ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1219/119-125/છ, તા. 16-02-2019 થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ X

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 126.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© NCERT, નવી દિલ્લી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્લી અને ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી વિજય વોરા
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી નરેશ જાલોરીયા
ડૉ. અતુલ વ્યાસ
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા
શ્રી કલ્પેશ અખાણી

સમીક્ષા

ડૉ. એ. એચ. હાસમાણી
ડૉ. પી. આઇ. અંધારીયા
ડૉ. જે. સી. પ્રજાપતિ
શ્રી એસ. આર. ગજેરા
ડૉ. હરેશ ભુટક
શ્રી ઈન્દ્રવદન શાહ
શ્રી કમલેશ ભટ્ટ
શ્રી પ્રતિભાબહેન નાગ્રેચા
શ્રી યોગેશ દેવલુક
શ્રી કલ્પેશ વ્યાસ
ડૉ. દીપક વ્યાસ
ડૉ. જી. એફ. મહેતા
શ્રી લલીત યાદવ
શ્રી અંજનાબહેન એન. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ

ડૉ. નરેશ દવે

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા ઠરાવ ક્રમાંકઃ મશબ/1217/1036/છ તા.25/10/2017 થી શાળા કક્ષાએ NCERTનાં પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ X** ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરાવીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય કક્ષાની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERT ના પ્રતિનિધિ તરીકે આર.આઇ.ઇ. ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દ્વિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ, શ્રી ઈન્દ્રવદન શાહ, ડૉ. જી. એફ. મહેતા, શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા, શ્રી રમણીકલાલ વિરપરા, ડૉ. અશ્વનીકુમાર ગર્ગ (આર.આઇ.ઇ., ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (આર.આઇ.ઇ., ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહ્યા હતા અને તેમણે પોતાનાં કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરાં પાડ્યાં છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા તેમજ તેની ગુણવત્તા જાળવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

અવંતિકા સિંઘ (IAS)
નિયામક — કાર્યવાહક પ્રમુખ

તા.3-4-2019 — ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2019

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી અવંતિકા સિંઘ, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the Textbook Development Committee responsible for this textbook. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J. V. Narlikar and the Chief Advisor for this textbook, Dr. H. K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G. P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to the systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational Research and Training

New Delhi
20 November 2006

Preface

Through the years, from the time of the Kothari Commission, there have been several committees looking at ways of making the school curriculum meaningful and enjoyable for the learners. Based on the understanding developed over the years, a National Curriculum Framework (NCF) was finalised in 2005. As part of this exercise, a National Focus Group on Teaching of Mathematics was formed. Its report, which came in 2005, highlighted a constructivist approach to the teaching and learning of mathematics.

The essence of this approach is that children already know, and do some mathematics very naturally in their surroundings, before they even join school. The syllabus, teaching approach, textbooks etc., should build on this knowledge in a way that allows children to enjoy mathematics, and to realise that mathematics is more about a way of reasoning than about mechanically applying formulae and algorithms. The students and teachers need to perceive mathematics as something natural and linked to the world around us. While teaching mathematics, the focus should be on helping children to develop the ability to particularise and generalise, to solve and

pose meaningful problems, to look for patterns and relationships, and to apply the logical thinking behind mathematical proof. And, all this in an environment that the children relate to, without overloading them.

This is the philosophy with which the mathematics syllabus from Class I to

Class XII was developed, and which the textbook development committee has tried to realise in the present textbook. More specifically, while creating the textbook, the following broad guidelines have been kept in mind.

- *The matter needs to be linked to what the child has studied before, and to her experiences.*
- *The language used in the book, including that for 'word problems', must be clear, simple and unambiguous.*
- *Concepts/processes should be introduced through situations from the children's environment.*
- *For each concept/process give several examples and exercises, but not of the same kind. This ensures that the children use the concept/process again and again, but in varying contexts. Here 'several' should be within reason, not overloading the child.*
- *Encourage the children to see, and come out with, diverse solutions to problems.*
- *As far as possible, give the children motivation for results used.*
- *All proofs need to be given in a non-didactic manner, allowing the learner to see the flow of reason. The focus should be on proofs where a short and clear argument reinforces mathematical thinking and reasoning.*
- *Whenever possible, more than one proof is to be given.*
- *Proofs and solutions need to be used as vehicles for helping the learner develop a clear and logical way of expressing her arguments.*
- *All geometric constructions should be accompanied by an analysis of the construction and a proof for the steps taken to do the required construction. Accordingly, the children would be trained to do the same while doing constructions.*
- *Add such small anecdotes, pictures, cartoons and historical remarks at several places which the children would find interesting.*
- *Include optional exercises for the more interested learners. These would not be tested in the examinations.*

- *Give answers to all exercises, and solutions/hints for those that the children may require.*
- *Whenever possible, propagate constitutional values.*

As you will see while studying this textbook, these points have been kept in mind by the Textbook Development Committee. The book has particularly been created with the view to giving children space to explore mathematics and develop the abilities to reason mathematically. Further, two special appendices have been given — Proofs in Mathematics, and Mathematical Modelling. These are placed in the book for interested students to study, and are only optional reading at present. These topics

may be considered for inclusion in the main syllabi in due course of time.

As in the past, this textbook is also a team effort. However, what is unusual about the team this time is that teachers from different kinds of schools have been an integral part at each stage of the development. We are also assuming that teachers will contribute continuously to the process in the classroom by formulating examples and exercises contextually suited to the children in their particular classrooms. Finally, we hope that teachers and learners would send comments for improving the textbook to the NCERT.

PARVIN SINCLAIR
G.P. DIKSHIT
Chief Advisors
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, *Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune*

Chief Advisor

Dr. H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

Chief Coordinator

Hukum Singh, Professor, *DESM, NCERT, New Delhi*

Members

Anjali Gupte, Teacher, *Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan*

Avantika Dam, TGT, *CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi*

Dharam Prakash, Reader, *CIET, NCERT, New Delhi*

H.C. Pradhan, Professor, *Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra*

Harsha J. Patadia, Senior Reader, *Centre of Advance Study in Education, M.S. University of Baroda, Vadodara, Gujarat*

Jabashree Ghosh, TGT, *DM School, RIE, NCERT, Bhubaneswar, Orissa*

Mahendra Shankar, Lecturer (S.G.) (Retd.), *NCERT, New Delhi*

Meena Shrimali, Teacher, *Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan*

R. Athmaraman, Mathematics Education Consultant, *TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu*

S. Pattanayak, Professor, *Institute of Mathematics and Application, Bhubaneswar, Orissa*

S.K.S. Gautam, Professor, *DESM, NCERT, New Delhi*

Shraddha Agarwal, PGT, *Sir Padampat Singhania Education Centre, Kanpur, (U.P.)*

Srijata Das, Sr. Lecturer *(Mathematics), SCERT, New Delhi*

U.B. Tewari, Professor, *Department of Mathematics, IIT, Kanpur, (U.P.)*

Uaday Singh, Lecturer, *DESM, NCERT, New Delhi*

Member-coordinators

Ashutosh K. Wazalwar, Professor, *DESM, NCERT, New Delhi*

Praveen K. Chaurasia, Lecturer, *DESM, NCERT, New Delhi*

Acknowledgements

The Council acknowledges the valuable comments of the following participants of the workshop towards the finalisation of the book — K.K. Gupta, **Reader**, *U.N.P.G. College, Padrauna, Uttar Pradesh; Deepak Mantri,* **Teacher**, *Vidya Bhawan Basic School, Udaipur, Rajasthan; Shagufta Anjum,* **Teacher**, *Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan; Ranjana Sharma,* **Teacher**, *Vidya Bhawan Secondary School, Udaipur, Rajasthan. The Council acknowledges the suggestions given by Utpal Chakraborty,* **Lecturer**, *SCERT, Raipur, Chattisgarh.*

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop : K. Balaji, **TGT**, *Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shiv Kumar Nimesh,* **TGT**, *Rajkiya Sarvodaya Bal Vidyalaya, Delhi; Ajay Singh,* **TGT**, *Ramjas Senior Secondary School No. 3, Delhi; Rajkumar Dhawan,* **PGT**, *Geeta Senior Secondary School No. 2, Delhi; Shuchi Goyal,* **PGT**, *The Airforce School, Delhi; Manjit Singh,* **TGT**, *Government High School, Gurgaon, Haryana; Pratap Singh Rawat,* **Lecturer**, *SCERT, Gurgaon, Haryana; Ritu Tiwari,* **TGT**, *Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Delhi.*

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur for conducting the third workshop of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, **Head**, *DESM, NCERT.*

The Council also acknowledges the efforts of Uttam Kumar (NCERT) and Rajesh Sen (Vidya Bhawan Society, Udaipur), **DTP Operators;** *Monika Saxena,* **Copy Editor;** *and Abhimanu Mohanty,* **Proof Reader;** *APC office and the administrative staff DESM, NCERT and the Publication Department of the NCERT.*

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ 1	**વાસ્તવિક સંખ્યાઓ (Real Numbers)**	**1**
	1.1 પ્રાસ્તાવિક	1
	1.2 યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય	2
	1.3 અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય	6
	1.4 અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન	10
	1.5 સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના દશાંશ નિરૂપણનું પુનરાવર્તન	13
	1.6 સારાંશ	16
પ્રકરણ 2	**બહુપદીઓ (Polynomials)**	**18**
	2.1 પ્રાસ્તાવિક	18
	2.2 બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ	19
	2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ	24
	2.4 બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિ	28
	2.5 સારાંશ	32
પ્રકરણ 3	**દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (Pair of Linear Equations in Two Variables)**	**33**
	3.1 પ્રાસ્તાવિક	33
	3.2 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ	34
	3.3 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે આલેખની રીત	38
	3.4 સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની બૈજિક રીત	42
	3.4.1 આદેશની રીત	42
	3.4.2 લોપની રીત	45
	3.4.3 ચોકડી ગુણાકારની રીત	48
	3.5 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી શકાય તેવાં સમીકરણો	53
	3.6 સારાંશ	58
પ્રકરણ 4	**દ્વિઘાત સમીકરણ (Quadratic Equations)**	**59**
	4.1 પ્રાસ્તાવિક	59
	4.2 દ્વિઘાત સમીકરણ	60
	4.3 અવયવીકરણ વડે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ	62
	4.4 પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ	65
	4.5 બીજનાં સ્વરૂપ	74
	4.6 સારાંશ	76
પ્રકરણ 5	**સમાંતર શ્રેણી (Arithmetic Progression)**	**78**
	5.1 પ્રાસ્તાવિક	78
	5.2 સમાંતર શ્રેણી	79
	5.3 સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ	84

	5.4	સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ *n* પદોનો સરવાળો	90
	5.5	સારાંશ	98
પ્રકરણ 6	**ત્રિકોણ (Triangles)**		**99**
	6.1	પ્રાસ્તાવિક	99
	6.2	સમરૂપ આકૃતિઓ	100
	6.3	ત્રિકોણોની સમરૂપતા	104
	6.4	ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સિદ્ધાંત	110
	6.5	સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ	120
	6.6	પાયથાગોરસ પ્રમેય	123
	6.7	સારાંશ	131
પ્રકરણ 7	**યામ ભૂમિતિ (Coordinate Geometry)**		**133**
	7.1	પ્રાસ્તાવિક	133
	7.2	અંતરસૂત્ર	134
	7.3	વિભાજન સૂત્ર	139
	7.4	ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ	144
	7.5	સારાંશ	147
પ્રકરણ 8	**ત્રિકોણમિતિનો પરિચય (Introduction to Trigonometry)**		**149**
	8.1	પ્રાસ્તાવિક	149
	8.2	ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો	150
	8.3	વિશિષ્ટ માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો	157
	8.4	કોટિકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો	163
	8.5	ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો	165
	8.6	સારાંશ	169
પ્રકરણ 9	**ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગો (Some Applications of Trigonometry)**		**170**
	9.1	પ્રાસ્તાવિક	170
	9.2	ઊંચાઈ અને અંતર	171
	9.3	સારાંશ	179
પ્રકરણ 10	**વર્તુળ (Circles)**		**180**
	10.1	પ્રાસ્તાવિક	180
	10.2	વર્તુળનો સ્પર્શક	181
	10.3	સમતલના કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની સંખ્યા	183
	10.4	સારાંશ	188
પ્રકરણ 11	**રચના (Constructions)**		**189**
	11.1	પ્રાસ્તાવિક	189
	11.2	રેખાખંડનું વિભાજન	189
	11.3	વર્તુળના સ્પર્શકની રચના	193
	11.4	સારાંશ	194

પ્રકરણ 12	**વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ (Areas Related to Circles)**	**195**
12.1	પ્રાસ્તાવિક	195
12.2	વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ - એક સમીક્ષા	196
12.3	વર્તુળના વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ	197
12.4	સંયોજિત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ	202
12.5	સારાંશ	207
પ્રકરણ 13	**પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ (Surface Areas and Volumes)**	**208**
13.1	પ્રાસ્તાવિક	208
13.2	સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું કુલ પૃષ્ઠફળ	209
13.3	સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ	214
13.4	એક ઘનાકારનું બીજા ઘનાકારમાં રૂપાંતર	217
13.5	શંકુનો આડછેદ	220
13.6	સારાંશ	226
પ્રકરણ 14	**આંકડાશાસ્ત્ર (Statistics)**	**227**
14.1	પ્રાસ્તાવિક	227
14.2	વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક	227
14.3	વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક	237
14.4	વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ	241
14.5	સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખીય પ્રસ્તુતિ	252
14.6	સારાંશ	256
પ્રકરણ 15	**સંભાવના (Probability)**	**257**
15.1	પ્રાસ્તાવિક	257
15.2	સંભાવના - પ્રશિષ્ટ અભિગમ	258
15.3	સારાંશ	271
પરિશિષ્ટ A1	**ગણિતમાં સાબિતીઓ (Proofs in Mathematics)**	**273**
A1.1	પ્રાસ્તાવિક	273
A1.2	ગાણિતિક વિધાનોનો પુનઃપરિચય	273
A1.3	આનુમાનિક તર્ક	276
A1.4	ધારણાઓ, પ્રમેયો, સાબિતીઓ અને ગાણિતિક તર્ક	278
A1.5	વિધાનનું નિષેધ	282
A1.6	વિધાનનું પ્રતીપ	285
A1.7	વિરોધાભાસથી સાબિતી	288
A1.8	સારાંશ	291
પરિશિષ્ટ A2	**ગાણિતિક મોડેલિંગ (Mathematical Modeling)**	**292**
A2.1	પ્રાસ્તાવિક	292
A2.2	ગાણિતિક મોડેલિંગનાં સોપાનો	293
A2.3	કેટલાંક ઉદાહરણો	297
A2.4	ગાણિતિક મોડેલિંગ કેમ મહત્ત્વનું છે ?	300
A2.5	સારાંશ	301
જવાબો અને સૂચનો	**(Answers and Hints)**	**302**

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ 1

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં તમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દુનિયામાં ડોકિયું કર્યું અને તમને અસંમેય સંખ્યાઓ મળી. આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ચર્ચા ચાલુ રાખીશું. આપણે વિભાગ 1.2 અને 1.3 માં ધન પૂર્ણાંકોના ખૂબ જ અગત્યના ગુણધર્મો, યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ અને અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયથી પ્રારંભ કરીશું.

'યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ' નામ જ દર્શાવે છે કે, તેને પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતા સાથે કંઈક સંબંધ છે. સરળ ભાષામાં કહીએ તો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક a ને બીજા કોઈ ધન પૂર્ણાંક b વડે ભાગવામાં આવે, તો અનૃણ શેષ r વધે અને તે b કરતાં નાની હોય. તમારામાંથી મોટા ભાગના અભ્યાસાર્થી કદાચ ભાગાકારને સ્વાભાવિક લાંબી પ્રક્રિયા તરીકે ઓળખતા હશે. જો કે, આ પરિણામ ખૂબ જ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજી શકાય, છતાં પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતાના ગુણધર્મો સંબંધી તેના ઘણા બધા ઉપયોગો છે. આપણે તેમાંના કેટલાકને સમજીશું અને તેનો ઉપયોગ મુખ્યત્વે બે ધન પૂર્ણાંકોના ગુ.સા.અ. **(ગુરુતમ સામાન્ય અવયવ, HCF અથવા GCD)** શોધવા માટે કરીશું.

અન્ય પાસામાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયમાં ધન પૂર્ણાંકોના ગુણાકારની વાત આવે છે. તમે જાણો છો કે, દરેક વિભાજ્ય પૂર્ણાંકને અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકોના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. આ અગત્યનો ગુણધર્મ એ ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** છે. આ પરિણામ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજાવી શકાય. આપણે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના બે મુખ્ય વ્યવહારુ ઉપયોગ કરીશું. તેના ગણિતના ક્ષેત્રમાં કેટલાક ખૂબ જ ઊંડા અને નોંધપાત્ર ઉપયોગો છે. તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ જેવી ઘણી બધી સંખ્યાઓને અસંમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેય વપરાય છે.

બીજું, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ, સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ ક્યારે સાન્ત હોય અને ક્યારે અનંત આવૃત્ત હોય તે જાણવામાં થાય છે. આ માટે આપણે $\frac{p}{q}$ ના છેદ q ના અવિભાજ્ય અવયવો પર દૃષ્ટિપાત કરીએ છીએ. તમે જોશો કે, q નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ $\frac{p}{q}$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિનું સંપૂર્ણ સ્વરૂપ નક્કી કરે છે.

આથી, ચાલો આપણે નિરીક્ષણ દ્વારા અભ્યાસનો પ્રારંભ કરીએ.

1.2 યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય

નીચે દર્શાવેલ લોક કોયડાને વિચારીએ.*

એક વેપારી રસ્તા પર ઈંડાં વેચી રહ્યો હતો. જેની પાસે કંઈ જ કામ ન હતું તેવો એક આળસુ માણસ તે વેપારી સાથે શાબ્દિક દ્વન્દ્વમાં ઊતરી ગયો અને તેનું પરિણામ તકરારમાં આવ્યું. તેણે ઈંડાંની ટોપલી ખેંચી લીધી અને જમીન પર પછાડી. ઈંડાં તૂટી ગયાં. વેપારી પંચાયત પાસે ગયો અને પેલા આળસુ વ્યક્તિ પાસેથી તૂટેલાં ઈંડાંના પૈસા અપાવવા કહ્યું. પંચાયતે પૂછ્યું કે કેટલાં ઈંડાં તૂટી ગયાં હતાં. તેણે આ પ્રમાણે જવાબ આપ્યો :

જો ઈંડાંને બે-બેના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, એક ઈંડું બાકી રહે;

જો ઈંડાંને ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, બે ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને છ-છના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને સાત-સાતના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, કોઈ ઈંડું બાકી ન રહે.

મારી ટોપલીમાં 150 થી વધુ ઈંડાં સમાઇ શકે નહિ. તો તે ટોપલીમાં કેટલાં ઈંડાં હતાં? ચાલો આપણે કોયડો ઉકેલવા પ્રયાસ કરીએ. ધારો કે ઈંડાંની સંખ્યા a હતી. ગણતરી કરતાં પહેલાં એ તો સ્પષ્ટ છે કે, a ની કિંમત 150 કે તેથી ઓછી હોય.

જો ઈંડાંની સાત-સાતના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો કંઈ જ બાકી રહે નહિ, તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા p માટે, $a = 7p + 0$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની છ-છના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા q માટે, $a = 6q + 5$

જો ઈંડાંની પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે. તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા w માટે, $a = 5w + 4$

જો ઈંડાંની ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે. તેથી, કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા s માટે, $a = 4s + 3$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, બે ઈંડાં બાકી રહે. આથી કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા t માટે, $a = 3t + 2$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની બે-બેના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, એક ઈંડું બાકી રહે. તેથી, કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા u માટે, $a = 2u + 1$ વડે દર્શાવી શકાય.

દરેક કિસ્સામાં, આપણે આપેલ a નો ધન પૂર્ણાંક b (આપણા આ ઉદાહરણમાં b ની કિંમત ક્રમિક રીતે 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 છે.) વડે ભાગાકાર થાય છે અને શેષ r વધે છે. (આપણા આ ઉદાહરણમાં r ની કિંમત ક્રમિક રીતે 0, 5, 4, 3, 2 અને 1 છે.) અને શેષ b કરતાં ઓછી છે. જ્યારે આપણે આવાં સમીકરણો લખીએ છીએ ત્યારે આપણે પ્રમેય 1.1માં આપેલ યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીએ છીએ.

ફરી આપણે આપણા કોયડા તરફ જઈએ. તમને કોઈ ખ્યાલ આવે છે કે, આપણે તેને કેવી રીતે ઉકેલી શકીએ? હા, આ બધી જ સ્થિતિનું સમાધાન કરે તેવા 7 ના ગુણિત શોધવા જોઈએ. પ્રયત્ન અને ભૂલ પરથી, (લ.સા.અ.ની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરતાં) તમને તેની પાસે 119 ઈંડાં હતાં તેવી માહિતી મળી શકે.

યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો પરિચય મેળવવા માટે, નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના યુગ્મ વિચારીએ.

17, 6;   5, 12;   20, 4

* આ એ. રામપાલ અને અન્યો દ્વારા લિખિત ‘Numeracy Counts!’ માં આપેલ કોયડાનું સુધારેલ સ્વરૂપ છે.

આ કોયડામાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આપણે દરેક યુગ્મ વચ્ચે નીચે પ્રમાણે સંબંધ દર્શાવી શકીએ :

$17 = 6 \times 2 + 5$ (17 માં 6 બે વખત છે અને 5 શેષ વધે છે.)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (12 એ 5 થી મોટા હોવાથી આ સંબંધ આમ થશે.)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (અહીં 4 ના પાંચ ગણા 20 થાય અને કંઈ જ શેષ ન વધે.)

ધન પૂર્ણાંકો a અને b ના પ્રત્યેક યુગ્મ માટે, આપણને નીચેના સંબંધને સંતોષે તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r મળે છે.

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$

આપણે નોંધીએ કે, q અથવા r શૂન્ય પણ હોઈ શકે. (પરંતુ બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

હવે નીચે દર્શાવેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ના યુગ્મ માટે તમે પૂર્ણાંકો q અને r શોધવા પ્રયત્ન કરી શકશો?

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

તમે નોંધ્યું કે q અને r અનન્ય છે? તે $0 \le r < b$ માટે $a = bq + r$ નું સમાધાન કરતા હોય તેવા પૂર્ણાંકોની એક માત્ર જોડ મળે.

તમને એવી અનુભૂતિ પણ થઈ હશે કે આપણે ભાગાકારની જે લાંબી પ્રક્રિયા વર્ષોથી કરતા આવ્યા છીએ તેનું આ તો માત્ર નવા સ્વરૂપે પુનઃવિધાન છે અને તેમાં આ પૂર્ણાંકો q અને r ને અનુક્રમે *ભાગફળ* અને *શેષ* કહે છે.

આપણે આ પરિણામને ઔપચારિક રીતે નીચેના સ્વરૂપમાં સામાન્ય વિધાન સ્વરૂપે મૂકી શકીએ :

પ્રમેય : 1.1 (યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય) : ***આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત અનન્ય અનૃણ પૂર્ણાંકો q અને r એવા મળે કે જેથી $a = bq + r$, $0 \le r < b$.***

નોંધ : q અનૃણ છે. પરંતુ q તથા r બંને સાથે શૂન્ય નથી. આ પરિણામ લાંબા સમયથી પ્રચલિત છે. પરંતુ તેની પ્રથમ વખત નોંધ ***યુક્લિડ (Euclid)ની Elements Book-VII*** માં લેવાઈ હતી. ***યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ (Euclid's division algorithm)*** **આ પૂર્વ-પ્રમેય પર આધારિત છે.**

An ***algorithm*** is a series of well defined steps which gives a procedure for solving a type of problem.

The word *algorithm* comes from the name of the 9th century Persian mathematician ***al-Khwarizmi***. In fact, even the word 'algebra' is derived from a book, he wrote, called ***Hisab al-jabr w'al-muqabala.***

A ***lemma*** is a proven statement used for proving another statement.

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (C.E. 780 - C.E.850)

યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ એ આપેલા બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટેની પ્રવિધિ છે. જેના વડે ધન પૂર્ણાંકો a અને b બંને વિભાજ્ય હોય તેવો મોટામાં મોટો ધન પૂર્ણાંક d એ a અને b નો ગુ.સા.અ. છે.

ચાલો આપણે પ્રથમ એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય છે તે જોઈએ. ધારો કે આપણે બે પૂર્ણાંકો 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. શોધવો છે તો આપણે મોટા પૂર્ણાંક 455 થી શરૂઆત કરીશું. ત્યાર બાદ તેની ઉપર આપણે યુક્લિડનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીશું.

