

تواتر اور سلسلہ (SEQUENCES AND SERIES)

❖ طبعی اعداد، انسانی جذبات کی پیداوار ہیں۔ DEDEKIND ❖

9.1 تعارف



فلوئناکی

(1175-1250)

ریاضی میں لفظ تواتر لگ بھگ اسی طرح استعمال ہوتا ہے جیسا کہ عام انگریزی میں۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ اشیاء کا مجموعہ ایک تواتر میں رکھا گیا ہے، تو عام طور پر ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ مجموعہ ایک خاص انداز میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ پہچانا ہوا پہلا عدد، دوسرا عدد، تیسرا عدد اور وغیرہ وغیرہ۔ مثال کے طور پر انسانوں یا بیکیٹیریا کی آبادی مختلف اوقات پر ایک تواتر بناتی ہے۔ بینک میں جمع کی گئی رقم، پانچ سال سے زیادہ کے لئے ایک تواتر بناتی ہے۔ اشیاء کی گھٹی ہوئی قیمتیں ایک تواتر میں واقع ہوتی ہیں۔ تواترات بہت سے انسانی حلقوں کی کارکردگی میں اہم کردار (اطلاق) ادا کرتی ہیں۔

جو تواترات ایک خاص پیٹرن (نمونے) کے حساب سے (زیر) کام کرتی ہیں

انہیں تصاعد (Progression) کہا جاتا ہے۔ ہم نے کچھ کلاس میں حسابی تصاعد (Arithmetic Progression A.P) کے بارے میں پڑھا ہے۔ اس سبق میں ہم (A.P) پر اور زیادہ بات چیت کرنے کے علاوہ، حسابی درمیانہ (Arithmetic Mean A.M)، جیومیٹری درمیانہ (Geometric Mean G.M)، اور A.M، G.M میں تعلقات، لگاتار n طبعی اعداد کے ارکان کی خاص سلسلہ طبعی اعداد کے n ارکان کے مربعوں کا جوڑ، طبعی اعداد کے n ارکان کے مکعبوں (Cubes) کا جوڑ کا بھی مطالعہ کریں گے۔

9.2 تواترات (Sequences)

ہمیں ذیل مثالوں پر غور کرنا چاہئے:

مان لیجئے ایک پیڑھی کا فرق 30 سال ہے۔ ہم سے یہ کہا گیا ہے کہ اپنے بزرگوں کی تعداد معلوم کیجئے جن میں ماں باپ، دادا دادی، پردادا پردادی وغیرہ شامل ہیں وغیرہ اور وہ لوگ جن کی عمر تقریباً 300 سال سے زیادہ ہو۔

$$10 = \frac{300}{30} = \text{یہاں پیڑھیوں کی کل تعداد}$$

بزرگوں کی تعداد پہلی، دوسری، تیسری، اور دسویں پیڑھیوں میں 2, 4, 8, 16, 32, اور 1024 ممبر ہیں۔ ممبر کے اس سلسلے کو ہم تواتر کہتے ہیں۔

لگاتار خارج قسمت پر غور کیجئے کہ جو ہم 10 کو 3 سے تقسیم کرنے پر مختلف اقدام لیتے ہیں۔ اس عمل میں ہمیں 3, 3.3, 3.33, 3.333, وغیرہ وغیرہ حاصل ہوتے ہیں۔ یہ خارج قسمت بھی ایک تواتر بناتے ہیں۔ تواتر میں مختلف واقع ہونے والے اعداد ارکان کہلاتے ہیں۔ ہم تواتر کے ارکان کو $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ زیر نوشتہ (Subscripts) رکن کی جگہ بتاتے ہیں۔ n^{th} رکن n^{th} جگہ پر تواتر کا عدد ہے اور یہ a_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ n^{th} رکن کو تواتر کا عام رکن بھی کہا جاتا ہے۔

اس لئے آبا و اجداد کے لوگوں کے تواتر کے ارکان جو اوپر دیے ہوئے ہیں یہ ہیں:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, \dots, a_{10} = 1024$$

اسی طرح لگاتار خارج قسمت کی مثال ہیں

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \dots, a_6 = 3.333333,$$

وہ تواتر جس میں ارکان کی تعداد محدود ہو محدود تواتر کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر آبا و اجداد کی تواتر ایک محدود تواتر کہلاتی ہے کیونکہ اس میں 10 ارکان ہیں۔ (ایک محدود نمبر)

ایک تواتر اس وقت لامحدود کہلاتی ہے جب یہ محدود تواتر نہ ہو۔ مثال کے طور پر لگاتار خارج قسمت کی تواتر جو اوپر دیا گیا ہے لامحدود تواتر کہلاتا ہے، لامحدود اس طرح کہ یہ کبھی ختم نہیں ہوتا۔ کبھی کبھی اس طرح کے اصول کو بتانا بھی ممکن ہوتا ہے جو تواتر کے ارکان کو الجبری فارمولے کی شکل میں دکھائے۔ ایک لمحہ کے لئے جفت طبعی اعداد کی تواتر 2, 4, 6, ... پر غور کیجئے۔

$$a_1 = 2 = 2 \times 1$$

$$a_2 = 4 = 2 \times 2$$

$$a_3 = 6 = 2 \times 3$$

$$a_4 = 8 = 2 \times 4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{23} = 46 = 2 \times 23$$

$$a_{24} = 48 = 2 \times 24$$

در اصل ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کی n^{th} رکن کو $a_n = 2n$ ، جہاں n ایک طبعی عدد ہے، بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح طاق طبعی اعداد کی تواتر $1, 3, 5, \dots$ کی n^{th} رکن کو فارمولہ $a_n = 2n - 1$ جہاں n ایک طبعی عدد ہے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کچھ صورت حال میں اعداد کا اظہار مثال کے طور پر $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ کا کوئی خاص نمونہ (پٹرن) نہیں ہوتا۔ لیکن تواتر کو متواتر رشتہ سے نکالا جاتا ہے۔ جیسا کہ دیا گیا ہے۔

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

اس تواتر کو Fibonacci sequence کہا جاتا ہے۔

مفرد اعداد $2, 3, 5, 7, \dots$ (Primes nos) کی تواتر میں ہم نے نکالا ہے کہ n^{th} مفرد عدد کے لئے کوئی فارمولہ نہیں ہے۔ اس طرح کی تواتر کو صرف زبانی طریقے سے سمجھا جاسکتا ہے۔

ہر ایک تواتر میں ہمیں یہ امید نہیں رکھنی چاہئے کہ اس کے ارکان کسی خاص فارمولے کی مدد سے دیئے جائیں گے۔ حالانکہ ہمیں ایک نظری اسکیم کی امید ہے یا ایک اصول جس کے ذریعہ ارکان $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ کو لگاتار پیدا کیا جائے۔

9.3 سلسلہ (Series)

مان لیا $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ایک دی ہوئی تواتر ہے۔ تب وہ عبارت $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ایک سلسلہ کہلاتی ہے جو دی ہوئی تواتر کے ساتھ منسلک ہے۔ سلسلہ محدود یا لامحدود ہوگی۔ جیسا کہ دی ہوئی تواتر محدود یا لامحدود ہے۔ سلسلہ زیادہ تر حیت (Compact) شکل میں ظاہر کی جاتی ہیں جسے ہم سگما (Sigma) سے ظاہر کرتے ہیں اور اس Σ (Sigma) گریک "Greek" حرف کا مطلب ہے جمع سازی (Summation)۔ اس لئے سلسلہ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ کو } \sum_{k=1}^n a_k \text{ میں مختصر کیا جاتا ہے۔}$$

