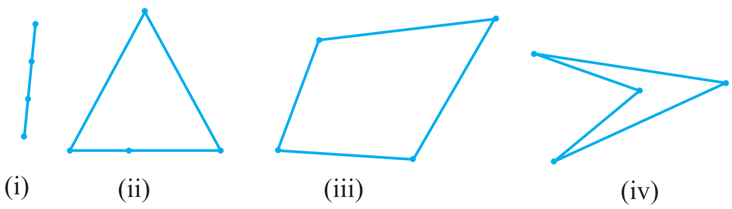
પ્રકરણ 8

ચતુષ્કોણ

8.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 6 અને 7 માં આપણે ત્રિકોણના ઘણા ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કર્યો અને તમને ખબર છે કે, ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ પૈકી બબ્બેને જોડતાં જે આકૃતિ મળે તેને ત્રિકોણ કહેવાય. હવે આપણે ચાર બિંદુઓ દર્શાવી અને તેમને કોઈ ક્રમમાં જોડતાં શું મળશે તે જોઈએ.

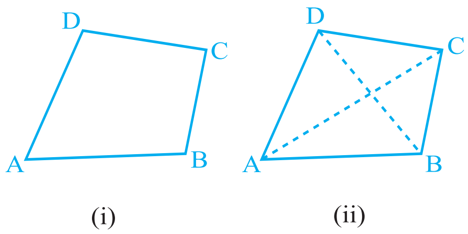


આકૃતિ 8.1

આપણે નોંધીશું કે જો બધાં જ બિંદુઓ સમરેખ (એક જ રેખામાં) હોય તો આપણને એક રેખાખંડ મળશે. [જુઓ આકૃતિ 8.1 (i)], જો ચારમાંથી ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ હોય તો ત્રિકોણ મળશે. [જુઓ આકૃતિ 8.1 (ii)] અને જો ચારમાંથી કોઈપણ ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ ન હોય, તો આપણને ચાર બાજુઓવાળી એક બંધ આકૃતિ મળશે. [જુઓ આકૃતિ 8.1 (iii) અને (iv)].

ચાર બિંદુઓને ક્રમમાં જોડતાં આવી જે આકૃતિ બને છે તેને ***ચતુષ્કોણ*** (*quadrilateral*) કહે છે. આ પુસ્તકમાં આપણે આકૃતિ 8.1 (iii) માં જે ચતુષ્કોણ મળે છે તેમના વિશે જ અભ્યાસ કરીશું, પરંતુ આકૃતિ 8.1 (iv) માં મળે તેવા ચતુષ્કોણ વિશે નહિ.

ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ, ચાર ખૂણા અને ચાર શિરોબિંદુઓ હોય છે [જુઓ આકૃતિ 8.2 (i)].



આકૃતિ 8.2

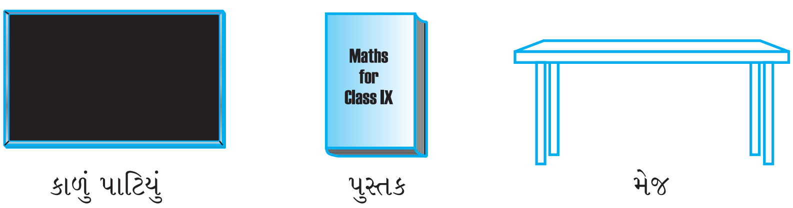
ચતુષ્કોણ ABCD માં AB, BC, CD અને DA બાજુઓ છે. તેને ચાર શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D છે અને તેનાં શિરોબિંદુઓ આગળ ચાર ખૂણાઓ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ અને $\angle D$ બને છે.

હવે A ને તેની સામે આવેલા શિરોબિંદુ C અને B ને D સાથે જોડો. [જુઓ આકૃતિ 8.2 (ii).]

AC અને BD એ ચતુષ્કોણ ABCD ના બે વિકર્ણ છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે જુદા-જુદા પ્રકારના ચતુષ્કોણ, તેમના ગુણધર્મો અને વિશેષ કરીને ***સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ*** (*parallelogram*) વિશે અભ્યાસ કરીશું.

તમને નવાઈ લાગશે કે શા માટે આપણે ચતુષ્કોણો અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો વિશે અભ્યાસ કરીશું. તમે તમારી આજુબાજુ નજર નાંખશો તો તમને ચતુષ્કોણ આકારની પુષ્કળ વસ્તુઓ જોવા મળશે, જેમકે ભોંયતળિયુ, દીવાલ, છત, તમારા વર્ગની બારીઓ, કાળું પાટિયું, ડસ્ટરની દરેક સપાટી, તમારા પુસ્તકના દરેક પૃષ્ઠ, અભ્યાસ કરવાના તમારા મેજની ઉપરની બાજુ વગેરે. આમાંની કેટલીક નીચે દર્શાવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.3.)