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

હવે આપણે ભાજક 42 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને 35 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ તો,

$$42 = 35 \times 1 + 7 \text{ મળે.}$$

હવે ભાજક 35 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને 7 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$35 = 7 \times 5 + 0 \text{ મળે.}$$

આપણે નોંધીએ કે, શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે આપણે પ્રક્રિયા આગળ નથી કરી શકતા. આ તબક્કે આપણે એવું નિર્ણયાત્મક રીતે કહીએ છીએ કે 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. 7 થાય. તમે 455 અને 42 ના અવયવોની યાદી બનાવીને સરળતાથી આ ચકાસી શકો છો. આ પદ્ધતિ કેમ નિર્ણયાત્મક છે? આનો જવાબ નીચેના પરિણામ ઉપરથી મળશે.

હવે, આપણે **યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ** સ્પષ્ટપણે દર્શાવી શકીએ.

$c > d$ હોય તેવા બે ધન પૂર્ણાંકો c અને d નો ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે નીચેનાં સોપાન છે :

સોપાન 1 : યુક્લિડના ભાગાકાર પૂર્વ-પ્રમેયનો c અને d ઉપર ઉપયોગ કરતાં આપણને $c = dq + r$, $0 \le r < d$ થાય તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r મળે.

સોપાન 2 : જો $r = 0$, તો d એ c અને d નો ગુ.સા.અ. થાય.
જો $r \neq 0$, તો d અને r ને ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય લગાડીએ.

સોપાન 3 : આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી શેષ 0 ન થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખો. આ તબક્કે જ્યારે શેષ શૂન્ય બને ત્યારે ભાજક એ માંગેલ ગુ.સા.અ. થાય.

આ પ્રવિધિમાં પરિણામ મળે છે કારણ કે ગુ.સા.અ. (c, d) = ગુ.સા.અ. (d, r).

ગુ.સા.અ. (c, d) એ c અને d નો ગુ.સા.અ. દર્શાવે છે. વગેરે.

ઉદાહરણ 1 : યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી 4052 અને 12576 નો ગુ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 : 12576 > 4052 હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 12576 અને 4052 ઉપર કરતાં,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

સોપાન 2 : શેષ 420 શૂન્યેતર હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 4052 અને 420 ઉપર કરતાં,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

સોપાન 3 : ભાજક 420ને નવા ભાજ્ય તરીકે અને શેષ 272 ને નવા ભાજક તરીકે લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

હવે આપણે નવો ભાજ્ય 272 અને નવો ભાજક 148 લઈએ અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ, તો

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

હવે નવો ભાજ્ય 148 અને નવો ભાજક શેષ 124 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

નવો ભાજ્ય 124 અને નવો ભાજક 24 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

નવો ભાજ્ય 24 અને નવો ભાજક 4 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

શેષ હવે શૂન્ય બને છે. આથી આપણી પ્રક્રિયા અટકે છે. આ તબક્કે ભાજક 4 હોવાથી, 12576 અને 4052નો ગુ.સા.અ. 4 થાય.

આપણે નોંધીએ કે 4 = ગુ.સા.અ. (24, 4)
= ગુ.સા.અ. (124, 24)
= ગુ.સા.અ. (148, 124)
= ગુ.સા.અ. (272, 148)
= ગુ.સા.અ. (420, 272)
= ગુ.સા.અ. (4052, 420)
= ગુ.સા.અ. (12576, 4052).

યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ માત્ર ખૂબ જ મોટી સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે જ ઉપયોગી છે, એટલું જ નહિ પરંતુ તે કમ્પ્યૂટરના પ્રોગ્રામ તૈયાર કરવા માટેના અલગોરિધમ (પ્રવિધિ)ના ખૂબ જ શરૂઆતનાં ઉદાહરણોમાંની એક છે.

આપણે નોંધીએ કે જ્યાં સુધી શેષ 0 ન બને ત્યાં સુધી દરેક તબક્કે ભાજક એ નવો ભાજ્ય બને છે અને શેષ એ નવો ભાજક બને છે. શેષ શૂન્ય બને તે તબક્કે છેલ્લો ભાજક એ આપેલ સંખ્યાઓનો ગુ.સા.અ. છે.

નોંધ :

1. યુક્લિડના ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય અને ભાગપ્રવિધિ ખૂબ જ નજીકથી એકબીજા સાથે જોડાયેલા હોવાથી લોકો અવારનવાર ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયને પણ ભાગાકાર પ્રવિધિ કહેતા હતા.
2. વળી, યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનું વિધાન માત્ર ધન પૂર્ણાંકો માટે જ કર્યું છે, છતાં તેને $b \neq 0$ હોય તેવા બધા જ શૂન્યેતર પૂર્ણાંકો સુધી વિસ્તારી શકાય, જોકે ભાગ પ્રવિધિના આ પાસાની ચર્ચા આપણે અહીં નહિ કરીએ.

સંખ્યાઓના ગુણધર્મો મેળવવા માટે યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિના કેટલાક ઉપયોગો છે. આપણે આ ઉપયોગોના કેટલાંક ઉદાહરણો અહીં આપીએ.

ઉદાહરણ 2 : દર્શાવો કે દરેક યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક q માટે, $2q$ સ્વરૂપમાં હોય અને દરેક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક કોઈક પૂર્ણાંક q માટે, $2q + 1$, સ્વરૂપમાં હોય.

ઉકેલ : ધારો કે a કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે અને $b = 2$. તો,

યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ અનુસાર કોઈ પૂર્ણાંક $q \geq 0$ માટે $a = 2q + r$ અને $r = 0$ અથવા $r = 1$, કારણ કે $0 \leq r < 2$.

માટે, **$a = 2q$ અથવા $2q + 1$.**

જો $a = 2q$, તો a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે અને a ને યુગ્મ પૂર્ણાંક કહે છે.

જો $a = 2q + 1$ તો a એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી તથા a ને 2 વડે ભાગતાં 1 શેષ વધે છે. આવા પૂર્ણાંક a ને અયુગ્મ પૂર્ણાંક કહે છે.

જો a એ $2q$ ના સ્વરૂપમાં હોય તો a યુગ્મ પૂર્ણાંક છે. વળી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક યુગ્મ અથવા અયુગ્મ હોઈ શકે. માટે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ $2q + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.

ઉદાહરણ 3 : દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક q માટે $4q + 1$ અથવા $4q + 3$, સ્વરૂપમાં હોય.

ઉકેલ : ચાલો આપણે અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક a લઈએ. આપણે પૂર્ણાંક a અને $b = 4$ માટે ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીએ.

$0 \leq r < 4$, હોવાથી સંભવિત શેષ 0, 1, 2 અને 3 થાય.

આથી, q ને ભાગફળ લેતાં, a એ $4q$, અથવા $4q + 1$, અથવા $4q + 2$, અથવા $4q + 3$.

જો કે a અયુગ્મ હોવાથી a એ $4q$ અથવા $4q + 2$ ન હોઈ શકે. (કારણ કે બંને 2 વડે વિભાજ્ય છે.)

માટે, કોઈ પણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક એ $4q + 1$ અથવા $4q + 3$ સ્વરૂપનો હોય.

ઉદાહરણ 4 : એક મીઠાઈવાળા પાસે 420 નંગ કાજુ બરફી અને 130 નંગ બદામ બરફી છે. તે એવી રીતે આ બરફીઓને થપ્પી સ્વરૂપે ગોઠવવા માંગે છે કે દરેક થપ્પીમાં બરફીની સંખ્યા સમાન હોય અને તે તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ હેતુ માટે દરેક થપ્પીમાં કેટલી સંખ્યામાં બરફી રાખવી જોઈએ?

ઉકેલ : આ પ્રશ્નનો ઉકેલ પ્રયત્ન અને ભૂલ દ્વારા મેળવી શકાય. પરંતુ આને ગાણિતિક રીતે કરવા માટે આપણે ગુ.સા.અ. (420, 130) શોધવો જોઈએ. આ ગુ.સા.અ. દરેક થપ્પીમાં રહેલ બરફીની મહત્તમ સંખ્યા થાય અને થપ્પીઓની સંખ્યા પણ લઘુતમ થાય. આથી તાસકમાં વપરાયેલ જગ્યા પણ લઘુતમ થાય.

હવે તેનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટે યુક્લિડ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

આથી 420 અને 130 નો ગુ.સા.અ. 10 થાય.

માટે તે મીઠાઈવાળા દરેક થપ્પીમાં કોઈ પણ પ્રકારની બરફીની સંખ્યા 10 રાખી શકે.

નોંધ : દરેક થપ્પીમાં બરફીની સમાન સંખ્યા d હોય, તો 420 તથા 130 બંને d વડે વિભાજ્ય છે. થપ્પીઓની સંખ્યા $\frac{420}{d}$ તથા $\frac{130}{d}$ ન્યૂનતમ હોય તો, તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ માટે d મહત્તમ હોય તે આવશ્યક છે. આથી $d =$ ગુ.સા.અ. (420, 130).

સ્વાધ્યાય 1.1

1. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો :
   (i) 135 અને 225 (ii) 196 અને 38220 (iii) 867 અને 255
2. દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા, કોઈક પૂર્ણાંક q માટે $6q + 1$, અથવા $6q + 3$, અથવા $6q + 5$ પ્રકારની હોઈ શકે.
3. એક લશ્કરનું 616 સભ્યોનું જૂથ લશ્કરના બેન્ડના 32 સભ્યોની પાછળ કૂચ કરી રહ્યું છે. બંને જૂથ સમાન સંખ્યાના સ્તંભમાં કૂચ કરી રહ્યાં છે. તે જે સ્તંભમાં કૂચ કરી રહ્યા છે તેવા કોઈ પણ સ્તંભમાં મહત્તમ કેટલા સભ્યો હશે?
4. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈક પૂર્ણાંક m માટે $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.
   [**સૂચન :** ધારો કે x કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે તો તે $3q$, $3q + 1$ અથવા $3q + 2$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે દરેકનો વર્ગ કરો અને દર્શાવો કે ફરીથી તેને $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.]
5. યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય વાપરીને દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો ઘન $9m$, $9m + 1$ અથવા $9m + 8$ સ્વરૂપનો હોય.

1.3 અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે જોયું છે કે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર રૂપે લખી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, અને આ પ્રમાણે આગળ વધી શકાય.

હવે, આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું બીજું પાસું જોવા પ્રયત્ન કરીએ. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના

ગુણાકારથી મેળવી શકાય? ચાલો આપણે જોઈએ. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ સમૂહ લો. ઉદાહરણ તરીકે, 2, 3, 7, 11 અને 23. આપણે કેટલીક અથવા બધી જ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરીએ અને આપણે ઇચ્છીએ તેટલી વખત તેનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ આપીએ તો આપણે બહોળી સંખ્યામાં ધન પૂર્ણાંકો મેળવી શકીએ. (ખરેખર તો, અનંત સંખ્યાઓ) ચાલો આપણે કેટલીક યાદી બનાવીએ.

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

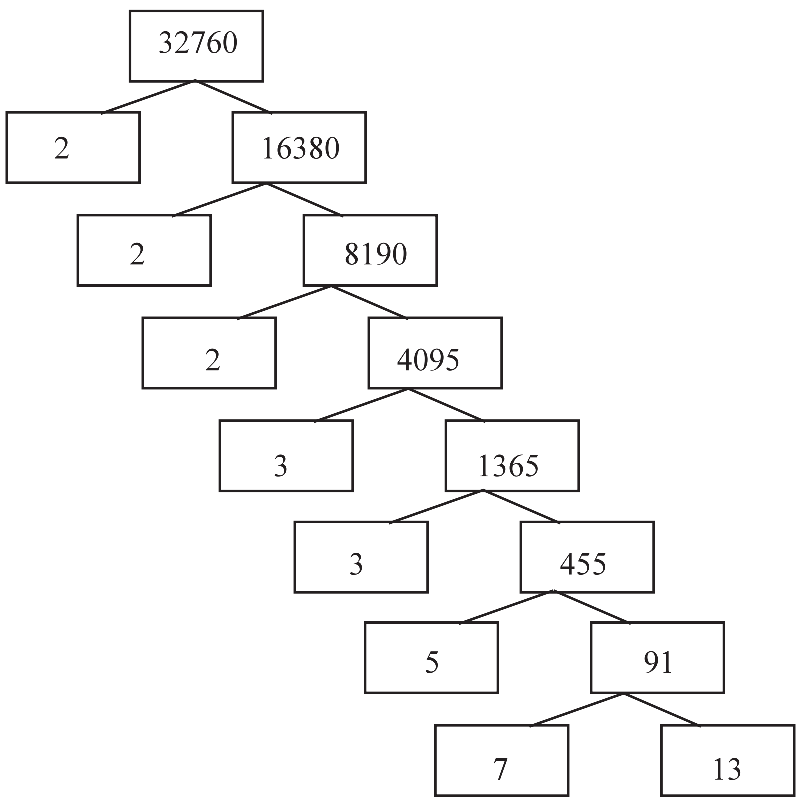
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ અને આ પ્રમાણે...

હવે, ધારો કે તમારા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સમૂહમાં બધી જ શક્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ લઈએ તો આ સમૂહનું કદ કેટલું થાય તે માટે તમારું શું અનુમાન છે? શું તેમાં માત્ર નિશ્ચિત સંખ્યામાં જ પૂર્ણાંકો હશે ? અથવા અનંત સંખ્યામાં પૂર્ણાંકો હશે? ખરેખર તો અનંત સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આથી, જો આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને આ રીતે સાંકળીએ તો, બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અને બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના તમામ શક્ય ગુણાકારો લઈને આપણે અનંત સંખ્યાઓનો સમૂહ મેળવી શકીએ. પ્રશ્ન એ છે કે આપણે બધી જ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ આ રીતે મેળવી શકીએ? તમે શું વિચારો છો? તમે વિચારો છો કે જે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતનો ગુણાકાર ન હોય તેવી કોઈ વિભાજ્ય સંખ્યા કદાચ હશે? આપણે ઉત્તર આપીએ તે પહેલાં, ચાલો આપણે ધન પૂર્ણાંકોનું અવયવીકરણ કરીએ. આપણે અગાઉ જે કર્યું છે તેનાથી ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

આપણે તમને પરિચિત એવા અવયવ વૃક્ષનો ઉપયોગ કરીએ. ચાલો, આપણે કોઈ મોટી સંખ્યા લઈએ જેમકે 32,760 અને આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે અવયવ પાડીએ :



આથી આપણને 32760 એ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ જેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર રૂપે મળે છે.

આથી $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર રૂપે દર્શાવી શકાય. ચાલો આપણે બીજી સંખ્યા 123456789 ચકાસીએ. તેને $3^2 \times 3803 \times 3607$ તરીકે લખી શકાય. ખરેખર તો તમારે પરીક્ષણ કરવું જોઈએ કે 3803 અને 3607 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે! (તમારી જાતે બીજી કેટલીક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે પરીક્ષણ કરો.) આ તથ્ય આપણને એવી ધારણા તરફ દોરી જાય છે કે દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય. ખરેખર તો આ વિધાન સત્ય છે. પૂર્ણાંકોના અભ્યાસ માટે તેની પાયાની નિર્ણાયક ભૂમિકા હોવાથી તેને ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** કહે છે.

ચાલો આપણે હવે આ પ્રમેયને ઔપચારિક રીતે દર્શાવીએ.

પ્રમેય 1.2 (અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય) : ***દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને, તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય છે.***

An equivalent version of Theorem 1.2 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in ***Euclid's Elements***, before it came to be known as the ***Fundamental Theorem of Arithmetic***. However, the first correct proof was given by ***Carl Friedrich Gauss*** in his ***Disquisitiones Arithmeticae***. ***Carl Friedrich Gauss*** is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with ***Archimedes*** and ***Newton***. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.

Carl Friedrich Gauss
(C.E.1777 – C.E.1855)

અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય દર્શાવે છે કે, દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાનું અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર સ્વરૂપે અવયવીકરણ કરી શકાય. હકીકતમાં તે કંઈક વધુ દર્શાવે છે. તે દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાનું તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે નિરૂપણ કરી શકાય.

આ પરથી આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય અને તેમાં કઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા કયા ક્રમે મળશે તે માટે આપણે ચોક્કસ ન હોઈ શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગુણાકારમાં દર્શાવેલ સંખ્યા $2 \times 3 \times 5 \times 7$ અને $3 \times 5 \times 7 \times 2$ તરીકે અથવા બીજા કોઈ પણ શક્ય ક્રમમાં દર્શાવેલ આ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને લખીએ તો તે બધા ગુણાકાર સમાન છે. આ હકીકતને નીચેના સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય.

1 થી મોટી કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ તેના ક્રમને અવગણીએ તો અનન્ય હોય છે.

વ્યાપક રીતે, આપેલ વિભાજ્ય સંખ્યા x ને આપણે $x = p_1 p_2 \ldots p_n$ તરીકે લખી શકીએ, જ્યાં $p_1, p_2, \ldots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે અને ચડતા ક્રમમાં લખેલી છે, એટલે કે $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$. જો આપણે સમાન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ગુણીએ, તો આપણને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ઘાત મળે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

એક વખત આપણે નક્કી કરીએ કે, અવિભાજ્ય અવયવો ચડતા ક્રમમાં હશે તો આપણું અવયવીકરણ અનન્ય હશે.

ગણિતમાં અને બીજા ક્ષેત્રમાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનેક ઉપયોગો છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : કોઈક ધન પૂર્ણાંક n માટે 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હશે કે કેમ તે નિર્ણય કરો.

ઉકેલ : જો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે સંખ્યા 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય. આથી 4^n ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 5 હોવો જોઈએ. આ શક્ય નથી, કારણ કે $4^n = (2)^{2n}$; આથી 4^n ના અવયવીકરણમાં એક જ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક 2 મળે. આથી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયની અનન્યતા શરત અનુસાર નક્કી થાય છે કે 4^n ના અવયવીકરણમાં 2 સિવાય બીજી કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. માટે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n એવી ન મળે કે જેના માટે 4^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય હોય.

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો સ્પષ્ટ રીતે ઉલ્લેખ કર્યા વગર બે ધન પૂર્ણાંકોના ***ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. (લઘુતમ સામાન્ય અવયવ, LCM, Least Common Multiple)*** શોધતાં શીખી ગયાં છો. આ પદ્ધતિ **અવિભાજ્ય અવયવીકરણ** પદ્ધતિ તરીકે પણ ઓળખાય છે. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિને ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિથી 6 અને 20 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $6 = 2^1 \times 3^1$ અને $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ હોવાથી,

અગાઉનાં ધોરણોમાં મેળવ્યું છે તેમ તમે ગુ.સા.અ. (6, 20) = 2 અને લ.સા.અ. (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ મેળવી શકો.

જુઓ કે, ગુ.સા.અ. (6, 20) = 2^1 = **આપેલી સંખ્યાઓમાં રહેલા સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવના નાનામા નાના ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

લ.સા.અ. (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **આપેલી સંખ્યામાં રહેલા તમામ અવિભાજ્ય અવયવોના મહત્તમ ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે જોયું હશે કે ગુ.સા.અ. (6, 20) × લ.સા.અ. (6, 20) = 6×20.

ખરેખર તો આપણે ચકાસી શકીએ કે કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો, a અને b માટે

ગુ.સા.અ. (a, b) × લ.સા.અ. $(a, b) = a \times b$ થાય.

જો બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. આપેલ હોય તો આપણે આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી તેમનો લ.સા.અ. શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 7 : 96 અને 404 નો ગુ.સા.અ. અવિભાજ્ય અવયવની રીતે મેળવો અને તે પરથી તેનો લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : 96 અને 404 નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $96 = 2^5 \times 3$, $404 = 2^2 \times 101$ મળશે.

આથી આ બંને પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. = $2^2 = 4$.

$$\text{વળી, લ.સા.અ. } (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{ગુ.સા.અ. } (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ઉદાહરણ 8 : અવિભાજ્ય અવયવોની રીતથી 6, 72 અને 120 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે,

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

અહીં, સામાન્ય અવયવો અનુક્રમે 2 અને 3 ની નાનામાં નાની ઘાત 2^1 અને 3^1 છે.

આથી ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

આપેલી ત્રણેય સંખ્યાઓમાં 2^3, 3^2 અને 5^1 એ અવિભાજ્ય અવયવો 2, 3 અને 5 ની મોટામાં મોટી ઘાત છે.

આથી, લ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

નોંધ : જુઓ કે, $6 \times 72 \times 120 \neq$ ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) $\times$ લ.સા.અ. (6, 72, 120).

આથી ત્રણ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર તેમના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.ના ગુણાકારને સમાન ન પણ હોય.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેની દરેક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોની જોડીના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો અને

ગુ.સા.અ. × લ.સા.અ. = બંને પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર થાય છે તેમ ચકાસો.

(i) 26 અને 91 (ii) 510 અને 92 (iii) 336 અને 54

3. નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના અવિભાજ્ય અવયવની રીતે ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો :

(i) 12, 15 અને 21 (ii) 17, 23 અને 29 (iii) 8, 9 અને 25

4. જો ગુ.સા.અ. (306, 657) = 9 આપેલ હોય, તો લ.સા.અ. (306, 657) શોધો.

5. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય થાય કે નહિ તે ચકાસો.

6. સમજાવો કે $7 \times 11 \times 13 + 13$ અને $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ એ શા માટે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે ?

7. એક રમતના મેદાનમાં વર્તુળાકાર માર્ગ છે. સોનિયાને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 18 મિનિટ લાગે છે, જ્યારે રવિને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 12 મિનિટ લાગે છે. ધારો કે બંને એક જ સમયે, એક જ બિંદુએથી, એક જ દિશામાં પરિભ્રમણ કરવાનું પ્રારંભ કરે છે, તો કેટલી મિનિટ બાદ બંને ફરી પ્રારંભબિંદુ પર ભેગા થાય ?

1.4 અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન

ધોરણ IX માં અસંમેય સંખ્યાઓ અને તેના ઘણા બધા ગુણધર્મોનો પરિચય તમને કરાવવામાં આવ્યો હતો. તમે તેના અસ્તિત્વનો અને કેવી રીતે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ સાથે મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બનાવે છે તેનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તમે અસંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર દર્શાવતાં પણ શીખ્યા છો. જો કે આપણે તે સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે તેમ સાબિત નહોતું કર્યું. આ વિભાગમાં, આપણે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ અને વ્યાપક રીતે અવિભાજ્ય p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરીશું. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય અને અન્ય પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ પ્રાપ્ત કરીશું.

યાદ કરો કે જે સંખ્યાને પૂર્ણાંક p તથા શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી ન શકાય તે સંખ્યા 's' ને અસંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. જેનાથી આપણે પરિચિત છીએ, તેવા $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110... જેવી અસંમેય સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો મળે.

આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેમ સાબિત કરીએ તે પહેલાં આપણને આગળ દર્શાવેલ પ્રમેયની જરૂર પડશે. તેની સાબિતી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પર આધારિત છે.

પ્રમેય 1.3 : *ધારો કે p એ એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક a માટે, a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય હોય.*

***સાબિતી :** ધારો કે a નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$a = p_1p_2 \dots p_n$, જ્યાં $p_1, p_2 \dots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આવશ્યક નથી કે તે $p_1, p_2, \dots, p_n$ ભિન્ન સંખ્યાઓ જ હોય.

માટે, $a^2 = (p_1p_2 \dots p_n)(p_1p_2 \dots p_n) = p_1^2\, p_2^2 \dots p_n^2$

હવે આપણને આપેલ છે કે a^2 એ p વડે વિભાજ્ય છે. માટે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે p એ a^2 નો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનન્યતા ભાગ પરથી કહી શકાય કે a^2 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર $p_1, p_2, \dots, p_n$ છે. આથી p એ $p_1, p_2, \dots, p_n$ પૈકીનો એક હોય. હવે $a = p_1\, p_2 \dots p_n$, હોવાથી p એ a નો અવયવ પણ છે.

હવે આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છીએ.

આ સાબિતી 'અનિષ્ટાપત્તિ'ની પ્રયુક્તિ પર આધારિત છે. (આ પ્રયુક્તિની કેટલીક ચર્ચા પરિશિષ્ટ 1 માં વિગતે કરેલ છે.)

પ્રમેય 1.4 : *$\sqrt{2}$ એ અસંમેય છે.*

સાબિતી : આથી ઊલટું, ધારો કે $\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી આપણે $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ થાય તેવા પૂર્ણાંકો r અને s $(s \neq 0)$ મેળવી શકીએ.

જો r અને s ને 1 સિવાય સામાન્ય અવયવ હોય, તો તે તમામ સામાન્ય અવયવ વડે r તથા s ને ભાગતાં $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ મળે.

આપણે a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય લઈ શકીએ. આથી, $b\sqrt{2} = a$.

આપણે બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરીએ તો, $2b^2 = a^2$ મળે. માટે a^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, પ્રમેય 1.3 અનુસાર, a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 2c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકતાં આપણને $2b^2 = 4c^2$ મળે. આથી, $b^2 = 2c^2$ થાય.

આનો અર્થ એ થાય કે b^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી, b પણ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(ફરીથી પ્રમેય 1.3, $p = 2$ સાથે ઉપયોગમાં લેતાં)

માટે, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 2 છે.

