પ્રકરણ **10**

સદિશ બીજગણિત

10.1 વિહંગાવલોકન

10.1.1 જે જથ્થા અથવા રાશિને માન તેમ જ દિશા હોય તે રાશિને સદિશ કહે છે.

10.1.2 સદિશ $\vec{a}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ થી મળે છે અને તેને $\hat{a}$ થી દર્શાવાય છે.

10.1.3 બિંદુ P(x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ છે અને તેનું માન $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ થશે. O એ ઊગમબિંદુ છે.

10.1.4 સદિશના અદિશ ઘટકો એ સદિશના દિક્ગુણોત્તર છે અને તે તેમને અનુરૂપ અક્ષોના પ્રક્ષેપ છે.

10.1.5 કોઈ પણ સદિશના માન r, દિક્ગુણોત્તર (a, b, c) અને દિક્કોસાઇન (l, m, n) વચ્ચેનો સંબંધ :

$$l = \frac{a}{r},\ m = \frac{b}{r},\ n = \frac{c}{r}$$

10.1.6 ત્રિકોણની બાજુઓને ક્રમમાં દર્શાવતા સદિશોનો સરવાળો $\vec{0}$ છે.

10.1.7 સદિશોના સરવાળા માટે ત્રિકોણનો નિયમ 'ત્રિકોણની બે બાજુઓને ક્રમમાં દર્શાવતા સદિશોનો સરવાળો એ તેમની વિરુદ્ધ દિશામાં લીધેલા ત્રીજી બાજુના સદિશની બરાબર થાય છે.'

10.1.8 અદિશ ગુણાકાર

જો $\vec{a}$ એ સદિશ અને λ અદિશ હોય, તો $\lambda\vec{a}$ એ સદિશ થશે તથા તેનું માન $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ થશે. જો λ ધન હોય, તો $\lambda\vec{a}$ અને $\vec{a}$ ની દિશા સમાન છે તથા λ ઋણ હોય, તો $\lambda\vec{a}$ ની દિશા $\vec{a}$ ની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશા છે.

10.1.9 બે બિંદુઓને જોડતો સદિશ

જો $P_1(x_1, y_1, z_1)$ અને $P_2(x_2, y_2, z_2)$ બે બિંદુઓ હોય, તો

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \text{ અને}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

10.1.10 વિભાજન-સૂત્ર

$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સ્થાનસદિશવાળાં બિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

(i) અંતઃવિભાજનનો ગુણોત્તર $m : n$ હોય, તો $\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ અને

(ii) બહિર્વિભાજનનો ગુણોત્તર $m : n$ હોય, તો $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ થાય.

10.1.11 સદિશ $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ અને $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ $\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$ છે.

10.1.12 અંતઃગુણન અથવા અદિશ ગુણાકાર

જો સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો તેમનું અંતઃગુણન અથવા અદિશ ગુણાકાર

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \text{ થાય.}$$

10.1.13 બહિર્ગુણન અથવા સદિશ ગુણાકાર

જો સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તથા $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને સમાવતા સમતલને લંબ એકમ સદિશ $\hat{n}$ હોય, તો તેમનું બહિર્ગુણન અથવા સદિશ ગુણાકાર $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ થાય. $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\hat{n}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ બનાવે છે.

10.1.14 જો $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ અને $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ બે સદિશો હોય અને λ કોઈ પણ અદિશ હોય, તો

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ લેતાં,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

10.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ના સરવાળાની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો સરવાળો $\vec{c}$ હોય, તો

$$\vec{c} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + 5\hat{k}$$

હવે, $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

આમ, માંગેલો એકમ સદિશ $\hat{c} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}\left(\hat{i} + 5\hat{k}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}\hat{i} + \dfrac{5}{\sqrt{26}}\hat{k}$.

ઉદાહરણ 2 : P અને Q અનુક્રમે (1, 3, 2) અને (–1, 0, 8) બિંદુઓ હોય, તો $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં 11 માનવાળો સદિશ શોધો.

