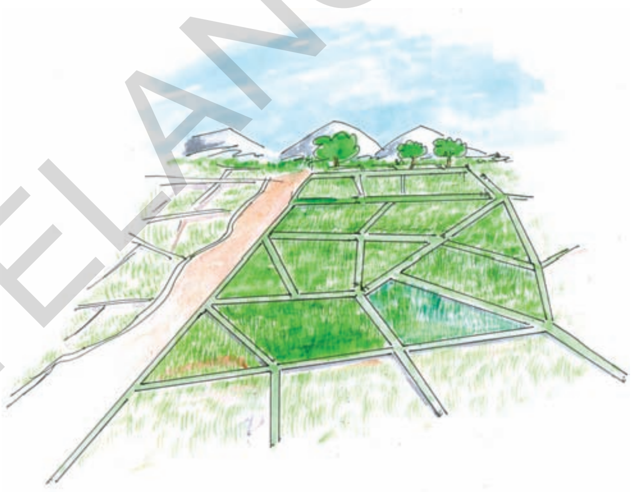
11

क्षेत्रफल
(AREAS)

11.1 प्रस्तावना :

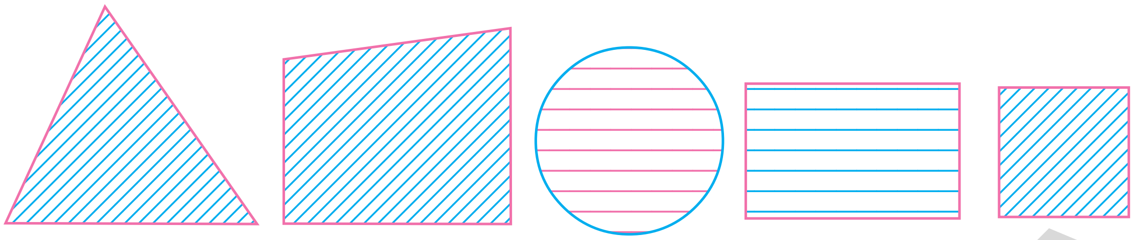
क्या तुमने अपने गाँव या शहर के चारों ओर कृषि उपयोगी क्षेत्र देखे है? जमीन बहुत से किसानों के बीच विभाजित रहती है और अनेक भाग रहते है। क्या सभी समान आकार और समान नापों के रहते है? क्या उनका क्षेत्रफल समान रहता है? यदि वे बराबर क्षेत्रफल चाहते है तो वे क्या कर सकते है? कैसे एक किसान उर्वरक की मात्रा अथवा खेत के लिए आवश्यक बीज का आकलन करता है? क्या इस संख्या का सम्बन्ध, खेत के विस्तार से है?



ज्यामिती के अभ्यास के आरंभ के लिए सबसे पहले और सबसे प्रमुख कारण कृषि संबंधित संख्याएँ है। इसमे जमीन का नापना, इन्हे उपयुक्त भागों मे विभाजित करना, खेत की सीमाएँ सुविधा के अनुसार बनाना, आदि सम्मिलित है। इतिहास में तुमने नील नदी (इजिप्त) की बाढ और ततूपश्चात् जमीन का सीमा अंकन सुना होगा। इनमेसे कुछ क्षेत्र के आधारभूत आकारों मे समानता है जैसे वर्ग, आयत, समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज आकारों के लिए, हम कुछ नियम ज्ञात करेंगे जिसके लम्बाईयों और नापों का उपयोग करते हुए हमे क्षेत्रफल प्राप्त होगा। इस अध्याय में हम इनमे से कुछ आकारो का उपयोग करते हुए हमें क्षेत्रफल प्राप्त करेंगे। इस अध्याय में हम इनमे से कुछ नियमों का अभ्यास करेंगे। हम सिखेंगे कि कैसे, कुछ सूत्रोंका उपयोग करते हुए त्रिभुज, वर्ग, आयत, चतुर्भुज के क्षेत्रफलों को कैसे व्यूत्पन्न किया जायेगा? क्षेत्रफल का अर्थ क्या है? इन की हम चर्चा करेंगे।

11.2 समतलीय क्षेत्रों का क्षेत्रफल (Area of Plane Circles)

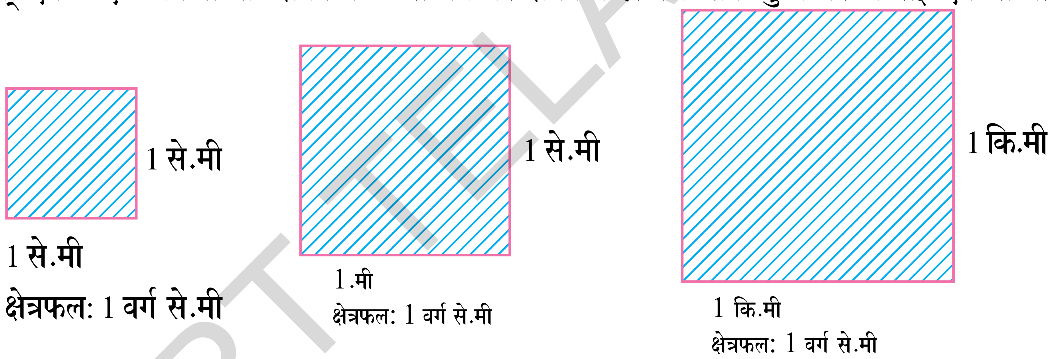
याद कीजिए कि साधारण बंद आकृति द्वारा धिरे तल का भाग उस आकृति के अनुकुल तलीय क्षेत्र कहलाता है। इस तलीय क्षेत्र का परिमाणों का गुणनफल ही उसका क्षेत्रफल रहता है ।



त्रिभुजाकार क्षेत्र चतुर्भुज क्षेत्र वृत्ताकार क्षेत्र आयताकार क्षेत्र वर्गाकार क्षेत्र

एक समतलीय क्षेत्र, परिसीमा और आंतरिक क्षेत्र से बना है। इसका क्षेत्रफल हम कैसा नापते है? इन क्षेत्रों के नाप का परिमाण हमेशा वास्तविक धन संख्या (क्षेत्रफल का कोई मात्रक) मे व्यक्त करते है जैसे 10 सी.मी^{2}, 215 मी^{2}, 2 कि.मी^{2}, 3 हेक्टर्स , आदि। इसलिए हम कह सकते है कि किसी आकृति का क्षेत्रफल वह संख्या (क्षेत्रफल के किसी मात्रक मे) है तो आकृति द्वारा घिरे समतल के साथ सम्बद्ध रखती है।

''एक इकाई क्षेत्रफल'' उस वर्ग का क्षेत्रफल होगा जिसकी भुजा की लम्बाई एक इकाई होगी । अर्थात् एक ''एक वर्ग से.मी. क्षेत्रफल'' उस वर्ग का क्षेत्रफल होगा जिसके भुजा की लम्बाई एक से.मी. होगी।

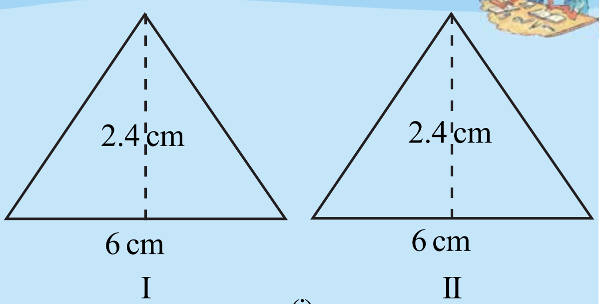


पद वर्ग मीटर| (1मी^{2}), वर्ग कि.मी(1कि.मी^{2}), वर्ग मि.मि (1मि.मी.^{2}) यह एक ही आशय से लेने चाहिए. वर्ग कक्षाओं से हम सर्वांगसम अनिवृतियों की संकल्पना से सुपरिचित है। दो आकृतियाँ सर्वागसम रहती है यदि उनका आकार एक समान और उनका समान माप होता है ।

क्रिया कलाप

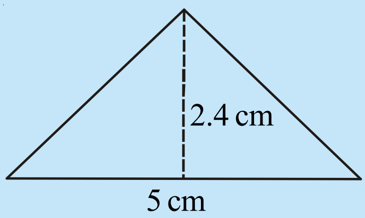
आकृति I और II. को ध्यानपूर्वक देखिए। दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या इन के क्षेत्रफल बराबर है ?