આથી, a અને b ને 1 સિવાય કોઈ જ સામાન્ય અવયવ નથી તે ધારણાનો વિરોધાભાસ મળે.

$\sqrt{2}$ સંમેય છે તે ધારણા અસત્ય હોવાથી આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો.

આથી, કહી શકાય કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

*પરીક્ષાના હેતુથી આપેલ નથી.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું શક્ય હોય તો, ધારો કે $\sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે શૂન્યેતર પૂર્ણાંક a અને b શોધી શકીએ કે જેથી $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય.

ધારો કે a અને b ને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ છે. આથી આપણે તેને સામાન્ય અવયવ વડે ભાગી શકીએ અને વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય માની શકીએ કે, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

આથી, $b\sqrt{3} = a$.

બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $3b^2 = a^2$ મળે.

માટે a^2 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આથી પ્રમેય 1.3 અનુસાર a પણ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 3c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકવાથી $3b^2 = 9c^2$. આથી, આપણને $b^2 = 3c^2$ મળે.

આનો અર્થ એ થયો કે b^2 ને 3 વડે ભાગી શકાય અને તેથી b ને પણ 3 વડે ભાગી શકાય.

(p = 3 માટે પ્રમેય 1.3નો ઉપયોગ કરતાં)

આથી, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 3 છે.

માટે, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય હોવાના વિધાનનો વિરોધાભાસ ઊભો થયો.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો કારણકે આપણે $\sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય છે.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ધોરણ IX માં આપણે દર્શાવ્યું હતું કે,

- ***સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કે તફાવત અસંમેય હોય છે, અને***
- ***શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકાર અને ભાગફળ અસંમેય હોય છે.***

આપણે કેટલાક ખાસ વિકલ્પોમાં આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ 10 : દર્શાવો કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું ધારો કે $5 - \sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય ($b \neq 0$).

માટે $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

આ સમીકરણની પુનઃગોઠવણી કરતાં આપણને $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$ મળે. a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી $5 - \frac{a}{b}$ સંમેય મળે અને આથી $\sqrt{3}$ પણ સંમેય થાય.

આથી, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઉત્પન્ન થાય.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો, કારણ કે આપણે $5 - \sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય હતી.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉદાહરણ 11 : દર્શાવો કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું ધારો કે $3\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$. પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ મળે.

3, a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી, $\frac{a}{3b}$ સંમેય છે અને આથી $\sqrt{2}$ પણ સંમેય છે. પરંતુ $\sqrt{2}$ અસંમેય છે. આથી વિરોધાભાસ ઊભો થાય.

આથી આપણે કહી શકીએ કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. સાબિત કરો કે, $\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
2. સાબિત કરો કે, $3 + 2\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
3. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યા અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના દશાંશ નિરૂપણનું પુનરાવર્તન

ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો કે, સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. આ વિભાગમાં આપણે સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ લઈએ અને શોધીએ કે તેનું દશાંશ નિરૂપણ ક્યારે સાન્ત અને ક્યારે અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈ આપણે તે નક્કી કરીએ.

ચાલો આપણે નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ :

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

હવે,

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

કોઈ પણ અપેક્ષા રાખી શકે કે આ તમામને જેનો છેદ 10 નો ઘાત હોય તેવી સંમેય સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકીએ. ચાલો આપણે અંશ અને છેદમાં રહેલા સામાન્ય અવયવોને દૂર કરીએ અને જોઈએ કે આપણને શું પ્રાપ્ત થાય છે :

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

કોઈ તરાહ દેખાય છે? આપણે સાન્ત દશાંશ સ્વરૂપમાં આપેલી વાસ્તવિક સંખ્યાને જ્યાં p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને q શૂન્યેતર હોય તેવા સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપ $\frac{p}{q}$ માં રૂપાંતરિત કરી અને છેદ q ના અવિભાજ્ય અવયવોની ઘાતમાં 2 ની અથવા 5 ની અથવા તેમના બંનેની ઘાત છે. આપણે 10 ના ઘાતના અવયવો માત્ર 2 તથા 5 ના ઘાત હોય તેવી જ અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

જો કે આપણે અમુક જ ઉદાહરણો પર કાર્ય કર્યું, છતાં આપણે જોઇ શકીએ કે, જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય એવી કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને છેદમાં 10 ના ઘાતવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તેવા સ્વરૂપમાં પરિણમતી સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકાય. વળી 10 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર 2 અને 5 છે. આથી અંશ અને છેદ વચ્ચેના સામાન્ય અવયવો દૂર કરતાં આ વાસ્તવિક સંખ્યા જ્યાં q નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપમાં હોય અને n, m એ અનૃણ પૂર્ણાંક હોય એવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મળે.

ચાલો આપણે આપણું પરિણામ ઔપચારિક રીતે લખીએ :

પ્રમેય 1.5 : જો x એ સાન્ત દશાંશ નિરૂપણવાળી સંમેય સંખ્યા હોય, તો x ને જ્યાં p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને q નું અવિભાજ્યમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપમાં હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. n, m એ અનૃણ પૂર્ણાંકો છે. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$. તે અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. x પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)

જો પ્રમેય 1.5ના પ્રતીપનો વિચાર કરીએ તો શું થશે તે જાણીને તમને આશ્ચર્ય થશે. જો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યા પસંદ કરીએ અને અનૃણ પૂર્ણાંકો m તથા n માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m હોય, તો $\frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત થશે? *(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ તથા $\frac{p}{q}$ પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)*

ચાલો આપણે આ સત્ય હોવાના દેખીતાં કારણો જોઈએ. તમે ચોક્કસ સહમત થશો કે જ્યાં b એ 10 નો ઘાતાંક હોય તેવી $\frac{a}{b}$ સ્વરૂપની સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે. જ્યાં q એ 2^n5^m સ્વરૂપે હોય, તેવા સ્વરૂપની સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ને જ્યાં b એ 10 ની ઘાત હોય તેવા સમકક્ષ સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરવી એ અર્થસભર થશે.

ચાલો આપણે ઉપરનાં ઉદાહરણો તરફ જઈએ અને ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે જો q એ $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય, તો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાને જ્યાં b એ 10 ની ઘાત હોય તેવી સમાન સંખ્યા $\frac{a}{b}$ માં કેવી રીતે રૂપાંતરિત કરી શકીએ. આથી આવી સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે. હવે આ પરિણામ આપણે ઔપચારિક રીતે લખીએ.

પ્રમેય 1.6 : જો $x = \frac{p}{q}$ માં q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપે હોય અને n, m એ અનૃણ પૂર્ણાંકો હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$)

હવે આપણે જેનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય એવી સંમેય સંખ્યાઓ તરફ જવા તૈયાર છીએ. ફરીથી આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ અને જોઈએ આગળ શું થાય છે.

આપણે ધોરણ IXના પુસ્તકમાંથી પ્રકરણ 1નું $\frac{1}{7}$ ના દશાંશ નિરૂપણ વિષયક ઉદાહરણ 5 જોઈએ.

```
      0.1428571
   7 ) 10
        7
       ---
       ③0
       2 8
       ---
        ②0
        1 4
        ---
         ⑥0
         5 6
         ---
          ④0
          3 5
          ---
           ⑤0
           4 9
           ---
            ①0
               7
            ---
            ③0
```

અહીં શેષ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1... અને ભાજક 7 છે.

આપણે નોંધીએ કે અહીં છેદ 7 સ્પષ્ટપણે $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપમાં નથી. આથી પ્રમેય 1.5 અને 1.6 પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{7}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત ન હોઈ શકે. 0 એ શેષ તરીકે નથી આવતો (કારણ?) અને શેષ અમુક તબક્કા બાદ પુનરાવર્તન પામે છે. આથી, આપણને અંકસમૂહ 142857 નું પુનરાવર્તિત જૂથ $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળના ભાગ રૂપે મળે છે.

$\frac{1}{7}$ ના કિસ્સામાં આપણે જે જોયું તે પ્રમેય 1.5 અને 1.6 માં આવરી લેવાઈ ન હોય તેવી કોઈપણ સંમેય સંખ્યા માટે સત્ય છે. આવી સંખ્યાઓ માટે આપણી પાસે :

પ્રમેય 1.7 : જો q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે $2^n 5^m$ સ્વરૂપે ન હોય, તો $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત છે.

ઉપરની ચર્ચાને અંતે આપણે એવા તારણ પર આવીએ કે દરેક સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર, નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓનું નિરૂપણ સાન્ત છે કે અનંત અને આવૃત્ત છે તે જણાવો :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. પ્રશ્ન 1 માં જે સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય તેનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવો.

3. નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવેલ છે. દરેક માટે જણાવો કે તે સંમેય છે કે નહિ. અને જો સંમેય હોય, તો તેના $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં q ના અવિભાજ્ય અવયવો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120 1200 12000 120000... (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. **યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય**

આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને bને સંગત $a = bq + r$, $0 \le r < b$ નું સમાધાન કરે તેવી અનન્ય પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r નું અસ્તિત્વ છે. (બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

2. **યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ :** યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેય અનુસાર $a > b$ હોય તેવા કોઈપણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b નો ગુ.સા.અ. નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

પગલું 1 : $a = bq + r$, $0 \le r < b$ થાય તેવા q અને r મેળવવા ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

પગલું 2 : જો $r = 0$ તો ગુ.સા.અ. b છે. જો $r \neq 0$ તો ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેયનો b અને r માટે ઉપયોગ કરો.

પગલું 3 : જ્યાં સુધી શેષ 0 ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો. શેષ 0 થાય તે તબક્કે ભાજક એ ગુ.સા.અ. (a, b) થાય. વળી ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, r)

3. ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય : દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.***

4. જો p અવિભાજ્ય હોય અને a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય છે.

5. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરવું.

6. જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે તેવી સંમેય સંખ્યા a ને આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ. p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય છે અને અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપમાં હોય.

(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ અને તેનું અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. $\frac{p}{q}$ પૂર્ણાંક જ છે.)

7. જેમાં અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપનું હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય.

8. જેમાં અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપનું ન હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય.

વાચકને નોંધ

તમે જોયું છે કે,

ધન પૂર્ણાંકો p, q, r માટે ગુ.સા.અ. $(p, q, r) \times$ લ.સા.અ. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, (પ્રશ્ન 8)

આમ છતાં, ત્રણ સંખ્યાઓ p, q, r માટે નીચેનાં પરિણામો સત્ય છે :

$$\text{લ.સા.અ.}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{ગુ.સા.અ.}(p, q, r)}{\text{ગુ.સા.અ.}(p, q) \times \text{ગુ.સા.અ.}(q, r) \times \text{ગુ.સા.અ.}(p, r)}$$

$$\text{ગુ.સા.અ.}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{લ.સા.અ.}(p, q, r)}{\text{લ.સા.અ.}(p, q) \times \text{લ.સા.અ.}(q, r) \times \text{લ.સા.અ.}(p, r)}$$

જાણકારી માટે

C.E. is an abbreviation for Common Era
B.C.E. is an abbreviation for Before Common Era
C.E. and B.C.E. are used in exactly the same way as AD and BC.

બહુપદીઓ 2

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે એક ચલ બહુપદી અને તેમની ઘાતનો અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જો $p(x)$ ચલ x માં બહુપદી હોય તો, ***$p(x)$ માં x ના મહત્તમ ઘાતાંકને બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત કહે છે.*** ઉદાહરણ તરીકે, $4x + 2$ એ ચલ x માં એક ઘાતવાળી બહુપદી છે. $2y^2 - 3y + 4$ એ ચલ y માં 2 ઘાતવાળી બહુપદી છે, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ એ ચલ x માં 3 ઘાતવાળી બહુપદી છે અને $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ એ ચલ u માં 6 ઘાતવાળી બહુપદી છે.

$\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ વગેરે જેવી અભિવ્યક્તિઓ બહુપદીઓ નથી.

એક ઘાતવાળી બહુપદીને ***સુરેખ બહુપદી (Linear Polynomial)*** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, વગેરે બધી જ સુરેખ બહુપદીઓ છે. $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ વગેરે જેવી બહુપદીઓ સુરેખ બહુપદીઓ નથી.

બે ઘાતવાળી બહુપદીને ***દ્વિઘાત બહુપદી (Quadratic Polynomial)*** કહે છે. '*quadratic*' શબ્દ '*quadrate*' પરથી મેળવવામાં આવ્યો છે અને તેનો અર્થ 'વર્ગ' એવો થાય છે. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. (તેમના સહગુણકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.) વ્યાપક રીતે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c માટે અને શૂન્યેતર a માટે x માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ સ્વરૂપમાં હોય.

ત્રણ ઘાત ધરાવતી બહુપદીને ***ત્રિઘાત બહુપદી (Cubic Polynomial)*** કહે છે. ત્રિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}x^3$, $3 - x^2 + x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ છે. હકીકતમાં ત્રિઘાત બહુપદીનું ખૂબ જ સરળ વ્યાપક સ્વરૂપ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ છે. અહીં, a, b, c, d વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a \neq 0$.

હવે, બહુપદી $p(x) = x^2 - 3x - 4$ નો વિચાર કરો. આ બહુપદીમાં $x = 2$ મૂકતાં, આપણને $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ મળે. $x^2 - 3x - 4$ માં $x = 2$ મૂકતાં મૂલ્ય '–6' મળ્યું તે $x^2 - 3x - 4$ ની $x = 2$ આગળની કિંમત થાય. આ જ પ્રમાણે, $p(0)$ એ $p(x)$ નું $x = 0$ આગળનું મૂલ્ય છે અને તે -4 છે.

જો $p(x)$ એ x માં બહુપદી હોય, અને જો k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $p(x)$ માં x ને બદલે k મૂકવાથી મળતા મૂલ્ય ને $p(x)$ ની $x = k$ આગળની કિંમત કહે છે અને તેને $p(k)$ વડે દર્શાવાય છે.

$x = -1$ આગળ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ની કિંમત શું થાય ?

આપણને $p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$ મળે.

વળી, એ પણ જુઓ કે $p(4) = (4)^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$

$p(-1) = 0$ અને $p(4) = 0$ હોવાથી, -1 અને 4 ને દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો કહે છે. વ્યાપક રીતે, ***જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k ને બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય કહે છે.***

આપણે ધોરણ IX માં સુરેખ બહુપદીનાં શૂન્ય કેવી રીતે મેળવવા તેનો અભ્યાસ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે જો k એ $p(x) = 2x + 3$ નું એક શૂન્ય હોય તો $p(k) = 0$. આથી આપણને $2k + 3 = 0$ મળશે. આથી, $k = \frac{-3}{2}$.

વ્યાપક રીતે, k એ $p(x) = ax + b$ નું શૂન્ય હોય તો, $p(k) = ak + b = 0$. આથી $k = \frac{-b}{a}$ થાય.

આમ, સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{અચળ પદ})}{x \text{ નો સહગુણક}}$

આથી, સુરેખ બહુપદીના શૂન્યને બહુપદીના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે. શું અન્ય બહુપદીઓના કિસ્સામાં પણ આવું બનશે ? ઉદાહરણ તરીકે, દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોને પણ તેના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે ?

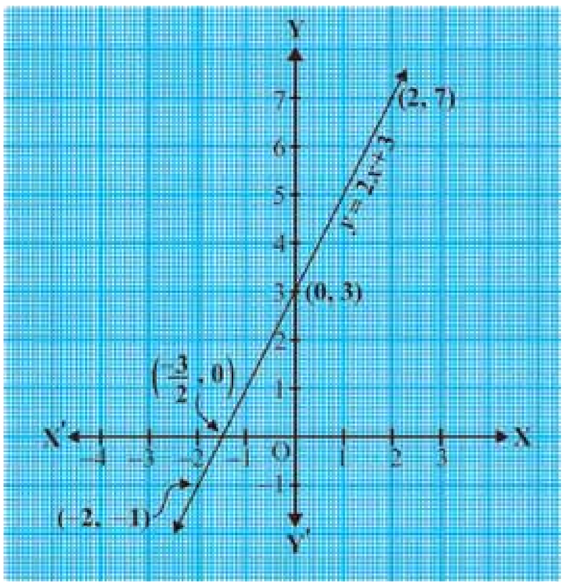
આ પ્રકરણમાં, આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવા પ્રયત્ન કરીશું. આપણે બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

2.2 બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k એ બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય છે પરંતુ બહુપદીનાં શૂન્યો શા માટે અગત્યનાં છે ? આના ઉત્તર માટે, પ્રથમ આપણે ***સુરેખ*** અને ***દ્વિઘાત બહુપદીઓનું ભૌમિતિક નિરૂપણ*** અને તેનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ.

પ્રથમ સુરેખ બહુપદી $ax+b$, $a \neq 0$ નો વિચાર કરો. આપણે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે $y = ax + b$ નો આલેખ એક રેખા છે. ઉદાહરણ તરીકે $y = 2x + 3$ નો આલેખ એ બિંદુઓ $(-2, -1)$ અને $(2, 7)$માંથી પસાર થતી રેખા છે.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



આકૃતિ 2.1

આકૃતિ 2.1 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $y = 2x + 3$ નો આલેખ x-અક્ષને $x = -1$ અને $x = -2$ની મધ્યમાં આવેલા બિંદુ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ માં છેદે છે.

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય $\frac{-3}{2}$ છે. આથી, બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય એ $y = 2x + 3$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x-યામ છે.

વ્યાપક રીતે, સુરેખ બહુપદી $ax + b$, $a \neq 0$ માટે $y = ax + b$ નો આલેખ x-અક્ષને બરાબર એક બિંદુ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ બિંદુમાં છેદતી રેખા છે.

આથી શૂન્યેતર a માટે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ ને એક જ શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે અને તે $y = ax + b$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x-યામ છે.

હવે, આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ. $x^2 - 3x - 4$ દ્વિઘાત બહુપદીનો વિચાર કરો. ચાલો આપણે જોઈએ કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ* કેવો દેખાશે.

આપણે કોષ્ટક 2.1 માં x ની કેટલીક કિંમતોને અનુરૂપ $y = x^2 - 3x - 4$ ની કિંમતોની યાદી બનાવી છે.

કોષ્ટક 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

જો આપણે ઉપરની યાદીમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરીએ તો તે આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો દેખાશે.

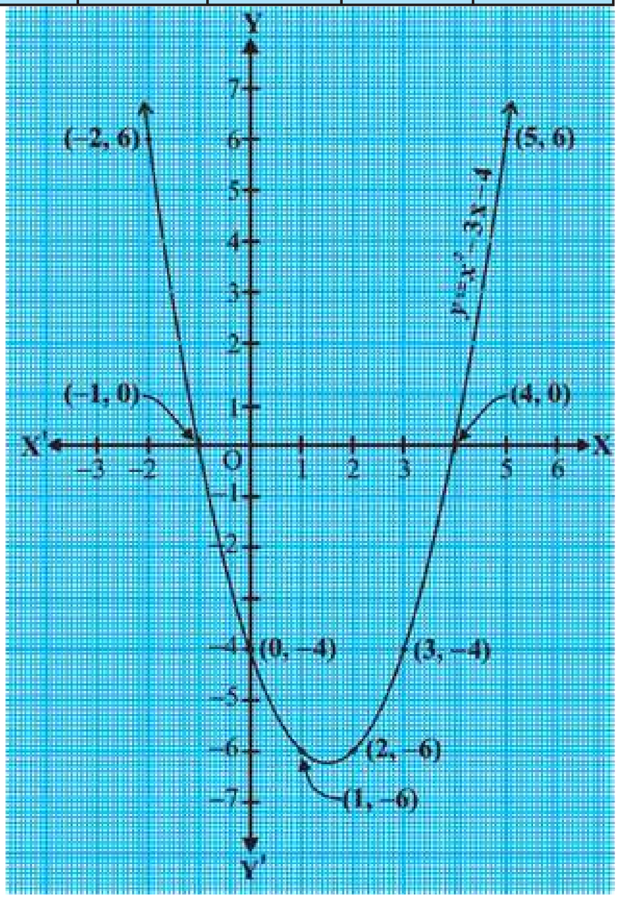
ખરેખર તો, શૂન્યેતર a હોય તેવી કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, ના સંદર્ભમાં તેને અનુરૂપ સમીકરણ $y = ax^2 + bx + c$ નો આલેખ અનુક્રમે $a > 0$ અથવા $a < 0$ અનુસાર ઉપરની તરફ ખુલ્લો વક્ર $\bigvee$ અથવા નીચેની તરફ ખુલ્લો વક્ર $\bigwedge$ મળશે. (આ વક્રને પરવલય કહે છે.)

તમે કોષ્ટક 2.1 પરથી જોઈ શકો છો કે -1 અને 4 એ આપેલ દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો છે.

આકૃતિ 2.2 પરથી નોંધો કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે. તેમના x યામ -1 અને 4 છે.

આમ, દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો એ $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે તેમના x યામ થાય.

આ હકીકત કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી માટે સત્ય છે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ નાં શૂન્યો એ



આકૃતિ 2.2

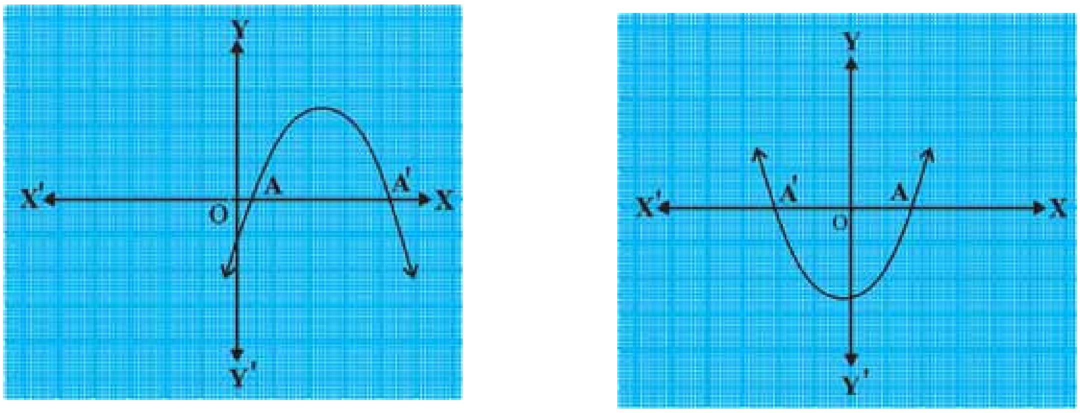
* વિદ્યાર્થી એ દ્વિઘાત તથા ત્રિઘાત બહુપદીઓના આલેખ દોરવાનું અપેક્ષિત નથી તથા તે મૂલ્યાંકનનો હિસ્સો નથી.

નિશ્ચિતપણે $y = ax^2 + bx + c$ ને દર્શાવતો પરવલય x-અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે છે તે બિંદુઓના x-યામ થાય.

અગાઉના આપણા નિરીક્ષણને આધારે $y = ax^2 + bx + c$ ના આલેખના આકાર માટે નીચે પ્રમાણેના ત્રણ વિકલ્પ હોઈ શકે :

વિકલ્પ (i) : અહીં આલેખ x-અક્ષને ***બે ભિન્ન બિંદુઓ*** A અને A' માં છેદે છે.

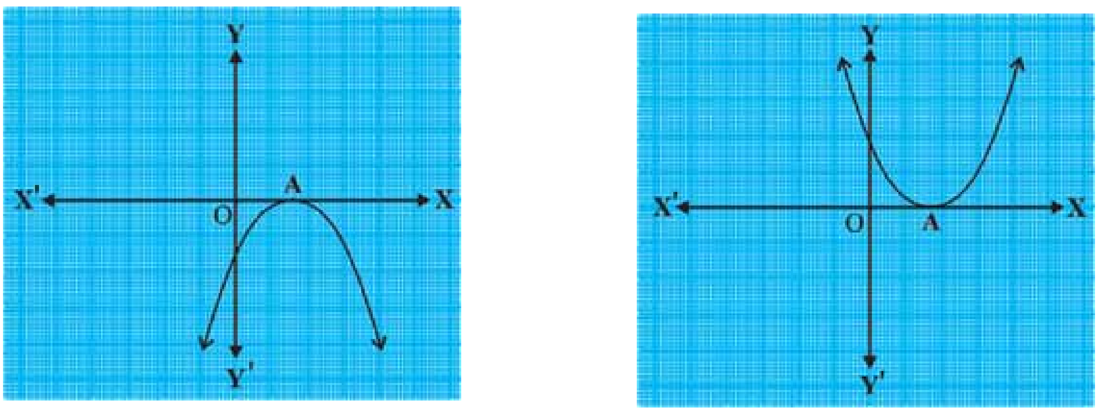
આ કિસ્સામાં A અને A' ના x-યામ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં બે શૂન્યો થાય. (જુઓ આકૃતિ 2.3.)