ریمارک جب سلسلے استعمال کی جاتی ہے تو اس کا مطلب ہے دکھایا ہوا جوڑ (sum) تاکہ اس کا اپنا جوڑ مثال کے طور پر $1+3+5+7$ ایک محدود سلسلے ہے جس میں چار ارکان ہیں۔ جب ہم ایک چھوٹا جملہ (phrase) ”سلسلی کا جوڑ“ کا استعمال کرتے ہیں۔ ہمارا مطلب ہوتا ہے ارکان کا جوڑ، اس سلسلی کا جوڑ 16 ہے۔
اب ہم کچھ مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال 1 نیچے دی گئی ہر ایک تواترات کے پہلے تین ارکان لکھئے جو کہ ذیل طریقے سے واضح کی گئی ہیں۔

$$a_n = \frac{n-3}{4} \quad (\text{ii})$$

$$a_n = 2n + 5 \quad (\text{i})$$

$$a_n = 2n + 5 \quad (\text{i}) \quad \text{حل}$$

$n=1, 2, 3$ پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a_1 = 2(1) + 5 = 7, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 11$$

$$a_n = \frac{n-3}{4} \quad (\text{ii})$$

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = 0$$

اس لئے پہلے تین ارکان $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{4}$ اور صفر ہیں۔

مثال 2 تواتر $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ کا 20 واں رکن ہوگا؟

حل $n=20$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$

$$= 19 \times (-18) \times (23) = -7866$$

مثال 3 مان لیجئے تواتر a_n ذیل کی طرح Define کی گئی ہے

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2 \text{ for } n \leq 2$$

پہلے پانچ ارکان نکالنے اور اس کے مطابق سلسلہ بنائے۔

حل ہمارے پاس ہے،

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

اس لئے تو اتر کے پہلے پانچ ارکان 1, 3, 5, 7 اور 9 ہیں۔ اس کے مطابق سلسلہ $1+3+5+7+9+\dots$ ہے

مشق 9.1

مشق 1 تا 6 تک تو اترات کے پہلے 5 ارکان معلوم کیجئے جن کی n^{th} رکن اس طرح ہیں۔

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad .2 \quad a_n = n(n+2) \quad .1$$

$$a_n = \frac{2n-3}{6} \quad .4 \quad a_n = 2^n \quad .3$$

$$a_n = n \frac{n^2+5}{4} \quad .6 \quad a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1} \quad .5$$

مشق 7 تا 10 تو اترات میں دکھائے گئے ارکان معلوم کیجئے جن کی n^{th} رکن یہ ہیں۔

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}; a_7 \quad .8 \quad a_n = 4n-3; a_{17}, a_{24} \quad .7$$

$$a = \frac{n(n-2)}{n+3}; a_{20} \quad .10 \quad a_n (-1)^{n-1} n^2; a_9 \quad .9$$

مشق 11 تا 13 تو اترات کے پہلے پانچ ارکان معلوم کیجئے اور ان کے مطابق سلسلہ معلوم کیجئے۔

$$a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n > 2 \quad .12 \quad a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2 \text{ for all } n > 1 \quad .11$$

$$a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2 \quad .13$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2, 1 = a_1 = a_2 \quad .14$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ for } n = 1, 2, 3, 4, 5$$

9.6 حسابی تصاعد (A.P.) (Arithmetic Progression)

ہم پچھلے پڑھے کچھ فارمولوں اور خاصیتوں کا اعادہ کرتے ہیں۔

تو اتر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ اس وقت حسابی تو اتر یا خالی تعادد کہلائے گی اگر $a_{n-1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ہو

a_1 پہلا رکن کہلائے گا اور مستقل رکن $A.P$ کا یکساں فرق کہلائے گا۔

ہم ایک $A.P$ (اپنی اصل شکل میں) پر غور کرتے ہیں جس کا پہلا رکن a اور یکساں فرق d ہے یعنی $a, a+d, a+2d, \dots$

تب $A.P$ کا n^{th} رکن (عام رکن) $a_n = a + (n-1)d$ ہے۔

$A.P$ کی ذیل خصوصیات کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

(i) اگر $A.P$ کے ہر رکن میں ایک مستقل (Constant) کو جمع کیا جائے، تو نتیجتاً تو اتر بھی ایک $A.P$ ہوگی۔

(ii) اگر ایک مستقل کو $A.P$ کی ہر تو اتر سے گھٹایا جائے، تو نتیجتاً تو اتر بھی ایک $A.P$ ہوگی۔

(iii) اگر $A.P$ کے ہر رکن کو ایک مستقل سے ضرب کیا جائے تو نتیجتاً تو اتر بھی ایک $A.P$ ہوگی۔

(iv) اگر $A.P$ کے ہر رکن کو ایک غیر صفر مستقل سے تقسیم کیا جائے تب نتیجتاً تو اتر بھی ایک $A.P$ ہوگی۔

یہاں ہم ذیل علامتی اظہار کا استعمال حسابی تصاعد میں کریں گے۔

پہلی رکن a ، آخری رکن l ، یکساں فرق d ، J ارکان کی تعداد n

تب $A.P$ کے n ارکان کا جوڑ S_n

مان لیجیے $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ کو ایک $A.P$ ہے۔ تب

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad (اور) \quad l = a + (n-1)d$$

ہم یہ بھی لکھ سکتے ہیں $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$

ہم اب کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 4 اگر ایک $A.P$ میں m^{th} رکن n ہے اور n^{th} رکن m ہے جہاں $m \neq n$ ، تب p^{th} رکن معلوم کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے $a_m = a + (m-1)d = n$ (1)...

$$a_n = a + (n-1)d = m \quad \text{اور} \quad (2) \dots$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$d = \frac{m-n}{n-1} \quad (3) \dots$$

$$a = n + m - 1 \quad \text{اور} \quad (4) \dots$$

$$a_p = a + (p-1)d \quad \text{اس لئے}$$

$$= n + m - 1 + (p-1)(-1) = n + m - p$$

اس لئے p^{th} رکن $n + m - p$ ہے۔

مثال 5 اگر ایک A.P. کے n^{th} ارکان کا جوڑ $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$ ہے جہاں P اور Q مستقل ہیں تو یکساں فرق معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے $a_1, a_2, \dots, a_n$ دی ہوئی A.P. ہے۔

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q \quad \text{تب} \quad = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$S_1 = a_1 = P, S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q \quad \text{اس لئے}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = P + Q \quad \text{تاکہ}$$

$$d = a_2 - a_1 = (P+Q) - P = Q \quad \text{اس لئے یکساں فرق}$$

مثال 6 دو حسابی تصاعد کے n ارکان کا جوڑ $(7n+15) : (3n+8)$ کی نسبت میں ہے۔ ان کے بارہویں ارکان کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے a_1, a_2 اور d_1, d_2 دو پہلے ارکان اور یکساں فرق ہیں۔ بالترتیب پہلے اور دوسرے حسابی تصاعد کے دیے