ઉકેલ : ઉદ્ભવબિંદુ P(1, 3, 2) અને અંતિમબિંદુ Q(–1, 0, 8) હોય, તેવો

$$\overrightarrow{PQ} = (-1 - 1)\hat{i} + (0 - 3)\hat{j} + (8 - 2)\hat{k} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

આમ, $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

આથી, $\overrightarrow{QP}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ

$$\widehat{QP} = \frac{\overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7}$$

આમ, માંગેલો 11 માનવાળો સદિશ $11\,\widehat{QP} = 11\left(\dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}\right) = \dfrac{22}{7}\hat{i} + \dfrac{33}{7}\hat{j} - \dfrac{66}{7}\hat{k}$.

ઉદાહરણ 3 : બિંદુઓ P અને Q ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\overrightarrow{OP} = 2\vec{a} + \vec{b}$ અને $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} - 2\vec{b}$ છે. બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં (i) અંતઃવિભાજન અને (ii) બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ મેળવો.

ઉકેલ : (i) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(2\vec{a} + \vec{b}) + 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{1 + 2} = \frac{5\vec{a}}{3}.$$

(ii) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુ R′ નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{2(2\vec{a} + \vec{b}) - 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{2 - 1} = 3\vec{a} + 4\vec{b}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો બિંદુઓ $(-1, -1, 2)$, $(2, m, 5)$ અને $(3, 11, 6)$ સમરેખ હોય, તો m શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, આપેલાં બિંદુઓ $A(-1, -1, 2)$, $B(2, m, 5)$ અને $C(3, 11, 6)$ છે.

$$\overrightarrow{AB} = (2+1)\hat{i} + (m+1)\hat{j} + (5-2)\hat{k} = 3\hat{i} + (m+1)\hat{j} + 3\hat{k}$$

અને $\overrightarrow{AC} = (3+1)\hat{i} + (11+1)\hat{j} + (6-2)\hat{k} = 4\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$.

બિંદુઓ A, B, C સમરેખ હોવાથી, કોઈક $\lambda \in R - \{0\}$ માટે $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ અર્થાત્

$$(3\hat{i} + (m+1)\hat{j} + 3\hat{k}) = \lambda(4\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k})$$

$\Rightarrow$ $3 = 4\lambda$ અને $m + 1 = 12\lambda$

માટે, $m = 8$

અથવા $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & m+1 & 3 \\ 4 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 3(12) = 4(m+1) \Rightarrow m = 8$

ઉદાહરણ 5 : y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{4}$ અને $\frac{\pi}{2}$ ખૂણા બનાવતો તથા $3\sqrt{2}$ માનવાળો સદિશ $\vec{r}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $m = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $n = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

હવે, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ પરથી,

$$l^2 + \frac{1}{2} + 0 = 1 \Rightarrow l = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

આથી, માંગેલ $\vec{r} = 3\sqrt{2}\ (l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k})$

$$\vec{r} = 3\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + 0\hat{k}\right)$$

$\therefore$ $\vec{r} = \pm 3\hat{i} + 3\hat{j}$

ઉદાહરણ 6 : જો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો $\vec{a}$ એ $\lambda\vec{b} + \vec{c}$ને લંબ થાય તેવો λ શોધો.

ઉકેલ : $\lambda\vec{b} + \vec{c} = \lambda(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$$= (\lambda + 1)\hat{i} + (\lambda + 3)\hat{j} - (2\lambda + 1)\hat{k}$$

હવે, $\vec{a} \perp (\lambda\vec{b} + \vec{c})$ હોવાથી, $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\therefore$ $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot [(\lambda + 1)\hat{i} + (\lambda + 3)\hat{j} - (2\lambda + 1)\hat{k}] = 0$

$\therefore$ $2(\lambda + 1) - (\lambda + 3) - (2\lambda + 1) = 0$

$\therefore$ $\lambda = -2$

ઉદાહરણ 7 : $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ના સમતલને લંબ હોય તેવા $10\sqrt{3}$ માનવાળા બધા જ સદિશો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ છે.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (8 - 3)\hat{i} - (4 + 1)\hat{j} + (3 + 2)\hat{k} = 5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{3(5)^2} = 5\sqrt{3}$$

માટે, $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલને લંબ એકમ સદિશ $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \dfrac{5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$ છે.