(i) (ii)

આકૃતિ 2.3

વિકલ્પ (ii) : અહીં આલેખ x-અક્ષને એક બિંદુમાં છેદે છે. એટલે કે તે x-અક્ષને બે સંપાતી બિંદુઓમાં છેદે છે. આથી વિકલ્પ (i)વાળા બિંદુ A અને A′ સંપાતી બને છે અને એક જ છેદબિંદુ A મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4.)

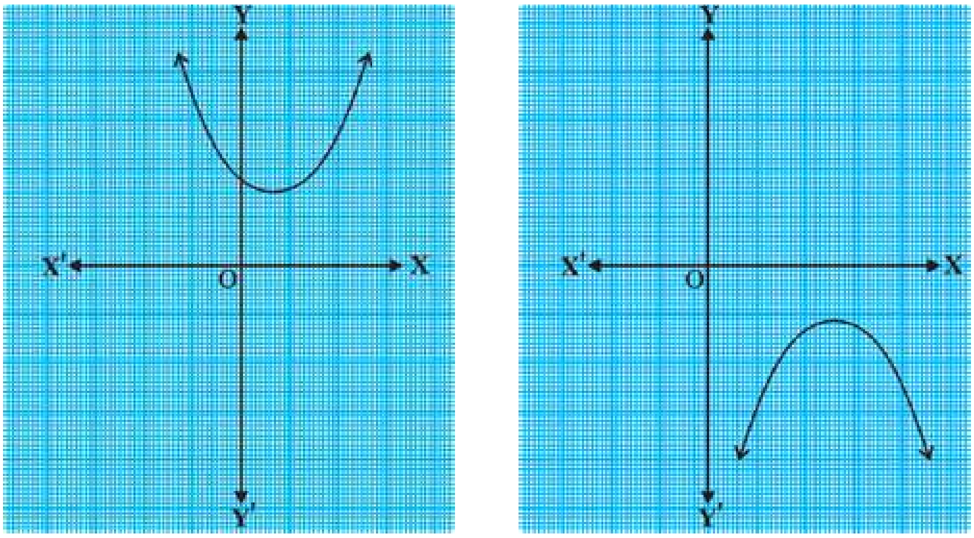


(i) (ii)

આકૃતિ 2.4

આ કિસ્સામાં બિંદુ Aનો x-યામ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નું ***એક માત્ર શૂન્ય*** થશે.

વિકલ્પ (iii) : અહીં આલેખ સંપૂર્ણપણે x-અક્ષની ઉપર અથવા સંપૂર્ણપણે x-અક્ષની નીચે છે અને તે x-અક્ષને કોઈ પણ બિંદુએ છેદશે નહીં. (જુઓ આકૃતિ 2.5.)



આકૃતિ 2.5

આથી, આ કિસ્સામાં દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ને ***વાસ્તવિક શૂન્ય*** નથી.

આથી, ભૌમિતિક રીતે જોઈ શકાય કે, દ્વિઘાત બહુપદીને કાં તો બે ભિન્ન શૂન્યો હોય અથવા બે સમાન શૂન્યો હોય (એટલે કે એક શૂન્ય) અથવા શૂન્ય ન હોય. આનો અર્થ એ પણ થાય કે બે ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ બે શૂન્યો હોય.

હવે, ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ માટે તમે શું અપેક્ષા રાખો છો ? ચાલો, આપણે નક્કી કરીએ. ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નો વિચાર કરો. $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ કેવો દેખાશે તે જોઈએ.

ચાલો, આપણે x ની કેટલીક કિંમતોને અનુરૂપ y ની કેટલીક કિંમતોની યાદી કોષ્ટક 2.2 માં દર્શાવેલ છે તે જોઈએ.

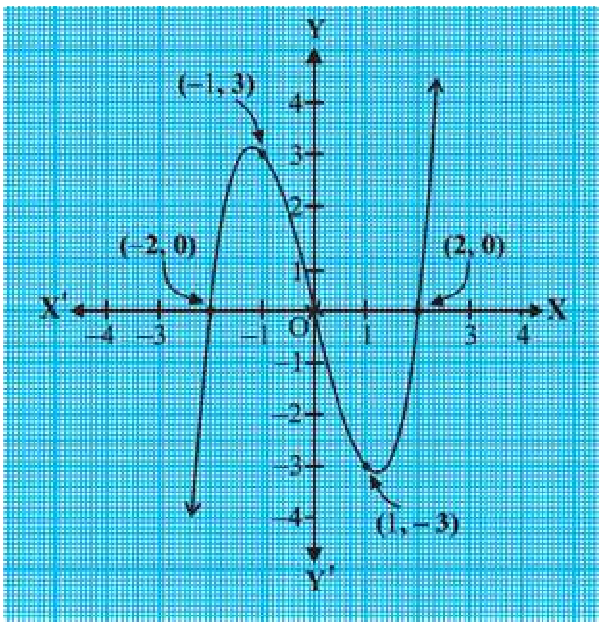
કોષ્ટક 2.2

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરતાં આપણે જોઈ શકીએ કે, $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ ખરેખર આકૃતિ 2.6 માં દર્શાવેલ છે તેવો લાગશે.

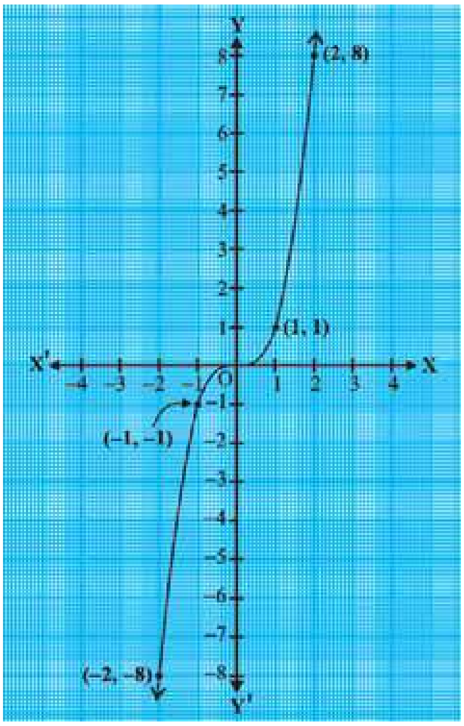
ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે –2, 0 અને 2 એ ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નાં શૂન્યો છે અવલોકન કરો કે $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ x-અક્ષને જ્યાં છેદે છે તે બિંદુઓના x-યામ જ હકીકતમાં –2, 0 અને 2 છે.

વક્ર x-અક્ષને આ ત્રણ બિંદુએ જ છેદતો હોવાથી તેના x-યામ આ બહુપદીનાં શૂન્યો થાય અને આ સિવાય અન્ય કોઈ શૂન્ય ન મળે.

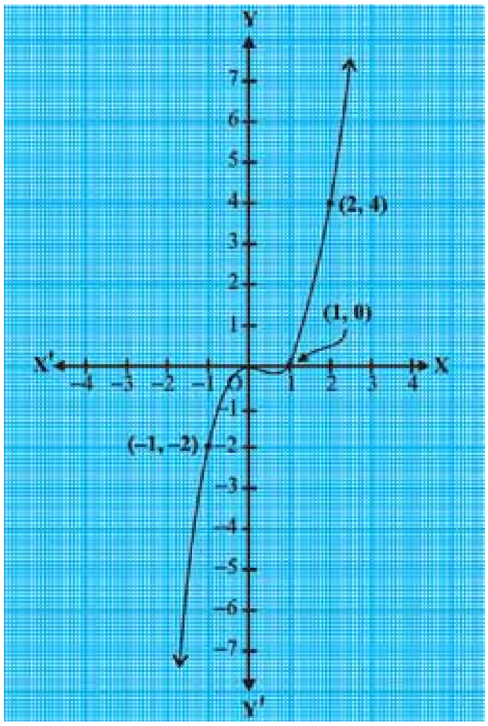


આકૃતિ 2.6

ચાલો આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો લઈએ. ત્રિઘાત બહુપદીઓ x^3 અને $x^3 - x^2$નો વિચાર કરો. આકૃતિ 2.7 અને આકૃતિ 2.8 માં અનુક્રમે $y = x^3$ અને $y = x^3 - x^2$ ના આલેખ આપણે દોર્યા છે.



આકૃતિ 2.7



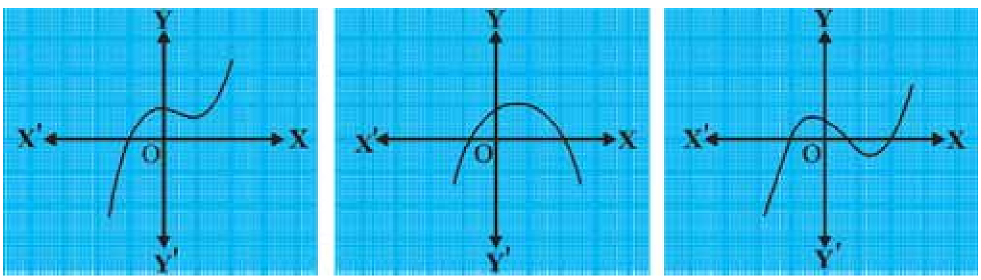
આકૃતિ 2.8

આપણે નોંધીએ કે 0 એ બહુપદી x^3 નું એક માત્ર શૂન્ય છે. વળી, આકૃતિ 2.7 પરથી તમે જોઈ શકો છો કે $y = x^3$ નો આલેખ x-અક્ષને માત્ર એક બિંદુમાં છેદે છે અને તેનો x-યામ 0 છે. $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ હોવાથી, બહુપદી $x^3 - x^2$ નાં શૂન્યો માત્ર 0 અને 1 છે. વળી, આકૃતિ 2.8 પરથી આ મૂલ્યો $y = x^3 - x^2$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે છે તેમના x-યામ છે.

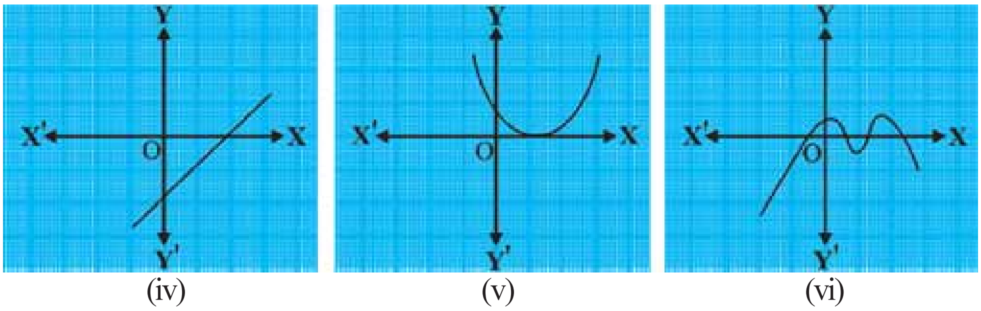
ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી, આપણે જોયું કે કોઈ પણ ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો ત્રણ ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે.

નોંધ : વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલી બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત n હોય તો $y = p(x)$ નો આલેખ x-અક્ષને વધુમાં વધુ n બિંદુઓમાં છેદે. માટે n ઘાતવાળી બહુપદી $p(x)$ ને વધુમાં વધુ n શૂન્યો હોય.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આકૃતિ 2.9માં આપેલ આલેખ જુઓ. પ્રત્યેક આલેખ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ છે. પ્રત્યેક આલેખ માટે $p(x)$નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



(i) (ii) (iii)



આકૃતિ 2.9

ઉકેલ :

(i) આલેખ x-અક્ષને એક જ બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે.

(ii) આલેખ x-અક્ષને બે બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 2 છે.

(iii) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 3 છે. (શા માટે ?)

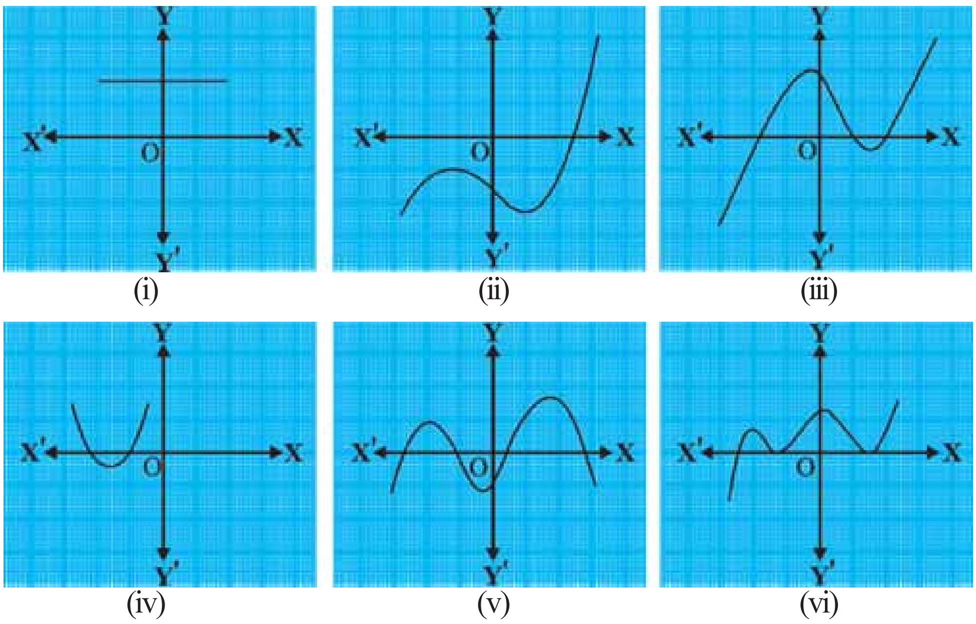
(iv) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. (શા માટે ?)

(v) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. (શા માટે ?)

(vi) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 4 છે. (શા માટે ?)

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આકૃતિ 2.10 માં કોઈ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં $p(x)$ નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



આકૃતિ 2.10

2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ

તમે જોયું કે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે. હવે આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેના

સંબંધના સંદર્ભે વિભાગ 2.1 માં ઉદ્ભવેલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરીએ. ચાલો, આ માટે આપણે દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ લઈએ. ધોરણ IX માં તમે દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમપદના ભાગ પાડી તેના અવયવ પાડતાં શીખ્યાં છો. માટે, આપણે મધ્યમ પદના એવા બે ભાગ પાડીએ જેમનો સરવાળો '$-8x$' થાય અને જેમનો ગુણાકાર $6 \times 2x^2 = 12x^2$ આવે. આથી,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x(x-3) - 2(x-3) \\ &= (2x-2)(x-3) \\ &= 2(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

આથી, જ્યારે $x - 1 = 0$ અથવા $x - 3 = 0$ હોય ત્યારે $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ની કિંમત શૂન્ય થાય. આથી $2x^2 - 8x + 6$ નાં શૂન્યો 1 અને 3 છે.

અવલોકન કરો કે,

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = -\frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

ચાલો, આપણે વધુ એક દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ લઈએ. મધ્યમપદના ભાગ પાડવાની પદ્ધતિ દ્વારા,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 \\ &= 3x(x+2) - 1(x+2) \\ &= (3x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$3x^2 + 5x - 2$ ની કિંમત શૂન્ય લેતાં, $3x - 1 = 0$ અથવા $x + 2 = 0$ થાય. આથી $x = \frac{1}{3}$ અથવા $x = -2$.

માટે, $3x^2 + 5x - 2$ નાં શૂન્યો $\frac{1}{3}$ અને -2 થાય. અવલોકન કરો કે,

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો શૂન્યેતર a માટે દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = ax^2 + bx + c$, નાં શૂન્યો α* અને β* હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે $x - \alpha$ અને $x - \beta$ એ $p(x)$ ના અવયવો થાય. માટે,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x-\alpha)(x-\beta), \ k \text{ શૂન્યેતર અચળ} \\ &= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta], \\ &= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\,\alpha\beta \end{aligned}$$

બંને બાજુ x^2, x ના સહગુણકો અને અચળ પદને સરખાવતાં આપણને,

$$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta),\ c = k\,\alpha\beta \text{ મળે.}$$

* α તથા β ગ્રીક મૂળાક્ષરો છે અને તેમનો ઉચ્ચાર અનુક્રમે ''આલ્ફા'' અને ''બીટા'' થાય છે. આગળ જતાં જેનો ઉચ્ચાર ગેમા થાય તેવા વધુ એક મૂળાક્ષર γ નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\, \beta = \frac{c}{a} \text{ મળે.}$$

આથી શૂન્યોનો સરવાળો $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2 : દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો શોધો તથા તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\,(x + 5)$$

આથી, જ્યારે $x + 2 = 0$ અથવા $x + 5 = 0$ હોય, ત્યારે $x^2 + 7x + 10$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

માટે $x = -2$ અથવા $x = -5$.

આથી, $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો -2 અને -5 થાય. હવે,

શૂન્યોનો સરવાળો $= (-2) + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ઉદાહરણ 3 : બહુપદી $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો શોધો અને તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : નિત્યસમ $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ યાદ કરી તેનો ઉપયોગ કરી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})\,(x + \sqrt{3})$$

આથી, જ્યારે $x = \sqrt{3}$ અથવા $x = -\sqrt{3}$ હોય ત્યારે $x^2 - 3$ ની કિંમત શૂન્ય થાય.

માટે, $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો $\sqrt{3}$ અને $-\sqrt{3}$ છે.

હવે,

શૂન્યોનો સરવાળો $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= (\sqrt{3})\,(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ઉદાહરણ 4 : જેનાં શૂન્યોના સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે –3 અને 2 હોય તેવી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો α અને β છે.

આપણી પાસે

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

જો $a = 1$ તો $b = 3$ અને $c = 2$

આથી, આપેલ શરતને અનુરૂપ એક દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 3x + 2$ છે.

તમે એ પણ ચકાસી શકો કે શૂન્યેતર વાસ્તવિક k માટે, $k(x^2 + 3x + 2)$ સ્વરૂપની કોઈ પણ બીજી દ્વિઘાત બહુપદી આ શરતોને અનુરૂપ લઈ શકાય.

ચાલો, આપણે હવે ત્રિઘાત બહુપદીઓ જોઈએ. તમે કલ્પના કરી શકશો કે ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને તેના સહગુણકો વચ્ચે શું આવો જ સંબંધ હશે ?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નો વિચાર કરીએ,

$p(x)$ ને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય. આપણે $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ માટે $p(x) = 0$ થાય તે ચકાસી શકીએ. આ સંખ્યાઓ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નાં શૂન્યો થાય. હવે,

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ નો સહગુણક})}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{ અચળ પદ}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

જો કે અહીં એક વધુ સંબંધ છે. બબ્બે શૂન્યોના ગુણાકારોના સરવાળાનો વિચાર કરીએ. આપણી પાસે

$$\{4 \times (-2)\} + \{(-2) \times \frac{1}{2}\} + \{\frac{1}{2} \times 4\} = -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો α, β, γ હોય, તો સાબિત કરી શકાય કે,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ચાલો, એક ઉદાહરણ સમજીએ.

ઉદાહરણ 5* : ચકાસો કે $3, -1, -\frac{1}{3}$ એ ત્રિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે અને તે પછી શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

* પરીક્ષાના દ્રષ્ટિકોણથી લીધેલ નથી.

ઉકેલ : આપેલી બહુપદીને $ax^3 + bx^2 + cx + d$ સાથે સરખાવતાં,

આપણને $a = 3$, $b = -5$, $c = -11$, $d = -3$ મળશે. વધુમાં

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

આથી, 3, -1 અને $-\frac{1}{3}$ એ $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે.

આથી, આપણે $\alpha = 3$, $\beta = -1$ અને $\gamma = -\frac{1}{3}$ લઈએ.

હવે,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + \left((-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) + \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \times 3\right)$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = -\left(-\frac{3}{3}\right) = \frac{-d}{a}$$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચે દર્શાવેલ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં શૂન્યો શોધો તથા તેમનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો :

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને શૂન્યોનો ગુણાકાર છે તે પરથી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો :

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

2.4 બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિ

આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો છે. વધુમાં, જો તમને એક શૂન્ય આપેલ હોય તો તમે બીજાં બે શૂન્યો શોધી શકો ? આ માટે ચાલો આપણે ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 3x^2 - x + 3$ નો વિચાર કરીએ. જો અમે તમને કહીએ કે તેનું એક શૂન્ય 1 છે આથી તમે જાણો છો કે $x - 1$ એ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ નો એક અવયવ

છે. આથી, તમે $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ને $x - 1$ વડે ભાગો. આ તો તમે ધોરણ IX માં શીખ્યાં છો. આથી ભાગફળ $x^2 - 2x - 3$ મળશે.

બાદમાં, $x^2 - 2x - 3$ ના મધ્યમ પદનું વિભાજન કરતાં તમને $(x + 1)(x - 3)$ અવયવ મળશે.

આથી, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ મળશે.

આથી, આપેલા ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો હવે 1, –1 અને 3 મળી જાય છે.

ચાલો આપણે એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવાની પદ્ધતિની વિગતવાર ચર્ચા કરીએ. પરંપરાગત સોપાનોની નોંધ કરતાં પહેલાં આપણે એક ઉદાહરણનો અભ્યાસ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ ને $x + 2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે જ્યારે શેષ શૂન્ય હોય અથવા તેની ઘાત ભાજકની ઘાત કરતાં ઓછી હોય ત્યારે આપણે ભાગાકારની પ્રક્રિયા અટકાવીશું. આથી, અહીં ભાગફળ $2x - 1$ અને શેષ 3 છે.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 1 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & 2x^2 + 4x \\
 & - \quad - \\
\hline
 & -x + 1 \\
 & -x - 2 \\
 & + \quad + \\
\hline
 & 3
\end{array}
$$

વળી,

$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

માટે, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

આથી, ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

ચાલો, હવે આપણે એક બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી વડે ભાગીને આ પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ને $1 + 2x + x^2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ભાજક અને ભાજ્યનાં પદોને તેમના ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવીએ. યાદ કરો કે બહુપદીનાં પદોને આ ક્રમમાં ગોઠવીએ તો, તે સ્વરૂપને બહુપદીનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહે છે. આ ઉદાહરણમાં, ભાજ્ય પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં જ છે અને $x^2 + 2x + 1$ એ ભાજકનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ થશે.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & -5x^2 - x + 5 \\
 & -5x^2 - 10x - 5 \\
 & + \quad + \quad + \\
\hline
 & 9x + 10
\end{array}
$$

સોપાન 1 : ભાગફળનું પ્રથમ પદ મેળવવા માટે ભાજ્યના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $3x^3$) ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ $3x$ થશે. ત્યાર બાદ ભાગાકારની પ્રક્રિયા આગળ ધપાવતાં $-5x^2 - x + 5$ વધશે.

સોપાન 2 : હવે ભાગફળનું બીજું પદ મેળવવા માટે ભાગાકારના નવા ભાજ્યનાં સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $-5x^2$). ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ –5 મળશે. ફરીથી ભાગાકારની પ્રક્રિયા $-5x^2 - x + 5$ સાથે આગળ ધપાવો.

સોપાન 3 : $9x + 10$ બાકી રહેશે. હવે, $9x + 10$ની ઘાત ભાજક $x^2 + 2x + 1$ની ઘાત કરતાં ઓછી છે માટે, આપણે ભાગાકાર આગળ ધપાવી શકીશું નહિ.

માટે, ભાગફળ $3x - 5$ અને શેષ $9x + 10$ છે. વળી,

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$$
$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

અહીં પણ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

અહીં આપણે જે પ્રવિધિ લાગુ પાડી તે યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિને સમાન છે. આપણે તેનો પ્રકરણ 1માં અભ્યાસ કર્યો છે.

તે દર્શાવે છે કે,

જો $p(x)$ અને $g(x)$ બે બહુપદીઓ હોય અને $g(x) \neq 0$, તો આપણે એવી બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ શોધી શકીએ, જેથી

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત $<$ $g(x)$ ની ઘાત.

આ પરિણામ બહુપદીઓ માટે **ભાગ પ્રવિધિ** તરીકે ઓળખાય છે.

ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ નો $x - 1 - x^2$ વડે ભાગાકાર કરો અને ભાગ પ્રવિધિ ચકાસો.

ઉકેલ : જુઓ કે આપેલ બહુપદીઓ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી. આથી, ભાગાકાર કરવા માટે આપણે પ્રથમ ભાજ્ય અને ભાજકને તેની ઘાતના ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવીશું.

આથી, ભાજ્ય $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ અને ભાજક $= -x^2 + x - 1$.

ભાગાકારની પ્રક્રિયા જમણી બાજુએ દર્શાવેલ છે.

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & + \quad - \quad + \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & - \quad + \quad - \\ \hline & 3 \end{array}$$

આપણે 3 ની ઘાત $= 0 < 2 =$ ઘાત $(-x^2 + x - 1)$ થવાથી ત્યાં અટકીશું.