कागज के टूकडे पर इन आकृतियों को बनाईए और इन्हे काटिए । आकृति I को आकृति II से ढंकिए । क्या वे एक दूसरे को पूर्णतः ढंकते है? क्या वे सर्वागसम है ।

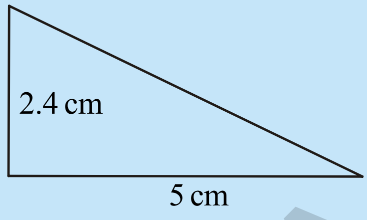


(i)

आकृति III और IV को ध्यानपूर्वक देखिए। दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। तुम क्या देखते हो?



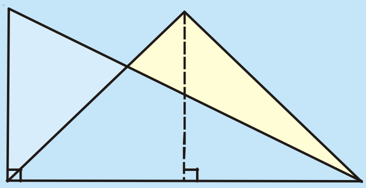
III



IV

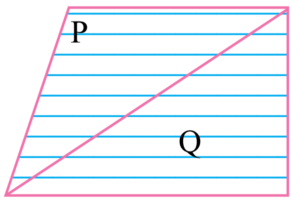
क्या वे सर्वांगसम है?

अब, इन आकृतियों को कागज के टूकडे पर बनाईए और इन्हे काटिए। इनके आधार को एक के ऊपर एक रखते हुए (भुजा की समान लम्बाई) आकृति III को आकृति IV से ढंकिए ।

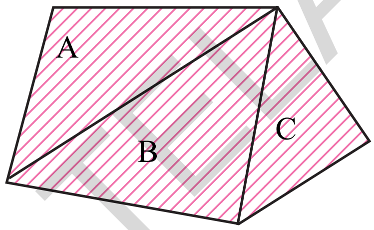

V

आकृति V मे दिखाए जैसा क्या वे पूर्णतः ढंकी हुई है? हम निष्कर्ष लेते है कि आकृतियाँ I और II सर्वांगसम और क्षेत्रफल में बराबर है। परंतु आकृतियाँ III और IV क्षेत्रफल में बराबर है किन्तु सर्वागसम नहीं है।

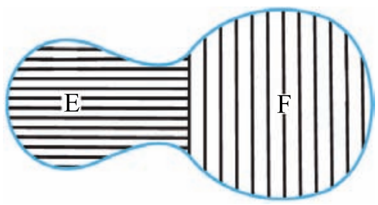
अब, निम्न आकृतियों के बारे में सोचिए।



X



Y



Z

तुम देख सकते हो कि आकृतियाँ X, Y, Z के तलीय क्षेत्र, दो अथवा अधिक तलीय क्षेत्रों से बने है। हम आसानी से देख सकते है कि

आकृति X का क्षेत्रफल = आकृति P का क्षेत्रफल + आकृति Q का क्षेत्रफल

इसी प्रकार, (Y) का क्षेत्रफल = (A) का क्षेत्रफल +(B) का क्षेत्रफल + (C) का क्षेत्रफल

(Z) का क्षेत्रफल = (E) का क्षेत्रफल + (F) का क्षेत्रफल

इस तरह, आकृति का क्षेत्रफल (किसी मात्रक मे) निम्न लिखित गुणधर्मों के साथ आकृति द्वारा घिरे समतल के भाग के साथ सम्बद्धी होता है।

(**नोट:** आकृति (X) के क्षेत्रफल को हम संक्षिप्त रूप मे क्षेत्र (X) का उपयोग करते है ।)

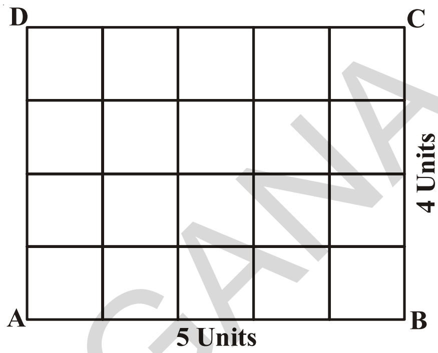
(i) दो सर्वसमान आकृतियों का क्षेत्रफल बराबर रहता है ।

A और B दो सर्वसमान आकृतियाँ हैं, तब क्षेत्र (A) = क्षेत्र (B)

(ii) आकृति का क्षेत्रफल उसके सभी भागों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है । यह आकृति P और Q द्वारा बना है, तब क्षेत्र (X) = क्षेत्र (P) + क्षेत्र (Q).

11.3 आयत का क्षेत्रफल (Area of Rectangle)

यदि किसी आयत की लम्बाई मे इकाईयों की संख्या को इसकी चौडाई में इकाईयों की संख्या से गुणा किया गया तो गुणनफल, आयत के क्षेत्रफल में वर्ग इकाई की संख्या देता है।

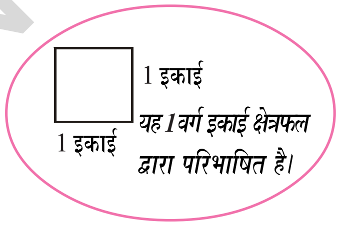


माना कि ABCD एक आयत को निर्देशित करता है जिस की लम्बाई AB 5 इकाईयाँ और चौडाई BC 4 इकाईयाँ है।

AB को 5 समान भागों ने और BC को 4 समान भागों मे विभाजित कीजिए और विभाजक बिंदु से प्रत्येक रेखा दूसरी रेखा को समानांतर खींचिए। आयत में प्रत्येक डिब्बा एक वर्ग इकाई को निर्देशित करता है (क्यों?)