આમ, $10\sqrt{3}$ માનવાળા $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલને લંબ સદિશો $\pm 10\sqrt{3}\left(\dfrac{5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}\right)$, અર્થાત્

$\pm 10(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 8 : સદિશનો ઉપયોગ કરી $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, x-અક્ષની ધન દિશા સાથે A અને B ખૂણા બનાવતા એકમ સદિશો $\hat{OP}$ અને $\hat{OQ}$ છે. તેથી $\angle QOP = A - B$ થશે. [આકૃતિ 10.1]

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\widehat{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \cos A\,\hat{i} + \sin A\,\hat{j}$ અને

$$\widehat{OQ} = \vec{ON} + \vec{NQ} = \cos B\,\hat{i} + \sin B\,\hat{j}$$

વ્યાખ્યા પરથી $\widehat{OP} \cdot \widehat{OQ} = |\widehat{OP}|\,|\widehat{OQ}| \cos(A - B)$

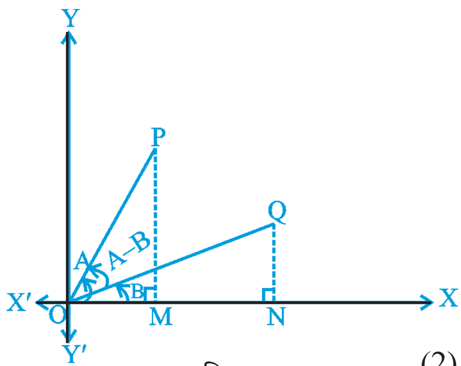
$= \cos(A - B)$ ...(1)

$(|\widehat{OP}| = 1 = |\widehat{OQ}|)$

ઘટકો અનુસાર,

$\widehat{OP} \cdot \widehat{OQ} = (\cos A\,\hat{i} + \sin A\,\hat{j}) \cdot (\cos B\,\hat{i} + \sin B\,\hat{j})$

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$ ... (2)



આકૃતિ 10.1

(1) અને (2) પરથી,

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

ઉદાહરણ 9 : જો ΔABC માં ખૂણાઓ A, B, C ની સામેની બાજુઓના માન અનુક્રમે a, b, c હોય, તો $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ BC, CA અને AB ને અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વડે રજૂ કરીએ. [આકૃતિ 10.2].

હવે, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, અર્થાત્ $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$\vec{a}$ થી પૂર્વ બહિર્ગુણન અને $\vec{b}$ થી ઉત્તર બહિર્ગુણન કરતાં,

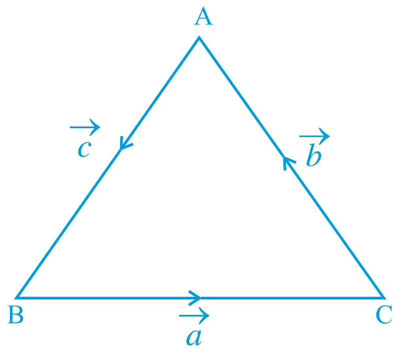
અનુક્રમે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$

અને $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$ મળશે.

આથી, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}|$

$\therefore \quad |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\pi - C) = |\vec{b}||\vec{c}| \sin(\pi - A) = |\vec{c}||\vec{a}| \sin(\pi - B)$



આકૃતિ 10.2

$\therefore \quad ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$

abc વડે ભાગતાં, $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ અર્થાત્ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 10 થી 21 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 10 : સદિશ $6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ નું માન .... છે.