આથી, ભાગફળ $= x - 2$, શેષ $= 3$

હવે, ભાજક × ભાગફળ + શેષ $= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

$=$ ભાજ્ય

આ રીતે ભાગ પ્રવિધિને ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : જો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ એ $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ નાં બે શૂન્યો છે તેવું તમે જાણતા હો, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ બે શૂન્યો હોવાથી, $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ એ આપેલ બહુપદીનો અવયવ થશે. હવે આપણે આપેલી બહુપદીને $x^2 - 2$ વડે ભાગીએ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\cline{2-2}
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & \;\;- \qquad\qquad + \\
\cline{2-2}
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 \qquad\quad + 6x \\
 & + \qquad\qquad\quad - \\
\cline{2-2}
 & x^2 - 2 \\
 & x^2 - 2 \\
 & - \quad + \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

ભાગફળનું પ્રથમ પદ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ભાગફળનું બીજું પદ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ભાગફળનું ત્રીજું પદ $\frac{x^2}{x^2} = 1$

આથી, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

હવે, $-3x$ ના ભાગ પાડતાં આપણે $2x^2 - 3x + 1$ ના અવયવ $(2x - 1)(x - 1)$ પાડી શકીશું. આથી, તેનાં શૂન્યો $x = \frac{1}{2}$ અને $x = 1$ થશે. માટે આપેલી બહુપદીનાં શૂન્યો $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. નીચે આપેલ તમામ બહુપદી $p(x)$ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગો અને ભાગફળ તથા શેષ મેળવો :

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, \qquad g(x) = 2 - x^2$

2. નીચે આપેલ બે બહુપદીઓ પૈકી બીજી બહુપદીને પ્રથમ બહુપદી વડે ભાગીને ચકાસો કે પ્રથમ બહુપદી એ બીજી બહુપદીનો અવયવ છે કે નહિ.

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. જો $\sqrt{\frac{5}{3}}$ અને $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ એ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ નાં બે શૂન્યો હોય, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં ભાગફળ અને શેષ અનુક્રમે $x - 2$ અને $-2x + 4$ મળે છે, તો $g(x)$ શોધો.

5. ભાગ પ્રવિધિ અને નીચેની શરતોને સંતોષે તેવી બહુપદીઓ $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ અને $r(x)$ નાં ઉદાહરણો આપો.

(i) $p(x)$ ની ઘાત = $q(x)$ ની ઘાત

(ii) $q(x)$ ની ઘાત = $r(x)$ ની ઘાત

(iii) $r(x)$ ની ઘાત = 0

સ્વાધ્યાય 2.4 (વૈકલ્પિક)*

1. નીચે ત્રિઘાત બહુપદીની સાથે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ તેનાં શૂન્યો છે તે ચકાસો. દરેક પ્રશ્નમાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ પણ ચકાસો :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 ; \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 ; 2, 1, 1$

2. જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો, બબ્બે શૂન્યોના ગુણાકારનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 2, –7, –14 છે એવી ત્રિઘાત બહુપદી શોધો.

3. જો બહુપદી $x^3 - 3x^2 + x + 1$ નાં શૂન્યો $a - b, a, a + b$ હોય તો a અને b શોધો.

4. બહુપદી $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ નાં બે શૂન્યો $2 \pm \sqrt{3}$ હોય તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

5. બહુપદી $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ને બીજી બહુપદી $x^2 - 2x + k$ વડે ભાગતાં આવે તો શેષ $x + a$ મળે તો k અને a શોધો.

2.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. 1, 2 અને 3 ઘાત ધરાવતી બહુપદીઓને અનુક્રમે સુરેખ, દ્વિઘાત અને ત્રિઘાત બહુપદીઓ કહે છે.

2. વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c તથા શૂન્યેતર a માટે, x પરની વાસ્તવિક સહગુણકો ધરાવતી દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ છે.

3. $y = p(x)$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તે બિંદુના x-યામ એ બહુપદી $p(x)$નાં શૂન્યો છે.

4. દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 વાસ્તવિક શૂન્યો અને ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 3 વાસ્તવિક શૂન્યો હોય છે.

5. જો α અને β એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. જો α, β, γ એ ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

અને $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. ભાગ પ્રવિધિ દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ બહુપદી $p(x)$ અને કોઈ શૂન્યેતર બહુપદી $g(x)$ ને સંગત બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ મળે જેથી,

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત $<$ $g(x)$ ની ઘાત.

■

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

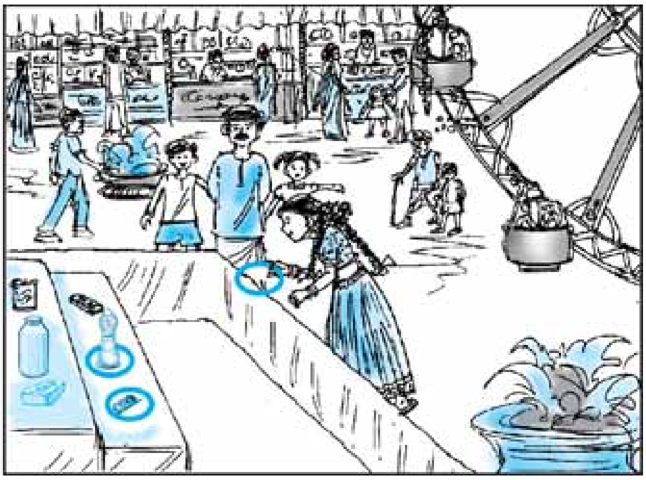
દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ 3

3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે નીચે આપેલી પરિસ્થિતિ જેવી પરિસ્થિતિમાંથી પસાર થયાં જ હશો.

અખિલા તેના ગામમાં મેળામાં ગઈ હતી. તેને ચકડોળમાં બેસવાનો આનંદ માણવો હતો અને હૂપલા (Hoopla) (જેમાં તમે સ્ટોલમાં રાખેલી વસ્તુઓ પર રિંગ ફેંકો અને જો રિંગ કોઈ પણ વસ્તુને સંપૂર્ણ આવરી લે, તો તે વસ્તુ તમને મળે એવી એક રમત) રમવા માંગતી હતી. તે જેટલી વખત હૂપલા રમી તે સંખ્યા એ ચકડોળ પરની સવારીની સંખ્યાથી અડધી છે. જો પ્રત્યેક વખત ચકડોળમાં બેસવાનો ખર્ચ ₹ 3 અને હૂપલાની પ્રત્યેક રમત રમવાનો ખર્ચ ₹ 4 થતો હોય, તો તમે ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યા કેવી રીતે શોધી શકશો અને તે કેટલી વાર હૂપલાની રમત રમી હશે તે કેવી રીતે નક્કી કરશો? તેણે આ માટે કુલ ₹ 20 ખર્ચ્યા હતા.

કદાચિત્, તમે વિવિધ સ્થિતિની વિચારણા કરીને અજમાવી શકો છો. જો તેણે એક વખત સવારી કરી હોય, તે શક્ય છે ? શું બે વખત સવારી શક્ય છે ? અને આમ આગળ ચાલો અથવા આવી પરિસ્થિતિઓને દર્શાવવા માટે તમે ધોરણ IX ના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો આ અભિગમ અપનાવીએ.

અખિલાની ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યાને x કહો અને હૂપલા રમવાની સંખ્યાને y કહો. આ પરિસ્થિતિને બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$y = \frac{1}{2}x \qquad \text{.... (1)}$$

$$3x + 4y = 20 \qquad \text{.... (2)}$$

શું આપણે આ બે સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીશું?

ઉકેલ શોધવાની ઘણી રીતો છે. આપણે આ પ્રકરણમાં તેમનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ

ધોરણ IX નો અભ્યાસ યાદ કરો. નીચે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં ઉદાહરણો છે :

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

અને $\quad x - 0y = 2$, એટલે કે $x = 2$

જો a, b અને c એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોય તો જે સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તેને ચલ x અને ચલ y માં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે એમ તમે જાણો છો. (a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોઈ શકે તે શરતને સામાન્ય રીતે $a^2 + b^2 \neq 0$ વડે પણ દર્શાવાય છે).

તમે અભ્યાસ કર્યો છે કે, આવા સમીકરણના ઉકેલનાં મૂલ્યોની એક x અને બીજો y એમ એક જોડ મળે છે. તે સમીકરણની બંને બાજુઓ સમાન બનાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ $2x + 3y = 5$ ની ડાબી બાજુએ $x = 1$ અને $y = 1$ કિંમત મૂકતાં,

ડાબી બાજુ $= 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$ અને તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 1$ એ $2x + 3y = 5$ નો એક ઉકેલ છે.

હવે, $x = 1$ અને $y = 7$ કિંમત $2x + 3y = 5$ માં મૂકતાં,

$$\text{ડાબી બાજુ} = 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$$

તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર નથી.

તેથી, $x = 1$ અને $y = 7$ એ $2x + 3y = 5$ નો ઉકેલ નથી.

ભૌમિતિક રીતે, આનો અર્થ શું છે ? તેનો અર્થ એ છે કે બિંદુ $(1, 1)$ એ સમીકરણ $2x + 3y = 5$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખા પર છે અને $(1, 7)$ તે રેખા પર નથી. તેથી સમીકરણનો દરેક ઉકેલ તે સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના બિંદુનું નિરૂપણ છે.

હકીકતમાં, આ કોઈ પણ સુરેખ સમીકરણ માટે સત્ય છે, એટલે કે **$ax + by + c = 0$ નો પ્રત્યેક ઉકેલ (x, y) એ સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના કોઈ બિંદુને સંગત છે અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.**

હવે, ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (1) અને (2) નો વિચાર કરો.

આ સમીકરણો અખિલાની મેળાની મુલાકાત વિશેની માહિતી એક સાથે દર્શાવે છે.

આ બંને સુરેખ સમીકરણોમાં x અને y માત્ર બે ચલ છે. આ સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહે છે.

ચાલો આ જોડીનો બીજગણિતની રીતે વિચાર કરીએ.

ચલ x અને y માં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ છે. અહીં $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલાં છે :

$2x + 3y - 7 = 0$ અને $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ અને $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ અને $17 = y$

શું તમે જાણો છો કે ભૌમિતિક રીતે તે શું સૂચવે છે ?

યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં ભૌમિતિક રીત (એટલે કે આલેખની રીત)નો અભ્યાસ કર્યો છે કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ એ રેખા નિર્દેશ કરે છે. શું તમે હવે કહેશો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું આલેખાત્મક સ્વરૂપ કેવું દેખાશે ? તે બે રેખાઓ એક સાથે દર્શાવશે.

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો કે, સમતલમાં બે રેખાઓ માટે નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ પૈકી એક અને માત્ર એક સત્ય હોઈ શકે :

(i) બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદશે.

(ii) બે રેખાઓ છેદતી નથી, એટલે કે તે પરસ્પર સમાંતર છે.

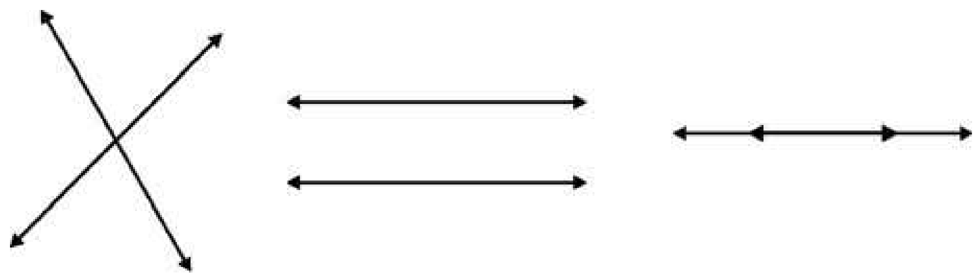
(iii) બે રેખાઓ સંપાતી થશે.

આપણે આ બધી શક્યતાઓને આકૃતિ 3.1માં બતાવી છે.

આકૃતિ 3.1 (a), બંને છેદે છે.

આકૃતિ 3.1 (b), બંને સમાંતર છે.

આકૃતિ 3.1 (c), બંને સંપાતી છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 3.1

સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રજૂઆત કરવા બૈજિક અને ભૌમિતિક રીત બંનેનો સાથે-સાથે ઉપયોગ થઈ શકે છે.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આપણે વિભાગ 3.1 માંથી ઉદાહરણ લઈએ. અખિલા ₹ 20 લઈને મેળામાં જાય છે અને તે ચકડોળમાં બેસવા માંગે છે અને હૂપલા રમત રમે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે (ભૌમિતિક રીતે) રજૂ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણોની જોડીઓ :

$$y = \frac{1}{2}x$$

એટલે કે, $x - 2y = 0$ (1)

$3x + 4y = 20$ (2)

આપણે આ સમીકરણોને આલેખાત્મક રીતે દર્શાવીએ. આ માટે આપણને દરેક સમીકરણ માટે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર છે. આપણે આ ઉકેલો કોષ્ટક 3.1માં આપીએ.

કોષ્ટક 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

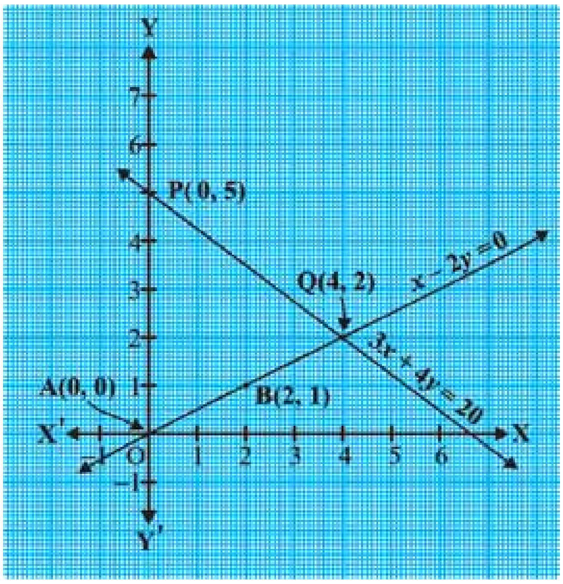
(i)

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

ધોરણ IX માંથી યાદ કરીએ કે, દરેક સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલો છે. તેથી તમે કોઈ પણ બે મૂલ્યો પસંદ કરી શકો છો. આપણે પસંદ કર્યાં છે તે મૂલ્ય પસંદ કરવા જરૂરી નથી. તમે અનુમાન કરી શકો કે, આપણે શા માટે પ્રથમ સમીકરણમાં અને બીજા સમીકરણમાં $x = 0$ પસંદ કર્યું છે ? જ્યારે એક ચલ શૂન્ય હોય છે ત્યારે સમીકરણ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ મળશે અને તે સરળતાથી ઉકેલી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ (2) માં $x = 0$ મૂકતાં, આપણને $4y = 20$ મળે એટલે કે $y = 5$ મળે છે. તે જ રીતે સમીકરણ (2) માં $y = 0$ મૂકતાં આપણને $3x = 20$ મળે. એટલે કે $x = \frac{20}{3}$ મળે છે. પણ $\frac{20}{3}$ એ પૂર્ણાંક નથી. આલેખપત્ર પર તેનું આલેખન સરળતાથી થઈ શકે નહિ. તેથી, આપણે $y = 2$ પસંદ કરીએ છીએ અને આપણને પૂર્ણાંક મૂલ્ય $x = 4$ મળે છે.

કોષ્ટક 3.1માંથી ઉકેલને સંગત બિંદુઓ A(0, 0), B(2, 1) અને P(0, 5), Q(4, 2) દર્શાવો. હવે રેખાઓ AB અને PQ દોરો. તે આકૃતિ 3.2 માં સમીકરણ $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ નું નિરુપણ કરે છે.



આકૃતિ 3.2

આકૃતિ 3.2 માં અવલોકન કરો કે બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ પરસ્પર બિંદુ Q (4, 2)માં છેદે છે. પછીના વિભાગમાં આપણે આનો શો અર્થ થાય છે તે અંગે ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : રોમીલાએ સ્ટેશનરીની દુકાનમાંથી 2 પેન્સિલ અને 3 રબર ₹ 9 માં ખરીદ્યાં હતાં. તેની મિત્ર સોનાલીએ રોમીલા પાસેની પેન્સિલોથી નવીન પ્રકારની પેન્સિલો અને રબર જોયાં અને તેણે પણ તેટલી જ કિંમતોવાળાં 4 પેન્સિલ અને 6 રબર ₹ 18માં ખરીદ્યાં હતા. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે 1 પેન્સિલની કિંમત ₹ x અને 1 રબરની કિંમત ₹ y છે. તેથી સમીકરણોનું બૈજિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે છે.

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

તેને સમકક્ષ આલેખાત્મક નિરુપણ મેળવવા માટે, આપણે દરેક સમીકરણનું નિરૂપણ કરતી રેખા પર બે બિંદુઓ શોધીશું. એટલે કે આપણે દરેક સમીકરણના બે ઉકેલો શોધીએ.

આ ઉકેલ કોષ્ટક 3.2 માં આપવામાં આવ્યા છે.

કોષ્ટક 3.2

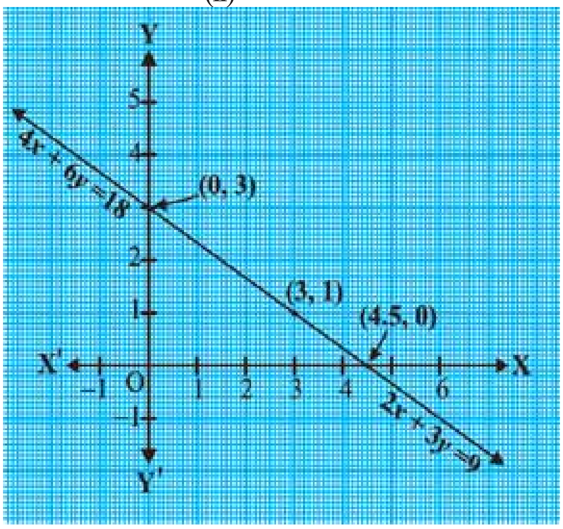
x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

આપણે આ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર મૂકીને રેખાઓ દોરીશું. આપણને બે સંપાતી રેખાઓ મળશે. (જુઓ આકૃતિ 3.3.) આમ બનવાનું કારણ એ છે કે, બંને સમીકરણો એકરૂપ છે. એટલે કે એક સમીકરણ પરથી બીજું સમીકરણ તારવી શકાય.



(2)

આકૃતિ 3.3

ઉદાહરણ 3 : રેલવેના બે પાટા સમીકરણ $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલા છે. આ પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણો

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2x + 4y - 12 = 0$$

ના બે-બે ઉકેલો કોષ્ટક 3.3 માં આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.3

x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

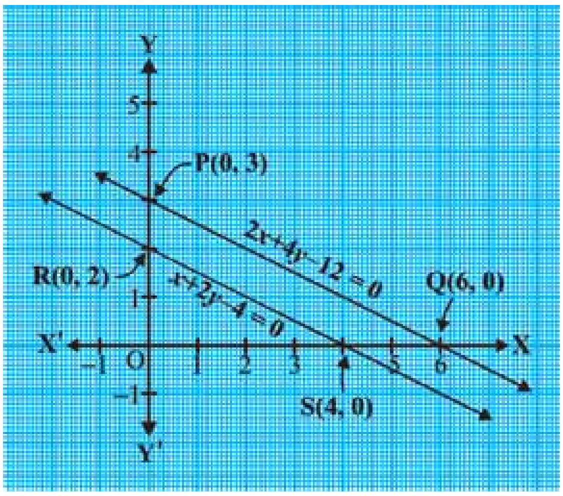
(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

સમીકરણોને આલેખપત્ર પર દર્શાવતાં આપણને બિંદુઓ R (0, 2) અને S (4, 0)ને જોડતી રેખા RS અને બિંદુઓ P (0, 3) અને Q (6, 0)ને જોડતી રેખા PQ મળે છે. આપણે આકૃતિ 3.4 માં અવલોકન કરીએ તો રેખાઓ ક્યાંય છેદતી નથી એટલે કે તે સમાંતર છે.

આપણે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ દ્વારા દર્શાવાતી કેટલીક પરિસ્થિતિ જોઈ. આપણે તેમને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવ્યા છે. હવે પછીના કેટલાક વિભાગમાં આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આ બૈજિક અને ભૌમિતિક રજૂઆતોના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મની જોડના ઉકેલો કેવી રીતે મેળવાય.



આકૃતિ 3.4

સ્વાધ્યાય 3.1

1. આફતાબ તેની દીકરીને કહે છે, ''સાત વર્ષ પહેલાં મારી ઉંમર તે વખતની તારી ઉંમર કરતાં સાત ગણી હતી હવે પછીનાં ત્રણ વર્ષ પછી મારી ઉંમર તારી તે વખતની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી હશે.'' (શું આ રસપ્રદ છે ?) આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

2. ક્રિકેટ ટીમના પ્રશિક્ષક ₹ 3900 માં 3 બૅટ અને 6 દડાઓ ખરીદે છે. પછી તે બીજું તે જ પ્રકારનું 1 બૅટ અને તે જ પ્રકારના વધુ 3 દડાઓ ₹ 1300 માં ખરીદે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3. એક દિવસે 2 કિગ્રા સફરજન અને 1 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિંમત ₹ 160 હતી. એક મહિના પછી 4 કિગ્રા સફરજન અને 2 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિંમત ₹ 300 હતી. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3.3 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

આના પહેલાના વિભાગમાં તમે જોઈ ગયાં કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓને આલેખપત્ર પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. તમે એ પણ જોઈ ગયાં કે રેખાઓ છેદે અથવા સમાંતર હોય કે સંપાતી હોઈ શકે. દરેક વિકલ્પમાં આપણે સમીકરણયુગ્મને ઉકેલી શકીએ ? અને જો આ શક્ય હોય તો કેવી રીતે બને? આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ ભૌમિતિક દૃષ્ટિકોણથી આપવા પ્રયત્ન કરીશું.

આપણે પહેલાનાં ઉદાહરણોને એક પછી એક જોઈએ.

- ઉદાહરણ 1ની પરિસ્થિતિમાં અખિલા ચકડોળમાં કેટલી વાર બેઠી હતી અને કેટલી વાર હૂપલા રમત રમી હતી, તે દર્શાવે છે.

આકૃતિ 3.2 માં તમે નોંધ્યું છે કે, ભૌમિતિક રીતે આ પરિસ્થિતિ (4, 2) માં છેદતી બે રેખાઓ દર્શાવે છે. તેથી બિંદુ (4, 2) એ બંને સમીકરણો $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ થી દર્શાવેલી રેખાઓ ઉપર છે અને આ જ એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ છે.

આપણે બૈજિક રીત વડે $x = 4$ અને $y = 2$ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલો છે તેમ ચકાસીએ. દરેક સમીકરણમાં x અને y નાં મૂલ્યોને મૂકતાં, આપણને $4 - 2 \times 2 = 0$ અને $3(4) + 4(2) = 20$ મળે. તેથી આપણે $x = 4$, $y = 2$ એ બે સમીકરણોના ઉકેલ છે તેમ ચકાસ્યું. બંને રેખાઓનું એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ (4, 2) છે. આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો એક અને માત્ર એક ઉકેલ છે.

આમ, અખિલા 4 વખત ચકડોળમાં બેસે છે અને 2 વખત હૂપલા રમત રમે છે.

ઉદાહરણ 2 ની પરિસ્થિતિમાં એક પેન્સિલની કિંમત અને એક રબરની કિંમત કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિ 3.3 માં પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક નિરૂપણ સંપાતી રેખાઓની જોડ દ્વારા દર્શાવ્યું છે. તે સમીકરણોના ઉકેલો આ રેખાઓનાં સામાન્ય બિંદુ છે.

શું આ રેખાઓ પર કોઈ સામાન્ય બિંદુઓ છે ? આલેખ પરથી આપણે અવલોકન કરીએ કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ એ બંને સમીકરણોનો સામાન્ય ઉકેલ છે. તેથી સમીકરણો $2x + 3y = 9$ અને $4x + 6y = 18$ ના ઉકેલોની સંખ્યા અનંત છે. આપણને તે આશ્ચર્ય પમાડતું નથી, કારણ કે, સમીકરણ $4x + 6y = 18$ ને 2 વડે ભાગવાથી આપણને $2x + 3y = 9$ મળશે. તે સમીકરણ (1) જ છે. તેથી, બંને સમીકરણો સમકક્ષ છે. આલેખ પરથી રેખાના દરેક બિંદુ પરથી આપણને પેન્સિલ અને રબરની કિંમત મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત અનુક્રમે ₹ 3 અને ₹ 1 છે તેમ કહી શકાય. અથવા એક પેન્સિલની કિંમત ₹ 3.75 અને એક રબરની કિંમત ₹ 0.50 અને આમ $2x + 3y = 9$ નું સમાધાન કરતાં અસંખ્ય x અને y મળે.

ઉદાહરણ 3 ની પરિસ્થિતિમાં શું તે રેલવેના પાટા એકબીજાને છેદી શકે છે ?

આકૃતિ 3.4 માં, બે સમાંતર રેખાઓ ભૌમિતિક રીતે રજૂ કરવામાં આવેલી છે. રેખાઓ એકબીજીને છેદતી નથી. તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી. આનો અર્થ એ પણ થાય છે કે, બે સમીકરણોને સામાન્ય ઉકેલ નથી.

જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ ન હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ

સમીકરણયુગ્મનાં બંને સમીકરણો સમાન હોય તેને અનંત ભિન્ન ઉકેલો હોય. આવા સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી સમીકરણો છે તેમ કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે જે સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી હોય તે સમીકરણો સુસંગત હોય છે જ.

સારાંશમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓનું નિરૂપણ અને ઉકેલના અસ્તિત્વ વિશે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ :

(i) રેખાઓ એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોની જોડીને એક (અનન્ય) ઉકેલ છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ)

(ii) રેખાઓ સમાંતર હોઈ શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને કોઈ ઉકેલ નથી. (સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.)

(iii) રેખાઓ સંપાતી છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને અનંત ઉકેલો છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ, અવલંબી સમીકરણો)

ચાલો આપણે ઉદાહરણ 1, 2 અને 3 તરફ પાછા વળીએ અને ભૌમિતિક રીતે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કેવું રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે તે નોંધીએ.

(i) $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y - 20 = 0$ (રેખાઓ છેદે છે.)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ અને $4x + 6y - 18 = 0$ (રેખાઓ સંપાતી છે.)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ (રેખાઓ સમાંતર છે.)

હવે આપણે ત્રણે ઉદાહરણની $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમતો લખીએ અને તમામને સરખાવીએ.

અહીંયા a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 એ વિભાગ 3.2 માં આવેલા પ્રમાણિત સ્વરૂપનાં સમીકરણોના સહગુણકો છે.

કોષ્ટક 3.4

ક્રમ નં.	રેખાઓની જોડ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ગુણોત્તરોની સરખામણી	આલેખાત્મક સ્વરૂપ	બૈજિક સ્વરૂપ
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	છેદતી રેખાઓ	માત્ર એક ઉકેલ (અનન્ય)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	સંપાતી રેખાઓ	અનંત ઉકેલો
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ એટલે કે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$	સમાંતર રેખાઓ	ઉકેલ નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાંથી, તમે જોઈ શકો છો કે જો સમીકરણો

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ*

(i) છેદતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) સંપાતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) સમાંતર હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

વાસ્તવમાં કોઈ પણ રેખાઓની જોડ માટે ઉપરની ચર્ચા સત્ય છે. તમે તમારી જાતે પણ કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરી ઉપરની ચકાસણી કરી શકો છો.

આપણે હવે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 4 : સમીકરણયુગ્મ

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

સુસંગત છે કે નહિ તે ચકાસો. જો સુસંગત હોય તો આલેખની મદદથી ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણો (1) અને (2) ના આલેખ દોરીએ. આ માટે આપણે દરેક સમીકરણના બબ્બે ઉકેલ શોધીશું. (કોષ્ટક 3.5માં દર્શાવેલ)

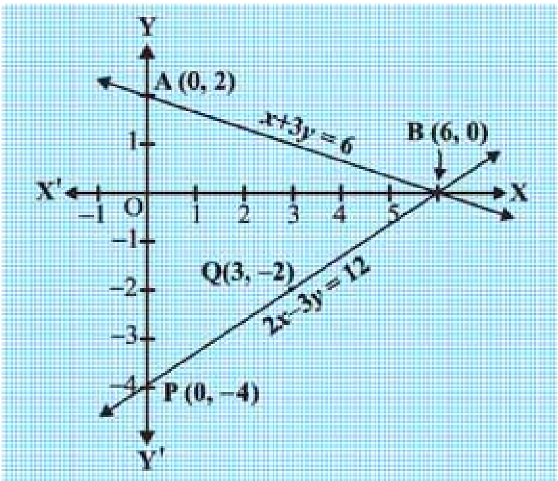
કોષ્ટક 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	–4	–2

આલેખપત્ર ઉપર બિંદુઓ A(0, 2), B(6, 0), P(0, –4) અને Q (3, –2) દર્શાવો. આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને જોડતી રેખાઓ AB અને PQ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, બિંદુ B(6, 0) એ બંને રેખાઓ AB અને PQ ઉપરનું સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી, સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ $x = 6$ અને $y = 0$ છે. આથી, આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.



આકૃતિ 3.5

ઉદાહરણ 5 : આલેખની રીતથી નીચેના સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ નથી, અનન્ય ઉકેલ છે અથવા અનંત ઉકેલો છે તે નક્કી કરો.

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને $\frac{5}{3}$ વડે ગુણતાં, આપણને

$5x - 8y + 1 = 0$ મળશે.

તે, સમીકરણ (1) ને સમાન છે. સમીકરણો (1) અને (2) દર્શાવતી રેખાઓ સંપાતી છે તેમ તેમનું નિરૂપણ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

આલેખ પર કેટલાંક બિંદુઓ દર્શાવો અને જાતે ચકાસો.

ઉદાહરણ 6 : ચંપા 'સેલ' માં કેટલાંક પેન્ટ અને સ્કર્ટ ખરીદવા ગઈ હતી. જ્યારે તેને તેના મિત્રોએ પૂછ્યું કે, તેણે દરેકની કેટલી સંખ્યાની ખરીદી કરી હતી, ત્યારે તેણે જવાબ આપ્યો, "પેન્ટની સંખ્યાના બે ગણામાંથી બે ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં. પણ પેન્ટની સંખ્યાના ચાર ગણામાંથી ચાર ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યા." ચંપાએ કેટલી સંખ્યામાં પેન્ટ અને કેટલી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં તે શોધવા તેના મિત્રોને મદદ કરો.

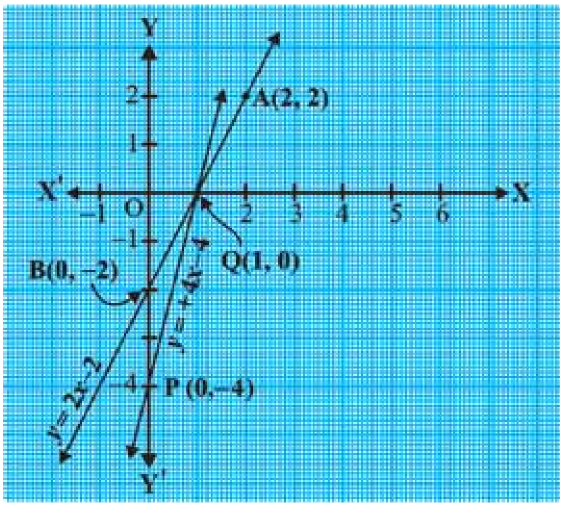
ઉકેલ : ધારો કે, ચંપાએ x પેન્ટ તથા y સ્કર્ટ ખરીદ્યા છે. આથી આપેલ માહિતી પરથી સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

અને

$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ના બે-બે ઉકેલોની મદદથી આલેખપત્ર પર આલેખ દોરો. કોષ્ટક 3.6 માં તેમના ઉકેલો આપેલા છે.



આકૃતિ 3.6

કોષ્ટક 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	–2

x	0	1
$y = 4x - 4$	–4	0

આકૃતિ 3.6 માં A(2, 2) તથા B(0, –2) માંથી પસાર થતી રેખા AB તથા P(0, –4) અને Q(1, 0) માંથી પસાર થતી રેખા PQ દોરો. સમીકરણોના ઉકેલ સમાવતાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓ દર્શાવો. તે બે રેખાઓ બિંદુ (1, 0) આગળ છેદે છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 0$ એ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ થશે. એટલે કે તે 1 પેન્ટ ખરીદે છે અને સ્કર્ટ ખરીદતી નથી.

ચકાસો : તમારો જવાબ આપેલા કૂટપ્રશ્નોની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેની સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમનો ઉકેલ આલેખની રીતે શોધો.

(i) ધોરણ X ના દસ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતના કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લે છે. જો ભાગ લેનાર છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતાં 4 વધારે હોય, તો કેટલાં છોકરાઓએ અને કેટલી છોકરીઓએ કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો હશે તે શોધો.

(ii) 5 પેન્સિલ અને 7 પેનની કુલ કિંમત ₹ 50 છે અને તે જ કિંમતવાળી 7 પેન્સિલ તથા 5 પેનની કુલ કિંમત ₹ 46 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક પેનની કિંમત શોધો.

2. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મથી બનતી રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે છે કે સમાંતર છે અથવા સંપાતી છે, તેમ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ગુણોત્તરોની તુલના કરીને નક્કી કરો :

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે ગુણોત્તર $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમત પરથી નક્કી કરો :

(i) $3x + 2y = 5 ; 2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8 ; 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7 ; 9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11 ; -10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8 ; 2x + 3y = 12$

4. નીચેના પૈકી કયું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે જણાવો. જો તે સુસંગત હોય, તો ભૌમિતિક રીતે ઉકેલ શોધો :

(i) $x + y = 5,\quad 2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8,\quad 3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0,\quad 4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0,\quad 4x - 4y - 5 = 0$

5. એક લંબચોરસ બગીચાની અર્ધપરિમિતિ 36 મીટર છે તથા તેની લંબાઈ એ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધુ છે, તો બગીચાની બાજુઓનાં માપ શોધો.

6. સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y - 8 = 0$ આપેલ છે. એવું બીજું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો કે જેથી બનતી જોડીનું ભૌમિતિક નિરૂપણ નીચે પ્રમાણે હોય :

(i) છેદતી રેખાઓ (ii) સમાંતર રેખાઓ (iii) સંપાતી રેખાઓ

7. સમીકરણો $x - y + 1 = 0$ અને $3x + 2y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x-અક્ષ દ્વારા રચાયેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ દર્શાવો અને બનતા ત્રિકોણાકાર પ્રદેશને છાયાંકિત કરો.

3.4 સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવાની બૈજિક રીત

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આલેખની રીત વિશે ચર્ચા કરી ગયાં. આલેખ પર $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ જેવાં પૂર્ણાંક ન હોય તેવા યામ ધરાવતાં બિંદુઓ આવતાં હોય ત્યારે આ રીત અનુકૂળ નથી. આવાં બિંદુઓ (આલેખપત્ર પર) આલેખવામાં ભૂલ થવાની શક્યતાઓ રહે છે. શું આવા યુગ્મનો ઉકેલ શોધવાની મુશ્કેલી દૂર કરવા બીજી કોઈ અન્ય રીતો છે ? આના માટે ઘણી બૈજિક રીતો છે. હવે આપણે, કેટલીક બૈજિક રીતો દ્વારા ઉકેલ શોધવાની ચર્ચા કરીશું.

3.4.1 આદેશની રીત : કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી આપણે આદેશની રીતની ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 7 : આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવો :

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : આ રીતમાં કોઈ પણ એક સમીકરણમાંથી એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવવામાં આવે છે.

ધારો કે સમીકરણ (2) લઈએ.

$x + 2y = 3$ ને

$x = 3 - 2y$ તરીકે લો. (3)

સોપાન 2 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$7(3-2y)-15y = 2$$
$$\therefore 21-14y-15y = 2$$
$$\therefore -29y = -19$$
$$\therefore y = \frac{19}{29}$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (3) માં y ની કિંમત મૂકતાં,

$$x = 3-2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

$\therefore$ ઉકેલ $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$ મળે.

ચકાસણી : તમે બંને સમીકરણોમાં $x = \frac{49}{29}$ અને $y = \frac{19}{29}$ મૂકશો તો જણાશે કે બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

આદેશની રીતને વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવા માટે નીચેનાં સોપાનો દ્વારા તેનો વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 : અનુકૂળ હોય તે રીતે એક સમીકરણ પરથી એક ચલ, ઉદાહરણ તરીકે, y ને બીજા ચલ x ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

સોપાન 2 : આ સિવાયના સમીકરણમાં y ની કિંમત મૂકતાં, સમીકરણ એક ચલ x ના સ્વરૂપમાં મળશે અને આપણે તેને ઉકેલી શકીશું.

કેટલીક વખત ઉદાહરણ 9 અને ઉદાહરણ 10 ની જેમ તમે ચલ વિનાનું વિધાન મેળવો તે શક્ય છે. જો આ વિધાન સત્ય હોય તો તમે અનુમાન કરી શકો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે. જો આ વિધાન અસત્ય હોય તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : સોપાન 1 ની મદદથી બીજા ચલ x ની કિંમતને સોપાન 2 ના સમીકરણમાં મૂકતાં ચલ y (અથવા x) ની કિંમત મળશે.

નોંધ : ***આપણે એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવીને સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવીએ છીએ. તેથી ઉકેલ મેળવવાની આ રીત આદેશની રીત તરીકે ઓળખાય છે.***

ઉદાહરણ 8 : સ્વાધ્યાય 3.1નો પ્રશ્ન નંબર 1 આદેશની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે આફતાબ અને તેની પુત્રીની વર્તમાન ઉંમર (વર્ષમાં) અનુક્રમે s અને t છે. આપેલ માહિતી પરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને આ પરિસ્થિતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$s-7 = 7(t-7)$, એટલે કે $s-7t+42 = 0$ (1) અને

$s+3 = 3(t+3)$, એટલે કે $s-3t = 6$ (2)

સમીકરણ (2)નો ઉપયોગ કરતાં, $s = 3t+6$ મળે છે. s ની આ કિંમત સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$(3t+6)-7t+42 = 0,$$
$$\therefore 4t = 48$$
તેથી $t = 12$.

સમીકરણ (2)માં t ની કિંમત મૂકતાં, આપણને

$s = 3(12)+6 = 42$ મળે.

તેથી, આફતાબ અને તેની પુત્રીની ઉંમર અનુક્રમે 42 વર્ષ અને 12 વર્ષ છે.

આ સમસ્યા માટે આ ઉકેલ સમીકરણોમાં મૂકી સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તેમ ચકાસી શકાય છે.

ઉદાહરણ 9 : વિભાગ 3.3 માંથી ઉદાહરણ 2 પરથી, 2 પેન્સિલો અને 3 રબરની કિંમત ₹ 9 છે અને 4 પેન્સિલોની અને 6 રબરની કિંમત ₹ 18 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$
$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

આપણે પ્રથમ ચલ x ની કિંમત y ના સ્વરૂપમાં દર્શાવતાં,

સમીકરણ $2x + 3y = 9$ માંથી $x = \frac{9-3y}{2}$ મળે છે. (3)

સમીકરણ (2) માં, x ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$
$$\therefore \; 18 - 6y + 6y = 18$$
$$\therefore \; 18 = 18$$

આ વિધાન y ની તમામ કિંમતો માટે સત્ય છે. આપણને y ની કોઈ નિશ્ચિત કિંમત ઉકેલ સ્વરૂપે મળતી નથી. તેથી આપણને x ની નિશ્ચિત કિંમત પણ મળતી નથી. આ પરિસ્થિતિ ઊભી થાય છે, કારણ કે બંને સમીકરણો સમાન છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે. આપણે નોંધીએ કે આલેખની રીતે પણ સમાન ઉકેલો મળે છે. (વિભાગ 3.2માં આકૃતિ 3.3 અનુસાર) આપણે એક પેન્સિલ અને એક રબરની અનન્ય કિંમત શોધી શકતા નથી, કારણ આ પરિસ્થિતિમાં તેને ઘણા સમાન ઉકેલો મળે છે.

ઉદાહરણ 10 : વિભાગ 3.2 ના ઉદાહરણ 3 નો વિચાર કરીએ. શું રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદશે ?

ઉકેલ : દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$
$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી x ને y ના સ્વરૂપમાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$x = 4 - 2y$$

હવે, સમીકરણ (2) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$
$$\therefore \; 8 - 12 = 0$$
$$\therefore \; -4 = 0$$

આ વિધાન અસત્ય છે.

તેથી સમીકરણોને એક પણ સામાન્ય ઉકેલ નથી, તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$
$\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ અને $2x - 4y = -24$ નો ઉકેલ શોધો અને એવો 'm' શોધો કે જેથી $y = mx + 3$ થાય.

3. નીચેની સમસ્યા ઉપરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને તેમનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) બે સંખ્યાનો તફાવત 26 છે અને એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી ત્રણ ગણી છે, તો તે બે સંખ્યા શોધો.

(ii) બે પૂરકકોણો પૈકી મોટો ખૂણો નાના ખૂણા કરતાં 18° મોટો હોય, તો તે પૂરકકોણો શોધો.

(iii) ક્રિકેટ ટીમના કોચે 7 બૅટ અને 6 દડાઓ ₹ 3800માં ખરીદ્યા. પછીથી તેણે તે જ કિંમતવાળા 3 બૅટ અને 5 દડાઓ ₹ 1750 માં ખરીદ્યાં. તો એક બૅટની કિંમત અને એક દડાની કિંમત શોધો.

(iv) એક શહેરમાં ટૅક્સીનું ભાડું નિશ્ચિત ભાડા અને અંતરના પ્રમાણમાં સંયુક્ત રીતે લેવાય છે. 10 કિમીના અંતર માટે ₹ 105 અને 15 કિમીની મુસાફરી માટે ₹ 155 ની ચુકવણી કરવી પડે છે. તો નિશ્ચિત ભાડું કેટલું અને પ્રતિ કિમી કેટલા દરે કિંમત ચૂકવી પડે ? મુસાફરે 25 કિમીની મુસાફરી માટે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડશે ?

(v) એક અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 2 ઉમેરતાં તે $\frac{9}{11}$ બને છે. જો અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 3 ઉમેરતાં તે $\frac{5}{6}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(vi) પાંચ વર્ષ પછી જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમર (વર્ષમાં) કરતાં ત્રણ ગણી હશે. પાંચ વર્ષ પહેલાં, જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમરથી સાત ગણી હોય, તો તેમની વર્તમાન ઉંમર શોધો ?

3.4.2 લોપની રીત :

હવે, આપણે એક અન્ય રીતમાં એક ચલનો લોપ (દૂર કરીને) કરવાની રીતનો વિચાર કરીશું. આ રીત આદેશની રીત કરતાં કેટલીક વાર વધારે અનુકૂળ રીત પડે છે. આપણે આ રીત કેવી રીતે કામ કરે છે તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 11 : બે વ્યક્તિની માસિક આવકનો ગુણોત્તર 9:7 છે અને તેમના માસિક ખર્ચનો ગુણોત્તર 4:3 છે. જો દરેક વ્યક્તિ માસિક ₹ 2000 ની બચત કરે, તો તેમની માસિક આવક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે વ્યક્તિની આવક અનુક્રમે ₹ $9x$ અને ₹ $7x$ છે અને તેમનો ખર્ચ અનુક્રમે ₹ $4y$ અને ₹ $3y$ છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતાં સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$9x - 4y = 2000 \qquad (1)$$

અને
$$7x - 3y = 2000 \qquad (2)$$

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ (2) ને 4 વડે ગુણતાં y ના સહગુણકો સમાન બનશે. આપણને સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$27x - 12y = 6000 \qquad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \qquad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (4) માંથી સમીકરણ (3) બાદ કરતાં, y નો લોપ થશે, કારણ કે y ના સહગુણકો સરખા છે.

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$
$$\therefore x = 2000$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$9(2000) - 4y = 2000$$
$$\therefore y = 4000$$

તેથી, સમીકરણોના ઉકેલ $x = 2000$, $y = 4000$ છે તેથી બંને વ્યક્તિઓની માસિક આવક અનુક્રમે ₹ 18,000 અને ₹ 14,000 છે.

ચકાસણી : 18000 : 14000 = 9 : 7

અને તેમના ખર્ચનો ગુણોત્તર = 18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3 મળશે.

નોંધ :

1. ***ઉપરના ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા માટે વપરાયેલ પદ્ધતિને 'લોપની રીત' કહેવામાં આવે છે, કારણ કે આપણે પ્રથમ એક ચલનો લોપ કરીને એક ચલનું સુરેખ સમીકરણ મેળવીએ છીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે y નો લોપ કર્યો હતો. આપણે x નો લોપ પણ કરી શકીએ.***

   તે રીતનો પ્રયત્ન જાતે કરો.

2. ***તમે આ સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવા આદેશની રીત અથવા આલેખની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શક્યા હોત.***

   આમ કરતા જ રહો અને જુઓ કે કઈ રીત વધુ સાનુકૂળ છે.

આપણે લોપની રીતનાં સોપાનોને નીચે પ્રમાણે નોંધીશું :

સોપાન 1 : સૌપ્રથમ બંને સમીકરણોને કોઈ યોગ્ય શૂન્યેતર અચળ સંખ્યાઓ વડે ગુણવાથી (x અથવા y પૈકી કોઈ એકના સહગુણક) એક ચલના સહગુણકો સમાન થાય.

સોપાન 2 : ત્યાર બાદ એક સમીકરણમાં બીજું સમીકરણ ઉમેરો અથવા એક સમીકરણમાંથી બીજું સમીકરણ બાદ કરતાં એક ચલનો લોપ થશે. જો તમને એક ચલનું સમીકરણ મળે તો સોપાન 3 પર જાઓ.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું સત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળશે.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું અસત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. એટલે કે તે સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : એક ચલ સુરેખ સમીકરણ ઉકેલતાં આપણને (x અથવા y) કોઈ એક ચલની કિંમત મળે.

સોપાન 4 : મૂળ સમીકરણ પૈકીના કોઈ એક સમીકરણમાં x (અથવા y)ની કિંમત મૂકતાં આપણને બીજા ચલની કિંમત મળે છે.

હવે, તે સમજવા માટે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ઉકેલીશું.

ઉદાહરણ 12 : નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મના શક્ય ઉકેલો લોપની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો :

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 2 વડે અને સમીકરણ (2) ને 1 વડે ગુણતાં x ના સહગુણકો સમાન મળશે. આપણને સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે.

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$\therefore (4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

$$\therefore 0 = 9.$$ આ અસત્ય વિધાન છે.

તેથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

ઉદાહરણ 13 : બે અંકોની એક સંખ્યા અને તે સંખ્યાના અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યાનો સરવાળો 66 છે. જો તે સંખ્યાના અંકોનો તફાવત 2 હોય, તો તે સંખ્યા શોધો. આવી કેટલી સંખ્યાઓ છે ?

ઉકેલ : ધારો કે બે અંકોની પ્રથમ સંખ્યાના દશકનો અંક અને એકમનો અંક અનુક્રમે x અને y છે.

તેથી પ્રથમ સંખ્યા દશાંશ રૂપમાં $10x + y$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે $56 = 10\,(5) + 6$)

જ્યારે અંકોની અદલાબદલી કરતાં x એ એકમનો અંક અને y દશકનો અંક બનશે. આ સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ $10y + x$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે 56 ના અંકોની અદલાબદલી પછીનું સ્વરૂપ $65 = 10\,(6) + 5$)

આપેલ શરત અનુસાર,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$\therefore 11(x + y) = 66$$

$$\therefore x + y = 6 \quad (1)$$

આપણને આપેલ છે કે તે સંખ્યાના બે અંકોનો તફાવત 2 છે.

$$\therefore \quad x - y = 2 \quad (2)$$

અથવા $y - x = 2$ (3)

જો $x - y = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (2) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 4$ અને $y = 2$ મળે. આ સ્થિતિમાં આપણને માંગેલ સંખ્યા 42 મળે.

જો $y - x = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 2$ અને $y = 4$ મળે.

આ સ્થિતિમાં, આપણને માંગેલ સંખ્યા 24 મળે.

આમ, આપણને બે સંખ્યાઓ 42 અને 24 માંગ્યા પ્રમાણે મળે છે.

ચકાસણી : અહીં $42 + 24 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ તથા $24 + 42 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ મળે છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ લોપની રીતે અને આદેશની રીતે શોધો :

(i) $x + y = 5$ અને $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ અને $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ અને $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ અને $x - \frac{y}{3} = 3$

2. આપેલી સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમના ઉકેલો (જો શક્ય હોય તો) લોપની રીતે શોધો :

(i) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાં 1 ઉમેરતાં અને છેદમાંથી 1 બાદ કરતાં અપૂર્ણાંક કિંમત અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં 1 બને છે. જો માત્ર છેદમાં 1 ઉમેરતાં અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{2}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(ii) પાંચ વર્ષ પહેલાં, નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી ત્રણ ગણી હતી. દસ વર્ષ પછી નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી બે ગણી થશે, તો નૂરી અને સોનુની વર્તમાન ઉંમર કેટલી થશે ?

(iii) બે અંકોની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. વળી સંખ્યાના નવ ગણા કરતાં મળતી સંખ્યા એ અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યા કરતાં બે ગણી છે, તો તે સંખ્યા શોધો.

(iv) મીના ₹ 2000 ઉપાડવા બૅન્કમાં ગઈ હતી. તેણે કૅશિયરને કહ્યું હતું કે મને માત્ર ₹ 50 અને ₹ 100 ની નોટો જ જોઈએ છે. મીનાને કુલ 25 નોટો મળી હતી. તો તેણે ₹ 50 અને ₹ 100 ની પ્રત્યેકની કેટલી કેટલી નોટો મેળવી હશે ?

(v) એક પ્રતિષ્ઠિત પુસ્તકાલય પ્રથમ ત્રણ દિવસનું એક પુસ્તકનું નિશ્ચિત ભાડું લે છે અને પછીના પ્રત્યેક દિવસ દીઠ અતિરિક્ત ભાડું લે છે. સરિતા સાત દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 27 ચૂકવે છે. સુસી પાંચ દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 21 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત ભાડું અને પ્રત્યેક વધારાના દિવસનું ભાડું શોધો.

