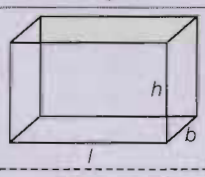
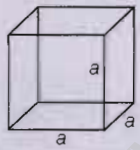
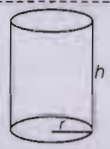
अध्याय

20

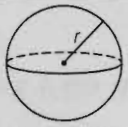
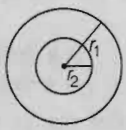
आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल

Volume and Surface Area

किसी त्रि-विमीय आकृति (3D) द्वारा जो स्थान घेरा जाता है, वह उस आकृति का 'आयतन' तथा उसके तल का क्षेत्रफल उसका 'पृष्ठीय क्षेत्रफल' कहलाता है। प्रतियोगी परीक्षाओं के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार की त्रि-विमीय आकृति पर आधारित प्रश्न पूछे जाते हैं। जिनमें से प्रमुख आकृतियों का संक्षिप्त परिचय निम्नलिखित है

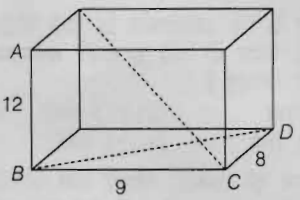
ठोस आकृति के नाम	आकृति	पार्श्व/वक्रपृष्ठ	सम्पूर्ण पृष्ठ	आयतन	नामांकन
घनाभ		$2h(l + b)$	$2(lb + bh + hl)$	lbh	l = लम्बाई b = चौड़ाई h = ऊँचाई विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$
घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a = घन की भुजा या कोर विकर्ण = $a\sqrt{3}$
लम्ब प्रिज्म		आधार का परिमाप × ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठ + 2 (एक सिरे का क्षेत्रफल)	आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई	–
लम्बवृत्तीय बेलन		$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$	πr^2h	r = आधार की त्रिज्या h = ऊँचाई
लम्ब पिरामिड		$\frac{1}{2}$ (आधार का परिमाप) × तिर्यक ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठ आधार का क्षेत्रफल	$\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई	–
लम्बवृत्तीय शंकु		πrl	$\pi r(r + l)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	r = आधार की त्रिज्या h = ऊँचाई l = तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

www.classroomnotes.in

ठोस आकृति के नाम	आकृति	पार्श्व/वक्रपृष्ठ	सम्पूर्ण पृष्ठ	आयतन	नामांकन
गोला		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r = त्रिज्या
अर्द्धगोला		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r = त्रिज्या
खोखला गोला		–	–	$\frac{4}{3}\pi(r_1^2 - r_2^2)$	r_1 = बाह्य त्रिज्या r_2 = आन्तरिक त्रिज्या

साधित उदाहरण

1. उस छड़ की अधिकतम लम्बाई क्या है जिसे 12 मी ×9 मी ×8 मी के कमरे में रखा जा सके?



(1) 288 मी (2) 29 मी (3) 17 मी (4) 13 मी
(5) 15 मी

हल *(3)* छड़ की अधिकतम लम्बाई

$$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{144 + 81 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ मी}$$

2. 8 सेमी त्रिज्या वाले बेलनाकार बर्तन में पानी भरा है। 2 सेमी त्रिज्या वाले ठोस गोले को पानी में पूरी तरह डूबने तक उतारा जाता है। बर्तन में जल स्तर कितना बढ़ जाएगा?

(1) 5 सेमी (2) 4 सेमी (3) $\frac{1}{6}$ सेमी (4) $\frac{1}{5}$ सेमी
(5) 8 सेमी

हल *(3)* माना जलस्तर h सेमी बढ़ गया।

$$\therefore \quad \pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow r^2 h = \frac{4}{3}R^3$$

$$\Rightarrow \quad 8^2 h = \frac{4}{3} \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow h = \frac{32}{64 \times 3} = \frac{1}{6} \text{ सेमी}$$

3. एक ताँबे के तार, जिसकी लम्बाई 36 मी तथा व्यास 2 मिमी है, को पिघलाकर एक गोला बनाया गया है। गोले का अर्द्धव्यास (सेमी में) है

(1) 2.5 (2) 3 (3) 3.5 (4) 4
(5) 4.5

हल *(2)* तार का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \pi \times 0.1 \times 0.1 \times 3600 = 36\pi \text{ घन सेमी}$$

$$\therefore \quad \text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$$

$$\Rightarrow \quad R^3 = \frac{36 \times 3}{4} = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ सेमी}$$

4. व्यास 6 सेमी वाली दो लोहे की गोलियाँ एक 6 सेमी अर्द्धव्यास वाले एक बेलनाकार बर्तन में डाले गए पानी में डुबोई जाती हैं। बर्तन में पानी का तल कितना ऊपर उठेगा?