ہوئے حالات کے مطابق ہمارے پاس ہے

$$\frac{\text{پہلی A.P. کے } n \text{ ارکان کا جوڑ}}{\text{دوسری A.P. کے } n \text{ ارکان کا جوڑ}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\frac{\text{پہلی A.P کا 12 واں رکن}}{\text{دوسری A.P کا 12 واں رکن}} = \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$(1) \dots \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$= \frac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2} \quad \text{اب}$$

$$n=23 \text{ مساوات (1) میں رکھنے پر} \quad \frac{2a_1 + 22d_1}{2a_2 + 22d_2} = \frac{3 \times 23 + 8}{7 \times 23 + 15}$$

$$= \frac{7}{16} \frac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2} = \frac{7}{16} \quad \text{اس لئے}$$

اس لئے مطلوبہ نسبت 7:16 ہے۔

مثال 7 ایک آدمی کی پہلے سال کی آمدنی 3,00,000 روپے ہے اور اسے اگلے 19 سال تک کے لئے 10,000/- روپے سالانہ بڑھی ہوئی رقم ملتی ہے۔ بتائیے وہ 20 سال میں کل کتنی رقم حاصل کرے گا۔

حل یہاں ہمارے پاس ایک A.P ہے جس میں $a=3,00,000$ ، $d=10,000$ اور $n=20$ ہے جوڑ والا فارمولا استعمال کرنے پر ملتا ہے

$$S_{20} = \frac{20}{2} [600000 + 19 \times 10000] = 10(790000) = 79,000,000$$

اس لئے آدمی کو 20 سال کے آخر میں کل 79,00,000/- روپے ملیں گے۔

9.4.1 حسابی درمیانہ (Arithmetic mean) دو اعداد a اور b دیئے گئے ہیں۔ ہم ان کے بیچ میں ایک نمبر A

ڈال سکتے ہیں تاکہ a, A, b ایک A.P ہو جائے۔ اس طرح عدد A اعداد a اور b کا حسابی درمیانہ (A.M) ہے۔ یہ اس کیس میں نوٹ کر لیجئے، ہمارے پاس ہے

$$A - a = b - A, \quad \text{ie } A = \frac{a+b}{2}$$

ہم A.M کی وضاحت دو اعداد a اور b کے درمیان اس طرح بھی کر سکتے ہیں کہ یہ ان کا درمیانی عدد ہے یعنی $\frac{a+b}{2}$ ۔

مثال کے طور پر دو اعداد 4 اور 16 کا A.M 10 ہے۔ اس طرح ہم نے ایک A.P 4, 10, 16 بنائی ہے 10 کو 4 اور 6 کے درمیان دو یا دو سے زیادہ اعداد ڈال سکتے ہیں تاکہ نتیجتاً تواتر ایک A.P بن جائے؟ دیکھئے کہ دو اعداد 8 اور 12، 4 اور 16 کے درمیان ڈالے جاسکتے ہیں تاکہ نتیجتاً تواتر 4, 8, 12, 16 ایک A.P بن جائے۔

اور زیادہ عام طور پر دیئے ہوئے دو اعداد a اور b کے درمیان ہم جتنے چاہیں اعداد ڈال سکتے ہیں اور نتیجتاً تواتر ایک A.P ہوگی۔

مان لیجئے $a, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, b$ کے درمیان n اعداد ہیں تاکہ ایک A.P ہو۔

یہاں 'b' $(n+2)^{th}$ رکن ہے۔ $b = a + [(n+2) - 1]d = a + (n+1)d$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

اس طرح a اور b کے درمیان n اعداد ذیل طرح سے ہیں

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

.....

.....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

مثال 8 3 اور 24 کے درمیان 6 اعداد لکھئے تاکہ نتیجتاً تواتر ایک A.P ہو۔

حل مان لیجئے 3 اور 24 کے درمیان چھ اعداد A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 اور A_6 ہیں تاکہ

3, A₁, A₂, A₃, A₄, A₅, A₆, 24 A.P میں ہوں۔ یہاں $a = 3$ ، $b = 24$ ، $n = 8$ ہے۔

اس لئے $24 = 3 + (8 - 1)d$, so that $d = 3$

$$A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$$

$$A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$$

$$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$$

$$A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$$

$$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$$

$$A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$$

اس طرح 3 اور 24 کے درمیان 6 اعداد 6، 9، 12، 15، 18 اور 21 ہیں۔

مشق 9.2

1. 1 تا 100 تک کے طاق صحیح اعداد کا جوڑ معلوم کیجئے۔
2. 100 اور 1000 کے درمیان آنے والے ایسے طبعی اعداد کا جوڑ معلوم کیجئے جو 5 کے ضعف ہوں۔
3. ایک A.P میں پہلا رکن 2 ہے اور پہلے 5 ارکان کا جوڑ اگلے پانچ ارکان کے جوڑ کا ایک چوتھائی ہے۔ تو دکھائیے کہ بیسواں رکن (-112) ہے۔
4. ایک A.P -5، $-\frac{11}{2}$ ، -6 میں کتنے ارکان کی ضرورت ہے تاکہ جوڑ 25 ہو جائے؟
5. ایک A.P میں اگر p^{th} رکن $\frac{1}{q}$ ہو اور q^{th} رکن $\frac{1}{p}$ ہو، تو ثابت کیجئے کہ پہلے pq ارکان کا جوڑ $\frac{1}{2}(pq + 1)$ ہے، جہاں $p \neq q$ کے۔
6. اگر A.P 19، 22، 25 کے کچھ اعداد کا جوڑ 116 ہے تو آخری رکن معلوم کیجئے۔
7. اس A.P کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے جس کا k^{th} رکن $5k + 1$ ہے۔
8. اگر ایک A.P کے n ارکان کا جوڑ $(pn + qn^2)$ ہے، جہاں p اور q مستقل ہیں، تو یکساں فرق معلوم کیجئے۔
9. دو حسابی تصاعد کے n ارکان کا جوڑ $9n + 6 : 5n + 4$ کی نسبت میں ہے، ان کے 18 ویں ارکان کی نسبت معلوم کیجئے۔
10. اگر ایک A.P کے پہلے p ارکان کا جوڑ پہلے q ارکان کے جوڑ کے برابر ہو تو پہلے $(p+q)$ ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔
11. ایک A.P کے پہلے p ، q اور r ارکان کا جوڑ بالترتیب a ، b اور c ہے۔ تو ثابت کیجئے کہ

$$\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$$

12. ایک A.P میں m اور n ارکان کے جوڑوں کی نسبت $m^2 : n^2$ ہے، تو دکھائیے کہ m^{th} اور n^{th} رکن کی نسبت $(2m-1) : (2n-1)$ ہے۔

13. اگر ایک A.P کے n ارکان کا جوڑ $3n^2 + 5n$ ہے اور m^{th} رکن 164 ہے۔ تو m کی قیمت معلوم کیجئے۔

14. 8 اور 26 کے درمیان پانچ اعداد لکھئے تاکہ نتیجتاً تواتر ایک A.P ہو۔

15. اگر $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$ ، a اور b کے درمیان A.M ہے، تو n کی قیمت معلوم کیجئے۔

16. 1 اور 31 کے درمیان m اعداد اس طرح داخل کیے گئے ہیں تاکہ 7^{th} اور $(m-1)^{th}$ اعداد کی نسبت 5:9 ہو، تو m کی قیمت معلوم کیجئے۔

17. ایک آدمی اپنا قرض واپس کرنے میں پہلی قسط 100 روپے دیتا ہے، اگر وہ ہر مہینے اپنی قسط 5 روپے بڑھاتا ہے تو وہ تیسویں قسط میں کتنی رقم دے گا۔

18. دو لگا تار کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کا فرق 5° ہے۔ اگر سب سے چھوٹا زاویہ 120° کا ہو، تو کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