(A) 5 (B) 7 (C) 12 (D) 1

ઉકેલ : $\sqrt{36 + 4 + 9} = 7.$

સાચો જવાબ (B) છે.

ઉદાહરણ 11 : સદિશો $\vec{a} + \vec{b}$ અને $2\vec{a} - \vec{b}$ ને જોડતા રેખાખંડનું 1 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુનો સ્થાનસદિશ .... છે.

(A) $\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$ (B) $\vec{a}$ (C) $\frac{5\vec{a} - \vec{b}}{3}$ (D) $\frac{4\vec{a} + \vec{b}}{3}$

ઉકેલ : વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, માંગેલ બિંદુનો સ્થાનસદિશ

$$\frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + 1(2\vec{a} - \vec{b})}{2 + 1} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{3}.$$

સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 12 : જેનું ઉદ્ભવબિંદુ P(2, –3, 5) અને અંતિમ બિંદુ Q(3, –4, 7) હોય, તે સદિશ .... છે.

(A) $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $5\hat{i} - 7\hat{j} + 12\hat{k}$ (C) $-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\overrightarrow{PQ} = (3 - 2)\hat{i} + (-4 + 3)\hat{j} + (7 - 5)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 13 : સદિશો $\hat{i} - \hat{j}$ અને $\hat{j} - \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... છે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{-\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : (1, –1, 0) તથા (0, 1, –1) વચ્ચેના ખૂણા માટે

$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, $\cos\theta = \frac{0 - 1 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$

$\therefore \quad \theta = \frac{2\pi}{3}.$ આથી, સાચો જવાબ (B) છે.

ઉદાહરણ 14 : સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $3\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ એકબીજાને લંબ હોય, તો λ = ...

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : $(2, -1, 2) \cdot (3, \lambda, 1) = 0$

$2 \cdot 3 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8.$

સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 15 : જેની પાસપાસેની બાજુઓ $\hat{i} + \hat{j}$ અને $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ હોય, તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : જેની પાસપાસેની બાજુઓ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ છે.
$\vec{a} \times \vec{b} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$. આથી, $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$

સાચો જવાબ (B) છે.

$$(\hat{i} + \hat{j}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

ઉદાહરણ 16 : જો $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 3$ અને $|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .... થાય.

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$ સૂત્ર પરથી $\sin\theta = \frac{1}{2}$ એટલે કે $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \theta = \pm\frac{\pi}{6}$ મળે છે.

આથી, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$. અથવા

$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ પરથી $144 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = 576$ આથી, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 17 : ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC દર્શાવતા બે સદિશો અનુક્રમે $\hat{j} + \hat{k}$ અને $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ છે. A માંથી દોરેલી મધ્યગાની લંબાઈ .... છે.

(A) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{48}}{2}$ (C) $\sqrt{18}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

મધ્યગા $\overrightarrow{AD}$ ની લંબાઈ $|\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}\left|3\hat{i} + 5\hat{k}\right| = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 18 : સદિશ $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ નો $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ .... છે.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$

ઉકેલ : $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}.$$

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 19 : જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશ હોય અને $\sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{b}$ એકમ સદિશ થાય તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... હોય.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $|\sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{b}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$

$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. આથી $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$ (કારણ કે $|\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$)

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 20 : સદિશો $\hat{i} - \hat{j}$ અને $\hat{i} + \hat{j}$ સાથે જમણા હાથની પદ્ધતિ બનાવતો લંબ એકમ સદિશ .... છે.

(A) $\hat{k}$ (B) $-\hat{k}$ (C) $\frac{\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : માગેલો એકમ સદિશ $\frac{(\hat{i} - \hat{j})\times(\hat{i} + \hat{j})}{|(\hat{i} - \hat{j})\times(\hat{i} + \hat{j})|} = \frac{2\hat{k}}{2} = \hat{k}$.

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 21 : જો $|\vec{a}| = 3$ અને $-1 \le k \le 2$ હોય, તો $|k\,\vec{a}|$ .... અંતરાલમાં આવેલો છે.