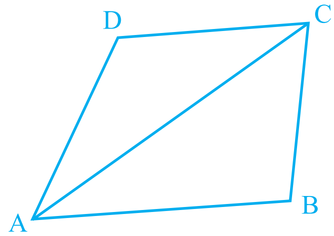
આકૃતિ 8.3

જો કે આપણી આસપાસ નજરે પડતી મોટાભાગની વસ્તુઓ જે વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણ આકારની હોય છે તેને ***લંબચોરસ*** કહેવાય છે. આપણે ચતુષ્કોણો વિશે અને તેમાં મુખ્યત્વે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ વિશે વધુ અભ્યાસ કરીશું, કારણ કે લંબચોરસ પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો લંબચોરસ માટે પણ સત્ય છે.

8.2 ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ

આપણે ચતુષ્કોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ યાદ કરીએ.

ચતુષ્કોણના ચારેય ખૂણાઓનો સરવાળો 360° છે. ચતુષ્કોણમાં એક વિકર્ણ દોરી ચતુષ્કોણને બે ત્રિકોણોમાં વિભાજિત કરી આ ગુણધર્મની ખાતરી કરી શકાય છે.



આકૃતિ 8.4

ધારો કે ABCD ચતુષ્કોણ છે અને AC વિકર્ણ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.4.)

Δ ADC ના ખૂણાઓનો સરવાળો કેટલો થશે ?

તમે જાણો છો કે, $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180°$ (1)

તે જ પ્રમાણે Δ ABC માં,

$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180°$ થાય. (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° + 180° = 360°$

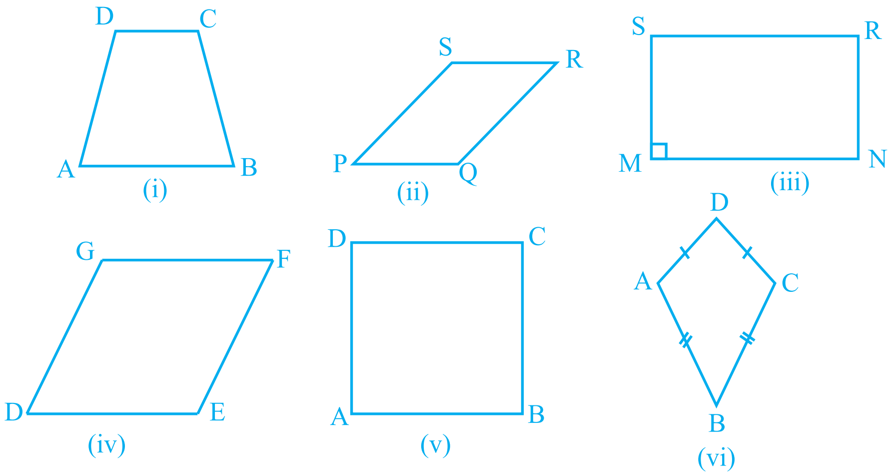
તથા $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ અને $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

તેથી, $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360°$.

$\therefore$ *ચતુષ્કોણના ચારે ય ખૂણાનો સરવાળો 360° છે.*

8.3 ચતુષ્કોણના પ્રકાર

નીચે દોરેલા જુદા જુદા ચતુષ્કોણ તરફ નજર કરો.



આકૃતિ 8.5

અવલોકન કરો :

- આકૃતિ 8.5 (i)ના ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓની ફક્ત એક જ જોડની રેખાઓ AB અને CD સમાંતર છે. તમને જ્ઞાત છે કે તેને ***સમલંબ ચતુષ્કોણ*** (*trapezium*) કહે છે.
- આકૃતિ 8.5 (ii), (iii) , (iv) અને (v) ના ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર છે. યાદ કરો કે આવા ચતુષ્કોણને ***સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ*** (*parallelogram*) કહે છે.

  આથી, આકૃતિ 8.5 (ii) નો ચતુષ્કોણ PQRS એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

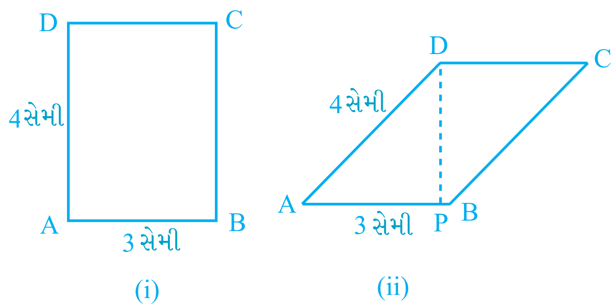
  તે જ પ્રમાણે આકૃતિ 8.5 (iii), (iv) અને (v) ના બધા જ ચતુષ્કોણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
- નોંધો કે આકૃતિ 8.5 (iii) ના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ MNRS નો એક ખૂણો અર્થાત્ $\angle M$ કાટખૂણો છે. આ વિશિષ્ટ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને શું કહીશું ? યાદ કરવાનો પ્રયત્ન કરો. તેને ***લંબચોરસ*** (*Rectangle*) કહે છે.

