} + (ax + b)^m nc(cx + d)^{n-1}$

$= (ax + b)^{m-1}(cx + d)^{n-1}[ma(cx + d) + nc(ax + b)]$

ઉદાહરણ 18 : $\frac{d}{dx}\left(\frac{a + bsinx}{c + dsinx}\right)$ શોધો. $(c + dsinx \neq 0)$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left(\frac{a - bsinx}{c - dsinx}\right) = \frac{(c + dsinx)\frac{d}{dx}(a + bsinx) - (a + bsinx)\frac{d}{dx}(c + dsinx)}{(c + dsinx)^2}$

$= \frac{(c + dsinx)bcosx - (a + bsinx)dcosx}{(c - dsinx)^2}$

$$= \frac{bc\cos x + bd\sin x\cos x - ad\cos x - bd\sin x\cos x}{(c + d\sin x)^2}$$

$$= \frac{(bc - ad)\cos x}{(c + d\sin x)^2}$$

ઉદાહરણ 19 : $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sin^n x}$. $(\sin x \neq 0)$, $n \in N$ મેળવો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $\frac{d}{dx}\sin^n x = n\sin^{n-1}x\cos x$ સાબિત કરીશું.

$n = 1$ માટે, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = 1 \cdot \sin^0 x \cos x$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, $\frac{d}{dx}\sin^k x = k\sin^{k-1}x\cos x$ એટલે કે કોઈક $k \in N$ માટે P(k) સત્ય છે.

$n = k + 1$ માટે $\frac{d}{dx}\sin^{k+1}x = \frac{d}{dx}\sin^k x \cdot \sin x$

$$= \sin x \frac{d}{dx}\sin^k x + \sin^k x \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \sin x \cdot k\sin^{k-1}x\cos x + \sin^k x\cos x$$

$$= k \cdot \sin^k x\cos x + \sin^k x\cos x$$

$$= (k + 1)\sin^k x\cos x$$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ $\forall n \in N$, P(n) સત્ય છે.

હવે, $$\frac{d}{dx}\frac{x}{\sin^n x} = \frac{\sin^n x\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\sin^n x}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{\sin^n x - x \cdot n\sin^{n-1}x\cos x}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{\sin^{n-1}x(\sin x - nx\cos x)}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{\sin x - nx\cos x}{\sin^{n+1}x}$$

ઉદાહરણ 20 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\sqrt{\sin x}$ નું વિકલિત મેળવો. **($\sin x > 0$)**

ઉકેલ : $$\frac{d}{dx}\sqrt{\sin x} = \lim_{t \to x}\frac{\sqrt{\sin t} - \sqrt{\sin x}}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x}\frac{\sin t - \sin x}{(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x})(t - x)}$$

$$= \lim_{t \to x}\frac{2\cos\frac{t+x}{2}\sin\frac{t-x}{2}}{(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x})\left(\frac{t-x}{2}\right)2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot 1}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

ઉદાહરણ 21 : વ્યાખ્યાની મદદથી $\frac{d}{dx}x^2 sinx$ મેળવો અને સૂત્રની મદદથી તે ચકાસો.

ઉકેલ :

$$\frac{d}{dx}x^2 sinx = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \sin(x+h) - x^2 sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \sin(x+h) - (x+h)^2 sinx + (x+h)^2 \sin x - x^2 sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (x+h)^2 \left(\frac{\sin(x+h) - sinx}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - x^2] \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \left[2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}\right]}{2 \cdot \frac{h}{2}} + \lim_{h \to 0} \frac{(2hx + h^2) sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \lim_{h \to 0} (2x + h) sinx$$

$$= x^2 cosx + 2x\, sinx$$

હવે, $\frac{d}{dx}x^2 sinx = x^2 \frac{d}{dx} sinx + sinx \frac{d}{dx} x^2$

$$= x^2 cosx + 2x\, sinx$$

ઉદાહરણ 22 : $\frac{d}{dx} \frac{cosx}{1+sinx}$ શોધો. **$(sinx \neq -1)$**

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} \frac{cosx}{1+sinx} = \frac{(1+sinx)\frac{d}{dx}cosx - cosx\frac{d}{dx}(1+sinx)}{(1+sinx)^2}$

$$= \frac{(1+sinx)(-sinx) - cosx \cdot cosx}{(1+sinx)^2}$$

$$= \frac{-sinx - sin^2x - cos^2x}{(1+sinx)^2}$$

$$= \frac{-(1+sinx)}{(1+sinx)^2} \qquad (sin^2x + cos^2x = 1)$$

$$= \frac{-1}{1+sinx}$$

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + 1$ માટે $f'(1)$ શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + 1$

$$f'(x) = 100x^{99} + 99x^{98} + ... + 0$$

$$\therefore \ f'(1) = 100 + 99 + 98 + ... + 1 = \frac{100(101)}{2} = 5050 \qquad \left(\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

ઉદાહરણ 24 : $\frac{d}{dx}\frac{sinx + cosx}{sinx - cosx}$ શોધો. **$(sinx \neq cosx)$**

ઉકેલ :

$$\frac{d}{dx}\frac{sinx + cosx}{sinx - cosx} = \frac{(sinx - cosx)\frac{d}{dx}(sinx + cosx) - (sinx + cosx)\frac{d}{dx}(sinx - cosx)}{(sinx - cosx)^2}$$

$$= \frac{(sinx - cosx)(cosx - sinx) - (sinx + cosx)(cosx + sinx)}{(sinx - cosx)^2}$$

$$= \frac{-[(sinx - cosx)^2 + (sinx + cosx)^2]}{(sinx - cosx)^2}$$

$$= \frac{-2}{(sinx - cosx)^2} \qquad (sin^2x + cos^2x = 1)$$

ઉદાહરણ 25 : $f(x) = |x|$ માટે $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણે $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ શોધવાની છે.