$\therefore$ आयत में (5 इकाईयाँ $\times$ 4 इकाईयाँ). अर्थात 20 वर्ग इकाईयाँ है।

इसी प्रकार, यदि लम्बाई 'a' इकाईयाँ और चौडाई 'b' इकाईयाँ है तो आयत का क्षेत्रफल 'ab' वर्ग इकाईयाँ होगा। अर्थात "लम्बाई $\times$ चौडाई" वर्ग इकाईयाँ, आयत का क्षेत्रफल देता है ।

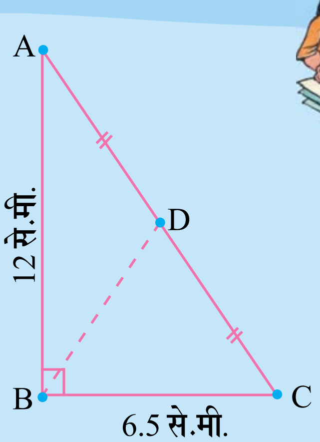


11.3 आयत का क्षेत्रफल :

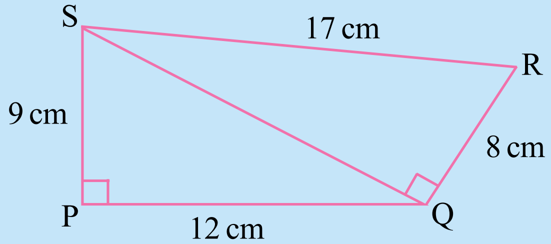
1. यदि 1 से.मी, 5. मी. के बराबर है, तो ६ वर्ग से.मी. किसके बराबर है ।
2. रजनी ने कहा 1 वर्ग मी = 100^2 वर्ग से.मी, क्या तुम सहमत हो? स्पष्ट कीजिए ।

अभ्यास -11.1

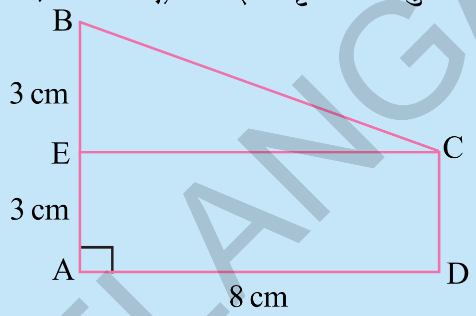
1. ΔABC में, $\angle ABC = 90^\circ$, AD = DC, AB = 12 से.मी और BC = 6.5 से.मी. ΔADB को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



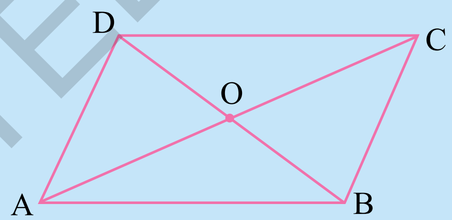
2. चतुभुर्ज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमे $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, PQ = 12 से.मी, PS = 9 से.मी, QR = 8 से.मी और SR = 17 cm (**संकेत:** PQRS के दो भाग है)



3. समलंब चतुभुर्ज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, दी गई आकृति के अनुसार ADCE आयत है। (**संकेत:** ABCD के दो भाग है ।)

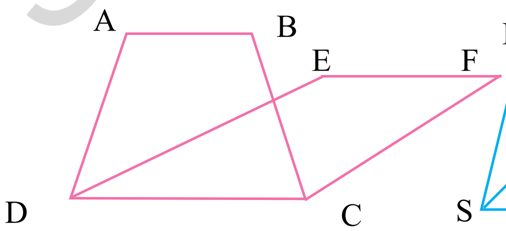


4. ABCD समांतर चतभुर्ज है। कर्ण AC और BD एक दूसरेको 'O' पर प्रतिच्छेदित करते है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र (ΔAOD) = क्षेत्र(ΔBOC). (**संकेत:** सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते है)

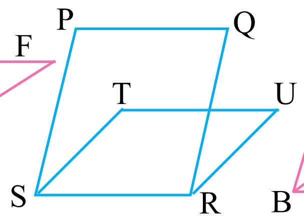


11.4 एक ही आधार पर और दो समान सामानांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ:

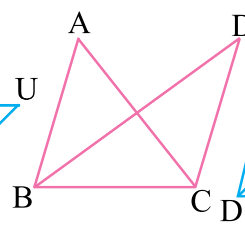
अब हम एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच की कुछ ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों मे संबंधोका अभ्यास करेंगे। यह अभ्यास हमे त्रिभुजों के समरूपता के कुछ परिणामों को समझने मे उपयुक्त होंगे। निम्न आकृतियोंकी ओर ध्यान से देखिए।



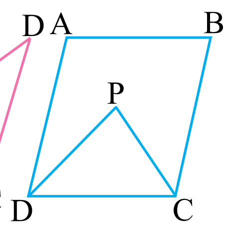
(i)



(ii)

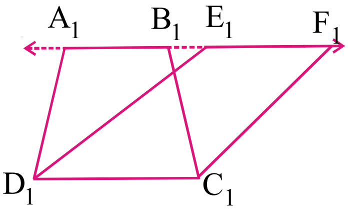


(iii)

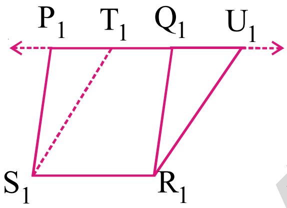


(iv)

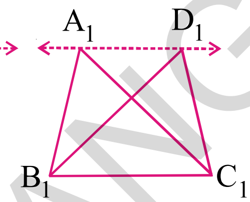
आकृति (i) समलम्ब चतुभुर्ज ABCD और समांतर चतुभुर्ज EFCD में उभयनिष्ठ भुजा CD है। हम कहते है कि समलंब चतुभुर्ज ABCD और समांतर चतुभुर्ज EFCD दोनो एक ही आधार CD पर स्थित है। इसी प्रकार आकृति (ii) में, समांतर चतुभुर्ज PQRS और समांतर चतुभुर्ज TURS का आधार समान है। आकृति (iii) त्रिभुजों मे ABC और DBC त्रिभुजों का आधार BC है। आकृति (iv) मे समांतर चतुभुर्ज ABCD और त्रिभुज PCD दोनो DC पर स्थित है। अतः, ये सभी आकृतियाँ ज्यामितीय आकार की है और इसलिए एकही आधार पर है। परन्तु वे समान समानान्तर रेखाओं के बीच नही है क्यों कि AB और EF परस्पर व्यापी (overlap) नही है और PQ और TU परस्पर व्यापी नही है। और न तो बिंदु A, B, E, F सरेखी है न बिंदु P, Q, T, U सरेखी है। आकृति (iii) और आकृति (iv) के बारे मे तुम क्या कह सकते हो ? अब, निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिए।



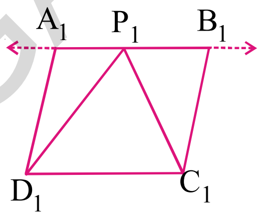
(v)



(vi)



(vii)



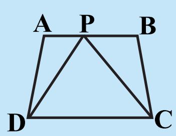
(viii)

तुमने आकृतियोंके बीच क्या अंतर देखा ? आकृति (v) में, हम कहते है कि समलंब चतुर्भुज $A_1B_1C_1D_1$ और समांतर चतुभुर्ज $E_1F_1C_1D_1$ एक ही आधार और समान समांतर रेखाएँ A_1F_1 और D_1C_1। के बीच स्थित है। बिन्दु A_1, B_1, E_1, F_1 सरेखी हैं और $A_1F_1 \parallel D_1C$। इसी प्रकार आकृति (vi) में, समांतर चतुभुर्ज $P_1Q_1R_1S_1$ और $T_1U_1R_1S_1$ एकही आधार S_1R_1 और वही समांतर रेखाओं और समान समांतर भुजाओं के बिचमे स्थित हैं।अतः दो आकृतियाँ एकही आधार और दो समानांतर रेखाओं के बीच में है, ऐसा कहलाती है, यदि इनमें उभयनिष्ठ भुजा (आधार) हो और प्रत्येक आकृति के उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत शीर्ष, एकही रेखा पर स्थित होते है जो आधार के समांतर होती है ।

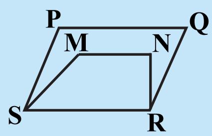
विचार-विमर्श कीजिए।

निम्न में से कौनसी आकृतियाँ एक ही आधार पर और एक समान समांतर रेखाओं के बीच है ?