- આકૃતિ 8.5 (iv) ના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ DEFG ની બધી જ બાજુઓ સમાન છે. આપણે જાણીએ છીએ કે તેને ***સમબાજુ ચતુષ્કોણ*** *(rhombus)* કહે છે.
- આકૃતિ 8.5 (v) ના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં $\angle A = 90°$ છે અને બધી જ બાજુઓ સમાન છે. તેને ***ચોરસ*** *(square)* કહે છે.
- આકૃતિ 8.5 (vi) ના ચતુષ્કોણ, ABCD માં $AD = CD$ અને $AB = CB$ એટલે કે પાસપાસેની બાજુઓની બંને જોડની બાજુઓ સમાન છે. તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી. તેને ***પતંગાકાર ચતુષ્કોણ*** *(kite)* કહે છે.

નોંધીશું કે ચોરસ, લંબચોરસ અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

- ચોરસ એ લંબચોરસ તેમજ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
- પતંગાકાર એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.
- સમલંબ ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી. (કારણ કે સમલંબ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓની બે જોડમાંની માત્ર એક જ જોડની રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર છે અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ માટે બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર હોવી જોઈએ.)
- લંબચોરસ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ ચોરસ નથી.

આકૃતિ 8.6 માં સમાન પરિમિતિ 14 સેમી હોય તેવો એક લંબચોરસ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.6

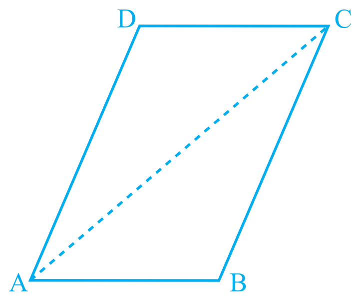
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $DP \times AB$ એ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ $AB \times AD$ થી ઓછું છે, કારણ કે $DP < AD$. મિઠાઈની દુકાનવાળા સામાન્યતઃ ***તાસક*** *(tray)*માં વધારે ટુકડાઓનો સમાવેશ કરી શકે તે માટે બરફીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આકારમાં કાપે છે. (ફરી વખત ખાતા પહેલાં બરફીના ટુકડાઓનો આકાર જુઓ !)

હવે આપણે આગળના ધોરણોમાં ભણી ગયેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કેટલાક ગુણધર્મોનું પુનઃઅવલોકન કરી લઈએ.

8.4 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો :

ચાલો આપણે પ્રવૃત્તિ કરીએ. એક કાગળના ટુકડામાંથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને વિકર્ણથી કાપીએ. (જુઓ આકૃતિ 8.7.) આપણને બે ત્રિકોણ મળશે. આ ત્રિકોણો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

એક ત્રિકોણને બીજા ત્રિકોણ ઉપર મૂકો. જરૂરિયાત જણાય તો એક વખત ફેરવો. તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ?



આકૃતિ 8.7

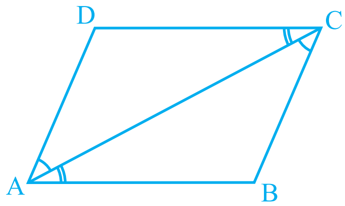
જુઓ કે બંને ત્રિકોણ એકબીજાને એકરૂપ છે.

બીજા કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ માટે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે અનુભવાશે કે પ્રત્યેક વિકર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.

હવે આપણે આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

પ્રમેય 8.1 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈપણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.*

સાબિતી : ધારો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને AC તેનો વિકર્ણ છે (જુઓ આકૃતિ 8.8.) અવલોકન કરો કે વિકર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે ત્રિકોણ Δ ABC અને Δ CDA માં વિભાજિત કરે છે. આપણે આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે તેમ સાબિત કરીશું.



આકૃતિ 8.8

Δ ABC અને Δ CDA માં નોંધો કે BC || AD અને AC તેમની છેદિકા છે.

આથી, $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (યુગ્મકોણોની જોડ)

તથા, AB || DC અને AC છેદિકા છે.

તેથી, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA (યુગ્મકોણોની જોડ)

અને AC = CA (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (ખૂબાખૂ નિયમ)

અથવા વિકર્ણ AC સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે એકરૂપ ત્રિકોણો ABC અને CDA માં વિભાજીત કરે છે. ■

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓ માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ? તમને AB = DC અને AD = BC મળશે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો આ બીજો ગુણધર્મ નીચે દર્શાવેલ છે:

પ્રમેય 8.2 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.*

તમે સાબિત કર્યું છે કે વિકર્ણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજીત કરે છે.

આથી તમે અનુરૂપ ભાગ એટલે કે તદ્‌નુસાર બાજુઓ વિશે શું કહી શકશો ? તેઓ સમાન છે.