હવે, $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{h}{h} = 1,$

$\lim\limits_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$

$\therefore$ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ $f(x) = |x|$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 26 : $f : R \to Z$, $f(x) = [x]$. $f'(1)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{જો } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{જો } 1 \le x < 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{1-1}{h} = 0$ **($h > 0$, $1 + h > 1$ અને $[1 + h] = 1$)**

$\lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{0-1}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી. **($h < 0$, $1 + h < 1$)**

$\therefore$ $f'(1)$નું અસ્તિત્વ નથી.

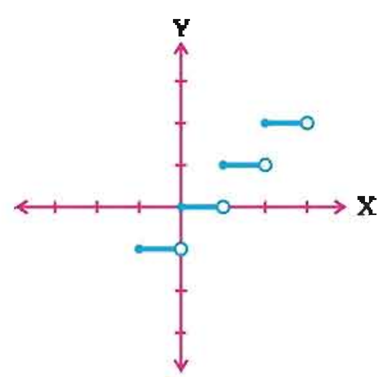
સમજૂતી : $\frac{1}{2} - h < x < \frac{1}{2} + h$ માટે $\left(h < \frac{1}{2}\right)$, $f(x) = 0$

$\therefore$ $f'(x) = 0$. તેથી $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore$ $\frac{1}{2} < h$ માટે અંતરાલ $\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2} + h\right)$ માં

f અચળ વિધેય હોવાથી,

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (આલેખ જુઓ.)



આકૃતિ 11.1

સ્વાધ્યાય 11

1. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેનાં વિધેયોના આપેલ બિંદુએ વિકલિત શોધો :

(1) $sinx$; $x = 0$ આગળ (2) $\frac{1}{x}$; $x = 1$ આગળ

(3) $2x + 3$; $x = 2$ આગળ (4) $\frac{3x+2}{2x+3}$; $x = 1$ આગળ

(5) $3x^2 - 2x + 1$; $x = -1$ આગળ (6) $cosx$; $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ

(7) $tan\,x$; $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ (8) $secx$; $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ

(9) $cot\,x$; $x = \frac{5\pi}{4}$ આગળ (10) $cosecx$; $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ

2. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિકલિતો મેળવો : (યોગ્ય પ્રદેશ પર)

(1) $10x$ (2) $secx + tanx$ (3) $cosecx - cotx$

(4) $2sin^2x + 3cosx + 1$ (5) $cos2x$ (6) $sin2x$

(7) $tan2x$ (8) $\frac{1-cosx}{sinx}$ (9) $\frac{cosx}{1-sinx}$

(10) x^3 (11) x^4 (12) x^6

(13) sin^4x (14) cos^4x (15) sec^2x

3. $f(x) - g(x)$ અચળ વિધેય હોય તો સાબિત કરો કે, $f'(x) = g'(x)$.

4. વ્યાખ્યાની મદદથી $\frac{d}{dx}cos2x$ મેળવો અને મળતા પરિણામને $cos2x = cos^2x - sin^2x$ ની મદદથી ચકાસો.

5. $\frac{d}{dx}\frac{x^n-1}{x-1}$, $x \neq 1$ શોધો.

6. $\frac{d}{dx}\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{d}{dx}(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$

$= (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + (n-3)x^{n-4} + ... + 1 + 0$

$\therefore$ $x = 1$ આગળ $\frac{d}{dx}\frac{x^n-1}{x-1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

ટિપ્પણી આપો !

નીચે વ્યાખ્યાયિત વિધેયોના વિકલિત મેળવો :

7. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **8.** $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ $(x \neq a)$ **9.** $x^{-5}(7+3x)$

10. $x^{-6}(4x^2 - 8x^3)$ **11.** $2secx - 3tanx + 5sinx\,cosx$ **12.** $\frac{secx-1}{secx+1}$

13. $\frac{4x+7sinx}{5x+8cosx}$ **14.** $\frac{x}{1+cotx}$ **15.** $(x^2-1)sin^2x + (x^2+1)cos^2x$

16. $(ax^2 + bx + sinx)(p + qtanx)$ **17.** $sin(x+a)$

18. $\frac{sin(x+a)}{cosx}$ **19.** $tan(x+a)$

20. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $f(x) = sin^2x$ માટે $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ...... છે. ☐

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

(2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ માટે $f'(1) =$ ...... ☐

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) 1

(3) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^{99} + x^{100}$ માટે $f'(-1) =$ ...... ☐

(a) -50 (b) 50 (c) 5050 (d) -5050

(4) $\frac{d}{dx} cos^n x =$ ...... ☐

(a) $ncos^{n-1}x$ (b) $nsin^{n-1}x$

(c) $ncos^{n-1}x\, sinx$ (d) $-ncos^{n-1}x\, sinx$

(5) $\frac{d}{dx}(sin^2x + cos^2x) =$ ...... ☐

(a) $sin2x + cos2x$ (b) $sin2x - cos2x$ (c) 0 (d) $sinx + cosx$

(6) જો $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, તો $\frac{dy}{dx} =$ ...... ☐

(a) y (b) $y - x$ (c) $y - \frac{x^n}{n!}$ (d) $y - \frac{x^n}{(n-1)!}$

(7) જો $y = \sqrt{\frac{1 - cos2x}{1 \cdot cos2x}}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, તો $\frac{dy}{dx} =$ ...... ☐