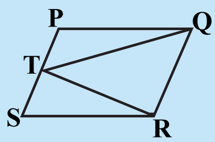
निम्न स्थितियों मे, उभयनिष्ठ आधार और दो समानांतर रेखाओं को लिखिए ।



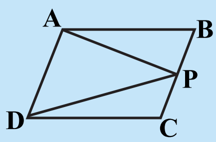
(a)



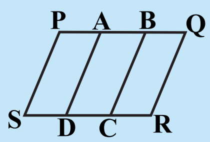
(b)



(c)



(d)



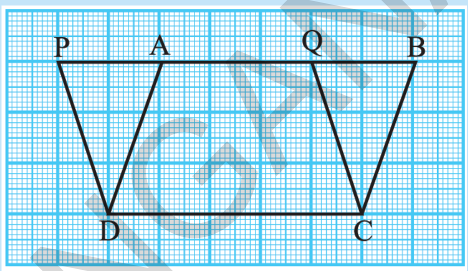
(e)

11.5 एकही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुर्भुज

अब हम दो समांतर चतुर्भुज जो एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच में है, उनके क्षेत्रफलों के मध्य यदि कोई संबंध हो तो ज्ञात करने की कोशिश करेंगे ।

क्रियाकलाप

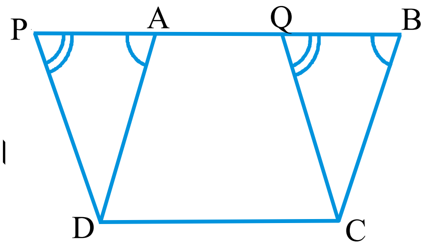
एक आरेख कागज लीजिए और आकृति में दर्शाए जैसे दो समांतर चतुभुर्ज ABCD और PQCD उसपर खींचिए ।



समांतर चतुभुर्ज एक ही आधार DC समान समानांतर रेखाओं के बीच मे है। स्पष्टतः दोनों समानान्तर चतुर्भुज में भाग DC QA उभयनिष्ठ है। यदि हम बता सकते है कि ΔDAP और ΔCBQ का क्षेत्रफल समान है तो हम कह सकते कि क्षेत्र (PQCD) = क्षेत्र (ABCD).

प्रमेय-11.1 : समान आधार और समान समानांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बराबर होता है।

उपपत्तिः माना कि एक ही आधार DC पर और समानांतर रेखाएँ DC और PB के बीच ABCD और PQCD दो समांतर चतुर्भुज है। ΔDAP और ΔCBQ



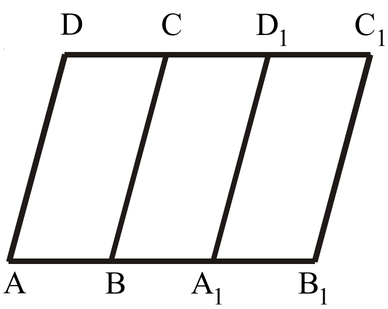
$PD \parallel CQ$ और PB तिर्यक रेखा है। $\angle DPA = \angle CQB$ और $AD \parallel CB$ और PB तिर्यक रेखा है। $\angle DAP = \angle CBQ$ तथा $PD = QC$ चूँकि PQCD समांतर चतुभुर्ज है।

अतः ΔDAP और ΔCBQ सर्वांगसम है और बराबर क्षेत्रफल के है।

इसलिए हम कह सकते,

क्षेत्र (PQCD) = क्षेत्र (AQCD) + क्षेत्र (DAP)

= क्षेत्र (AQCD) + क्षेत्र (CBQ) = क्षेत्र (ABCD)



चूँकि यह आरेख कागज पर खींचा गया है, इन समांतर चतुर्भुज के वर्गों की गणना द्वारा तुम जाँच कर सकते है ।

क्या तुम स्पष्ट कर सकते हो कि कैसे आरेख के पूर्ण वर्ग, आधे से अधिक वर्ग और आधे से कम वर्गों की गणना कैसे की जाती है?

रेशमा ने तर्क किया कि समान समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुज के बराबर क्षेत्रफल के लिए, एक ही आधार होना आवश्यक नही है। केवल उनका आधार बराबर रहना चाहिए । उसका कथन समझने के लिए संलग्न आकृति की ओर ध्यान से देखिए ।

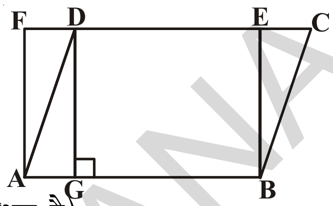
यदि $AB = A_1B_1$ जब हम समान्तर चतुर्भुज $A_1B_1C_1D_1$ काटकर उसे समान्तर चतुर्भुज ABCD पर रखेंगे तो A बिन्दु A_1 के साथ सम्पाती होता है, और B बिन्दू B_1 और C_1D_1 सम्पाती होते है CD इस तरह क्षेत्रफल में बराबर है। इस तरह वह क्षेत्रफल में बराबर है ।

इस तरह बराबर आधार के समांतर चतुर्भुज को, उनके ज्यामितीय गुणधर्मों के अभ्यास हेतु एक ही आधार पर स्थित समझ सकते है। ऊपर के प्रमेय का उपयोग समझने के लिए अब हम कुछ उदाहरणों को प्रस्तुत करें गे।

उदाहरण -1. ABCD समांतर चतुर्भुज और ABEF आयत है। AB पर लम्ब DG है।

सिद्ध कीजिए कि (i) क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र (ABEF)

(ii) क्षेत्र (ABCD) = AB × DG



हल : (i) एक आयत भी एक समांतर चतुर्भुज होता है ।

$\therefore$ क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र (ABEF) ..... (1)

(समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और समान समानान्तर रेखाओं के बीच स्थित है)

(ii) क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र (ABEF) ($\because$ (1) से)

= AB × BE ($\because$ ABEF आयत है)

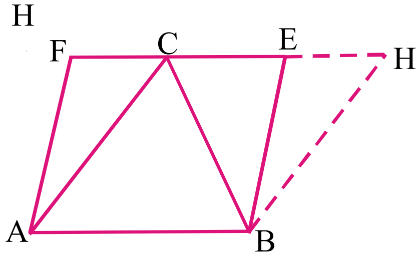
= AB × DG ($\because$ $DG \perp AB$ और DG = BE)

इसलिए क्षेत्र (ABCD) = AB × DG

परिणाम से हम कह सकते है कि "समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी कोई भी भुजा और उसके अनुकूल ऊँचाई का गुणनफल होता है।"

उदाहरण-2. त्रिभुज ABC और समांतर चतुर्भुज ABEF एकही आधार पर है तथा AB और EF समानांतर भुजाओं के बीच मे स्थित है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ ar(|| gm ABEF)

हल : B से गुजरनेवाली BH || AC खींचिए जो बढाई गई FE को H पर स्पर्श करती है



$\therefore$ ABHC समांतर चतुर्भुज है ।

कर्ण BC इसे दो सर्वसमान त्रिभुजों मे विभाजित करता है।

$\therefore$ क्षेत्र(ΔABC) = क्षेत्र(ΔBCH)

$= \frac{1}{2}$ ar (|| gm ABHC)