(1) 1 सेमी (2) 2 सेमी
(3) 3 सेमी (4) 6 सेमी
(5) 5 सेमी

हल *(2)* लोहे की गोलियों के आयतन के बराबर पानी ऊपर उठेगा। माना बर्तन में पानी का तल x सेमी ऊपर उठता है।

$$\therefore \quad 2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (3)^3 = \pi \times (6)^2 \times x$$

$$\Rightarrow \quad 72\pi = 36\pi x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{72}{36} = 2 \text{ सेमी}$$

5. एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार के अर्द्धव्यास तथा उसकी ऊँचाई में से प्रत्येक को 10% बढ़ाया गया है। इससे बेलन के आयतन में वृद्धि होगी

(1) 3.31% (2) 14.5%
(3) 33.1% (4) 19.5%
(5) 27.19%

हल *(3)* बेलन का प्रारम्भिक आयतन $= \pi r^2 h$

नये बेलन का आयतन $= \pi(1.1r)^2 \times 1.1h = 1.331\pi r^2 h$

वृद्धि $= (1.331 - 1)\pi r^2 h = 0.331\pi r^2 h$

$$\therefore \quad \text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{0.331\pi r^2 h}{\pi r^2 h} \times 100 = 33.1\%$$

www.classroomnotes.in

अभ्यास प्रश्न

1. एक घनाभ का आयतन 64000 सेमी^{2} तथा उसकी भुजाओं का अनुपात 1 : 2 : 4 है। सबसे बड़ी भुजा की लम्बाई है
(1) 40 सेमी (2) 60 सेमी (3) 64 सेमी
(4) 80 सेमी (5) 90 सेमी

2. एक घन का आयतन 1000 सेमी^{3} है। उसके विकर्ण की लम्बाई है
(1) 10 सेमी (2) $10\sqrt{2}$ सेमी
(3) $10\sqrt{3}$ सेमी (4) $5\sqrt{2}$ सेमी
(5) $5\sqrt{3}$ सेमी

3. एक तार को पिघलाकर एक तिहाई त्रिज्या का तार बनाने पर तारों की लम्बाईयों में अनुपात होगा
(1) 1 : 2 (2) $2 : \sqrt{2}$ (3) 9 : 1
(4) 1 : 9 (5) 9 : 2

4. तीन घनों की भुजाएँ क्रमश: 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी है। इन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाया गया तो नये घन के विकर्ण की लम्बाई है
(1) $4\sqrt{3}$ सेमी (2) 6 सेमी (3) $6\sqrt{3}$ सेमी
(4) $4\sqrt{2}$ सेमी (5) $4\sqrt{3}$ सेमी

5. दो शंकुओं की ऊँचाईयों का अनुपात 25 : 64 तथा उनके व्यासों का अनुपात 4 : 5 हो, तो उनके आयतनों का अनुपात है
(1) 1 : 4 (2) 1 : 3 (3) 8 : 1
(4) $3 : \sqrt{5}$ (5) 1 : 2

6. किसी घनाभ के विकर्ण की लम्बाई 13 सेमी है तथा यदि उसकी चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 4 सेमी व 12 सेमी है, तो उसकी लम्बाई होगी
(1) 3 सेमी (2) 10 सेमी (3) 5 सेमी
(4) 6 सेमी (5) 8 सेमी

7. एक लम्ब प्रिज्म के आधार का क्षेत्रफल 8 सेमी^{2} है तथा उसका आयतन 64 सेमी^{3} है, तो उसकी ऊँचाई होगी
(1) 8 सेमी (2) 10 सेमी (3) 12 सेमी
(4) 6 सेमी (5) 5 सेमी

8. एक लम्ब प्रिज्म का आधार समचतुर्भुज है। यदि लम्ब प्रिज्म की ऊँचाई 5 सेमी हो तथा पार्श्व पृष्ठ 80 सेमी^{2} हो, तो आधार की एक भुजा होगी
(1) 6 सेमी (2) 4 सेमी (3) 8 सेमी
(4) 20 सेमी (5) 2 सेमी

9. 4 सेमी वर्षा के समय 50 डेकामी^{2} भूमि पर पड़े पानी का भार, 1 सेमी^{3} पानी का भार 1 ग्राम हो, होगा
(1) 2000 कुन्तल (2) 1000 कुन्तल
(3) 500.57 कुन्तल (4) 940.8 कुन्तल
(5) 1000.8 कुन्तल

10. किसी लम्ब पिरामिड का आधार 12 सेमी का वर्ग है और उसकी ऊँचाई 8 सेमी हो, तो पिरामिड का तिर्यक पृष्ठ होगा
(1) 200 सेमी (2) 240 सेमी (3) 100 सेमी
(4) 50 सेमी (5) 150 सेमी

11. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ 1540 सेमी^{2} है। यदि उसकी ऊँचाई आधार की त्रिज्या की चार गुनी हो, तो बेलन की ऊँचाई होगी
(1) 5 सेमी (2) 10 सेमी (3) 20 सेमी
(4) 28 सेमी (5) 32 सेमी

12. किसी बेलन का आयतन 120 सेमी^{3} है, तो उसी आधार और उसी ऊँचाई के शंकु का आयतन होगा
(1) 12 सेमी^{3} (2) 24 सेमी^{3} (3) 60 सेमी^{3}
(4) 40 सेमी^{3} (5) 50 सेमी^{3}

13. 9 सेमी त्रिज्या के ठोस गोले से प्राप्त धातु से 0.15 सेमी व्यास के तार की लम्बाई होगी
(1) 1728 मी (2) 243 मी (3) 150 मी
(4) 132.5 सेमी (5) 132.5 सेमी

14. एक शंकु की ऊँचाई 6 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 12 सेमी है। यदि इस शंकु का आयतन एक गोले के आयतन के बराबर हो, तो गोले की त्रिज्या होगी
(1) 6 सेमी (2) 8 सेमी (3) 7.2 सेमी
(4) 2.5 सेमी (5) 5 सेमी

15. 4 मी लम्बी, 3 मी ऊँची तथा 13 सेमी चौड़ी दीवार बनाने के लिए 20 सेमी लम्बी, 12 सेमी चौड़ी तथा 6.5 सेमी ऊँची कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी?
(1) 500 (2) 1100 (3) 1500
(4) 2000 (5) 1000

16. एक कमरे की चौड़ाई इसकी ऊँचाई से दोगुनी तथा इसकी लम्बाई से आधी है। यदि कमरे का आयतन 512 मी^{3} हो, तो कमरे की लम्बाई है
(1) 12 मी (2) 16 मी (3) 20 मी
(4) 32 मी (5) 35 मी

17. संगमरमर के एक आयताकार 28 सेमी चौड़े तथा 5 सेमी मोटे टुकड़े का भार 112 किग्रा है। यदि 1 सेमी^{3} संगमरमर का भार 25 ग्राम हो, तो टुकड़े की लम्बाई है
(1) 36 सेमी (2) 37.5 सेमी (3) 32 सेमी
(4) 26.5 सेमी (5) 25 सेमी

18. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई का योग 19 सेमी है तथा इसके विकर्ण की लम्बाई $5\sqrt{5}$ सेमी है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का मान है
(1) 361 सेमी^{3} (2) 486 सेमी^{3} (3) 232 सेमी^{3}
(4) 125 सेमी^{3} (5) 236 सेमी^{3}

19. 22 सेमी भुजा वाले धातु के बने घन को पिघलाकर 1 सेमी त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनेंगी?
(1) 5324 (2) 2662 (3) 5410
(4) 1347 (5) 2541

20. एक खेल के मैदान का क्षेत्रफल 6400 मी^{2} है। इस पर 2.5 सेमी मोटी मिट्टी की सतह बिछवाने का खर्च ₹ 7.50 प्रति मी^{3} की दर से होगा
(1) ₹ 960 (2) ₹ 1200 (3) ₹ 1920
(4) ₹ 1800 (5) इनमें से कोई नहीं

21. 5 सेमी भुजा वाले एक घन को 1 सेमी भुजा वाले घनों में काटा जाता है। छोटे घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का बड़े घन के सम्पूर्ण पृष्ठ से अनुपात होगा
(1) 1 : 125 (2) 1 : 5 (3) 1 : 625
(4) 1 : 25 (5) 1 : 225

22. शॉटपुट खेल के लिए प्रयुक्त की जाने वाली लोहे की गेंद का व्यास 14 सेमी है। इसे पिघलाकर $2\frac{1}{3}$ सेमी ऊँचाई का ठोस बेलन बनाया गया है। बेलन के एक आधार का व्यास होगा
(1) 14 सेमी (2) 28 सेमी (3) $\frac{14}{3}$ सेमी
(4) $\frac{28}{3}$ सेमी (5) इनमें से कोई नहीं

23. एक 6 मी लम्बे तथा 4 मी चौड़े हौज में पानी की गहराई 1 मी 25 सेमी है। हौज की गीली धरातल का कुल क्षेत्रफल होगा
(1) 55 मी^{2} (2) 53.5 मी^{2} (3) 50 मी^{2}
(4) 49 मी^{2} (5) 45 मी^{2}

24. किसी वृत्ताकार बेलन के आधार तल की परिधि 6π सेमी है। उस बेलन की ऊँचाई आधार तल के व्यास के बराबर है। उस बेलन में कितना पानी भरा जा सकता है?
(1) 54π सेमी^{3} (2) 36π सेमी^{3} (3) 0.054π सेमी^{3}
(4) 0.54π सेमी^{3} (5) 0.35π सेमी^{3}