9.5 جیومیٹرک یا تصاعد (G.P) (Geometric Progression)

ہم ذیل تواترات پر غور کرتے ہیں۔

$$(i) 2, 4, 8, 16, \dots, (ii) \frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243} \dots (iii) .01, .0001, .000001, \dots$$

ان سب ہی تواترات میں ان کے ارکان کیسے آگے بڑھتے ہیں؟ ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ پہلے رکن کے علاوہ ہر رکن ایک خاص ترتیب میں آگے بڑھتا ہے۔

$$(i) \text{ میں ہمارے پاس ہے } a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$$

$$(ii) \text{ میں ہم دیکھتے ہیں کہ } a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3} \text{ اور اسی طرح آگے تک۔}$$

اسی طرح (iii) میں کس طرح ارکان آگے بڑھتے ہیں؟ یہ دیکھا گیا ہے کہ ہر کیس میں پہلے رکن کے علاوہ ہر رکن میں ایک مستقل نسبت ہوتی ہے اپنے سے بالکل پہلے رکن کے ساتھ۔ (i) میں یہ مستقل نسبت 2 ہے (ii) میں یہ $\frac{-1}{3}$ ہے اور (iii) میں مستقبل نسبت 0.01 ہے۔ اس طرح کی تو اترات کو جیومیٹریائی تو اترات یا جیومیٹریائی تصاعد کہتے ہیں اور جسے GP سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تو اتر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ایک جیومیٹریائی تصاعد کہلاتا ہے اگر ہر رکن غیر صفر ہو اور (مستقل) $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ ، $k \geq 1$ کے لئے۔

$a_1 = a$ ماننے پر ہمیں $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ جیومیٹریائی تصاعد ملتا ہے جہاں a پہلی رکن کہلاتا ہے اور r ، G.P. کی یکساں نسبت کہلاتی ہے۔ اوپر (i)، (ii) اور (iii) میں جیومیٹریائی تصاعد میں یکساں نسبت بالترتیب 2، $\frac{-1}{3}$ اور 0.01 ہے۔ جس طرح حسابی تصاعد میں n^{th} رکن یا n ارکان کا جوڑ معلوم کرنے کا مسئلہ ایک جیومیٹریائی تصاعد جس میں ارکان بہت زیادہ ہوں ایک مشکل عمل ہے۔ بغیر فارمولہ استعمال کئے جسے ہم اگلے سیکشن میں نکالیں گے۔ ہم ان فارمولوں میں مندرجہ ذیل علامات کا استعمال کریں گے۔

a = پہلا رکن، r = یکساں نسبت، l = آخری رکن، n = ارکان کی تعداد

تب $s_n = n$ ارکان کا جوڑ

9.5.1 G.P کا ایک عام رکن (General term of a G.P)

ہم ایک G.P پر غور کرتے ہیں جس میں پہلا غیر صفر رکن a اور یکساں نسبت r ہے۔ اس کے کچھ ارکان لکھئے۔ دوسرا رکن a اور r سے ضرب کرنے پر ملتا ہے۔ اس لئے $a_2 = ar$ ، اسی طرح تیسرا رکن a_3 کو r سے ضرب کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے $a_3 = a_2 r = ar^2$ اور اسی طرح آگے بھی۔

ہم نیچے انہیں اور کچھ اور ارکان کو لکھتے ہیں۔

پہلا رکن $a_1 = a = ar^{1-1}$ ، دوسرا رکن $a_2 = ar = ar^{2-1}$ ، تیسرا رکن $a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

چوتھا رکن $a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$ ، پانچواں رکن $a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

کیا آپ نے ایک نمونہ (Pattern) دیکھا؟ سولہواں رکن کیا ہوگا؟

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

اس لئے پیٹرن یہ بتاتا ہے کہ G.P کا n^{th} رکن $a_n = ar^{n-1}$ سے دیا گیا ہے۔

اس طرح G.P کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔ $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \dots$ جیسا $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$ جیسا کہ G.P بالترتیب محدود ہو۔

سلسلہ $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ یا $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ بالترتیب محدود یا لامحدود جیومیٹرک سلسلہ کہلاتی ہیں۔

9.5.2 ایک G.P کے n ارکان کا جوڑ (Sum to n terms of a G. P.) مان لیجئے G.P کا پہلا رکن a اور

کیسا نسبت r ہے۔ ہم G.P کے پہلے n ارکان کا جوڑ S_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ تب

$$(1) \dots S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

کیس 1 اگر $r = 1$ ، $S_n = a + a + a + \dots + a$ (n terms) = na

کیس 2 اگر $r \neq 1$ ، (1) سے ضرب کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$(2) \dots rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

(2) کو (1) سے تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

مثال 9 5, 25, 125, ... G.P کی دسویں رکن معلوم کرو۔

حل یہاں $a = 5$ اور $r = 5$ ہے، اس لئے $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

$$a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n \quad \text{اور}$$

مثال 10 G.P 2, 8, 32, ... کی n رکن تک کون سا رکن 131072 ہے؟

حل مان لیجئے 131072 دی ہوئی G.P کی n^{th} رکن ہے۔

اس لئے $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ یا $65536 = 4^{n-1}$

یہ دیتا ہے $4^8 = 4^{n-1}$

تاکہ $n-1 = 8$, i.e. $n = 9$ اس لئے G.P 131072 کی 9^{th} رکن ہے۔

مثال 11 ہے ایک G.P میں تیسرا رکن 24 اور چھٹا رکن 192 ہے۔ دسواں رکن معلوم کیجئے۔

حل یہاں $a_3 = ar^2 = 24$ (1)...

اور $a_6 = ar^5 = 192$ (2)...

(2) کو (1) سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $r = 2$ - $r = 2$ (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $a = 6$

اس لئے $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$

مثال 12 جیومیٹرک سلسلہ $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$ کے n ارکان کا جوڑ اور پہلے 5 ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

حل یہاں $a = 1$ اور $r = \frac{2}{3}$ ہے۔ اس لئے

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

خاص طور پر $S_5 = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \right] = 3 \times \frac{211}{243} = \frac{211}{81}$

مثال 13 G.P $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ کے کتنے ارکان $\frac{3069}{512}$ جوڑ دینے کے لئے درکار ہیں؟

حل مان لیجئے n ارکان کی ضرورت ہے۔ دیا ہوا ہے $a = 3$ ، اور $r = \frac{1}{2}$ $S_n = \frac{3069}{512}$

کیونکہ $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\frac{3069}{512} = \frac{3(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{اس لئے}$$

$$\frac{3069}{3072} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{یا}$$

$$\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024} \quad \text{یا}$$

$$n = 10 \quad 2^n = 1024 = 2^{10} \quad \text{یا}$$

مثال 14 G.P کے پہلے تین ارکان کا جوڑ $\frac{13}{12}$ ہے اور ان کا حاصل ضرب 1- ہے۔ ارکان کی یکساں نسبت معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے $\frac{a}{r}$ ، G.P ar، a کے پہلے تین ارکان ہیں۔ تب،

$$(1) \dots \quad \frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12}$$

$$(2) \dots \quad \left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1 \quad \text{اور}$$

ہمیں (2) سے حاصل ہوتا ہے $a^3 = -1$ اس کا مطلب $a = -1$ (صرف حقیقی جذر لینے پر)

(1) میں $a = -1$ رکھنے پر ہمارے پاس ہے

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12}$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0 \quad \text{یا}$$

یہ r میں دو درجی ہے۔ حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $r = -\frac{3}{4}$ یا $r = -\frac{4}{3}$

اس لئے G.P کے تین ارکان ہیں $\frac{4}{3}$ ، -1 ، $\frac{3}{4}$ اور $r = -\frac{4}{3}$ کے لئے اور $r = -\frac{3}{4}$ کے لئے $\frac{4}{3}$ ، -1 ، $\frac{3}{4}$

مثال 15 ذیل تواتر کا n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے... 7, 77, 777, 7777, ...