किन्तु समानांतर चतुर्भुज ABHC और समांतर चतुर्भुज ABEF एकही आधार AB पर और समान समांतर रेखाओं AB और EF के बीच में स्थित है ।

$\therefore$ क्षेत्र(समांतर चतुर्भुज ABHC) = क्षेत्र (समांतर चतुर्भुज ABEF)

अतः क्षेत्र (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ ar (|| gm ABEF)

परिणाम द्वारा हम कहते है कि "एक ही आधार पर और समान समांतर रेखाओं के बीच मे स्थित का त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।"

उदाहरण-3. एक समचतुर्भुज के कर्ण 12 से.मी और 16 से.मी. है। इसके आसन्न भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोडने पर बननेवाली आकृति का क्षेत्रफल ज्ञाज कीजिए ।

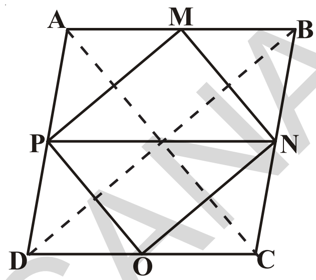
हलः समचतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्यबिंदु क्रमशः M, N, O और P है। आकृति MNOP बनाने के लिए इन्हे मिलाईए।

इस तरह बने हुए MNOP का आकार क्या होगा? कारण दीजिए?

रेखा PN मिलाईए तब PN || AB और PN || DC (कैसे?)

हम जानते है कि यदि एक त्रिभुज और समानांतर चतुभुर्ज एकही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, सामांतर चतुभुर्ज के क्षेत्रफल के आधा होता है।

ऊपर के परिणाम से, समान्तर चतुभुर्ज ABNP और त्रिभुज MNP एक ही आधार PN पर और समांतर रेखाओं PN और AB के बीचमे हैं ।



$\therefore$ क्षेत्र $\Delta MNP = \frac{1}{2}$ क्षेत्र ABPN .....(i)

क्षेत्र $\Delta PON = \frac{1}{2}$ क्षेत्र (PDCN) .....(ii)

और समचतुभुर्ज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ .....(iii)

(1), (ii) और (iii) से हमे ज्ञात होता है

क्षेत्र(MNOP) = क्षेत्र(ΔMNP) + क्षेत्र(ΔPON)

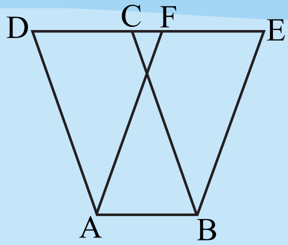
$= \frac{1}{2}$ क्षेत्र(ABNP) + $\frac{1}{2}$ क्षेत्र(PDCN)

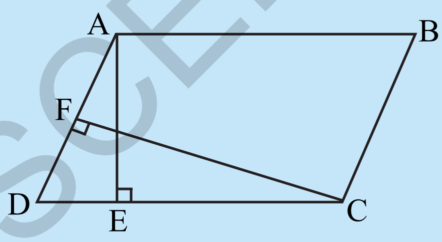
$= \frac{1}{2}$ क्षेत्र(समचतुभुर्ज ABCD)

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48$ सेमी.^{2}

अभ्यास 11.2

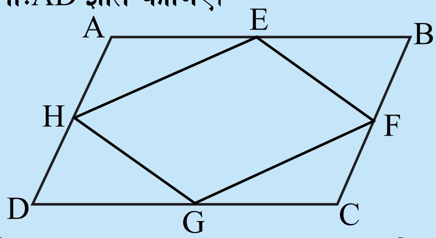
1. समांतर चतुभुर्ज ABCD का क्षेत्रफल 36 से.मी^{2}. है। समांतर चतुभुर्ज ABEF के ऊँचाई की गणना कीजिए यदि AB = 4.2 से.मी..





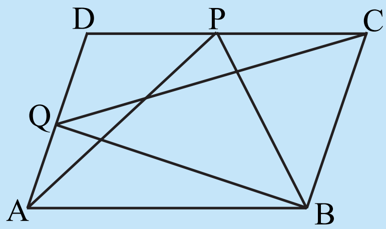
2. ABCD समान्तर चतुभुर्ज है। AE, DC पर लम्बा है। और CF पर लम्ब है ।

यदिAB = 10 से.मी. तो AE = 8 से.मी. और CF = 12 से.मी.AD ज्ञात कीजिए।



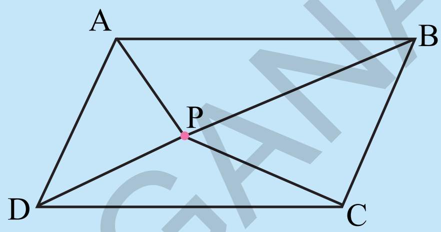
3. समांतर चतुभुर्ज AB, BC, CD और AD के मध्यबिंदू क्रमशः E, F G और H है। बताईए कि क्षेत्र (EFGH) $= \frac{1}{2}$ar(ABCD)

4. . उदाहरण-3, मे यदि तुम ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN और ΔMNB को मिलाने पर तो तुम्हे कौनसी आकृति प्राप्त होगी?



5. ABCD समांतर चतुभुर्ज की DC और AD भुजाओं पर क्रमशः कोई दो बिंदु P और Q स्थित है। बताईए कि क्षेत्र (ΔAPB) = क्षेत्र $\Delta(BQC)$.

6. समांतर चतुभुर्ज ABCD के भीतरी भाग मे बिंदु P है। बताईए कि

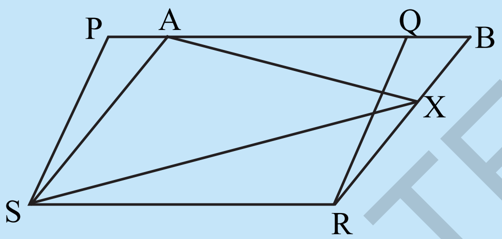


(i) क्षेत्र (ΔAPB) + क्षेत्र(ΔPCD) $= \frac{1}{2} ar(ABCD)$

(ii) क्षेत्र (ΔAPD) + क्षेत्र(ΔPBC) = क्षेत्र(ΔAPB) + क्षेत्र(ΔPCD)

(संकेत: P से, AB को समानांतर रेखा खींचिए)

7. सिद्ध कीजिए कि समलम्ब चतुभुर्ज का क्षेत्रफल, समानांतर भुजाओं के योग को उनके बीच की दूरी द्वारा गुणन करने के बाद प्राप्त संख्या के आधा रहता है ।

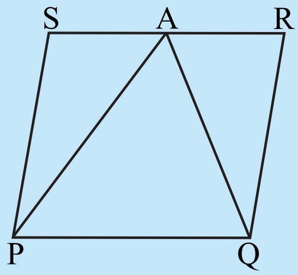


8. PQRS औरABRS समांतर चतुभुर्ज है और भुजा BR पर कोई बिंदु X है। बताईए कि

(i) क्षेत्र(PQRS) = क्षेत्र(ABRS)

(ii) क्षेत्र$(\Delta AXS) = \frac{1}{2} ar(PQRS)$

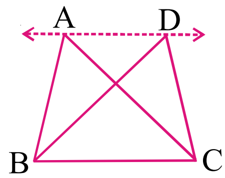
9. आकृति मे दर्शाए जैसा एक किसान के पास समांतर चतुभुर्ज के आकार में PQRS खेत है । उसने RS पर मध्यबिन्दु A लेकर इसे P और Q के साथ जोडा। खेत कितने भागों मे विभाजित हुआ? इन भागों के आकार क्या है? किसान मूंगफली बोना चाहता है जो दलहन और धान के क्षेत्रों के योग के समान हो। उसे कैसा बोना चाहिए? कारणों के साथ लिखिए ?