25. यदि किसी गोले की त्रिज्या में 2 सेमी की वृद्धि की जाए, तो उसके वक्रपृष्ठ में 352 सेमी^{2} की वृद्धि हो जाती है। परिवर्तन से पहले गोले की त्रिज्या थी
(1) 3 सेमी (2) 4 सेमी (3) 5 सेमी
(4) 6 सेमी (5) 18 सेमी

उत्तरमाला

1. (4)	**2.** (3)	**3.** (4)	**4.** (3)	**5.** (1)	**6.** (1)	**7.** (1)	**8.** (2)	**9.** (1)	**10.** (2)
11. (4)	**12.** (4)	**13.** (1)	**14.** (1)	**15.** (5)	**16.** (2)	**17.** (3)	**18.** (5)	**19.** (5)	**20.** (2)
21. (4)	**22.** (2)	**23.** (4)	**24.** (1)	**25.** (4)					

संकेत एवं हल

1. माना घनाभ की भुजाएँ x, $2x$ तथा $4x$ हैं।
$\therefore$ घनाभ का आयतन $= lbh$
$\Rightarrow 64000 = x \times 2x \times 4x$
$\Rightarrow x^3 = \frac{64000}{8}$
$\Rightarrow x = \sqrt[3]{8000} = 20$
$\therefore$ घनाभ की सबसे बड़ी भुजा $= 4 \times 20 = 80$ सेमी

2. $\because$ घन का आयतन $= 1000$ सेमी^{3}
$\therefore$ घन की भुजा $= \sqrt[3]{1000} = 10$ सेमी
अत: घन का विकर्ण $= \sqrt{3} \times$ भुजा $= 10\sqrt{3}$ सेमी

4. नये घन की भुजा $= \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} = 6$
घन का विकर्ण = भुजा $\times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ सेमी

6. प्रश्नानुसार, $13 = \sqrt{l^2 + 4^2 + 12^2}$
$\Rightarrow 169 = l^2 + 16 + 144$
$\Rightarrow l^2 = 169 - 160 = 9$
$\Rightarrow l = \sqrt{9} = 3$ सेमी

7. लम्ब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल $\times$ऊँचाई
$\Rightarrow 64 = 8 \times$ ऊँचाई
$\Rightarrow$ ऊँचाई $= 8$ सेमी

8. आधार का परिमाप $= \frac{\text{प्रिज्म का पार्श्व पृष्ठ}}{\text{प्रिज्म की ऊँचाई}}$
$= \frac{80}{5} = 16$ सेमी
$\therefore$ आधार की भुजा $= \frac{16}{4} = 4$ सेमी

12. बेलन का आयतन $= 120$ सेमी^{3}
$\Rightarrow \pi r^2 h = 120$ सेमी^{3}
शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$= \frac{1}{3} \times 120 = 40$ सेमी^{3}

13. गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi (9)^3 = 972\pi$ सेमी^{3}
तार की लम्बाई $= \frac{972\pi}{\pi \times \left(\frac{0.15}{2}\right)^2} = \frac{972 \times 4}{(0.15)^2} = 172800$ सेमी $= 1728$ मी

15. दीवार का आयतन $= 400 \times 300 \times 13$
$= 1560000$ सेमी^{3}
1 ईंट का आयतन $= 20 \times 12 \times 6.5 = 1560$ सेमी^{3}
$\therefore$ अभीष्ट ईंटों की संख्या $= \frac{1560000}{1560} = 1000$

21. 5 सेमी भुजा वाले बड़े घन का सम्पूर्ण पृष्ठ, $S_1 = 6 \times (5)^2$
तथा 1 सेमी भुजा वाले छोटे घन का सम्पूर्ण पृष्ठ,
$S_2 = 6 \times (1)^2$
$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{6 \times (1)^2}{6 \times (5)^2} = \frac{1}{25}$
$\therefore S_2 : S_1 = 1 : 25$

22. गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi (7)^3$
$\because$ गेंद को पिघलाकर बेलन बनाया गया है।
$\therefore$ बेलन का आयतन = गेंद का आयतन
$\Rightarrow \pi \times r^2 \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \times \pi \times (7)^3$
$\Rightarrow r^2 = 7^2 \times 4 \Rightarrow r = 14$ सेमी
$\therefore$ बेलन के आधार का व्यास $= 28$ सेमी

25. माना गोले की त्रिज्या $= x$ सेमी
गोले की नई त्रिज्या $= (x + 2)$ सेमी
गोले के वक्रपृष्ठ में अन्तर $= 352$
$\therefore 4\pi [(x + 2)^2 - x^2] = 352$
$\Rightarrow x + 2 = \frac{352 \times 7}{8 \times 22}$ सेमी
$\Rightarrow x = 7 - 1 = 6$ सेमी

www.classroomtest.in