આથી, AB = DC અને AD = BC

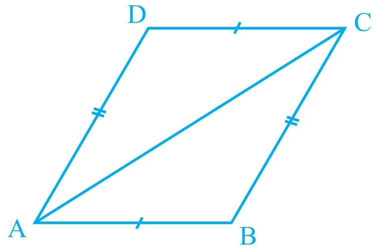
હવે આ પરિણામનું પ્રતીપ શું છે ? તમને જ્ઞાત છે કે પ્રમેયમાં જે કંઈ આપ્યું હોય છે, તે આપણે તેના પ્રતિપ્રમેયમાં સાબિત કરવાનું હોય છે અને પ્રમેયમાં જે સાબિત કરવાનું છે તે પ્રતિપ્રમેયના વિધાનમાં આપેલું હોય છે. આમ, પ્રમેય 8.2 ને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડ સમાન છે. આથી તેનું પ્રતિપ્રમેય :

પ્રમેય 8.3 : *જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

તમે કારણ આપી શકશો કે આ શા માટે ?

ધારો કે ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ AB અને CD સમાન છે તથા AD = BC (જુઓ આકૃતિ 8.9.) વિકર્ણ AC દોરો.



આકૃતિ 8.9

સ્પષ્ટ છે કે, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (શા માટે ?)

આથી, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA

અને $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (શા માટે ?)

હવે તમે કહી શકશો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? શા માટે ?

તમે હમણાં જ જોયું કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન છે તથા તેનું પ્રતીપ જો ચતુષ્કોણની સામસામેની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. આપણે આવું જ પરિણામ સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડ માટે તારવી શકીએ ?

કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો દોરી તેમના ખૂણા માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન છે.

કેટલાક વધારે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈ આ પરિણામ ફરી ચકાસી જોઇએ. આપણે એક અન્ય પરિણામ પર આવી પહોંચીશું. તે નીચે આપેલ છે :

પ્રમેય 8.4 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા સમાન છે.*

હવે, આ પરિણામનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? હા, સત્ય છે. ચતુષ્કોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ અને સમાંતરબાજુઓને છેદિકા વડે છેદવાથી મળતાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે પ્રતિપ્રમેય પણ સત્ય છે. આથી, આપણને નીચેનું પરિણામ મળશે :

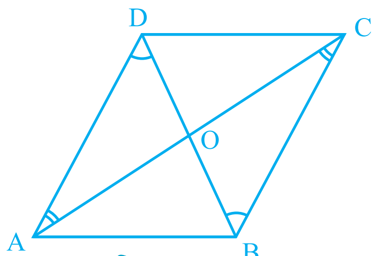
પ્રમેય 8.5 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો હજુ એક બીજો પણ ગુણધર્મ છે. આપણે તેનો અભ્યાસ કરીએ. એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD દોરો અને O બિંદુએ છેદતાં તેના બંને વિકર્ણ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 8.10.)

OA, OB, OC અને OD ની લંબાઈ માપો.

તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ? તમે નિરીક્ષણ કરશો કે OA = OC અને OB = OD અથવા બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ O છે. આ પ્રક્રિયાને સમજવા કેટલાક વધારે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોશો કે દરેક વખતે આપણને બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ O જ મળશે.

આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળશે :



આકૃતિ 8.10

પ્રમેય 8.6 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.*

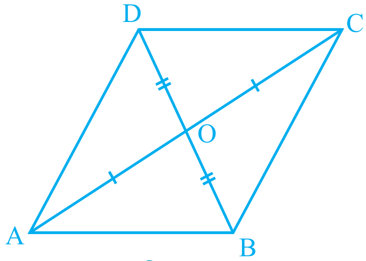
હવે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો શું થશે ? શું તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હશે ? ખરેખર, આ સત્ય છે.

આ પરિણામ એ પ્રમેય 8.6 ના પરિણામનું પ્રતીપ છે. તે આગળ પ્રમાણે છે :

પ્રમેય 8.7 *જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

આ પરિણામને સાબિત કરવા આપણે નીચે પ્રમાણે દલીલ કરી શકીએ:

આકૃતિ 8.11, માં OA = OC અને OB = OD આપ્યું છે.



આકૃતિ 8.11

આથી, Δ AOB $\cong$ Δ COD (શા માટે ?)

માટે $\angle$ ABO = $\angle$ CDO (શા માટે ?)

આ પરથી, AB || CD મળે.

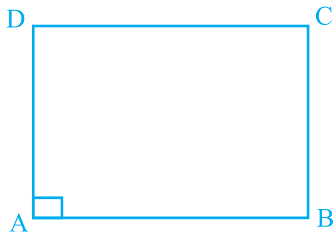
તે જ પ્રમાણે, BC || AD

માટે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : બતાવો કે લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.

ઉકેલ : યાદ કરો, લંબચોરસ શું છે ?