3.4.3 ચોકડી ગુણાકારની રીત :

અત્યાર સુધી તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આલેખની રીતે, આદેશની રીતે અને લોપની રીતે કેવી રીતે મેળવવો તે શીખ્યાં.

હવે આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની એક વધુ બૈજિક રીતનો પરિચય મેળવીશું. ઘણા બધાં કારણોસર સમીકરણોના ઉકેલ માટે આ રીત ઉપયોગી છે. આગળ વધતાં પહેલાં આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

જો 5 નારંગી અને 3 સફરજનની કિંમત ₹ 35 અને 2 નારંગી અને 4 સફરજનની કિંમત ₹ 28 હોય, તો આપણે એક નારંગી અને એક સફરજનની કિંમત શોધીએ.

ધારો કે એક નારંગીની કિંમત ₹ x અને એક સફરજનની કિંમત ₹ y છે. તેથી આપણને આ પ્રમાણે સમીકરણ મળે.

$$5x + 3y = 35, \text{ એટલે કે } 5x + 3y - 35 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y = 28, \text{ એટલે કે } 2x + 4y - 28 = 0 \quad (2)$$

આપણે, આ સમીકરણોનો ઉકેલ લોપની રીતથી મેળવીએ.

સમીકરણ (1) ને 4 વડે ગુણો અને સમીકરણ (2) ને 3 વડે ગુણો,

જેથી, $(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \quad (3)$

$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \quad (4)$

સમીકરણ (3)માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં

$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$

$$\therefore x = \frac{-[(4)(-35)-3(-28)]}{(5)(4)-(3)(2)}$$

$$\therefore x = \frac{(3)(-28)-(4)(-35)}{(5)(4)-(2)(3)} \quad (5)$$

જો સમીકરણ (1) અને (2)ને $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, વડે દર્શાવીએ તો, આપણને $a_1 = 5$, $b_1 = 3$, $c_1 = -35$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, $c_2 = -28$ મળે. તેથી,

સમીકરણ (5) ને $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ તરીકે લખી શકાય.

તે જ રીતે, તમને $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ મળી શકે.

સમીકરણ (5) નું સાદું રૂપ આપતાં, આપણને

$$x = \frac{-84+140}{20-6} = 4$$

તે જ રીતે, $y = \frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6} = \frac{-70+140}{14} = 5$

તેથી $x = 4$, $y = 5$ એ આપેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ છે.

તેથી એક નારંગીની કિંમત ₹ 4 અને એક સફરજનની કિંમત ₹ 5 છે.

ચકાસણી : 5 નારંગીની કિંમત + 3 સફરજનની કિંમત = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35.

2 નારંગીની કિંમત + 4 સફરજનની કિંમત = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28.

ચાલો આપણે જોઈએ કે આ પદ્ધતિ કોઈ પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ માટે કેવી રીતે ઉપયોગી છે.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ઉપરનાં સમીકરણોમાંથી x અને y ની કિંમત મેળવવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને b_2 વડે અને સમીકરણ (2) ને b_1 વડે ગુણતાં,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2\,y + b_1c_2 = 0 \text{ મળે.} \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં, આપણને,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

$$\therefore (b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\text{તેથી, } x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ જ્યાં, } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad (5)$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) અથવા (2) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$\text{આપણને, } y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ મળશે.} \quad (6)$$

હવે, આપણને બે વિકલ્પો મળશે.

વિકલ્પ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. આ પરિસ્થિતિમાં, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

તેથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળે.

વિકલ્પ 2 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, તો આપણે $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ લખીએ, તો

$a_1 = k\, a_2$, $b_1 = k\, b_2$ થશે.

સમીકરણ (1) માં a_1 અને b_1 ની કિંમતો મૂકતાં, આપણને

$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0$ મળશે. (7)

સમીકરણ (7) અને (2) બંને સમીકરણોનું સમાધાન માત્ર $c_1 = kc_2$, એટલે કે $\frac{c_1}{c_2} = k$ માટે થાય છે તેમ અવલોકન કરી શકાય.

જો $c_1 = kc_2$, તો સમીકરણ (2) નો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરશે અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે.

તેથી, જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

જો $c_1 \neq kc_2$, તો સમીકરણ (2) માટેનો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન નહિ કરે અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ની ઉપર્યુક્ત ચર્ચાને સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

***(i)* જ્યારે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ત્યારે આપણને અનન્ય ઉકેલ મળે છે.**

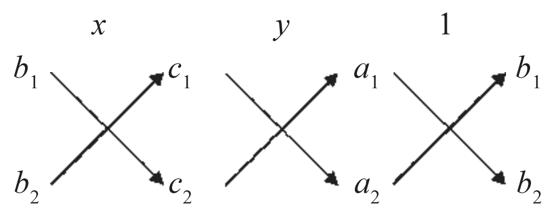
***(ii)* જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ત્યારે અનંત ઉકેલો મળે છે.**

***(iii)* જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ત્યારે ઉકેલ નથી.**

સમીકરણ (5) અને (6) ના ઉકેલોને તમે નીચે પ્રમાણે પણ નોંધી શકો :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

ઉપરના પરિણામ યાદ રાખવા નીચે પ્રમાણેની આકૃતિ તમને ઉપયોગી થશે :



બે સંખ્યાઓ વચ્ચેના તીર પરથી સંકેત મળે છે કે, તેમનો ગુણાકાર કરવાનો છે અને પ્રથમ ગુણાકારથી પ્રાપ્ત સંખ્યામાંથી બીજા ગુણાકારથી પ્રાપ્ત સંખ્યા બાદ કરવાની છે.

આ પદ્ધતિથી સુરેખ સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે આગળ પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું.

સોપાન 1 : આપેલાં સમીકરણોને (1) અને (2) સ્વરૂપમાં લખો.

સોપાન 2 : ઉપરની આકૃતિનો ઉપયોગ કરી (8) માં બતાવ્યા પ્રમાણે સમીકરણો લખો.

સોપાન 3 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, તો x અને y શોધો.

સોપાન 2 પરથી આપણે કહી શકીએ કે, આ પદ્ધતિને શા માટે **ચોકડી ગુણાકારની રીત** કહેવામાં આવે છે.

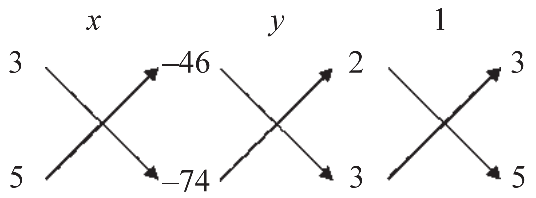
ઉદાહરણ 14 : જો આપણે બૅંગ્લોરના એક બસ સ્ટૅન્ડથી મલ્લેશ્વરમ્‌ની 2 ટિકિટ અને યશવંતપુરની 3 ટીકીટો ₹ 46 માં ખરીદી શકીએ. પરંતુ જો આપણે મલ્લેશ્વરમની 3 ટિકિટો અને યશવંતપુરની 5 ટિકિટો ₹ 74 માં મળે તો, બસ સ્ટૅન્ડથી મલ્લેશ્વરમ્ અને યશવંતપુરનું ભાડું શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બૅંગ્લોરથી મલ્લેશ્વરમ્ સુધીનું ભાડું ₹ x છે અને યશવંતપુરનું ભાડું ₹ y છે. આપેલી માહિતી અનુસાર આપણને નીચે પ્રમાણે સમીકરણો મળશે :

$2x + 3y = 46$, તેથી, $2x + 3y - 46 = 0$ (1)

$3x + 5y = 74$, તેથી, $3x + 5y - 74 = 0$ (2)

ચોકડી ગુણાકારની રીતથી સમીકરણના ઉકેલો મેળવવા આપણે નીચે પ્રમાણે આકૃતિ દોરીએ :



તેથી, $\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$

$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$

$\therefore \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$

$\therefore \frac{x}{8} = 1$ અને $\frac{y}{10} = 1$

$\therefore x = 8$ અને $y = 10$

તેથી, બૅંગ્લોરથી મલ્લેશ્વરમ્‌નું ભાડું ₹ 8 અને બૅંગ્લોરથી યશવંતપુરનું ભાડું ₹ 10 છે.

ચકાસણી : તમે ચકાસી શકો છો કે, આપણે શોધેલો સમસ્યાનો ઉકેલ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : p ની કઈ કિંમતથી નીચે આપેલ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ અનન્ય મળે ?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$

હવે, સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે. માટે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ આવશ્યક છે.

$\therefore \frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$

$\therefore p \neq 4$

તેથી, 4 સિવાયની p ની તમામ કિંમત માટે સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળશે.

ઉદાહરણ 16 : k ની કઈ કિંમત માટે નીચે આપેલા સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળે?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$
$$12x + ky - k = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

સુરેખ સમીકરણ યુગ્મને અનંત ઉકેલ હોવા માટે : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

આથી $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$.

આમ $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$ થવું જોઈએ.

$k^2 = 36$ મળે છે.

એટલે કે, $k = \pm 6$

$\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$ પણ આવશ્યક છે.

આપણને $3k = k^2 - 3k$, આવશ્યક છે.

એટલે કે, $6k = k^2$. તેનો અર્થ થાય છે કે $k = 0$ અથવા $k = 6$.

તેથી, $k = 6$ માટે સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલો માટેની બંને શરતોનું સમાધાન થાય છે. $k = 6$ માટે સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. નીચેનાં પૈકી કયાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ નથી અથવા અનંત ઉકેલો છે તે જણાવો. જો અનન્ય ઉકેલ હોય તો ચોકડી ગુણાકારની રીતે તેનો ઉકેલ શોધો :

   (i) $x - 3y - 3 = 0$, $3x - 9y - 2 = 0$
   (ii) $2x + y = 5$, $3x + 2y = 8$
   (iii) $3x - 5y = 20$, $6x - 10y = 40$
   (iv) $x - 3y - 7 = 0$, $3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને a અને b ની કઈ કિંમતો માટે અનંત ઉકેલો છે?

   $$2x + 3y = 7$$
   $$(a - b)\,x + (a + b)\,y = 3a + b - 2$$

   (ii) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને k ની કઈ કિંમત માટે ઉકેલ ન મળે?

   $$3x + y = 1$$
   $$(2k - 1)\,x + (k - 1)\,y = 2k + 1$$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે અને ચોકડી ગુણાકારની રીતે શોધો :

   $$8x + 5y = 9$$
   $$3x + 2y = 4$$

4. નીચેના કૂટપ્રશ્નોમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને કોઈ પણ બૈજિક રીતે તેમના ઉકેલ (જો શક્ય હોય તો) શોધો :

   (i) એક હોસ્ટેલના વિદ્યાર્થીઓનું ભોજનખર્ચ અંશતઃ અચળ અને અંશતઃ વિદ્યાર્થીઓએ જેટલા દિવસ ભોજન લીધું હોય તે દિવસોની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય છે. વિદ્યાર્થી A, 20 દિવસ ભોજન લે છે અને તેનું ભોજનખર્ચ ₹ 1000 ચૂકવે છે. વિદ્યાર્થી B, 26 દિવસ ભોજન લે છે અને ભોજનખર્ચ પેટે ₹ 1180 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત દૈનિકખર્ચ તથા દૈનિક ભોજનખર્ચ શોધો.

(ii) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે, તો નવા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{3}$ છે અને તે જ અપૂર્ણાંકના છેદમાં 8 ઉમેરવામાં આવે, તો મળતા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{4}$ થાય છે, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(iii) યશને એક કસોટીમાં 40 ગુણ મળ્યા હતા. તેને પ્રત્યેક સાચા જવાબના 3 ગુણ મળે છે અને પ્રત્યેક ખોટા જવાબ માટે 1 ગુણ કપાય છે. જો પરીક્ષકે દરેક સત્ય જવાબ માટે 4 ગુણ આપ્યા હોત અને દરેક ખોટા જવાબ માટે 2 ગુણ કાપ્યા હોત, તો યશે 50 ગુણ મેળવ્યા હોત, તો આ કસોટીમાં કેટલા પ્રશ્નો હતા ?

(iv) ધોરીમાર્ગ પર સ્થાન A અને સ્થાન B એકબીજાથી 100 કિમી દૂર છે. એક ગાડી A થી ઊપડે છે અને બીજી ગાડી B થી ઊપડે છે. ગાડીઓ એક જ દિશામાં ભિન્ન પરંતુ એકધારી ઝડપથી ચાલે તો 5 કલાકમાં એકબીજાને મળે છે. તેઓ એકબીજા તરફ ચાલે તો તે 1 કલાકમાં મળે છે, તો બે ગાડીઓની ઝડપ કેટલી હશે?

(v) જો એક લંબચોરસની લંબાઈમાં 5 એકમ ઘટાડો થાય અને પહોળાઈમાં 3 એકમ વધારો થાય, તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ 9 ચોરસ એકમ જેટલું ઘટે છે. જો આપણે લંબાઈમાં 3 એકમ અને પહોળાઈમાં 2 એકમ વધારીએ તો ક્ષેત્રફળ 67 ચોરસ એકમ વધે છે. તો લંબચોરસનાં પરિમાણ શોધો.

3.5 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી શકાય તેવાં સમીકરણો

આ વિભાગમાં આપણે સુરેખ ન હોય પરંતુ યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય એવાં સમીકરણયુગ્મ જાઈશું. આ માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : આપેલા સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ શોધો :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13,$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

ઉકેલ : આપણે સમીકરણયુગ્મને આ રીતે લખીએ,

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

આ સમીકરણો $ax + by + c = 0$ ના સ્વરૂપમાં નથી. હવે સમીકરણ (1) અને (2) માં,

$\frac{1}{x} = p$ અને $\frac{1}{y} = q$ આદેશ લેતાં,

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

તેથી, આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સ્વરૂપ મળશે.

હવે, આપણે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીએ અને તેમ કરતાં $p = 2$, $q = 3$ મળશે.

તમે જાણો છો કે, $p = \frac{1}{x}$ અને $q = \frac{1}{y}$

p અને q ની કિંમત મૂકતાં,

$\frac{1}{x} = 2$ એટલે કે $x = \frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{y} = 3$ એટલે કે $y = \frac{1}{3}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{2}$ અને $y = \frac{1}{3}$ એ આપેલ સમીકરણોમાં મૂકતાં, બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

ઉદાહરણ 18 : નીચેના સમીકરણયુગ્મોને સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને ઉકેલો :

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{1}{x-1} = p$ અને $\frac{1}{y-2} = q$.

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \quad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \quad (2)$$

રૂપાંતરિત સમીકરણો $5p + q = 2$ (3)

$6p - 3q = 1$ (4)

સમીકરણ (3) અને (4) સુરેખ સમીકરણયુગ્મના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે. હવે, તમે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણો ઉકેલી શકો. ઉકેલતાં આપણને $p = \frac{1}{3}$ અને $q = \frac{1}{3}$ મળશે.

હવે p માટે $\frac{1}{x-1}$ મૂકતાં, $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$ મળે.

$\therefore x - 1 = 3$ એટલે કે $x = 4$

તે જ રીતે q માટે $\frac{1}{y-2}$ મૂકતાં, $\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

$\therefore y - 2 = 3$ એટલે કે $y = 5$

$x = 4, y = 5$ એ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ છે.

ચકાસણી : સમીકરણ (1) અને (2) માં $x = 4$ અને $y = 5$ મૂકી જોતાં સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તે ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 19 : એક હોડી નદીના સામા પ્રવાહે 30 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 44 કિમી અંતર 10 કલાકમાં કાપે છે. તે હોડીને તે જ નદીમાં 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી અંતર પ્રવાહની દિશામાં કાપતાં 13 કલાક જેટલો સમય લાગે છે. નદીના પ્રવાહની અને હોડીની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x કિમી/કલાક છે અને પ્રવાહની ઝડપ y કિમી/કલાક છે. તેથી પ્રવાહની દિશામાં હોડીની ઝડપ $(x + y)$ કિમી/કલાક થાય અને સામા પ્રવાહે હોડીની ઝડપ $(x - y)$ કિમી/કલાક થશે.

ઉપરાંત સમય = $\frac{\text{અંતર}}{\text{ઝડપ}}$

તેથી હોડી 30 કિમી પ્રવાહની સામેની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_1 લઈએ તો

$$t_1 = \frac{30}{x-y}$$

જો હોડી 44 કિમી પ્રવાહની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_2 લઈએ તો

$$t_2 = \frac{44}{x+y}$$

વળી, $t_1 + t_2 = 10$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

તે જ પ્રમાણે, 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં અંતર કાપતાં લાગતો સમય 13 કલાક છે.

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

(1) અને (2) માં $\frac{1}{x-y} = u$ અને $\frac{1}{x+y} = v$ લઈએ, (3)

સમીકરણ (1) અને (2)માં આ કિંમતો મૂકતાં આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મળશે.

$30u + 44v = 10$ અથવા $30u + 44v - 10 = 0$ (4)

$40u + 55v = 13$ અથવા $40u + 55v - 13 = 0$ (5)

ચોકડી ગુણાકારની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{u}{44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{30(55)-44(40)}$$

$$\therefore \frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

$$\therefore u = \frac{1}{5}, v = \frac{1}{11}$$

હવે, u અને v ની કિંમત સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5}$ અને $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$

$\therefore x - y = 5$ અને $x + y = 11$ (6)

આ સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં,

$2x = 16$

$\therefore x = 8$

(6) માં આપેલ સમીકરણોની બાદબાકી કરતાં,

$2y = 6$

$\therefore y = 3$

સ્થિર પાણીમાં હોડીની ઝડપ 8 કિમી/કલાક અને નદીના પ્રવાહની ઝડપ 3 કિમી/કલાક છે.

ચકાસણી : ઉકેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.6

1. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મને યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને તેમનો ઉકેલ મેળવો :

(i) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$, $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$, $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$, $\frac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$, $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$, $\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$, $2x + 4y = 5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$, $\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

2. નીચેની સમસ્યાઓમાંથી સમીકરણયુગ્મ રચો અને તેમનો ઉકેલ શોધો :

(i) રીતુ પ્રવાહની દિશામાં 20 કિમી અંતર 2 કલાકમાં અને પ્રવાહની સામેની દિશામાં 4 કિમી અંતર 2 કલાકમાં કાપે છે. તેની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ અને પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

(ii) 2 સ્ત્રીઓ અને 5 પુરુષો સાથે મળીને એક ભરતકામ 4 દિવસમાં પૂરું કરી શકે છે. જો 3 સ્ત્રીઓ અને 6 પુરુષોને તે જ કામ સોંપવામાં આવે તો તે કામ 3 દિવસમાં પૂરું કરે છે. તો એક સ્ત્રીને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ? એક પુરુષને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ?

(iii) રૂહી તેના વતન જવા માટે 300 કિમીની મુસાફરી અંશતઃ ટ્રેન દ્વારા અને અંશતઃ બસ દ્વારા કરે છે. જો તે 60 કિમી મુસાફરી ટ્રેન દ્વારા અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 4 કલાક લાગે છે. જો તે ટ્રેન દ્વારા 100 કિમી અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 10 મિનિટ વધારે લાગે છે, તો ટ્રેન અને બસની પ્રતિ કલાક સરેરાશ ઝડપ શોધો.

સ્વાધ્યાય 3.7 (વૈકલ્પિક)*

1. બે મિત્રો અની અને બીજુની ઉંમરનો તફાવત 3 વર્ષ છે. અનીના પિતા ધરમની ઉંમર (વર્ષમાં) અનીની ઉંમરથી બમણી અને બીજુની ઉંમર (વર્ષમાં) તેની બહેન કેથી કરતાં બે ગણી છે. જો કેથી અને ધરમની ઉંમરના વર્ષનો તફાવત 30 વર્ષ હોય, તો અની અને બીજુની ઉંમર શોધો.

2. એક વ્યક્તિ તેના મિત્રને કહે છે, 'જો તું મને સો રૂપિયા આપે તો મારી પાસે તારાથી બે ગણા રૂપિયા હશે.' બીજો વ્યક્તિ કહે છે "જો તું મને દસ રૂપિયા આપે, તો મારી પાસે તારાથી છ ગણા રૂપિયા હશે." અનુક્રમે બંનેની મૂડી રકમ જણાવો.

[ભાસ્કર-II ના બીજગણિતમાંથી] [સૂચન : $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$]

3. એક ટ્રેન અચળ ઝડપે ચોક્કસ અંતર કાપે છે. જો ટ્રેનની ઝડપમાં 10 કિમી/કલાક વધારો થાય તો, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 2 કલાક ઓછો સમય લે છે અને ટ્રેનની ઝડપમાં 10 કિમી/કલાકનો ઘટાડો કરતાં, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 3 કલાક વધારે સમય લે છે, તો ટ્રેન દ્વારા કપાયેલું કુલ અંતર શોધો.

4. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને હારમાં ઊભા રાખવામાં આવ્યા છે. દરેક હારમાં 3 વિદ્યાર્થીઓ વધારે ઊભા રાખતાં 1 હાર ઓછી બને છે. 3 વિદ્યાર્થીઓ પ્રત્યેક હારમાં ઓછા ઊભા રાખતાં 2 હાર વધારે બને છે, તો વર્ગખંડમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

5. જો ΔABCમાં $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ હોય, તો ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપ શોધો.

6. સમીકરણો $5x - y = 5$ અને $3x - y = 3$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાના આલેખ દોરો. y-અક્ષ અને બંને રેખાઓ દ્વારા બનતાં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ જણાવો.

7. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ ઉકેલો :

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

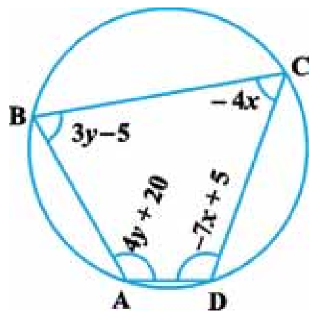
(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

8. (આકૃતિ 3.7 જુઓ.) જો ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય, તો તે ચક્રીય ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 3.7

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષા માટે ધ્યાનમાં લેવાનો નથી.

3.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. એકના એક જ બે ચલમાં બે સુરેખ સમીકરણોને આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહીશું.

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$, જ્યાં $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

તથા $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની બે રીતો છે :

(i) આલેખની રીત (ii) બૈજિક રીત

3. આલેખની રીત :

સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો આલેખ એક જ આલેખપત્ર પર બે રેખાઓ દર્શાવે છે.

(i) જો ઉપર્યુક્ત બંને રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ હોય અને બે રેખાઓના અનન્ય છેદબિંદુના યામ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ દર્શાવે. આ પરિસ્થિતિમાં આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

(ii) જો બંને રેખાઓ સંપાતી હોય, તો રેખા પરનાં અનંત બિંદુઓના યામ સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે તેમ કહેવાય. આ પરિસ્થિતિમાં બંને સમીકરણો સુરેખ અવલંબી છે તેમ કહેવાય.

(iii) જો બંને રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમનું સામાન્ય બિંદુ ન મળે. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણયુગ્મને કોઈ વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણો સુસંગત નથી તેમ કહેવાય :

4. સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે ત્રણ બૈજિક રીતો છે.

(i) આદેશની રીત (ii) લોપની રીત (iii) ચોકડી ગુણાકારની રીત

5. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પો ઉદ્ભવે છે.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે અને અવલંબી છે.

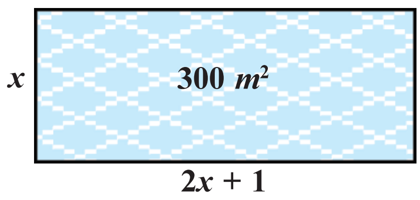
6. સુરેખ ન હોય તેવાં કેટલાંક સમીકરણોને યોગ્ય આદેશ પસંદ કરી સુરેખ સમીકરણમાં રૂપાંતર કરી શકાય છે.

■

દ્વિઘાત સમીકરણ 4

4.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 2 માં તમે વિવિધ પ્રકારની બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો. શૂન્યેતર a માટે $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ દ્વિઘાત બહુપદી છે. જો આ બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય લેવામાં આવે, તો આપણને દ્વિઘાત સમીકરણ મળે. વાસ્તવિક જીવનસંબંધી ઘણા બધા પ્રશ્નોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ધાર્મિક ટ્રસ્ટને 300 ચોરસ મીટર જગામાં જેની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 1 મીટર વધારે હોય તેવો એક પ્રાર્થનાખંડ બાંધવો છે. તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, તેની લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર હોવી જોઈએ. આપણે આ માહિતી આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે ચિત્ર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.



આકૃતિ 4.1

હવે, ખંડનું ક્ષેત્રફળ = $(2x + 1) \cdot x$ મી^{2} = $(2x^2 + x)$ મી^{2}

આથી, $2x^2 + x = 300$ (આપેલ છે.)