حل یہ G.P نہیں ہے، حالانکہ ہم اس کا G.P سے موازنہ کر سکتے ہیں، ارکان کو اس طرح لکھ کر

$$\begin{aligned}
S_n &= 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots \text{to } n \text{ terms} \\
&= \frac{7}{9} [9 + 99 + 999 + 9999 + \dots \text{to } n \text{ term}] \\
&= \frac{7}{9} [(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \dots n \text{ terms}] \\
&= \frac{7}{9} [(10 + 10^2 + 10^3 + \dots n \text{ terms}) - (1 + 1 + 1 + \dots n \text{ terms})] \\
&= \frac{7}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right] = \frac{7}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]
\end{aligned}$$

مثال 16 ایک انسان کے دوماں باپ ہیں، 4 دادا، دادی، نانا، نانی ہیں، 8 پرداد، پردادی، پرانا پر نانی ہیں اور اس طرح آگے بھی۔ اس کے آباؤ اجداد کی تعداد 10 بیڑھیوں تک اس سے پہلی بیڑھیوں کی معلوم کیجئے۔

حل یہاں $a = 2$ ، $r = 2$ اور $n = 10$ ہیں۔

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ کے جوڑ والا فارمولا استعمال کر کے}$$

$$S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$$

ہمارے پاس ہے 2046 سے پہلے بیڑھیوں کے انسانوں کی تعداد 2046 ہے

9.5.3 جیومیٹریائی درمیانہ (Geometric Mean) (G.M) دو مثبت اعداد a اور b کا جیومیٹریائی درمیانہ

$\sqrt{ab}$ عدد ہے۔ اس لئے 2 اور 8 کا جیومیٹر درمیانہ 4 ہے۔ ہم یہ دیکھتے ہیں کہ تین اعداد 2، 4، 8 کا G.P کے لگاتار ارکان ہیں۔ یہ ہمیں دو اعداد کے درمیانہ کو عام سوچ کی طرف لے جاتا ہے۔ دو مثبت اعداد a اور b کے درمیان ہم جتنے چاہیں اعداد ڈال سکتے ہیں تاکہ نتیجتاً تو ایک G.P بن جائے۔

مان لیجئے مثبت اعداد a اور b کے درمیان $G_1, G_2, \dots, G_n$ کو n اعداد میں تاکہ $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$ ایک

G.P ہو۔ اس لئے $(n+2)^{\text{th}}$ رکن ہے، ہمارے پاس ہے

$$r = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{یا} \quad b = ar^{n+1}$$

$$G_3 = ar^3 = a \left(\frac{b}{a} \right)^3, G_2 = ar^2 = a \left(\frac{b}{a} \right)^2, G_1 = ar = a \left(\frac{b}{a} \right)^1$$

$$G_n = ar^n = a \left(\frac{b}{a} \right)^n$$

مثال 17 1 اور 256 کے درمیان تین اعداد لکھئے تاکہ نتیجتاً تو اتر ایک G.P. ہو۔

حل مان لیجئے G_1, G_2, G_3 اور 1 اور 256 کے درمیان تین اعداد ہیں۔ تب G_1, G_2, G_3 ایک G.P. ہے۔

اس لئے $256 = r^4$ جو $r = \pm 4$ دیتا ہے۔ (صرف حقیقی جز لینے پر)

$$G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$$

اسی طرح $r = -4$ اعداد ہیں $-4, -16, -64$ کو 1 اور 256 کے درمیان لکھ سکتے ہیں تاکہ نتیجتاً تو اترات G.P. میں ہوں۔

9.6 A.M اور G.M کے درمیان رشتہ (Relation Between A.M and G.M)

مان لیجئے A اور G دو دئے ہوئے مثبت اعداد a اور b کے بالترتیب A.M اور G.M ہیں۔

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{اور} \quad G = \sqrt{ab}$$

اس لئے ہمارے پاس ہے

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$(1) \dots = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

(1) سے ہم $A \geq G$ کا رشتہ حاصل کیا ہے۔

مثال 18 اگر دو مثبت اعداد a اور b کے A.M اور G.M بالترتیب 10 اور 8 ہیں۔ اعداد معلوم کیجئے۔

$$(1) \dots \quad \text{حل دیا گیا ہے} \quad A.M. = \frac{a+b}{2} = 10$$

$$(2) \dots = \sqrt{ab} = 8$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(3) \dots a + b = 20$$

$$(4) \dots ab = 64$$

(3) اور (4) سے a اور b کی قیمتیں اکائی $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(a - b)^2 = 400 - 256 = 144$$

$$(5) \dots a - b = \pm 12 \quad \text{یا}$$

(3) اور (5) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a = 16, b = 4 \quad \text{یا} \quad a = 4, b = 16$$

اس لئے اعداد a اور b بالترتیب 16، 4 ہیں یا 4، 16 ہیں۔

مشق 9.3

1. G.P. $\dots, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}$ کے 20^{th} اور n^{th} ارکان معلوم کیجئے۔

2. اس G.P. کا 12^{th} رکن معلوم کیجئے جس کا 8^{th} رکن 192 اور یکساں نسبت 2 ہے۔

3. G.P. کے 5^{th} ، 8^{th} اور 11^{th} ارکان بالترتیب p ، q اور s ہیں۔ دکھائیے $q^2 = ps$ ۔

4. G.P. کا 4^{th} رکن دوسرے رکن کا مربع ہے اور پہلا رکن 3 ہے۔ 7^{th} رکن معلوم کیجئے۔

5. توازن کا کون سا رکن

$$(a) \quad 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots \text{ is } 128? \quad (b) \quad \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \dots \text{ is } 729?$$

$$(c) \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \text{ is } \frac{1}{19683}?$$

6. x کی کس قیمت کے لئے اعداد $x, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}$ G.P. میں ہیں؟

ذیل جیومیٹرک ترقی کے اعداد کے ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

7. $0.15, 0.015, 0.0015, \dots, 20 \text{ terms}$

8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \dots, n \text{ terms}$

9. $1, -a, a^2, -a^3, \dots, n \text{ terms (if } a \neq -1)$

10. $x^3, x^5, x^7, \dots, n \text{ terms (if } x \neq \pm 1)$

11. $\sum_{k=1}^{11} (2 + 3^k)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیے۔

12. G.P کے پہلے تین ارکان کا جوڑ $\frac{39}{10}$ ہے اور ان کا حاصل ضرب 1 ہے۔ یکساں نسبت اور ارکان معلوم کیجئے۔

13. G.P $3, 3^2, 3^3, \dots$ کے کتنے ارکان کی ضرورت ہے تاکہ جوڑ 120 ہو جائے؟

14. G.P کے پہلے تین ارکان کا جوڑ 16 ہے اور اس سے اگلے تین اعداد کا جوڑ 128 ہے۔ پہلا رکن، یکساں نسبت اور G.P کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