આકૃતિ 8.12

લંબચોરસ એ જેનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ધારો કે $\angle$ A = 90° હોય તેવો એક લંબચોરસ ABCD છે.

આપણે સાબિત કરીશું કે, $\angle$ B = $\angle$ C = $\angle$ D = 90°

AD || BC છે અને AB તેની એક છેદિકા છે. (જુઓ આકૃતિ 8.12.)

આથી, $\angle$ A + $\angle$ B =180° (છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃકોણો)

પરંતુ, $\angle$ A = 90°

આથી, $\angle$ B = 180° – $\angle$ A = 180° – 90° = 90°

વળી, $\angle$ C = $\angle$ A અને $\angle$ D = $\angle$ B (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle$ C = 90° અને $\angle$ D = 90°.

માટે, લંબચોરસનો પ્રત્યેક ખૂણો કાટખૂણો છે.

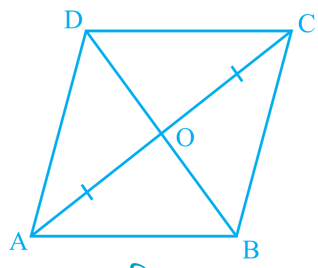
ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ છે, તેમ બતાવો.

ઉકેલ : ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ લો. (જુઓ આકૃતિ 8.13.)

તમે જાણો છો કે, AB = BC = CD = DA (શા માટે ?)

હવે, Δ AOD અને Δ COD માં,

OA = OC (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.)



આકૃતિ 8.13

OD = OD (સામાન્ય બાજુ)

AD = CD

માટે, Δ AOD $\cong$ Δ COD (બાબાબા સંગતતાનો નિયમ)

માટે, $\angle$ AOD = $\angle$ COD (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ ભાગ)

પરંતુ, $\angle$ AOD + $\angle$ COD = 180° (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી, 2$\angle$ AOD = 180°

અથવા, $\angle$ AOD = 90°

આથી, સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ છે.

ઉદાહરણ 3 : સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC માં AB = AC છે. AD બહિષ્કોણ PAC નો દ્વિભાજક છે અને CD || AB (જુઓ આકૃતિ 8.14.) સાબિત કરો કે,

(i) $\angle$ DAC = $\angle$ BCA અને (ii) ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉકેલ : (i) સમદ્વિભુજ ΔABC માં AB = AC છે (પક્ષ)

માટે, $\angle$ ABC = $\angle$ ACB (સમાન બાજુની સામેના ખૂણા)

વળી, $\angle$ PAC = $\angle$ ABC + $\angle$ ACB (ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ)

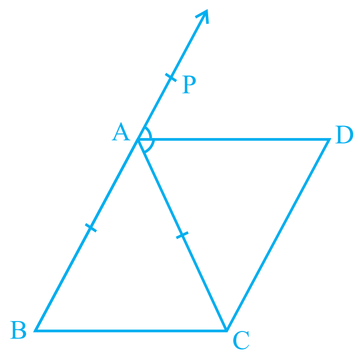
$\therefore$ $\angle$ PAC =2$\angle$ ACB (1)

હવે, AD એ $\angle$ PAC નો દ્વિભાજક છે.

માટે, $\angle$ PAC = 2$\angle$ DAC (2)

માટે, 2$\angle$ DAC = 2$\angle$ ACB [(1) અને (2) પરથી]

$\therefore$ $\angle$ DAC = $\angle$ BCA



આકૃતિ 8.14

(ii) રેખાખંડ BC અને AD ની છેદિકા AC ના છેદવાથી બનતી યુગ્મકોણની જોડના ખૂણા સમાન છે.

આથી, BC || AD

વળી, BA || CD (પક્ષ)

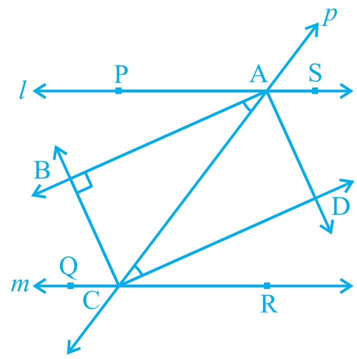
હવે, ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર છે. આથી, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉદાહરણ 4 : બે સમાંતર રેખાઓ l અને m ની છેદિકા રેખા p છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15.) બતાવો કે અંતઃકોણોના દુભાજકથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.

ઉકેલ : PS || QR છે અને છેદિકા p તેમને અનુક્રમે A અને C માં છેદે છે.

$\angle$ PAC અને $\angle$ ACQ ના દુભાજકો B માં છેદે છે અને $\angle$ ACR અને $\angle$ SAC ના દુભાજકો D માં છેદે છે.

આપણે બતાવવાનું છે કે ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ છે.