(a) sec^2x (b) $-sec^2x$ (c) cos^2x (d) $|tanx|$

(8) જો f એ a આગળ વિકલનીય હોય તો $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} =$ ...... ☐

(a) $af'(a)$ (b) $f(a) - af'(a)$ (c) $f'(a)$ (d) $\frac{f'(a)}{a}$

(9) $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1$, $-1 < x < 1$, હોય તો $f'(x) =$ ...... ☐

(a) $\frac{1}{(x-1)^2}$ (b) $\frac{1}{x-1}$

(c) $\frac{1}{x^n - 1}$ (d) $\frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$

(10) $f(4) = 16$, $f'(4) = 2$ અને જો f એ 4 આગળ વિકલનીય હોય તો, $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{f(x)} - 4}{x - 4}$ ...... ☐

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{16}$

(11) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $x \in [3, 5]$, હોય તો $f'(x)$ ......

(a) 1 છે. (b) −1 છે. (c) નું અસ્તિત્વ નથી. (d) 0 છે.

(12) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ માટે $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1 + cos2x}{2}}$ = ...

(a) $-sinx$ (b) $sinx$ (c) $cosx$ (d) $sin2x$

(13) $\pi < x < 2\pi$ માટે, $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1 - cos2x}{2}}$ = ...

(a) $sinx$ (b) $cosx$ (c) $-cosx$ (d) $-sin2x$

(14) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 - 2x - 1}$ $(x \in [-2, -1])$ ......

(a) નું અસ્તિત્વ નથી. (b) 0 છે. (c) 1 છે. (d) −1 છે.

(15) $\frac{d}{dx}(x + |x|)\,|x|$ $(x < 0)$ = ...

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 4

(16) $\frac{d}{dx}(x + |x|)\,|x|$ $(x > 0)$ = ...

(a) $-4x$ (b) $4x$ (c) $2x^2$ (d) x^2

(17) $\frac{d}{dx}|x|^2$ ...... ($x = 0$ આગળ)

(a) 0 છે. (b) નું અસ્તિત્વ નથી. (c) 2 છે. (d) 1 છે.

(18) $\frac{d}{dx}x\ \ x|$ = $(x > 0)$ ......

(a) x^2 (b) $-2x$ (c) $2x$ (d) 0

(19) $\frac{d}{dx}(cos^2x - sin^2x)$ = ...

(a) $sin2x$ (b) $cos2x$ (c) $-cos2x$ (d) $-2sin2x$

(20) $\frac{d}{dx}(3sinx - 4sin^3x)$ = ...

(a) $3cos3x$ (b) $cos3x$ (c) $3sin3x$ (d) $-3cos3x$

(21) $\frac{d}{dx}sin18^\circ$ = ...

(a) $cos18^\circ$ (b) $-sin18^\circ$ (c) $-cos18^\circ$ (d) 0

(22) $\frac{d}{dx}sinx^\circ$ = ...

(a) $cosx^\circ$ (b) $-sinx^\circ$ (c) $\frac{\pi}{180}cosx^\circ$ (d) 0

(23) $\frac{d}{dx}(2x + 3)^n$ = ...

(a) $n(2x + 3)^{n-1}$ (b) $2n(2x + 3)^{n-1}$

(c) $3n(2x + 3)^{n-1}$ (d) $2^n n(2x + 3)^{n-1}$

(24) $\frac{d}{dx}\sqrt{sinx}$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ = ...

(a) $\sqrt{cosx}$ (b) $\sqrt{sinx}$ (c) $\frac{cosx}{2\sqrt{sinx}}$ (d) $\frac{sinx}{2\sqrt{cosx}}$

(25) $\frac{d}{dx}\ tan^2x$ = ...

(a) $2tanx$ (b) sec^2x (c) cot^2x (d) $2tanx\ sec^2x$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

1. વિકલનની વ્યાખ્યા તેમજ તેના પર આધારિત ઉદાહરણો.

2. વિકલિતની બૈજિક ક્રિયાઓ અને સૂત્રો આધારિત ઉદાહરણો

જો $f(x)$ અને $g(x)$ અંતરાલ (a, b)માં વિકલનીય હોય, તો

(1) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

(2) $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)\ g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$

(4) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

(5) $\frac{d}{dx}\ kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$, $K \in R$

3. કેટલાંક પ્રમાણિત સૂત્રો :

(1) $\frac{d}{dx}c = 0$

(2) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, $n \in N, x \in R$

(3) $\frac{d}{dx}sinx = cosx$

(4) $\frac{d}{dx}cosx = -sinx$

(5) $\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$

(6) $\frac{d}{dx}cotx = -cosec^2x$

(7) $\frac{d}{dx}secx = secx\ tanx$

(8) $\frac{d}{dx}cosecx = -cosecx\ cotx$

4. બહુપદી તેમજ સંમેય વિધેયનું વિકલન

— ❖ —

Bhaskara I

Bhaskara wrote three astronomical contributions. In 629 he created the Aryabhatiya, written in verses, about mathematical astronomy. The comments referred exactly to the 33 verses dealing with mathematics. There he considered variable equations and trigonometric formulae.

His work *Mahabhaskariya* is divided into eight chapters about mathematical astronomy. In chapter 7, he gives a remarkable approximation formula for *sin x*, that is

$$sinx \sim \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)} \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

જવાબો

(જે દાખલામાં ગણતરી કરવાની હોય તેના જ જવાબો આપ્યા છે.)