(A) [0, 6] (B) [–3, 6] (C) [3, 6] (D) [1, 2]

ઉકેલ : $|k\,\vec{a}|$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ સંખ્યાની દૃષ્ટિએ k ના ન્યૂનતમ મૂલ્યથી મળે, અર્થાત્ $k = 0$ પરથી, $|k\,\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}| = 0 \times 3 = 0$ અને સંખ્યાની દૃષ્ટિએ મહત્તમ મૂલ્ય $k = 2$ થી મળે તે $|k\,\vec{a}| = 6$ થશે.

સાચો જવાબ (A) છે.

સ્વાધ્યાય 10.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{j} + \hat{k}$ ના સરવાળાની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

2. જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો (i) $6\vec{b}$ અને (ii) $2\vec{a} - \vec{b}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

3. બિંદુઓ P અને Q ના યામ અનુક્રમે (5, 0, 8) અને (3, 3, 2) હોય, તો $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

4. જો બિંદુઓ A અને B ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો BC = 1.5 BA થાય તે રીતે લંબાવેલ BA પરના બિંદુ C નો સ્થાનસદિશ શોધો.

5. જો બિંદુઓ $(k, -10, 3)$, $(1, -1, 3)$ અને $(3, 5, 3)$ સમરેખ હોય, તો સદિશની મદદથી k શોધો.

6. સદિશ $\vec{r}$ એ ત્રણે ય અક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે. જો $\vec{r}$ નું માન $2\sqrt{3}$ એકમ હોય, તો $\vec{r}$ શોધો.

7. સદિશ $\vec{r}$ x-અક્ષ સાથે લઘુકોણ બનાવે છે. $\vec{r}$ નું માન 14 અને દિક્ગુણોત્તરો 2, 3, –6 છે. $\vec{r}$ ની દિક્કોસાઇન અને ઘટકો શોધો.

8. સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ બંનેને લંબ 6 માનવાળો સદિશ શોધો.

9. સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

10. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. પરિણામનું ભૌમિતિક દૃષ્ટિએ અર્થઘટન કરો.

11. સદિશો $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ વચ્ચેના ખૂણા માટે *sin* નું મૂલ્ય શોધો.

12. જો બિંદુઓ A, B, C, D ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય, તો $\overrightarrow{AB}$ નો $\overrightarrow{CD}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

13. જો ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ A(1, 2, 3), B(2, – 1, 4) અને C(4, 5, – 1) હોય, તો સદિશની મદદથી ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

14. સદિશની મદદથી સાબિત કરો કે, એક જ આધાર પરના અને સમાન સમાંતર બાજુઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ સમાન છે.

વિસ્તૃત પ્રશ્નો (L.A.)

15. જો ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C ની સામેની બાજુઓના માન a, b, c હોય, તો સાબિત કરો કે $cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

16. જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ વડે દર્શાવાય, તો દર્શાવો કે તે ત્રિકોણનું સદિશ ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}\left[\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}\right]$ થાય. તે પરથી ત્રણ બિંદુઓ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સમરેખ હોવા માટેની શરત મેળવો. ત્રિકોણના સમતલને લંબ એકમ સદિશ પણ શોધો.

17. દર્શાવો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ $\dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$ છે. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ જેના વિકર્ણો હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

18. જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ અને $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ થાય તેવો સદિશ $\vec{c}$ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 19 થી 33 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

19. જેનું માન 9 હોય, તેવો સદિશ $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ની દિશાવાળો સદિશ .... છે.

(A) $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $\dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$ (C) $3(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ (D) $9(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

20. બિંદુઓ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ અને $\vec{a} + \vec{b}$ ને જોડતા રેખાખંડનું 3 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુનો સ્થાનસદિશ .... છે.