આકૃતિ 8.15

હવે, $\angle PAC = \angle ACR$ ($l \parallel m$ ની છેદિકા p થી બનતા યુગ્મકોણ)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

અર્થાત્, $\angle BAC = \angle ACD$

આ તો રેખાઓ AB અને DC ની છેદિકા AC થી બનતા યુગ્મકોણોની જોડ છે

અને તેઓ સમાન પણ છે.

$$AB \parallel DC$$

તે જ પ્રમાણે, $BC \parallel AD$ ($\angle$ ACB અને $\angle$ CAD લેતાં)

માટે, ચતુષ્કોણ ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

વળી, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = 90°$$

$$\therefore \angle BAD = 90°$$

આથી, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા તેનો એક ખૂણો 90° છે.

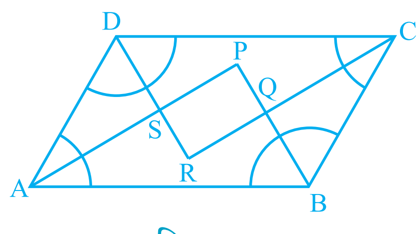
માટે ABCD લંબચોરસ છે.

ઉદાહરણ 5 : બતાવો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના દુભાજકો લંબચોરસ રચે છે.

ઉકેલ : ધારો કે P, Q, R અને S એ અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના ખૂણાઓ $\angle$ A અને $\angle$ B, $\angle$ B અને $\angle$ C, $\angle$ C અને $\angle$ D તથા $\angle$ D અને $\angle$ A ના દુભાજકોનાં છેદબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.16.)

Δ ASDમાં તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ?

$\angle$ D નો દુભાજક DS અને $\angle$ A નો દુભાજક AS હોવાથી,



આકૃતિ 8.16

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$= \frac{1}{2} \times 180°$ ($\angle$ A અને $\angle$ D છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણો છે.)

$= 90°$

વળી, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

માટે, $90° + \angle DSA = 180°$

$\therefore \angle DSA = 90°$

આથી, $\angle PSR = 90°$ ($\angle$ DSA નો અભિકોણ)

તે જ પ્રમાણે આપણે $\angle APB = 90°$ અને $\angle SPQ = 90°$ બતાવી શકીએ. ($\angle$ DSA માટે બતાવ્યું તે પ્રમાણે)

તથા તે જ પ્રમાણે, $\angle PQR = 90°$ અને $\angle SRQ = 90°$.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRSના બધા જ ખૂણાઓ કાટખૂણા છે.

શું તે લંબચોરસ છે તેવો નિર્ણય આપણે લઈ શકીએ ? ચાલો આપણે ચકાસીએ. આપણે બતાવ્યું છે કે $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ અને $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$. આથી, સામસામેના ખૂણાઓની બંને જોડ સમાન છે.

માટે, PQRS એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને તેનો એક ખૂણો (ખરેખર તો બધા જ ખૂણાઓ) 90° નો છે અને તેથી PQRS લંબચોરસ છે.

8.5 ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય તેની બીજી શરત

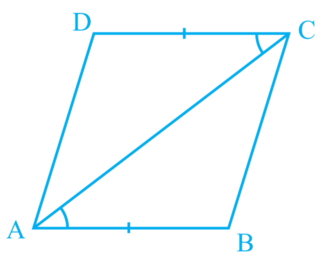
આ પ્રકરણમાં તમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ઘણા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો અને તમે એવી પણ ચકાસણી કરી કે જો ચતુષ્કોણ આ ગુણધર્મોમાંથી કોઈ એક ગુણધર્મ સંતોષે, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય.

ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય તે માટે ઓછામાં ઓછી શરતની જરૂર પડે તેવી હજુ બીજી શરતનો આપણે હવે અભ્યાસ કરીશું.

તેને નીચે પ્રમાણે પ્રમેયના સ્વરૂપમાં દર્શાવીશું :

પ્રમેય 8.8 : *જો ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની એક જોડની બાજુઓ સમાન અને સમાંતર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

આકૃતિ 8.17માં જુઓ કે AB = CD અને AB || CD છે. આપણે વિકર્ણ AC દોરીએ. તમે બતાવી શકશો કે બાખૂબા સંગતતાના નિયમ પરથી $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ થાય.



આકૃતિ 8.17

આથી, BC || AD (શા માટે ?)

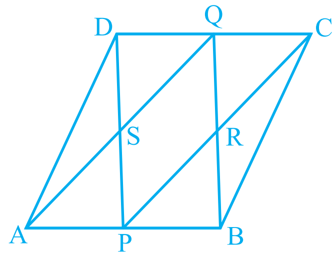
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરવા માટે હવે આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 6 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં P અને Q એ અનુક્રમે સામસામેની બાજુઓ AB અને CD નાં મધ્યબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.18.) જો AQ એ DP ને S માં છેદે અને BQ એ CP ને R માં છેદે, તો દર્શાવો કે,

(i) APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(ii) DPBQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iii) PSQR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.18

ઉકેલ : (i) ચતુષ્કોણ APCQ માં,

AP || QC (AB || CD હોવાથી) (1)

$AP = \frac{1}{2}$ AB, $CQ = \frac{1}{2}$ CD (પક્ષ)

વળી, AB = CD (શા માટે ?)