સ્વાધ્યાય 1

31. (1) d (2) d (3) b (4) a (5) d (6) b (7) d (8) d (9) d (10) d

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (1) $-2i$ (2) $-1 + 8i$ (3) $2 + i$ (4) $\frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$ (5) $-\frac{2}{5}$ (6) $-\frac{1}{2}$ (7) -4

(8) $2i$ (9) $\frac{77}{25} + \frac{36}{25}i$ (10) $-\frac{7}{\sqrt{2}}i$

2. (1) $x = 4, y = 1$ (2) $x = -\frac{16}{23}, y = \frac{29}{23}$ (3) $x = 4, y = -2$

(4) $\left\{(2, 3)\left(-2, \frac{1}{3}\right)\right\}$ (5) $x = \frac{14}{15}, y = \frac{1}{5}$

3. (1) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$ (2) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (3) $\frac{11}{25} - \frac{27}{25}i$ (4) $-\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$ (5) i

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (1) $\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$ (3) $2, -\frac{\pi}{6}$ (4) $2, \frac{5\pi}{6}$ (5) $6, \frac{3\pi}{4}$

6. z_1, z_2 સમાન ન પણ હોય **8.** 40 **12.** $-2\sqrt{3} + 2i$ **13.** $z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$ **15.** $\frac{2}{5}$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (1) $\pm\sqrt{2}i$ (2) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3) $\frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$ (4) $\frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\,i}{2}$ (5) $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$ (6) $\frac{2 \pm 4i}{3}$

2. (1) $\pm\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$ (2) $\pm(3 - 2i)$ (2) $\pm(1 + 7i)$ (4) $\pm(2\sqrt{2} - \sqrt{5}i)$

(5) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1} - i\sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)$ (6) $\pm\sqrt{2}(1 + i)$ (7) $\pm(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i)$ (8) $\pm 5i$ (9) $\pm\sqrt{10}\,i$

સ્વાધ્યાય 2

1. (1) $2 - 2i$ (2) $\frac{307 + 599i}{442}$ **2.** 2 **4.** $-\frac{3}{20}, \frac{1}{20}$ **7.** 1 **8.** $b = \frac{-\beta}{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}$

10. (1) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (2) $\frac{5 \pm \sqrt{2}i}{27}$ (3) $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$

11. મહત્તમ કિંમત 5, ન્યૂનતમ કિંમત 1 **12.** -48 **13.** 4 **15.** $\frac{3}{2} - 2i$

21. (1) c (2) b (3) a (4) d (5) c (6) c (7) a (8) c (9) b (10) b
(11) d (12) b (13) a (14) c (15) b

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (1) $x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 10x + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5}$ (2) $1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$

(3) $729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64$

(4) $x^5 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4x} + \frac{5}{16x^3} - \frac{1}{32x^5}$

2. (1) $x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

(2) $x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1$

3. (1) 0.92236816 (2) 96059601 (3) 1061520150601 **4.** $(1.01)^{10000}$ મોટી સંખ્યા છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (1) 672 (2) 1365 **2.** (1) $\frac{5}{81}$ (2) $\frac{7}{18}$ **3.** $n = 55$

4. (1) $\frac{280}{81}x^{12}, \frac{-560}{27}x^9$ (2) $\frac{2835}{8}x^4y^4$ (3) $\binom{20}{10}x^{10}$ (4) $720\,x^2y^3,\ 1080\,x^3y^2$

5. $n = 6$ **6.** $n = 14$ અથવા 7

સ્વાધ્યાય 3

1. 2 : 1 **2.** $r = 3$ અથવા 15 **3.** $n = 6, x = 2, y = 5$ **4.** $a = 2, b = 3, n = 5$ **6.** $n = 11$ **7.** 135 **8.** 17010

11. (1) c (2) b (3) a (4) c (5) a (6) c (7) a (8) d (9) a (10) b

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (5) $-\sqrt{2}$ (6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **17.** (1) 3 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

18. (1) ઋણ (2) ધન (3) ઋણ (4) ઋણ **19.** $\frac{3}{7}$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (1) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **4.** (1) ચોથું ચરણ (2) ચોથું ચરણ

5. $\frac{2}{11}$, પ્રથમ ચરણ **6.** (1) $[-25, 25]$ (2) $[0, 2]$ **8.** $r = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

9. $r = 2,\ \theta = -\frac{\pi}{3}$ **20.** $-1, \frac{1}{7}$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (1) $sin10\theta + sin4\theta$ (2) $sin3\theta - sin2\theta$ (3) $sin8\theta - sin2\theta$ (4) $sin6\theta + sin\theta$

(5) $cos14\theta + cos8\theta$ (6) $cos4\theta + cos\theta$ (7) $\frac{1}{2}(cos2\theta - cos20\theta)$ (8) $cos\theta - cos8\theta$ (9) $sin2\theta$

2. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ (5) $\sqrt{2}$ (6) 1 **5.** 1

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (1) $2sin5\theta\ cos2\theta$ (2) $2sin\theta\ cos\frac{\theta}{2}$ (3) $-2cos4\theta\ sin\theta$ (4) $2cos\frac{5\theta}{2}\ sin\theta$

(5) $2cos10\theta\ cos\theta$ (6) $2cos4\theta\ cos\frac{3\theta}{2}$ (7) $2sin8\theta\ sin3\theta$ (8) $2sin\theta\ sin\frac{\theta}{2}$

(9) $-2sin^2\frac{\theta}{2}$ (10) $2sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ (11) $\sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ (12) $\sqrt{2}\,sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

સ્વાધ્યાય 4

9. $\sqrt{19}, -\sqrt{19}$

14. (1) c (2) a (3) d (4) d (5) c (6) b (7) c (8) a (9) a (10) a

(11) b (12) c (13) b (14) c (15) d (16) c (17) d (18) d (19) d

સ્વાધ્યાય 5.1

20. $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}, \frac{336}{625}$

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, -3$ **2.** $\frac{1}{65}, \frac{64}{65}$