10. सिद्ध कीजिए कि समचतुभुर्ज का क्षेत्रफल उसके कर्णो के गुणनफल के आधे के बारबर होता है।

11.6 एक ही आधार पर और समानांतर रेखाओं के बीच मे त्रिभुजः

हम एक ही आधार पर और समानांतर रेखाओं के बीच स्थित आकृतियों की ओर देख रहे है। माना कि दो त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर और समानांतर AD और BC के बीच मे है ।



ऐसे त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बारे मे तुम क्या कह सकते हो? स्पष्टतः एक ही आधार पर और दो समानांतर रेखाओं के बीच मे ऐसे त्रिभुजों के युग्म, अनंत प्रकार से खींचे जा सकते है ।

इसके लिए एक क्रियाककलाप करते है ।

क्रियाकलाप

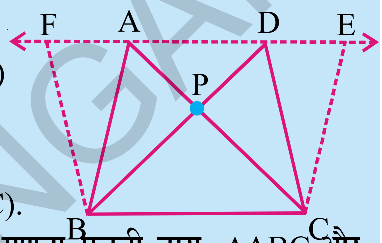
एक ही आधार पर अथवा (समान आधार पर) और समान समानांतर रेखाओं के बीच मे, एक आरेख कागज पर आकृति के अनुसार त्रिभुजों के युग्मों को खींचिए ।

माना कि एक ही आधार पर BC पर और समानांतर रेखाओं के BC और FE के बीच ΔABC और ΔDBC स्थित है । $\overline{AD}$ को दोनों ओर बढाइए और $CE \parallel AB$ और $BF \parallel CD$ खींचिए । एकही आधार BC पर और समान समानान्तर रेखाओं BC पर और EF के बीच में समांतर चतुर्भुज AECB और FDCB बने ।

इस तरह क्षेत्र (AECB) = क्षेत्र (FDCB). (कैसे ?)

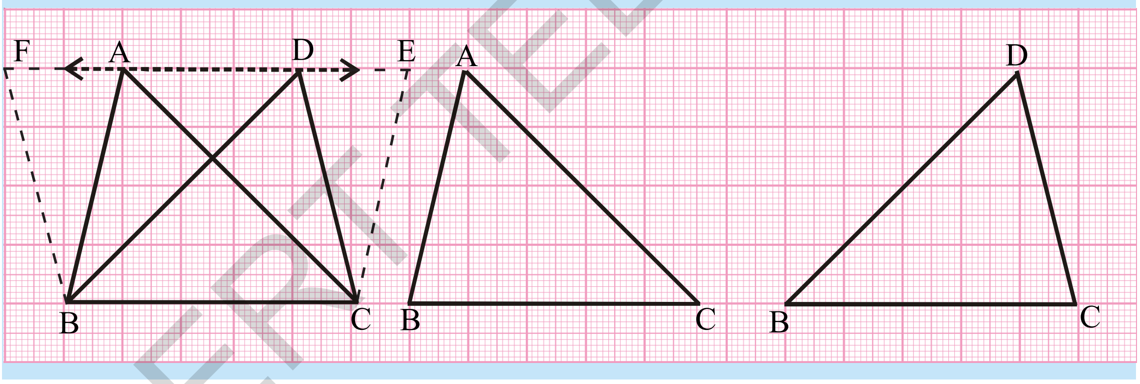
इस तरह क्षेत्र $(\Delta ABC) = \frac{1}{2}$ क्षेत्र(समांतर चतुर्भुजAECB) ...(i)

और क्षेत्र $(\Delta DBC) = \frac{1}{2}$ क्षेत्र(समांतर चतुर्भुजFDCB) .... (ii)



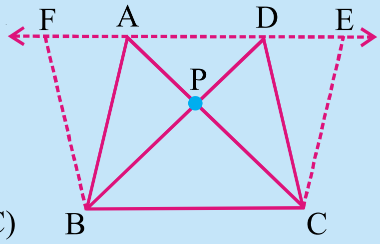
(i) और (ii) से हमे पता चलता है क्षेत्र (ΔABC) = क्षेत्र(ΔDBC).

इससे पूर्व क्रिया कलाप के अनुसार आरेख कागज पर वर्गोंकी गुणना पद्धती द्वारा ΔABC और ΔDBC के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और क्या वह (क्षेत्रफल) सही है, इसकी जाँच कीजिए ।



विचार-विमर्श कीजिए और लिखिए

आकृति के अनुसार एक ही आधार पर और दो समानांतर रेखाओं के बीच दो त्रिभुज ABC और DBC खींचिए। AC और BD के प्रचिच्छेद बिंदु P लीजिए। $CE \parallel BA$ और $BF \parallel CD$ इस प्रकार खींचिए कि रेखा AD पर बिन्दु E और F स्थित है ।



क्या तुम बता सकते है क्षेत्र(ΔPAB) = क्षेत्र(ΔPDC)

संकेत : त्रिभुज सर्वसमान नही है किन्तु बराबर क्षेत्रफल वाले है ।

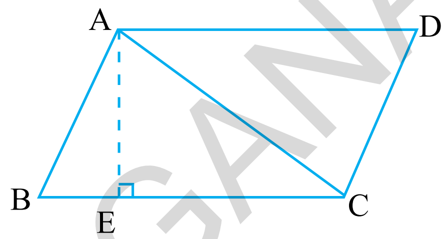
उपप्रमेय-1 : बताईए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल इसके आधार (अथवा कोई भी भुजा) और उसके अनुकुल उँचाई के गुणनफल के आधा रहता है ।

उपपत्ति: माना कि ABC त्रिभुज है ।AD || BC इस प्रकार खींचिए कि CD =BA.

अब ABCD समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कर्ण AC है।

हम जानते है कि $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

इसलिए क्षेत्र ΔABC = क्षेत्रΔACD (सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होत है)



इसलिए $ar\Delta ABC = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

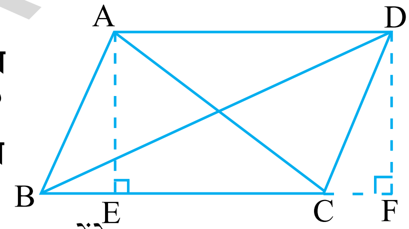
$AE \perp BC$ खींचिए।

इसलिए क्षेत्र(ABCD) = BC × AE

इसलिए क्षेत्र(ΔABC) $= \frac{1}{2} ar(ABCD) = \frac{1}{2} \times BC \times AE$

अतः क्षेत्रΔABC $= \frac{1}{2} \times$ आधार BC × इसके अनुकुल उंचाई AE.

प्रमेय-11.2 : एक ही आधार (अथवा समान आधार) और बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुज समान समानांतर रेखाओं के बीच रहते है ।



आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए। एकही आधार BC पर स्थित त्रिभुजों को नाम दीजिए। ΔABC और ΔDBC की उँचाईयाँ क्या है?

यदि दो त्रिभुज के समान आधार और समान क्षेत्रफल हो तो उनकी उँचाईयाँ क्या होगी? क्या A और D संरेखीय है?