આથી, AP = QC (2)

માટે, APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. [(1) અને (2) અને પ્રમેય 8.8 પરથી]

(ii) તે જ પ્રમાણે DPBQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, કારણ કે

DQ || PB અને DQ = PB

(iii) ચતુષ્કોણ PSQR માં,

SP || QR (SP એ DP નો ભાગ છે અને QR એ QB નો ભાગ છે.)

તે જ પ્રમાણે, SQ || PR

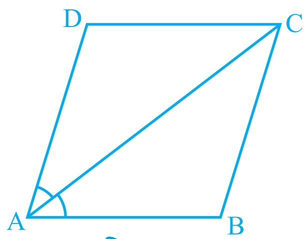
આથી, PSQR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

1. એક ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો ગુણોત્તર 3 : 5 : 9 : 13 છે. આ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ શોધો.
2. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો દર્શાવો કે તે લંબચોરસ છે.
3. સાબિત કરો કે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે, તો તે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
4. સાબિત કરો કે, ચોરસના વિકર્ણો સમાન છે અને તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.
5. સાબિત કરો કે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય તથા તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે, તો તે ચોરસ છે.
6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નો વિકર્ણ AC એ ∠A ને દુભાગે છે (જુઓ આકૃતિ 8.19.) સાબિત કરો કે,

   (i) તે ∠C ને પણ દુભાગે છે.

   (ii) ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.19

7. ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે. સાબિત કરો કે વિકર્ણ AC એ ∠A તેમજ ∠C ને દુભાગે છે તથા વિકર્ણ BD એ ∠B તેમજ ∠D ને દુભાગે છે.

8. લંબચોરસ ABCD માં વિકર્ણ AC એ ∠A તેમજ ∠C ને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે,

(i) ABCD ચોરસ છે. (ii) વિકર્ણ BD એ ∠B તેમજ ∠D ને દુભાગે છે.

9. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં વિકર્ણ BD પર બે બિંદુઓ P અને Q એવાં લીધાં છે કે જેથી DP = BQ થાય. (જુઓ આકૃતિ 8.20.) સાબિત કરો કે,

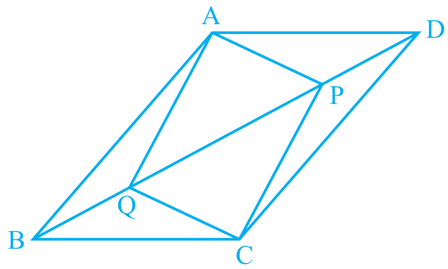
(i) ΔAPD ≅ ΔCQB

(ii) AP = CQ

(iii) ΔAQB ≅ ΔCPD

(iv) AQ = CP

(v) APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

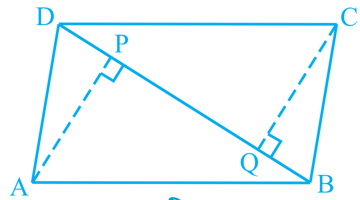


આકૃતિ 8.20

10. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને શિરોબિંદુઓ A અને C માંથી વિકર્ણ BD પર લંબ અનુક્રમે AP અને CQ દોરેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.21.) સાબિત કરો કે,

(i) ΔAPB ≅ ΔCQD

(ii) AP = CQ



આકૃતિ 8.21

11. ΔABC અને ΔDEF માં AB = DE, AB || DE, BC = EF અને BC || EF છે. શિરોબિંદુઓ A, B અને C ને અનુક્રમે D, E અને F સાથે જોડેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 8.22) સાબિત કરો કે,

(i) ચતુષ્કોણ ABED એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

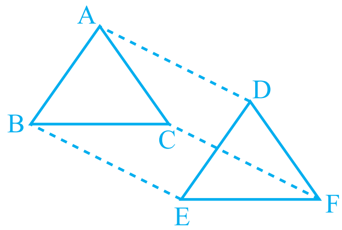
(ii) ચતુષ્કોણ BEFC એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iii) AD || CF અને AD = CF

(iv) ચતુષ્કોણ ACFD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(v) AC = DF

(vi) ΔABC ≅ ΔDEF

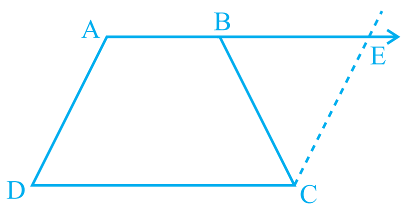


આકૃતિ 8.22

12. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || CD અને AD = BC (જુઓ આકૃતિ 8.23.) સાબિત કરો કે,

(i) ∠A = ∠B (ii) ∠C = ∠D

(iii) ΔABC ≅ ΔBAD (iv) વિકર્ણ AC = વિકર્ણ BD



આકૃતિ 8.23

[**સૂચના :** AB ને લંબાવો અને C માંથી DA ને સમાંતર તથા AB ને E માં છેદતી એક રેખા દોરો.]