સ્વાધ્યાય 5

23. (1) a (2) b (3) c (4) b (5) c (6) d (7) a (8) a (9) d (10) a
(11) b (12) b (13) a (14) c (15) d (16) a (17) b (18) c (19) a (20) d

સ્વાધ્યાય 6.1

1. $\left\{k\pi \pm \frac{3\pi}{8} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **2.** $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

3. $\{2k\pi \mid k \in Z\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **4.** $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

5. $\left\{\frac{k\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **6.** $\{k\pi \mid k \in Z\} \cup \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

7. $\left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

8. $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

9. $\left\{\frac{k\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

10. $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \{2k\pi \mid k \in Z\}$

11. $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **12.** $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

13. $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

14. $\{2k\pi \mid k \in Z\} \cup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

15. $\left\{2k\pi + \frac{5\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{13\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

16. $\emptyset$ **17.** $\left\{\frac{k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{30} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **18.** $\left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

19. $\left\{(8k \pm 3)\frac{\pi}{16} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **20.** $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

સ્વાધ્યાય 6.2

16. $\frac{2\pi}{3}$ **17.** $1 : \sqrt{3} : 2$ **18.** $\frac{5\pi}{12}$ **20.** $\frac{\pi}{3}$

સ્વાધ્યાય 6

1. $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **2.** $\left\{(4k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

3. $\{k\pi \mid k \in Z\} \cup \left\{(3k \pm 1)\frac{\pi}{9} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **4.** $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

5. $\left\{(6k+1)\frac{\pi}{30} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **6.** $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ **7.** $\left\{(4k \pm 1)\frac{\pi}{8} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

8. $\left\{(4k+1)\frac{\pi}{12} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ **9.** $\left\{(4k+1)\frac{\pi}{8} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ **10.** $\left\{(12k \pm 5)\frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in Z\right\}$

21. (1) a (2) c (3) d (4) c (5) c (6) b (7) c (8) a (9) d (10) b
(11) a (12) a (13) b (14) d (15) b

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (1) 4, 7, 10, 13, 16 (2) 1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{3}{2}$, 3 (3) 2, 3, 5, 7, 11

2. 2, 3, 5, 8 **3.** (1) −5, −9, −17 (2) $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{41}{2}$ **4.** (1) 0, 3, 5, 19 (2) 1, 2, 3, 10

5. (1) $a_n = ar^{n-1}$, $n \in N$ (2) $a_1 = 0$, $a_n = 16(-3)^{n-2}$, $n \geq 2$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. (1) 43 (2) −49 (3) $\frac{33}{2}$ **2.** 510 **3.** 23,700 **4.** $d = -4$, $t_8 = -24$

5. 27 **6.** $-(m+n)$ **7.** 0 **8.** 1 : 2 **9.** 5 : 11 **10.** 6000 **11.** 1 **12.** −1, 3, 7

13. 2, 6, 10, 14 **14.** ₹ 7800 **15.** $n = 10$, ₹ 1287.50 **16.** 660 સેમી

સ્વાધ્યાય 7.3

1. (1) 256 (2) $\frac{7}{1024}$ (3) $-16\sqrt{2}$ **2.** (1) 768 (2) 13 (3) 5 (4) $\frac{405}{4}$

3. 93 **4.** $\frac{3}{2}$, 3, 6, 12, 24,... **5.** (1) $\frac{7}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right]$ (2) $3\left[n + \frac{10}{9}(10^{n-1} - 1)\right]$

6. $\dfrac{a^2(a^{2n}-1)}{a^2-1} + \dfrac{ab(a^nb^n-1)}{ab-1}$ **7.** $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{3}$, 2, 6, 18 **8.** $\sqrt{mn}$ **9.** $2\sqrt{2}$

12. $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16 **13.** ₹ 39,366

સ્વાધ્યાય 7.4

1. $\frac{19}{6}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{23}{6}$ **2.** 5, 13, 21 **3.** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 **4.** $\sqrt{2}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 45, 5 **6.** $x^2 - 20x + 64 = 0$

સ્વાધ્યાય 7.5

1. (1) 800 (2) 465 (3) 1070 (4) −2704

2. (1) $\frac{n}{3}(16n^2 + 12n - 1)$ (2) $\frac{n}{4}(27n^3 - 18n^2 - 9n + 4)$ (3) $\frac{n}{2}(4n^2 + n - 1)$
(4) $\frac{10n}{3}(n^2 + 6n + 11)$ (5) $12n(n+1)(9n^2 + 9n + 8)$ (6) $\frac{n}{36}(4n^2 + 15n + 17)$
(7) $2n^2 + n$ (8) $\frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 11n + 10)$ (9) $\frac{n^2(n^2-1)}{4}$

3. (1) −6479 (2) −465

સ્વાધ્યાય 7

1. −140, 42 **2.** −2, 4, 10, 16,... **3.** 9 કલાક **4.** 16 હાર, 5 લંબઘન **6.** 1 : 2 : 3

7. $\frac{20n}{3} - \frac{20}{27} + \frac{20}{27} \times 10^{-n}$ **9.** 740 **10.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ **11.** $\frac{n}{2}(1 - 5n)$

12. 11, 14, 17, 20,... **13.** $(3 + 2\sqrt{2}) : (3 - 2\sqrt{2})$ **14.** $\frac{25025}{2}$

15. 3, 5, 7, 9, 11, 13 **16.** 48, 12, 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$

17. (1) c (2) d (3) a (4) a (5) c (6) c (7) b (8) a (9) b (10) d

(11) a (12) d (13) c (14) a (15) c (16) b (17) a (18) c

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ (2) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

(3) $x^2 + y^2 + 8x\cos\alpha - 8y\sin\alpha - 9 = 0$ (4) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{5}y + 2 = 0$

(5) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

2. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ **3.** $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$

4. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$ **5.** $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}x = 0$

સ્વાધ્યાય 8.2

1. (1) વર્તુળ નથી. (2) વર્તુળ, કેન્દ્ર (0, 0), ત્રિજ્યા 1

(3) વર્તુળ, કેન્દ્ર (1, 1), ત્રિજ્યા 1 (4) વર્તુળ નથી.