15. ایک دی ہوئی G.P میں $a = 729$ ، 7^{th} رکن 64 ہے۔ S_7 معلوم کیجئے؟

16. ایک G.P معلوم کیجئے جس میں پہلے دو ارکان کا جوڑ 4 ہے اور پانچواں رکن تیسرے رکن کا چار گنا ہے۔

17. اگر ایک G.P کے 4^{th} ، 10^{th} اور 16^{th} ارکان بالترتیب y, x, z اور x, y, z ہیں۔ تو ثابت کیجئے کہ $z^2 = yx$ اور G.P میں ہیں۔

18. تواتر $8, 88, 888, 8888, \dots$ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

19. تواترات $2, 4, 8, 16, 32$ اور $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128$ کے مطابق ارکان کا حاصل ضرب کا جوڑ معلوم کیجئے۔

20. دکھائیے کہ تواترات $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$ اور $A, AR, AR^2, \dots, AR^{n-1}$ کے مطابق ارکان کا حاصل ضرب

ایک G.P بناتا ہے اور اس کا یکساں نسبت معلوم کیجئے۔

21. ایک جیومیٹرک تواعد کو بنانے کے لئے چار اعداد معلوم کیجئے جن میں تیسرا رکن پہلے رکن سے 9 زیادہ ہے اور دوسرا

رکن 4^{th} رکن سے 18 زیادہ ہے۔

22. اگر ایک G.P کے p^{th} ، q^{th} اور r^{th} ارکان بالترتیب a, b, c ہیں۔ تو ثابت کیجئے کہ $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$

23. اگر ایک G.P کے پہلے اور n^{th} رکن بالترتیب a اور b ہیں اور n ارکان کا حاصل ضرب ہے تو ثابت کیجئے کہ

$$P^2 = (ab)^n$$

24. ثابت کیجئے کہ G.P کے پہلے n ارکان کی کے جوڑ اور $(n+1)^{th}$ سے لے کر $(2n)^{th}$ تک ارکان کے جوڑ کی نسبت $\frac{1}{r^n}$ ہے۔

25. اگر a, b, c, d G.P میں ہیں تو دکھائیے کہ

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

26. 3 اور 81 کے درمیان دو اعداد بھرئیے (لکھئے) تاکہ نتیجتاً تو ایک G.P ہو۔

27. n کی قیمت معلوم کیجئے تاکہ $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ اور a اور b کے درمیان ایک جیومیٹریائی درمیانہ بن سکے۔

28. دو اعداد کا جوڑ اپنے جیومیٹریائی درمیانہ کا 6 گنا ہے۔ تو دکھائیے کہ اعداد $(3 - 2\sqrt{2}) : (3 + 2\sqrt{2})$ کی نسبت میں ہیں۔

29. اگر دو مثبت اعداد کے درمیان A اور G بالترتیب $A.M$ اور $G.M$ ہیں، تو ثابت کیجئے کہ اعداد $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ ہیں۔

30. بیکٹیریاؤں کی تعداد کسی خاص کلچر میں ہر گھنٹے دوگنی ہو رہی ہے۔ اگر ابتدا میں کسی کلچر میں 30 بیکٹیریا موجود تھے، تو بتائیے 2^{nd} ، 4^{th} اور n^{th} گھنٹوں میں کتنے بیکٹیریا ہوں گے؟

31. 500 روپے بینک میں دس سال میں کتنے ہو جائیں گے جب کہ بینک 10 فیصدی شرح سالانہ سے سود دیتا ہے؟

32. اگر ایک دو درجی مساوات کے جزر کے $A.M$ اور $G.M$ بالترتیب 8 اور 5 ہیں تو دو درجی مساوات معلوم کیجئے۔

9.7 کچھ خاص سلسلی کے n ارکان کا جوڑ (Sum to n Terms of some Special Series)

اب ہم کچھ خاص سلسلی کے پہلے n ارکان کا جوڑ نکالیں گے جو یہ ہیں۔

$$(i) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (\text{پہلے } n \text{ طبعی اعداد کا جوڑ})$$

$$(ii) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (\text{پہلے } n \text{ طبعی اعداد کے مربعوں کا جوڑ})$$

$$(iii) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \quad (\text{پہلے } n \text{ طبعی اعداد کے کعب کا جوڑ})$$

ہم انہیں ایک ایک کر کے لیتے ہیں۔

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (i) \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (ii)$$

ہم اس مماثلت پر غور کرتے ہیں $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

ایک کے بعد ایک K کی قیمت $1, 2, 3, \dots$ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

.....

.....

.....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

دو طرف کا جوڑ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$n^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (i) \text{ سے ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n \right] = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) \quad \text{اس لئے}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \quad \text{یہاں (iii)}$$

ہم $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ مماثلت پر غور کرتے ہیں۔

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$

$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

دونوں طرف کا جوڑ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) +$$

$$4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$(1) \dots = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n$$

(i) اور (ii) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{اور} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ان قیمتوں کو مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - 2$$

$$4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n \quad \text{یا}$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4} \quad \text{اس لئے}$$

مثال 19 سلسلہ $5+11+19+29+41..$ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

حل ہم لکھتے ہیں

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 5 + 11 + 19 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{یا}$$

تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \dots + (n-1) \text{ terms}] - a_n$$

$$a_n = 5 + \frac{(n-1)[12 + (n-2) \times 2]}{2} \quad \text{یا}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n \quad \text{اس لئے}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

مثال 20 اس سلسلہ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجیے جس کا n^{th} رکن $n(n+3)$ ہے۔

$$a_n = n(n+3) = n^2 + 3n \quad \text{حل دیا ہوا ہے}$$

اس لیے n ارکان کا جوڑ اس طرح دیا گیا ہے

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

مشق 9.4

ذیل سلسلے کا جوڑ n ارکان کا مشق 1 سے 7 تک میں معلوم کیجئے

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots \quad 1. \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots \quad 4. \quad 3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \dots \quad 3.$$

$$3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \dots \quad 6. \quad 5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + 20^2 \quad 5.$$

$$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots \quad 7.$$

ذیل میں دی گئی سلسلے کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے جن کے n^{th} رکن دیے گئے ہیں

$$n^2 + 2^n \quad 9. \quad n(n+1)(n+4) \quad 8.$$

$$(2n-1)^2 \quad 10.$$

متفرق مثالیں

مثال 21 اگر ایک A.P کے p^{th} ، q^{th} ، r^{th} اور s^{th} ارکان G.P میں ہوں تو دیکھائیے کہ $(q-r)$ ، $(p-q)$ ،

$(r-s)$ بھی G.P میں ہوں گے۔

حل یہاں

$$(1) \dots a_p = a + (p-1)d$$

$$(2) \dots a_q = a + (q-1)d$$

$$(3) \dots a_r = a + (r-1)d$$

$$(4) \dots a_s = a + (s-1)d$$

دیا ہوا ہے کہ a_p, a_q, a_r اور a_s G.P میں ہیں۔

$$(5) \dots \frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \text{ (why?) اس لئے}$$

اسی طرح (why?) $(6) \dots \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r - s}{q - r}$

اس لیے (5) اور (6) سے

$$\frac{q - r}{p - q} = \frac{r - s}{q - r}, \text{ i.e., } p - q, q - r \text{ and } r - s \text{ are in G.P}$$

مثال 22 اگر $G.P. a, b, c$ میں ہوں اور $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ ہو، تو ثابت کیجیے کہ $A.P. x, y, z$ میں ہیں۔