(A) $\frac{3\vec{a} - 2\vec{b}}{2}$ (B) $\frac{7\vec{a} - 8\vec{b}}{4}$ (C) $\frac{3\vec{a}}{4}$ (D) $\frac{5\vec{a}}{4}$

21. જેના ઉદ્‌ભવબિંદુ અને અંતિમ બિંદુ અનુક્રમે (2, 5, 0) અને (–3, 7, 4) હોય તેવો સદિશ .... છે.

(A) $-\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$ (B) $5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ (C) $-5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ (D) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

22. સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના માન અનુક્રમે $\sqrt{3}$ અને 4 છે. જો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3}$ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... છે.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{5\pi}{2}$

23. જો $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો λ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

24. સદિશો $3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$ અને $2\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ એકબીજાને સમાંતર હોય, તો λ = ...

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$

25. જો ઊગમબિંદુમાંથી બિંદુઓ A અને B સુધીના સદિશો અનુક્રમે $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ હોય, તો ત્રિકોણ OAB નું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 340 (B) $\sqrt{25}$ (C) $\sqrt{229}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{229}$

26. સદિશ $\vec{a}$ માટે, $|\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2$ નું મૂલ્ય = ...

(A) $\vec{a}^2$ (B) $3\vec{a}^2$ (C) $4\vec{a}^2$ (D) $2\vec{a}^2$

27. જો $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ હોય, તો $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ ....

(A) 5 (B) 10 (C) 14 (D) 16

28. જો .... તો સદિશો $\lambda\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$ અને $2\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ સમતલીય છે.

(A) λ = –2 (B) λ = 0 (C) λ = 1 (D) λ = –1

29. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ થાય તેવા $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એકમ સદિશ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 1 (B) 3

(C) $-\frac{3}{2}$ (D) આપેલ પૈકીમાંથી એક પણ નહિ.

30. $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ = ...

(A) $\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$ (B) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (C) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$ (D) $\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\hat{b}$

31. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ અને $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 5$ થાય તેવા સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ નું મૂલ્ય = ...

(A) 0 (B) 1 (C) –19 (D) 38

32. જો $|\vec{a}| = 4$ અને $-3 \le \lambda \le 2$ હોય, તો $|\lambda \vec{a}|$ નો વિસ્તાર .... છે.

(A) [0, 8] (B) [–12, 8] (C) [0, 12] (D) [8, 12]

33. સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{j} + \hat{k}$ બંનેને લંબએકમ .... સદિશ મળે.

(A) એક (B) બે (C) ત્રણ (D) અનંત

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 34 થી 40 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

34. જો ...., તો સદિશ $\vec{a} + \vec{b}$ અસમરેખ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

35. કોઈક શૂન્યેતર સદિશ $\vec{r}$ માટે જો $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{r} \cdot \vec{b} = 0$ અને $\vec{r} \cdot \vec{c} = 0$ હોય, તો $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ નું મૂલ્ય = ...

36. જો સદિશો $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{k}$ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓ હોય, તો તેના વિકર્ણો વચ્ચેનો લઘુકોણ = ...

37. $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$ અને $k\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}$ એ $\vec{a}$ ને સમાંતર છે. આ વિધાન સત્ય હોય, તો k નાં મૂલ્યો .... છે.

38. અભિવ્યક્તિ $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ નું મૂલ્ય .... છે.

39. જો $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = 144$ અને $|\vec{a}| = 4$, તો $|\vec{b}| =$ ....

40. જો $\vec{a}$ એ કોઈ પણ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $(\vec{a} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{a} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k}$ = ...

નીચેના ક્રમાંક 41 થી 45 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

41. જો $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, તો એ જરૂરી છે કે $\vec{a} = \pm\vec{b}$.

42. બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ એટલે કે એવો સદિશ કે જેનું ઉદ્‌ભવબિંદુ ઊગમબિંદુ છે.

43. જો $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ લંબસદિશો છે.

44. શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે સૂત્ર $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \times \vec{b}$ પ્રમાણભૂત છે.

45. જો સમભુજ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.