(5) વર્તુળ નથી. (6) વર્તુળ નથી.

(7) વર્તુળ, કેન્દ્ર $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, ત્રિજ્યા $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ (8) વર્તુળ નથી.

(9) વર્તુળ, કેન્દ્ર $= (\tan\alpha, -\sec\alpha)$, ત્રિજ્યા = 1.

(10) વિકલ્પ-1 : $\alpha = 0$ કેન્દ્ર (0, −1), ત્રિજ્યા = 1

વિકલ્પ-2 : $\alpha \neq 0$ વર્તુળ નથી.

2. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ **3.** $x^2 + y^2 - 10y - 15 = 0$

4. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ અને $x^2 + y^2 + 30x - 30y + 225 = 0$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (1) નાભિ $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$, નિયામિકા $8x + 1 = 0$ (2) નાભિ (0, −1), નિયામિકા $y = 1$

(3) નાભિ $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, નિયામિકા $16y - 1 = 0$ (4) નાભિ (3, 0), નિયામિકા $x + 3 = 0$

2. (1) $x^2 = -8y$ (2) $y^2 = 16x$ **3.** (1) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 6y + 9 = 0$

(2) $16x^2 + 9y^2 + 24xy + 180x + 160y + 600 = 0$ **4.** 4, $y + 3 = 0$

5. 18 **6.** $\left(\frac{a}{t_1^2}, \frac{-2a}{t_1}\right)$ **7.** (3, ±6)

સ્વાધ્યાય 8.4

1. (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ (2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ (4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

(5) $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1$ (6) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ (7) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

2. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

3.

ક્રમ	e	નાભિ	નિયામિકા	નાભિલંબની લંબાઈ
(1)	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$(0, \pm\sqrt{5})$	$y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$	$\frac{8}{3}$
(2)	$\frac{2}{3}$	$(\pm 4, 0)$	$x = \pm 9$	$\frac{20}{3}$
(3)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\pm 5\sqrt{2}, 0)$	$x = \pm 10\sqrt{2}$	10
(4)	$\frac{3}{4}$	$\left(0, \pm\frac{3\sqrt{43}}{\sqrt{7}}\right)$	$y = \pm\frac{16\sqrt{43}}{3\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{301}}{2}$
(5)	$\frac{2}{3}$	$\left(\pm\frac{6}{\sqrt{5}}, 0\right)$	$x = \pm\frac{27}{2\sqrt{5}}$	$2\sqrt{5}$

4. $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 5. $x = \pm\frac{50}{3}$, 5 : 3 7. $7x^2 + 15y^2 = 247$ 8. $4x^2 + 3y^2 - 24x - 6y + 27 = 0$

9. નાભિ $(2, 1 \pm \sqrt{5})$, નિયામિકા $y = 1 \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$

સ્વાધ્યાય 8.5

પ્રશ્ન 1 માં બધે જ $\theta \in (-\pi, \pi]$

1. (1) $x = 4\cos\theta, y = 3\sin\theta$ (2) $x = 4\cos\theta, y = 2\sqrt{3}\sin\theta$

(3) $x = 2\cos\theta, y = \sqrt{3}\sin\theta$ (4) $x = 4\cos\theta, y = \sqrt{7}\sin\theta$ (5) $x = 3\sqrt{2}\cos\theta, y = 3\sin\theta$

2. (1) $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, Foci : $(0, \pm\sqrt{5})$ (2) $e = \frac{\sqrt{184}}{25}$, Foci : $\left(\pm\frac{\sqrt{184}}{15}, 0\right)$ (3) $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, Foci : $(\pm\sqrt{7}, 0)$

3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$

સ્વાધ્યાય 8.6

1.

ક્રમ	નાભિઓ	નિયામિકાઓ	નાભિલંબની લંબાઈ	મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ	અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ
(1)	$(\pm 5\sqrt{5}, 0)$	$x = \pm 4\sqrt{5}$	5	20	10
(2)	$(\pm 8\sqrt{2}, 0)$	$x = \pm 4\sqrt{2}$	16	16	16
(3)	$\left(\pm\frac{5}{\sqrt{6}}, 0\right)$	$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{\frac{5}{3}}$
(4)	$(0, \pm 5)$	$y = \pm\frac{16}{5}$	$\frac{9}{2}$	8	6
(5)	$(0, \pm 8)$	$y = \pm\frac{25}{8}$	$\frac{78}{5}$	10	$2\sqrt{39}$

પ્રશ્ન 2 તથા 5 માં બધે જ $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

2. (1) $\frac{y^2}{49} - \frac{9x^2}{343} = 1$; $x = \frac{\sqrt{343}}{3}\tan\theta, y = 7\sec\theta$ (2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; $x = 3\sec\theta, y = 2\tan\theta$