حل مان لیجیے کہ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ تب

$$(1) \dots a = k^x, b = k^y, c = k^z$$

کیونکہ $G.P. a, b, c$ میں ہیں، اس لیے

$$(2) \dots b^2 = ac$$

(1) اور (2) کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$k^{2y} = k^{x+z}, \text{ which gives } 2y = x + z$$

اس لیے x, y اور z $A.P.$ میں ہیں۔

مثال 23 اگر d, c, b, a مختلف حقیقی اعداد ہیں تاکہ

$$(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$$

تو ثابت کیجیے کہ a, b, c اور d $G.P.$ میں ہیں۔

حل دیا ہوا ہے

$$(1) \dots (a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$$

لیکن L.H.S.

$$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \geq 0 \text{ جو دیتا ہے}$$

کیونکہ حقیقی اعداد کے مربعوں کا جوڑ غیر صفر ہے۔ اس لیے (1) اور (2) سے ہمارے پاس ہے

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$$

$$ap - b = 0, bp - c = 0, cp - d = 0 \quad \text{یا}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$$

یہ دیتا ہے کہ اس طرح a, b, c, d اور $G.P$ میں ہیں۔

مثال 24 اگر r, q, p $G.P$ میں ہیں اور مساواتوں $px^2 + 2qx + r = 0$ اور $dx^2 + 2ex + f = 0$ کا

یکساں جذر ہے، تو دکھائیے کہ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ $A.P$ میں ہیں۔

حل مساوات $px^2 + 2qx + r = 0$ کے جذر المربع اس طرح دیے گئے ہیں

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

کیونکہ r, q, p $G.P$ میں ہیں۔ اس لئے $q^2 = pr$ ۔ اس سے یہ نکلتا ہے کہ $x = \frac{-q}{p}$ لیکن $\frac{-q}{p}$ بھی

$$dx^2 + 2ex + f = 0 \text{ کا جذر ہے (کیوں؟)}$$

$$\text{اس لیے } d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0$$

$$dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \quad \text{یا}$$

(1) کو pq^2 سے تقسیم کرنے پر اور $q^2 = pr$ کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{f}{pr} = 0$$

اس لیے $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ $A.P$ میں ہیں۔

متفرق مشق

1. دکھائیے کہ ایک A.P کے ارکان $(m+n)^{th}$ اور $(m-n)^{th}$ کا جوڑ m^{th} رکن سے دوگنا ہے۔
2. اگر ایک A.P کے تین ارکان کا جوڑ 24 ہے اور ان کا حاصل ضرب 440 ہے تو اعداد معلوم کیجیے۔
3. مان لیجیے ایک A.P کے $3n, 2n, n$ ارکان کا جوڑ بالترتیب S_1, S_2 اور S_3 ہے، تو دکھائیے کہ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$
4. 200 اور 400 کے درمیان ان تمام اعداد کا جوڑ معلوم کیجیے جو 7 سے تقسیم ہوتے ہیں۔
5. 1 تا 100 تک آنے والے ان سبھی صحیح اعداد کا جوڑ معلوم کیجیے جو 2 یا 5 سے تقسیم ہوتے ہیں۔
6. ان سب ہی دو ہندسی اعداد کا جوڑ معلوم کیجیے جنہیں 4 سے تقسیم کرنے پر ہمیشہ 1 بچتا ہے۔
7. اگر فنکشن $f(x+y) = f(x)f(y)$ تمام $x, y \in \mathbb{N}$ میں ہیں کو مطمئن کرتا ہے تاکہ $f(1) = 3$ اور $\sum_{x=1}^n f(x) = 120$ تو n کی قیمت معلوم کیجیے۔
8. ایک G.P کے کچھ ارکان کا جوڑ 315 ہے جس کا پہلا رکن اور یکساں نسبت بالترتیب 5 اور 2 ہیں۔ اس کے آخری رکن اور کل ارکان معلوم کیجیے۔
9. ایک G.P کا پہلا رکن 1 ہے۔ تیسرے اور پانچویں رکن کا جوڑ 90 ہے۔ G.P کی یکساں نسبت معلوم کیجیے۔
10. ایک G.P میں تین ارکان کا جوڑ 56 ہے۔ اگر ہم ان ارکان سے 1، 7، 21 کو اسی ترتیب میں گھٹائیں تو ہمیں ایک حسابی تصاعد ملتا ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔
11. ایک G.P میں ارکان کی تعداد جفت ہے۔ اگر تمام ارکان کا جوڑ طاق جگہ پر آنے والے ارکان کے جوڑ کا پانچ گنا ہے تو اس کی یکساں نسبت معلوم کیجیے۔
12. ایک A.P کے پہلے چار ارکان کا جوڑ 56 ہے۔ بعد کے چار ارکان کا جوڑ 112 ہے۔ اگر اس کا پہلا رکن 11 ہے تو ارکان کی تعداد معلوم کیجیے۔
13. اگر $(x \neq 0)$ $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$ ، تو دکھائیے کہ c, b, a اور G.P میں ہیں۔
14. مان لیجیے ایک G.P میں n ارکان کا جوڑ S ہے، P حاصل ضرب ہے اور R n ارکان کے جوڑ کا لٹا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ $P^2 R^n = S^n$

15. ایک A.P کے p^{th} ، q^{th} اور r^{th} ارکان بالترتیب a ، b ، c اور G.P میں ہیں۔ تو دکھائیے کہ

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$$

16. اگر $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ، $b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$ ، $c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ایک A.P میں ہے تو ثابت کیجیے کہ a ، b ، c ایک A.P میں ہیں۔

17. اگر a ، b ، c ایک A.P میں ہیں تو ثابت کیجیے کہ $(a^n + b^n)$ ، $(b^n + c^n)$ ، $(c^n + a^n)$ ایک G.P میں ہیں۔

18. اگر $x^2 - 3x + p = 0$ کے جذور a اور b ہیں اور d ، c ، b ، a جہاں $x^2 - 12x + q = 0$ کے جذور ہیں، جہاں d ، c ، b ، a

ایک G.P بناتے ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ $15:17 = (q-p):(q+p)$

19. دو مثبت اعداد a اور b کے A.M اور G.M کی نسبت $m:n$ ہے۔ دکھائیے کہ

$$a:b = \left(m + \sqrt{m^2 - n^2}\right) : \left(m - \sqrt{m^2 - n^2}\right)$$

20. اگر a ، b ، c ایک A.P میں ہیں؛ d ، c ، b ، a ایک G.P میں ہیں اور $\frac{1}{c}$ ، $\frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{e}$ ؛ a ، b ، c ایک G.P میں ہیں۔ ثابت کیجیے کہ a ، b ، c ایک G.P میں ہیں۔

21. ذیل سلسلے کا جوڑ n ارکان تک معلوم کیجئے۔

$$(i) \quad 5 + 55 + 555 + \dots \quad (ii) \quad .6 + .66 + .666 + \dots$$

22. سلسلے $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \dots + n$ terms کا 20^{th} رکن معلوم کیجئے۔

23. سلسلے $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \dots$ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

24. اگر پہلے n طبعی اعداد کا جوڑ ان کے مربع کا جوڑ اور کعب کا جوڑ بالترتیب S_1 ، S_2 اور S_3 ہے، تو دکھائیے کہ

$$9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$$

25. ذیل سلسلے کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^2}{1+3} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^2}{1+3+5} + \dots$

26. دکھائیے کہ $\frac{1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + \dots + n \times (n+1)^2}{1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + \dots + n^2 \times (n+1)} = \frac{3n+5}{3n+1}$