ऊपर के परिणामों के उपयोग समझने के लिए अब कुछ उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 4. बताईए कि त्रिभुज की माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रवाले त्रिभुजों मे विभाजित करती है।

हल: माना कि ABC त्रिभुज है और इसकी एक माध्यिका AD है।

ΔABD और ΔADC में, शीर्ष उभयनिष्ठ है और इनके आधार BD और DC बराबर है। $AE \perp BC$. खींचिए।

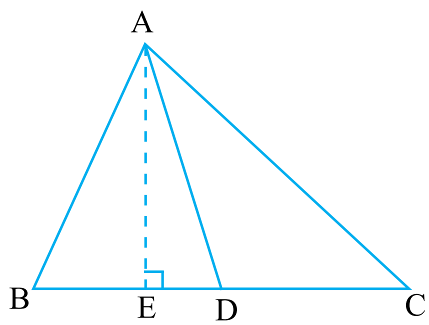
अब क्षेत्र (ΔABD) $= \frac{1}{2} \times$ आधारBD × ऊँचाई ΔADB

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

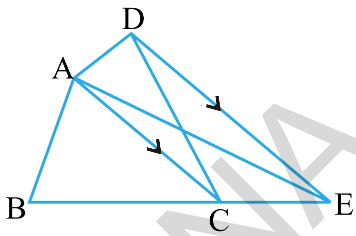
$= \frac{1}{2} \times$ आधार DC × ऊँचाई ΔACD

$= ar\,\Delta ACD$



अतः क्षेत्र (ΔABD) = क्षेत्र (ΔACD)

उदाहरण -5. आकृति में, ABCD चतुर्भुज है। AC कर्ण है और $DE \parallel AC$ और बढाए हुए BC को DE बिंदु पर मिलती है। बताईए कि क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र(ΔABE).



हल : क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र(ΔABC) + क्षेत्र(ΔDAC)

ΔDAC और ΔEAC एकही आधार $\overline{AC}$ पर स्थित है ।

और समानांतर रेखाएँ $DE \parallel AC$ के बीच मे है ।

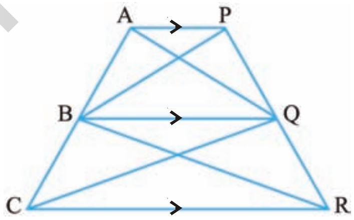
क्षेत्र (ΔDAC) = क्षेत्र(ΔEAC) (क्यों?)

समान आकृति के क्षेत्रफल दोनो ओर जोडने पर

क्षेत्र(ΔDAC) + क्षेत्र (ΔABC) = क्षेत्र(ΔEAC) + क्षेत्र(ΔABC)

अतः क्षेत्र (ABCD) = क्षेत्र(ΔABE)

उदाहरण 6. आकृति में, $AP \parallel BQ \parallel CR$. सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र (ΔAQC) = क्षेत्र(ΔPBR).



हल : ΔABQ और ΔPBQ $AP \parallel BQ$ के बीच है।

क्षेत्र(ΔABQ) = क्षेत्र(ΔPBQ) ...(1)

इसी प्रकार

क्षेत्र (ΔCQB) = क्षेत्र (ΔRQB) (एकही आधार BQ और $BQ \parallel CR$) ...(2)

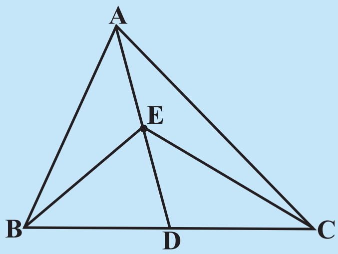
(1) और (2) के परिणाम जोडने पर

क्षेत्र (ΔABQ) + क्षेत्र(ΔCQB) = क्षेत्र(ΔPBQ) + क्षेत्र(ΔRQB)

अतः क्षेत्र ΔAQC = क्षेत्र ΔPBR

अभ्यास - 11.3

1. त्रिभुज ABC (आकृति देखिए), माध्यिका AD का मध्य बिंदु E है, बताईए कि

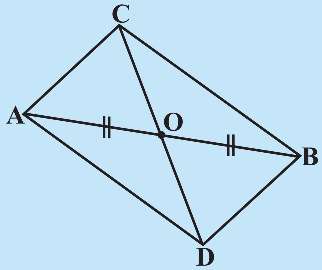


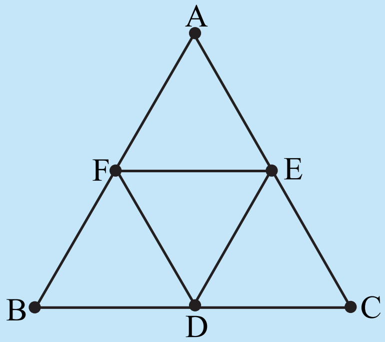
   (i) क्षेत्र ΔABE = क्षेत्र ΔACE

   (ii) $ar\Delta ABE = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

2. बताईए कि समांतर चतुभुर्ज के कर्ण इसे समान क्षेत्र के चार त्रिभुजों मे विभाजित करता है।

3. आकृतियाँ, एक ही आधार $\overline{AB}$ पर दो त्रिभुज ΔABC और ΔABD है। यदि रेखाखम्ड CD $\overline{AB}$ को O पर समद्विभाजित करता है तो बताईए कि क्षेत्र (ΔABC) = क्षेत्र (ΔABD).





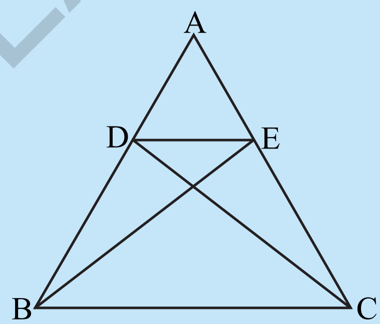
4. आकृति में, ΔABC, की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिंदु क्रमशः D, E, F हैं। बताईए कि

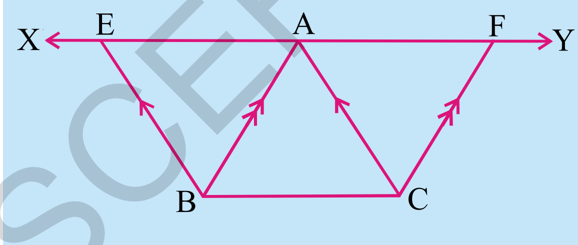
(i) BDEF समांतर चतुर्भुज है।

(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

(iii) $ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

5. आकृति में, ΔABC के AB तथा AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिंदु इस प्रकार है कि क्षेत्र (ΔDBC) = क्षेत्र(ΔEBC). सिद्ध कीजिए कि $DE \parallel BC$.

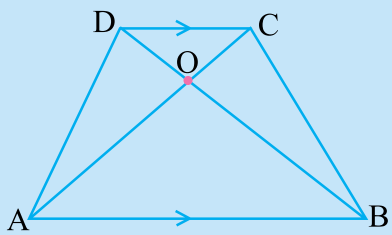


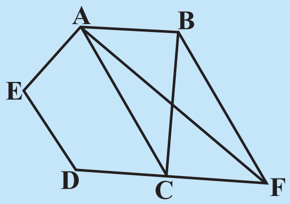


6. आकृति XY को समानांतर रेखा जो A से गुजरती है XY को क्रमशः E और F पर मिलती है बताईए की क्षेत्र (ΔABE) = क्षेत्र (ΔACF).

7. आकृति, समलंब चतुर्भुज ACBD के कर्ण AC और BD है जो एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते है। $AB \parallel DC$ है। सिद्ध कीजिए कि

क्षेत्र(ΔAOD) = क्षेत्र(ΔBOC).