(3) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$; $x = 5\sec\theta, y = \sqrt{20}\tan\theta$ (4) $\frac{y^2}{32} - \frac{x^2}{32} = 1$; $x = 4\sqrt{2}\tan\theta, y = 4\sqrt{2}\sec\theta$

(5) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$; $x = 3\tan\theta, y = 4\sec\theta$

4. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 5. $x = 4\tan\theta, y = 3\sec\theta$

સ્વાધ્યાય 8

1. $x^2 + y^2 - 3x + y - 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
4. નાભિ : $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. નાભિલંબની લંબાઈ = 1
5. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$
6. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

7. $y^2 = -12(x + 1)$ **8.** (a) $y^2 = 10x$, (b) $2\sqrt{110}$ **9.** (6, 0) **10.** 3.2 m

11. ઉપવલય, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

12. (1) a (2) d (3) a (4) b (5) d (6) b (7) c (8) c (9) b (10) a
(11) b (12) a (13) b (14) b (15) c (16) a (17) a (18) b (19) c (20) d

સ્વાધ્યાય 9.1

1. (1) (x_1, x_2) (2) (x, y, z) (3) (5, −2, 2) (4) (4, −4, −4) (5) (−1, −4, −7) (6) (1, −5, −2)
2. (1) $x = 1, y = -1$ (2) $x = 0, y = 0$ (3) $x = \frac{1}{5}, y = \frac{8}{5}$ (4) $x = 0, y = 0$
3. (1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 5 (4) $\sqrt{14}$ (5) $\sqrt{38}$ (6) 1
4. (1) $|\bar{x} + \bar{y}| < |\bar{x}| + |\bar{y}|$ (2) $|\bar{x} + \bar{y}| = |\bar{x}| + |\bar{y}|$ **5.** $k = 1$ **6.** $\left(\frac{-11}{6}, \frac{47}{15}, 0\right)$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. (1) OXYZ (2) OXY'Z' (3) OXYZ' (4) OX'Y'Z (5) OX'Y'Z' **2.** (0, 0, 0)

સ્વાધ્યાય 9.3

1. (1) સમાન દિશાઓ (2) ભિન્ન દિશાઓ (3) વિરુદ્ધ દિશાઓ (4) ભિન્ન દિશાઓ
2. (1) $\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ (2) $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$ (4) $\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (5) (1, 0, 0) (6) $\left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right)$
3. $\alpha = \frac{2x_2 - x_1}{3}, \beta = \frac{2x_1 - x_2}{3}$

સ્વાધ્યાય 9.4

1. (1) 0 (2) $2\sqrt{3}$ (3) 6 (4) 4 (5) 5 (6) 1
2. (1) અસમરેખ (2) સમરેખ (3) અસમરેખ (4) અસમરેખ
3. સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ **4.** (0, 0, 0) અથવા (0, 0, 6) **5.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 12z + 52 = k^2$

સ્વાધ્યાય 9.5

1. $\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ and $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{-4}{3}\right)$
2. (1) અસમરેખ (2) અસમરેખ (3) અસમરેખ (4) સમરેખ (5) અસમરેખ

સ્વાધ્યાય 9

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ નથી **2.** સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ **3.** $x = 2z$
4. (1) $\frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}$; (1, 1, 1) (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}$; (0, 1, 2) (3) $3\sqrt{5}, \sqrt{21}, \sqrt{6}$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
5. $\left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$
6. (1) અસમરેખ

(2) સમરેખ, A, B તરફથી −2 : 1 ગુણોત્તરમાં; A, C તરફથી −1 : 2 ગુણોત્તરમાં
B, A તરફથી −2 : 1 ગુણોત્તરમાં; B, C તરફથી −1 : 2 ગુણોત્તરમાં
C, A તરફથી 1 : 1 ગુણોત્તરમાં; C, B તરફથી 1 : 1 ગુણોત્તરમાં

(3) અસમરેખ

(4) સમરેખ, L, M તરફથી −1 : 3 ગુણોત્તરમાં; L, N તરફથી −3 : 1 ગુણોત્તરમાં
M, L તરફથી 1 : 2 ગુણોત્તરમાં; M, N તરફથી 2 : 1 ગુણોત્તરમાં
N, L તરફથી −3 : 2 ગુણોત્તરમાં; N, M તરફથી −2 : 3 ગુણોત્તરમાં

(5) સમરેખ, P, Q તરફથી 1 : 1 ગુણોત્તરમાં P, R તરફથી 1 : 1 ગુણોત્તરમાં
Q, P તરફથી −1 : 2 ગુણોત્તરમાં Q, R તરફથી −2 : 1 ગુણોત્તરમાં
R, P તરફથી −1 : 2 ગુણોત્તરમાં R, Q તરફથી −2 : 1 ગુણોત્તરમાં

7. (1) b (2) d (3) b (4) c (5) c (6) a (7) c (8) a (9) d (10) c (11) a (12) a (13) a (14) a (15) c (16) c (17) a (18) b (19) c (20) c

સ્વાધ્યાય 10

11. $\frac{1}{12}$ **12.** $\frac{m}{n}$ **13.** -2 **14.** 41 **15.** $\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$ **16.** $\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ **17.** $\frac{5}{4}$ **18.** 0

19. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **20.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **21.** 1 **22.** $-3\sqrt{2}$ **23.** $\frac{mn(n-m)}{2}$ **24.** $\frac{1}{12}$

25. 12 **26.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ **27.** $\frac{1}{2}$ **28.** $-cosa$ **29.** $2cos3$ **30.** -1