27. ایک کسان ایک ٹریکٹر 12000 روپے میں خریدتا ہے۔ اس وقت وہ 6000 روپے دینے کو تیار ہو جاتا ہے اور باقی رقم 500

- روپے کی سالانہ قسط اور ساتھ ہی بچی ہوئی رقم پر 12% شرح سالانہ سود دیتا ہے۔ بتائیے کسان کو ٹریکٹر کتنے کا پڑا؟
28. شمشاد علی ایک اسکوتر 22000 میں خریدتا ہے۔ وہ 4000 روپے نقد دیتا ہے اور باقی رقم کو 1000 روپے کی سالانہ قسط اور 10% شرح سالانہ سے بچی ہوئی رقم سود دیتا ہے۔ بتائیے اسے اسکوتر کتنی رقم کا پڑا۔
29. ایک انسان اپنے چار دوستوں کو خط لکھتا ہے۔ وہ ان میں ہر ایک سے کہتا ہے کہ اس کی نقل کر کے وہ آگے چار کو بھیج دیں اور یہ تاکید کرتا ہے کہ یہ سلسلہ اسی طرح آگے چلتا رہے۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ سلسلہ نہیں ٹوٹا ہے اور ہر خط بھیجنے میں 50 پیسے لگتے ہیں تو خط و کتابت پر خرچ معلوم کیجیے جب کہ 8 واں سیٹ خطوط کا پوسٹ کیا گیا ہو۔
30. ایک آدمی بینک میں 10,000 روپے جمع کرتا ہے جس پر 5% شرح سالانہ سے سود مقرر ملتا ہے۔ 15 سال بعد اسے ملنے والی کل رقم بتائیے اور ساتھ ہی بتائیے 20 سال میں کل کتنی رقم بنے گی۔
31. ایک صنعت کار یہ بتاتا ہے کہ ایک مشین کی قیمت جو اسے 15625 روپے میں ملتی ہے ہر سال اس کی قیمت 20% کم ہو جاتی ہے۔ 5 سال بعد اس کی قیمت معلوم کیجیے۔
32. 150 مزدور ایک کام کو کچھ دنوں میں مکمل کرنے کے لیے کام پر لگائے گئے۔ 4 مزدور دوسرے دن نکال دیے گئے، 4 اور تیسرے دن نکال دیے گئے اور اسی طرح آگے بھی۔ کام ختم کرنے میں 8 دن اور زیادہ لگے۔ کل دنوں کی تعداد معلوم کیجیے جن میں کام ختم ہوا۔

خلاصہ (Summery)

- ◆ تواتر سے ہمارا مطلب ہے ایک عدد کا انتظام ایک خاص مرتب میں کسی اصول کے تحت۔ ساتھ ہی ہم تواتر کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں کہ یہ ایک تفاعل ہے جس کا علاقہ طبعی اعداد کا سیٹ ہے یا کوئی ماتحت سیٹ اس طرح کا $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ ۔ ایک تواتر جس میں ارکان کی تعداد محدود ہوتی ہے وہ محدود تواتر کہلاتی ہے۔ ایک تواتر لامحدود کہلاتی ہے اگر یہ محدود تواتر نہیں ہوتی۔
- ◆ مان لیجیے $a_1, a_2, a_3, \dots$ کوئی تواتر ہے، تب اظہار کرنے والا مجموعہ ایسے لکھا جاتا ہے $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ جو سلسلہ کہلاتا ہے۔
- ◆ ایک حسابی تصاعد (arithmetic progression) ایک تواتر ہے جس میں ارکان گھٹتے اور بڑھتے ہیں ایک ہی

constant سے۔ یہ A.P. میں مشترک فرق کہلاتا ہے۔ عام طور پر ہم A.P. کے پہلے ارکان کو a ظاہر کرتے ہیں، مشترک فرق d سے اور آخری رکن l سے۔ A.P. کے n^{th} رکن کا عام رکن اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$a_n = a + (n-1)d$$

A.P. کے پہلے ارکان کا مجموعہ S_n اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a+l)$$

کن ہی دو اعداد a اور b کا حسابی درمیان A ، $\frac{a+b}{2}$ سے دیا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے تو اتر A, Pa, A, b میں ہیں۔

ایک تو اتر ایک جیومیٹریائی تصاعد یا G.P. کہلاتی ہے۔ اگر اس کے کسی بھی رکن کی نسبت اپنے سے پہلے رکن کے ساتھ آگے تک ایک ہو، یہ مستقل اجزائے ضربی مشترک کہلاتا ہے۔ عام طور پر ہم G.P. کے پہلے رکن کو a سے اور اس کے مستقل نسبت کو r سے ظاہر کرتے ہیں۔ عام یا G.P. کا n^{th} رکن $a_n = ar^{n-1}$ سے دیا (لکھا) جاتا ہے۔

کے پہلے n ارکان کا جوڑ (مجموعہ) S_n

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ یا } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

اگر $r \neq 1$ سے دیا جاتا ہے۔

کن ہی دو مثبت اعداد a اور b کا جیومیٹریائی درمیان $\sqrt{ab}$ سے دیا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے تو اتر $G.P. a, G, b$ میں ہے۔

تاریخ کے اوراق سے (Historical Note)

اس بات کے ثبوت ملے ہیں کہ بے بی لوئیس (Babylonians)، کچھ 4000 سال پہلے حساب اور جیومیٹریائی تو اتر جانتے تھے۔ بیوٹھیوس (Beothius) (510 A.D.) کے مطابق پہلے کے یونانی (Greek) مصنف، حساب اور جیومیٹریائی تو اتر جانتے تھے۔ ہندوستانی ریاضی دانوں میں سے آریہ بھٹ (Aryabhatta) (476 A.D.) سب سے پہلا شخص تھا جس نے طبعی اعداد کے مربعوں اور کعبوں کے مجموعہ کے فارمولے اپنے مشہور کام آریہ بھٹیام (Aryabhatiyam) میں دیے ہیں اور 499 A.D. کے اریب قریب لکھا گیا ہے۔ اس نے حسابی تو اتر جو P^{th} رکن سے شروع ہو رہی ہو، کے n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے بھی فارمولہ دیا تھا۔ مشہور ہندوستانی ریاضی دانوں برہم گپتا (Brahmgupta) (598)

(A.D)، مہاویر (Mahavira) (850 A.D) اور بھاسکر (Bhaskara) (1114-1185 A.D) نے بھی مربعوں اور کعبوں کے مجموعہ پر غور کیا تھا۔ ایک دوسری خاص قسم کی تواتر جس کی ریاضی میں بہت اہم استعمال ہے فیبوناچی تواتر (Fibonacci sequence) کہلاتی ہے، جسے اٹلی کے ریاضی داں لیونارڈو فیبوناچی (Leonardo Fibonacci) (1170-1250 A.D) نے ایجاد کیا تھا۔ 17 ویں صدی نے سلسلہ کی درجہ بندی خاص شکل میں دیکھی ہے اور اس بات کی گواہ ہے۔ 1671 A.D میں جیمس گریگوری (James Gregory) نے لامحدود سلسلہ کے رکن کا استعمال لامحدود تواتر کے میل (Connection) کے ساتھ کیا تھا۔ یہ الجبری اور تھیوریٹک ٹول کے سختی سے ترقی کا ہی نتیجہ ہے جس کے ذریعہ تواتر اور سلسلہ کی سوچ کو عملی جامہ پہنایا جاسکا۔