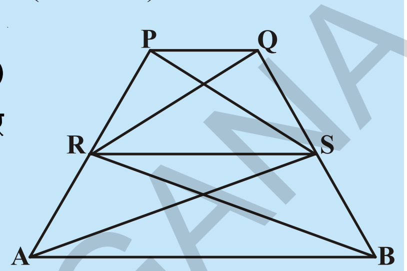


8. आकृति में ABCDE पंचभुज है। 'B' से गुजरने वाली AC को समानान्तर रेखा बढाई गई जो DC को F पर मिलती है। बताईए कि

(i) क्षेत्र (ΔACB) = क्षेत्र (ΔACF)

(ii) क्षेत्र (AEDF) = क्षेत्र (ABCDE)

9. आकृति में, यदि क्षेत्र ΔRAS = क्षेत्र ΔRBS और क्षेत्र (ΔQRB) = क्षेत्र(ΔPAS) तो बताईए कि दोनों चतुर्भुज PQSR और RSBA समलंब चतुर्भुज होते हैं ।



10. एक देहाती रामय्या के पास चतुभुर्ज के आकार मे एक जमीन का टूकडा (भूखण्ड) है । गाँव की ग्रामपंचायत ने विद्यालय के निर्माण के लिए इस भूखण्ड के एक कोनेका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया। रामय्या इस प्रस्ताव पर सहमत हुआ बशर्ते की जमीन दी जाए ताकि त्रिभुजाकार भूखण्ड बने। कैसे यह प्रस्ताव कार्यान्वित होगा, स्पष्ट कीजिए। (भूखण्ड का संबंधित रेखाचित्र बनाईए)

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

समकोण त्रिभुज ABC में A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN यह क्रमशः BC, CA और AB भुजाओं पर बने वर्ग है। रेखाखण्ड AX $\perp$ DE BC को Y. और DE को X. पर मिलती है। AD, AE BF और CM को मिलाईए । (आकृति देखिए).

बताईए कि

(i) ΔMBC $\cong$ ΔABD

(ii) क्षेत्र (BYXD) = 2क्षेत्र (ΔMBC)

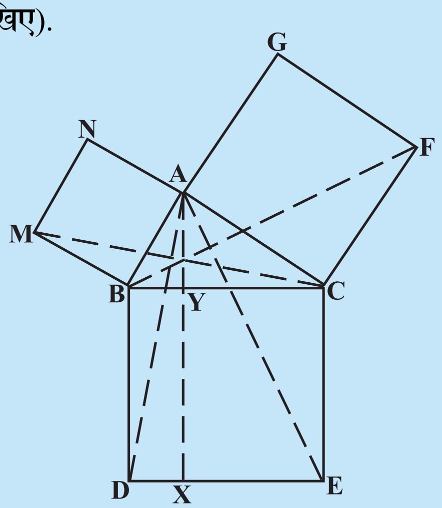
(iii) क्षेत्र(BYXD) = क्षेत्र(ABMN)

(iv) ΔFCB $\cong$ ΔACE

(v) क्षेत्र(CYXE) = 2 क्षेत्र(FCB)

(vi) क्षेत्र(CYXE) = क्षेत्र (ACFG)

(vii) क्षेत्र(BCED) = क्षेत्र(ABMN) + क्षेत्र(ACFG)



(vii) परिणाम क्या तुम शब्दों मे लिख सकते हो? यह पैथागोरस का प्रसिद्ध प्रमेय है। तुम दसवी कक्षा में इस प्रमेय की सरलतम उपपत्ति सिखोगे ।

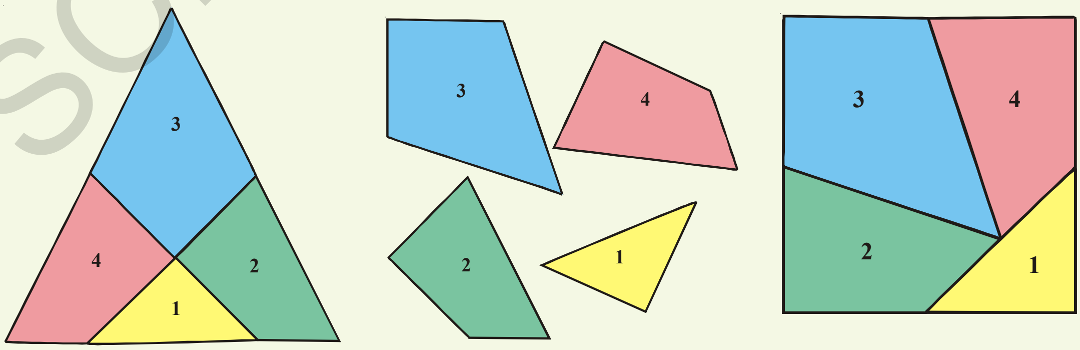
हमने क्या सीखा?

1. किसी आकृति का क्षेत्रफल वह एक संख्या है (कोई मात्रक मे) जो उस आकृति धिरे तल के भाग के साथ सम्बद्ध है ।
2. दो सर्वागसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते है परन्तु इसका विलोम सत्य रहना आवश्यक नही है।
3. यदि X एक तलीय क्षेत्र है आकृतियाँ P और Q, दो परस्पर व्यापी तलीय क्षेत्रों से बना हुआ है, तब क्षेत्र (X) = क्षेत्र(P) + क्षत्र(Q)
4. दो आकृतियाँ एक ही आधार और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित कहलाती है यदि उनमें उभयनिष्ठ आधार (भुजा) हो और प्रत्येक आकृति उभयनिष्ठ भुजा के सम्मुख शीर्ष, आधार को समानान्तर रेखा पर स्थित होते है ।
5. एक ही आधार (अथवा बराबर आधार) पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुभुर्ज के क्षेत्र बराबर होते है ।
6. सामान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसका आधार और उसके अनुकूल उँचाई का गुणनफल रहता है।
7. समान क्षेत्रवाले और एक ही आधार (अथवा बराबर आधार): पर स्थित समांतर चतुभुर्ज समान सामानंतर रेखाओं के बीच रहते है ।
8. यदि एक समान्तर चतुभुर्ज और एक त्रिभुज एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा रहता है ।
9. एकही आधार (बराबर आधार) पर और समान समानन्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते है ।
10. एक ही आधार (अथवा बराबर आधार) पर स्थित और जिनके क्षेत्रफल समान है, ऐसे त्रिभुजु समान समानान्तर रेखाओं के बीच रहते है ।

क्या तुम जानते हो
पहेली क्षेत्रफल की

जर्मन गणितज्ञा डेविड हिलवर्ट (1862-1943) ने सर्वप्रथम सिद्ध किया कि कोई भी बहुभुज, इस सीमित टुकडोकी संख्या मे काटकर बराबर क्षेत्रफल के किसी भी बहुभुज में रूपांतरण कर सकते है ।

अब हम देखते है कि कैसे एक अंग्रेज उलझन सुलझाने वाला व्यक्ति हेन्री एमीस्ट डूडेन्सी (1847 - 1930) एक समभुज त्रिभुज को चार टुकडोमें काटकर उसे वर्ग मे रूपांतरण किया ।



उसकी धारणाओं का उपयोग करते हुऐ कुछ अधिक समस्याएँ सुलझाने की कोशिश कीजिए और आनन्द प्राप्त कीजिए।