31. $2asina + a^2cosa$ **32.** $secx(xtanx + 1)$

33. (1) b (2) d (3) b (4) c (5) b (6) a (7) d (8) a (9) d (10) c
(11) d (12) c (13) d (14) a (15) b (16) b (17) a (18) c (19) b (20) d

સ્વાધ્યાય 11

1. (1) 1 (2) −1 (3) 2 (4) $\frac{1}{5}$ (5) −8 (6) −1 (7) 2 (8) $2\sqrt{3}$ (9) −2 (10) $-2\sqrt{3}$

2. (1) 10 (2) $secx\ tanx + sec^2x$ (3) $cosec^2x - cosecx\ cotx$
(4) $4sinx\ cosx - 3sinx$ (5) $-2sin2x$ (6) $2cos2x$ (7) $2sec^22x$
(8) $\frac{1}{1-cosx}$ (9) $\frac{1}{1-sinx}$ (10) $3x^2$ (11) $4x^3$ (12) $6x^5$ (13) $4sin^3x\ cosx$
(14) $-4cos^3x\ sinx$ (15) $2sec^2x\ tanx$

4. $-2sin2x$ **5.** $\frac{(n-1)x^n - n \cdot x^{n-1} - 1}{(x-1)^2}$ **7.** $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ **8.** $\frac{(n-1)x^n - a \cdot nx^{n-1} - a^n}{(x-a)^2}$

9. $-35x^{-6} - 12x^{-5}$ **10.** $-16x^{-5} + 24x^{-4}$ **11.** $2secx\ tanx - 3sec^2x + 5cos2x$

12. $\frac{2secx\ tanx}{(secx+1)^2}$ **13.** $\frac{56 + 35(xcosx - sinx) + 32(cosx + sinx)}{(5x - 8cosx)^2}$ **14.** $\frac{1 + cotx + xcosec^2x}{(1 + cotx)^2}$

15. $2(x - sin2x)$ **16.** $(p + qtanx)(2ax + b + cosx) + (ax^2 + bx + sinx)qsec^2x$

17. $cos(x + a)$ **18.** $cosa \cdot sec^2x$ **19.** $sec^2(x + a)$

20. (1) b (2) c (3) a (4) d (5) c (6) c (7) b (8) b (9) d (10) c
(11) a (12) b (13) c (14) d (15) b (16) b (17) a (18) c (19) d (20) a
(21) d (22) c (23) b (24) c (25) d

• • •

પારિભાષિક શબ્દો

અંતઃકેન્દ્ર	Incentre
અવકાશ	Space
અવયવ સૂત્રો	Factor Formulae
આલેખ	Graph
આર્ગન્ડ આકૃતિ	Argand diagram
આદેશનો નિયમ	Rule of Substitution
આવૃત્ત સંબંધ	Recurrence Relation
અદિશ	Scalar
અતિવલય	Hyperbola
અનુબદ્ધ અતિવલય	Conjugate Hyperbola
અનુબદ્ધ અક્ષ	Conjugate Axis
અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા	Conjugate of a Complex Number
જીવા	Chord
ઉત્કેન્દ્રતા	Eccentricity
ઉપવલય	Ellipse
ઉપગુણિત	Submultiple
લંબાતિવલય	Rectangular Hyperbola
કલનશાસ્ત્ર	Calculus
વર્ગમૂળ	Square Root
શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા	Purely Imaginary Number
ગુણિત	Multiple
શાંકવ	Conic / Conic Section
શાખા	Branch
કાલ્પનિક ભાગ	Imaginary Part
વાસ્તવિક ભાગ	Real Part
ગણિતીય અનુમાન	Mathematical Induction
કેન્દ્રીય શાંકવ	Central Conic
ગૌણ અક્ષ	Minor Axis
કોણાંક	Argument
લક્ષ	Limit
સંકર સંખ્યાઓ	Complex Numbers
સંકર સંખ્યાનો માનાંક	Modulus of a Complex Number
સંમિત	Symmetric
સંબંધિત સંખ્યાઓ	Allied Numbers
સામાન્ય તફાવત	Common Difference
સદિશ	Vector
સરવાળાનાં સૂત્રો	Addition Formulae
સમગુણોત્તર શ્રેણી	Geometric Progression (G.P.)
સમાંતર શ્રેણી	Arithmetic Progression (A.P.)
છેદિકા	Secant
દ્વિપદી પ્રમેય	Binomial Theorem
વિકલન	Differentiation
વિકલિત	Derivative
શિરોબિંદુ	Vertex
વિભાજ્ય	Divisible
ઢાળ	Slope
ત્રિવિધ વિકલ્પનો નિયમ	Law of Trichotomy
દિશા	Direction
નિયામિકા	Directrix
નિયામિકાઓ	Directrices
નિયત સદિશ	Bound Vector
શ્રેણી	Sequence
શ્રેઢી	Series
તાત્ક્ષણિક વેગ	Instantaneous Velocity
પરિકેન્દ્ર	Circumcentre
પરવલય	Parabola
પ્રચલ	Parameter
ધ્રુવીય સ્વરૂપ	Polar Form
પ્રધાન અક્ષ	Major Axis
પ્રક્ષેપ સૂત્ર	Projection Formula
નાભિ	Focus
નાભિઓ	Foci
નાભિજીવા	Focal Chord
નાભિલંબ	Latus-rectum
નાભિલંબો	Latera-recta
મુક્ત સદિશ	Free Vector
મુખ્ય અક્ષ	Transverse Axis
માન	Magnitude
મધ્યક	Mean
મધ્યકેન્દ્ર	Centroid
સ્થાન સદિશ	Position Vector
સ્પર્શક	Tangent
યામ	Coordinate
યામાક્ષ	Coordinate Axis