આમ, $2x^2 + x - 300 = 0$

આથી, ખંડની પહોળાઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

ઘણા લોકો માને છે કે સૌપ્રથમ બેબીલોનવાસીઓએ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવ્યો. ઉદાહરણ તરીકે, બે ધન સંખ્યાના સરવાળા અને ગુણાકાર આપેલ હોય, તો તે સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવવી તે એ લોકો જાણતાં હતાં અને આ પ્રશ્ન $x^2 - px + q = 0$ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાને સમકક્ષ છે. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી ***યુક્લિડે Euclid*** લંબાઈ શોધવાની ભૌમિતિક રીત વિકસાવી. તેને આપણે વર્તમાન પરિભાષામાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ કહીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, દ્વિઘાત સમીકરણ ઉકેલવાનો શ્રેય મોટે ભાગે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓને જાય છે. વાસ્તવમાં, ***બ્રહ્મગુપ્તે Brahmagupta*** (C.E. 598 - C.E.665) $ax^2 + bx = c$ દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટે સ્પષ્ટ સૂત્ર આપ્યું. પછીથી, ***શ્રીધર આચાર્ય Shridharacharya*** (C.E. 1025)એ દ્વિઘાત સૂત્ર તરીકે ઓળખાતું સૂત્ર પ્રસ્થાપિત કર્યું. (તેનો ઉલ્લેખ ભાસ્કર-II માં કરેલ છે.) તેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે પૂર્ણ વર્ગની

રીતનો ઉપયોગ કરાય છે. એક અરબ ગણિતશાસ્ત્રી ***અલ-ખ્વારિઝમી (Al-khwarizmi)*** (C.E. 800 ની આસપાસ)એ પણ વિવિધ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો હતો. ***અબ્રાહમ બાર હિયા હા-નાસી (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi)***એ યુરોપમાં C.E. 1145 માં તેણે લખેલ પુસ્તક ***Liber Embadorum*** માં ભિન્ન-ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણના પૂર્ણ ઉકેલ આપ્યા.

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણો અને તેમના ઉકેલ મેળવવા માટેની જુદી-જુદી રીત શીખશો. દ્વિઘાત સમીકરણના રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગ પણ જોશો.

4.2 દ્વિઘાત સમીકરણ

a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તથા $a \neq 0$ હોય, તો ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $2x^2 + x - 300 = 0$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. આ જ રીતે, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ અને $1 - x^2 + 300 = 0$ પણ દ્વિઘાત સમીકરણો છે.

ખરેખર તો $p(x)$ એ 2 ઘાતની બહુપદી હોય, તો $p(x) = 0$ પ્રકારનું કોઈ પણ સમીકરણ, એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. પરંતુ જ્યારે આપણે $p(x)$ ના પ્રત્યેક પદને ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં લખીએ ત્યારે આપણને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ મળે છે. ***આમ, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય.***

આપણી આસપાસની દુનિયામાં અનેક જુદી-જુદી સ્થિતિમાં અને ગણિતનાં ભિન્ન ક્ષેત્રોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉદ્ભવ થતો હોય છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ સ્થિતિને ગાણિતિક રીતે વ્યક્ત કરો :

(i) જ્હૉન અને જીવંતી પાસે કુલ 45 લખોટીઓ છે. પ્રત્યેક વ્યક્તિ પાંચ-પાંચ લખોટી ખોઈ કાઢે છે અને હવે તેમની પાસે બાકી રહેલી લખોટીઓની સંખ્યાનો ગુણાકાર 124 છે, આપણે જાણવું છે કે તેમની પાસે શરૂઆતમાં કેટલી લખોટીઓ હતી.

(ii) એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલાંક રમકડાં બનાવે છે. પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (રૂપિયામાં) 55માંથી એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થતાં રમકડાંની સંખ્યા બાદ કરીએ તેટલો છે. કોઈ એક ચોક્કસ દિવસે ઉત્પાદન-ખર્ચ ₹ 750 છે. આપણે તે દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા જાણવી છે.

ઉકેલ :

(i) ધારો કે જ્હૉન પાસે x લખોટીઓ છે.

આથી, જીવંતી પાસેની લખોટીઓની સંખ્યા $= 45 - x$ (કેમ ?)

જ્હૉન પાસે 5 લખોટીઓ ખોઈ કાઢ્યા બાદની લખોટીઓની સંખ્યા $= x - 5$

જીવંતી પાસે 5 લખોટી ખોઈ કાઢ્યા પછી લખોટીની સંખ્યા $= 45 - x - 5 = 40 - x$

આથી, તેમનો ગુણાકાર $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

આથી, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (ગુણાકાર 124 આપેલ છે.)

$\therefore -x^2 + 45x - 324 = 0$

$x^2 - 45x + 324 = 0$

આથી, જ્હૉન પાસેની લખોટીની સંખ્યા, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 45x + 324 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. માંગેલ પ્રશ્નની આ ગાણિતિક રજૂઆત છે.

(ii) ધારો કે નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા x છે.

આથી, પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (₹ માં) = $55 - x$.

આથી, તે દિવસનો રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ = $x\,(55 - x)$

આથી, $x\,(55 - x) = 750$

$\therefore\ 55x - x^2 = 750$

$\therefore\ -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\therefore\ x^2 - 55x + 750 = 0$

આથી, નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 55x + 750 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. આ આપેલ પ્રશ્નની ગાણિતિક રજૂઆત છે.

ઉદાહરણ 2 : ચકાસો કે નીચેનાં સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે નહિ :

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x\,(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

ઉકેલ :

(i) ડા.બા. = $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

આથી, $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ને

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ તરીકે લખી શકાય.

$\therefore\ x^2 - 6x + 8 = 0$

$a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(ii) $x\,(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ અને

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ છે.

આથી, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$\therefore\ x + 12 = 0$

આ સમીકરણ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું નથી.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

(iii) અહીં, ડા.બા. $= x\,(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

આથી, $x\,(2x + 3) = x^2 + 1$ ને

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

આથી, $x^2 + 3x - 1 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે, $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(iv) અહીં, ડા.બા. $= (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

આથી, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ને

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

$6x^2 + 12x + 12 = 0$ **અથવા** $x^2 + 2x + 2 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

નોંધ : ચોકસાઈ રાખો. ઉપર (ii)માં આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું લાગે છે. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

ઉપર (iv)માં આપેલ સમીકરણ ત્રિઘાત સમીકરણ (3 ઘાતવાળું સમીકરણ) જેવું દેખાય છે, દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું નહિ. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણમાં પરિવર્તિત થાય છે. આમ જોઈ શકશો કે ઘણી વખત આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરતાં પહેલાં તેનું સાદું રૂપ આપવું જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચે આપેલ સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે કે કેમ તે ચકાસો :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. નીચે આપેલ પરિસ્થિતિઓને દ્વિઘાત સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) જમીનના એક લંબચોરસ ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ 528 મી^{2} છે. તેની લંબાઈ (મીટરમાં), પહોળાઈ (મીટરમાં)ના બમણાથી એક મીટર જેટલી વધુ છે. આપણે જમીનના આ ટુકડાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધવી છે.

(ii) બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર 306 છે. આપણે આ પૂર્ણાંક શોધવા છે.

(iii) રોહનની માતા તેના કરતાં 26 વર્ષ મોટાં છે. આજથી 3 વર્ષ પછી તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 360 હશે. આપણે રોહનની હાલની ઉંમર શોધવી છે.

(iv) એક ટ્રેન 480 કિમીનું અંતર અચળ ઝડપથી કાપે છે. જો ઝડપ 8 કિમી/કલાક ઓછી હોય, તો આટલું જ અંતર કાપવા તે 3 કલાક વધુ લે છે, તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

4.3 અવયવીકરણ વડે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નો વિચાર કરો. જો સમીકરણની ડાબી બાજુમાં x ને બદલે 1 લઈએ તો $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ જ.બા. મળે છે. આથી, આપણે કહી શકીએ કે દ્વિઘાત બહુપદી $2x^2 - 3x + 1$ નું એક શૂન્ય 1 છે.

વ્યાપક રીતે, જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ નું બીજ કહેવાય. આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે,

$x = \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ છે અથવા α દ્વિઘાત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આપણે નોંધીએ કે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો તથા દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

તમે પ્રકરણ 2 માં જોયું કે દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 શૂન્યો હોય. આથી, કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ 2 બીજ હોય.

તમે ધોરણ IX માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમ પદને બે ભાગમાં વહેંચી તેના અવયવ પાડવાની રીત શીખી ગયા. આપણે આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા કરીશું. જોઈએ, આ કેવી રીતે શક્ય બને છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અવયવ પાડીને શોધો.

ઉકેલ : આપણે સૌપ્રથમ મધ્યમપદ $- 5x$ ના બે ભાગ $- 2x$ અને $- 3x$ કરીએ.

[કેમ કે $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x\,(x - 1) -3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

હવે, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $(2x - 3)(x - 1) = 0$ લખી શકાય.

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ તથા $(2x - 3)(x - 1) = 0$ માટેનાં x નાં મૂલ્યો સમાન હશે.

અર્થાત્ $2x - 3 = 0$ અથવા $x - 1 = 0$.

હવે $2x - 3 = 0$ પરથી $x = \frac{3}{2}$ અને $x - 1 = 0$ પરથી $x = 1$ મળશે.

આથી, $x = \frac{3}{2}$ અને $x = 1$ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ હશે.

બીજા શબ્દોમાં, 1 અને $\frac{3}{2}$ સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ છે.

ચકાસો કે 1 અને $\frac{3}{2}$ આપેલ સમીકરણનાં બીજ છે.

આપણે નોંધીએ કે $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ, $2x^2 - 5x + 3$ ના બે સુરેખ અવયવ પાડી અને દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈને શોધ્યું છે.

ઉદાહરણ 4 : દ્વિઘાત સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,
$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1) \\ &= (3x - 2)\,(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2= 0$ નાં બીજ એ $(3x - 2)\,(2x + 1) = 0$ દ્વારા મળતાં x નાં મૂલ્યો છે.

આથી, $3x - 2 = 0$ અથવા $2x + 1 = 0$

અર્થાત્, $x = \frac{2}{3}$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$.

આથી, $6x^2 - x - 2= 0$ નાં બીજ $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ છે.

આપણે, $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ સમીકરણ $6x^2 - x - 2= 0$ નું સમાધાન કરે છે તે ચકાસીને બીજની ચકાસણી કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 5 : દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

આથી, સમીકરણનાં બીજ $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$ થાય તેવા x નાં મૂલ્યો છે.

આમ, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ પરથી $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

આથી, આ બીજ બે વખત પુનરાવર્તિત અવયવ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ને સંગત મળે છે.

આમ, $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : વિભાગ 4.1માં ચર્ચા કરેલ પ્રાર્થનાખંડની બાજુઓનાં માપ શોધો.

ઉકેલ : વિભાગ 4.1માં આપણે જોયું કે જો ખંડની પહોળાઈ x મી હોય તો x એ સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે. અવયવીકરણની રીતનો ઉપયોગ કરતાં, આપણે સમીકરણને $2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$ એમ લખી શકીએ.

$$\therefore 2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$\therefore (x - 12)(2x + 25) = 0$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ $x = 12$ અથવા $x = -12.5$ છે. પરંતુ x એ ખંડની પહોળાઈ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 12 મી અને તેની લંબાઈ $2x + 1 = 25$ મી.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચે આપેલ સમીકરણના ઉકેલ અવયવીકરણની રીતથી મેળવો :

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. ઉદાહરણ (1)માં આપેલ પ્રશ્નોના ઉકેલ અન્ય રીતે મેળવો.

3. બે એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેમનો સરવાળો 27 અને ગુણાકાર 182 હોય.

4. જેના વર્ગોનો સરવાળો 365 થાય એવી બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધો.

5. એક કાટકોણ ત્રિકોણનો વેધ તેના પાયા કરતાં 7 સેમી નાનો છે. જો કર્ણની લંબાઈ 13 સેમી હોય, તો બાકીની બે બાજુનાં માપ શોધો.

6. એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલીક માટીની વસ્તુઓ બનાવે છે. એક નિશ્ચિત દિવસે જણાયું કે પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત (રૂપિયામાં), તે દિવસે ઉત્પાદિત વસ્તુના બમણા કરતાં 3 વધુ હતી. જો તે દિવસે ઉત્પાદિત ખર્ચ ₹ 90 હોય તો, ઉત્પાદિત વસ્તુની સંખ્યા અને પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત શોધો.

4.4 પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલની એક રીત શીખ્યાં. આ વિભાગમાં આપણે તે માટેની બીજી રીત શીખીશું.

નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારો :

સુનીતાની અત્યારની ઉંમરથી બે વર્ષ પહેલાંની અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો (વર્ષમાં) ગુણાકાર તેની અત્યારની ઉંમરના બમણાં કરતાં એક વધુ છે. તો તેની અત્યારની ઉંમર કેટલી હશે ?

આનો જવાબ શોધવા, ધારો કે તેની અત્યારની ઉંમર x વર્ષ છે. તો અત્યારથી બે વર્ષ પહેલાં અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર $(x - 2)(x + 4)$ થાય.

આથી, $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

$\therefore x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore x^2 - 9 = 0$

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 9 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આપણે તેને $x^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં,

$x = 3$ અથવા $x = -3$ મળે. પરંતુ, ઉંમર ધન સંખ્યા હોવાથી, $x = 3$.

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર 3 વર્ષ છે.

હવે, દ્વિઘાત સમીકરણ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ નો વિચાર કરો. તેને ઉકેલવા, આપણે $(x + 2)^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં, આપણને $x + 2 = 3$ અથવા $x + 2 = -3$ મળે.

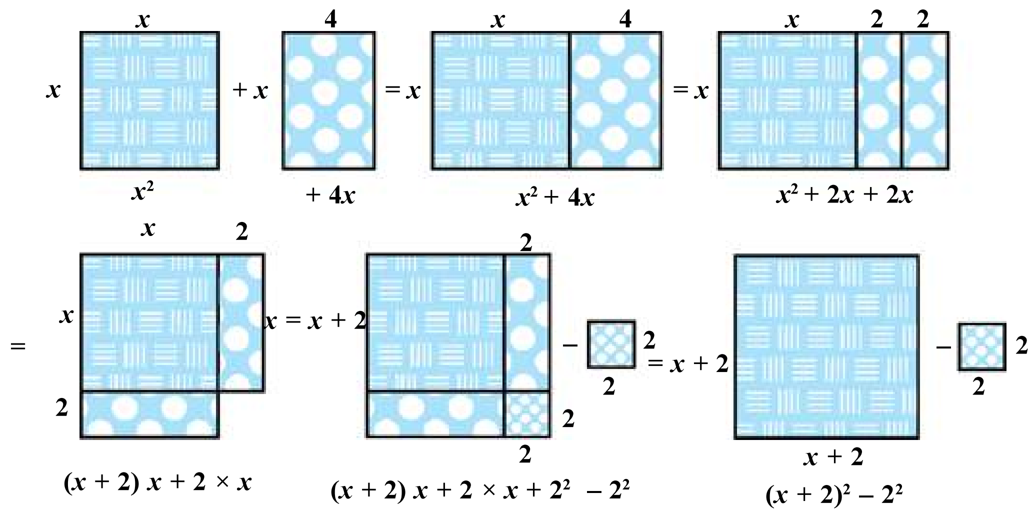
આથી, $x = 1$ અથવા $x = -5$

આમ, સમીકરણ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ નાં બીજ 1 અને -5 છે.

ઉપરના બંને ઉદાહરણોમાં x ને સમાવતું પદ પૂર્ણ વર્ગનું એક પદ છે અને આથી, વર્ગમૂળ લેતાં આપણે સરળતાથી બીજ શોધી શકીએ છીએ. પરંતુ સમીકરણ $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ શોધવાનું કહે, તો શું થાય ? આપણે ઘણુંખરું અવયવીકરણની રીત ઉપયોગમાં લઈએ, સિવાય કે (કોઈક રીતે !) આપણને સૂઝે કે $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ના ઉકેલ બરાબર છે. અલબત્ત, આપણે કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને $(x + a)^2 - b^2 = 0$ સ્વરૂપે ફેરવી શકીએ અને ત્યાર બાદ સરળતાથી તેનાં બીજ શોધી શકીએ. આવો જોઈએ કે શું આ સંભવ છે ? (જુઓ આકૃતિ 4.2.)

આ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x^2 + 4x$ ને $(x + 2)^2 - 4$ માં ફેરવેલ છે.



આકૃતિ 4.2

આ પ્રક્રિયા નીચે પ્રમાણે થાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x^2 + \frac{4}{2}x\right) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\, x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\, x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\, x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

આમ, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5$ ને પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની આ રીત પ્રમાણે તેને $(x + 2)^2 - 9 = 0$ તરીકે લખી શકાય. આ પ્રક્રિયાને **પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીત** કહેવાય છે.

ટૂંકમાં, તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નીચેની રીતે લખી શકાય.

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$\therefore (x + 2)^2 - 9 = 0$$

હવે, સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ લઈએ. આપણે નોંધીએ કે, x^2નો સહગુણક પૂર્ણવર્ગ નથી. આથી, સમીકરણની બંને બાજુએ 3 વડે ગુણતાં,

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

હવે, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$
$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$
$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ને

$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ તરીકે લખી શકાય.

$$\therefore \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ નાં બીજ અને $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ નાં બીજ સમાન છે.

$\therefore 3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ **અથવા** $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

(આપણે $3x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$ લખી શકીએ. જ્યાં ± ધન કે ઋણ દર્શાવે છે.)

$$\therefore 3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{અથવા} \quad 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{4}{6}$$

આમ, $x = 1$ અથવા $x = \frac{2}{3}$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ 1 અને $\frac{2}{3}$ છે.

નોંધ : આ પ્રશ્નના ઉકેલની બીજી રીત નીચે પ્રમાણે છે :

સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ અને

$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ સમાન છે.

હવે,
$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

આથી, $3x^2 - 5x + 2 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

આથી $x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$ અર્થાત્, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ અથવા $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

ચાલો આપણે આ પ્રક્રિયા દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : ઉદાહરણ 3માં આપેલ સમીકરણને પૂર્ણવર્ગની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ અને $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ સમાન છે.

હવે,
$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

આથી સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ નાં બીજ સમાન જ છે.

હવે, $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}=0$ અને $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ સમાન છે.

$\therefore x-\frac{5}{4}=\pm\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ અથવા $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ અથવા $x=1$

આથી, સમીકરણના ઉકેલ $x=\frac{3}{2}$ અને 1 છે.

ચાલો, આપણે આ ઉકેલ ચકાસીએ.

$2x^2-5x+3=0$ માં $x=\frac{3}{2}$ લેતાં, $2\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+3=0$ મળે, જે સત્ય છે.

આ જ રીતે, આપણે ચકાસી શકીએ કે $x=1$ પણ આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 7 માં સમીકરણ $2x^2-5x+3=0$ ને 2 વડે ભાગતાં $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$ મળે છે કે જેથી પ્રથમ પદ પૂર્ણવર્ગ બને છે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે છે અથવા સમીકરણની બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં, પ્રથમ પદ $4x^2=(2x)^2$ મળે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરી શકાય.

આ રીત નીચેના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ 8 : સમીકરણ $5x^2-6x-2=0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 5 વડે ગુણતાં,

$25x^2-30x-10=0$ મળે.

આથી, $(5x)^2-2\times(5x)\times(3)+3^2-3^2-10=0$

$\therefore (5x-3)^2-9-10=0$

$\therefore (5x-3)^2-19=0$

$\therefore 5x-3=\pm\sqrt{19}$

$\therefore 5x=3\pm\sqrt{19}$

આમ, $x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$

આથી, બીજ $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ છે.

ચકાસો કે, $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ બીજ છે.

ઉદાહરણ 9 : $4x^2 + 3x + 5 = 0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે $4x^2 + 3x + 5 = 0$ અને $(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$ સમાન છે.

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{71}{16} < 0$$

પરંતુ x ના કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$ ઋણ ના હોઈ શકે. (કેમ ?)

આથી, કોઈ જ વાસ્તવિક સંખ્યા x આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી.

હવે, તમે પૂર્ણવર્ગની રીતનાં ઘણાં ઉદાહરણો જોયાં.

આથી, આપણે વ્યાપક રીતે વિચારીએ.

દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ નો વિચાર કરો. બંને બાજુ શૂન્યેતર a વડે ભાગતાં,

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ મળે.

તે $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ ને સમાન છે.

એટલે કે $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ અને

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ અર્થાત્

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ નાં બીજ સમાન હશે. (1)

જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, સમીકરણ (1)ની બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી. *(કેમ ?)*

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ થાય.

દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવાના આ સૂત્રને **દ્વિઘાત સૂત્ર** કહેવાય છે.

ચાલો દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : સ્વાધ્યાય 4.1ના પ્રશ્ન 2(i)ને દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર થાય. હવે, આપણને આપેલ છે કે $x(2x + 1) = 528$ અર્થાત્ $2x^2 + x - 528 = 0$.

$a = 2, b = 1, c = -528$ માટે, આ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ સ્વરૂપનું છે.

આથી દ્વિઘાત સૂત્ર દ્વારા મળતો ઉકેલ,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)\ (528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$\therefore x = \frac{64}{4}$ અથવા $x = -\frac{66}{4}$

$\therefore x = 16$ અથવા $x = -\frac{33}{2}$

પરંતુ x ઋણ ના હોઈ શકે, કેમ કે તે એક પરિમાણ છે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 16 મીટર અને આથી લંબાઈ 33 મીટર થાય.

તમારે એ ચકાસવું જોઈએ કે આ કિંમતો આપેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 11 : બે ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો 290 હોય, તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ પૈકી નાની સંખ્યા x છે. આથી બીજી સંખ્યા $x + 2$ થાય.

આપેલ પ્રશ્ન મુજબ,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\therefore \quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 2x - 143 = 0$$

આ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$\therefore \ x = 11$ અથવા $x = -13$

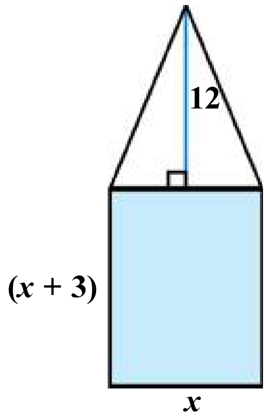
પરંતુ x ધન અયુગ્મ સંખ્યા આપેલ છે.

$\therefore$ $x \neq -13$. આથી $x = 11$

આથી, માંગેલ બે ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકો 11 અને 13 છે.

ચકાસો : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

ઉદાહરણ 12 : એક એવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવો છે કે જેની પહોળાઈ તેની લંબાઈ કરતાં 3 મી ઓછી હોય. તેનું ક્ષેત્રફળ જેનો પાયો લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ જેટલો હોય અને વેધ 12 મી હોય તેવા પહેલેથી બનેલા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણાકાર બગીચાના ક્ષેત્રફળ કરતાં 4 મી^{2} વધુ હોય લંબચોરસ બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 4.3).



આકૃતિ 4.3

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ x મી છે.

આથી, તેની લંબાઈ $= (x + 3)$ મી

આથી, લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= x\,(x + 3)$ મી^{2}

$= (x^2 + 3x)$ મી^{2}

હવે, સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો $= x$ મી

આથી તેનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ મી^{2}

આપણી જરૂરિયાત મુજબ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore\ x^2 - 3x - 4 = 0$$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ અથવા } -1$$

પરંતુ $x \neq -1$. (કેમ ?)

આથી, $x = 4$.

આમ, બગીચાની પહોળાઈ $= 4$ મી અને લંબાઈ 7 મી થશે.

ચકાસણી : લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= 28$ મી^{2}

ત્રિકોણાકાર બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= 24$ મી^{2} $= (28 - 4)$ મી^{2}

ઉદાહરણ 13 : દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, શક્ય હોય તો નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ મેળવો :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

ઉકેલ :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

અહીં, $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$

આથી, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$.

$\therefore\ x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$ અર્થાત્, $x = 1$ અથવા $x = \frac{2}{3}$

આમ, બીજ $\frac{2}{3}$ અને 1 છે.

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$.

અહીં, $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$

આથી, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ઋણ ના હોઈ શકે. આથી, $b^2 - 4ac$ નું વાસ્તવિક વર્ગમૂળ ન મળે.

આથી, આપેલ સમીકરણને એક પણ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$.

અહીં, $a = 2$, $b = -2\sqrt{2}$, $c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$.

$\therefore x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ અર્થાત્ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

આથી, બીજ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

ઉકેલ :

(i) સમીકરણ $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ને x વડે ગુણતાં,

$$x^2 + 1 = 3x$$

અર્થાત્, $x^2 - 3x + 1 = 0$.

આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 1, b = -3, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$ (કેમ?)

આથી, બીજ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ અને $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ છે.

(જુઓ કે $x \neq 0$)

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

$x \neq 0, 2$ હોવાથી, સમીકરણને $x(x-2)$ વડે ગુણતાં,

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

આથી, આપેલ સમીકરણ પરિવર્તિત થઈ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ બને. આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 3, b = -6, c = 2$ આથી, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$