8.6 મધ્યબિંદુ પ્રમેય

તમે ત્રિકોણ તેમજ ચતુષ્કોણના ઘણા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ, સંબંધી એક અન્ય પરિણામનો અભ્યાસ કરીએ. નીચેની પ્રવૃત્તિ કરો :

એક ત્રિકોણ દોરી તેની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને E અને F નામ આપીએ. E અને F ને જોડીએ.

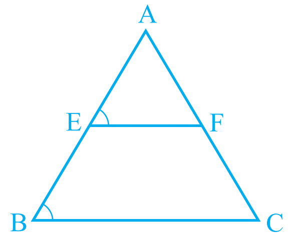
(જુઓ આકૃતિ 8.24.)

EF અને BC માપો. $\angle$ AEF અને $\angle$ ABC માપો.

તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ? તમને

$EF = \frac{1}{2}$ BC અને $\angle AEF = \angle ABC$ મળશે.

તેથી, $EF \parallel BC$



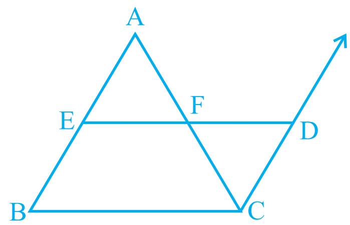
આકૃતિ 8.24

આ પ્રવૃત્તિનું કેટલાક વધારે ત્રિકોણ લઈ પુનરાવર્તન કરીએ.

આથી, તમને નીચેનું પ્રમેય મળશે :

પ્રમેય 8.9 : *ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે.*

તમે નીચેની ચાવીનો ઉપયોગ કરીને આ પ્રમેય સાબિત કરી શકશો.



આકૃતિ 8.25

આકૃતિ 8.25 નું નિરીક્ષણ કરો. તેમાં AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે તથા $CD \parallel BA$.

$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (ખૂબાખૂ નિયમ)

આથી, $EF = DF$ અને $BE = AE = DC$ (શા માટે ?)

માટે, BCDE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (શા માટે ?)

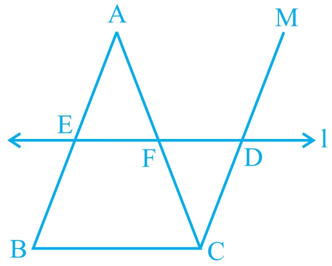
તે પરથી $EF \parallel BC$ મળે.

આ કિસ્સામાં આપણે $EF = \frac{1}{2}\ ED = \frac{1}{2}BC$ પણ નોંધીશું.

શું તમે પ્રમેય 8.9 નું પ્રતીપ રજૂ કરી શકશો ? પ્રતીપ સત્ય છે ?

તમે જોઈ શકશો કે ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

પ્રમેય 8.10 : *ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.*

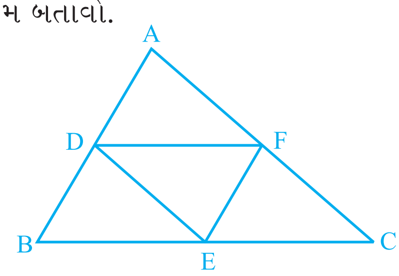


આકૃતિ 8.26

આકૃતિ 8.26 માં જુઓ કે AB નું મધ્યબિંદુ E છે. E માંથી પસાર થતી રેખા l એ BC ને સમાંતર છે અને $CM \parallel BA$.

Δ AEF અને Δ CDF ની એકરૂપતાનો ઉપયોગ કરી AF = CF સાબિત કરો.

ઉદાહરણ 7 : Δ ABC માં, બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 8.27.) D, E અને F ને જોડતાં, Δ ABC નું ચાર એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન થાય છે તેમ બતાવો.



આકૃતિ 8.27

ઉકેલ : બાજુઓ AB અને BC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D અને E હોવાથી,

પ્રમેય 8.9 ના ઉપયોગથી $DE \parallel AC$ મળે.

તે જ પ્રમાણે, $DF \parallel BC$ અને $EF \parallel AB$

માટે ADEF, BDFE અને DFCE બધા જ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BDFE નો વિકર્ણ DE છે.

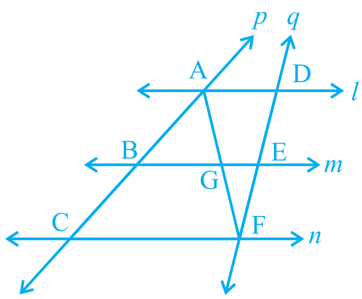
માટે, $\Delta BDE \cong \Delta FED$

તે જ પ્રમાણે $\Delta DAF \cong \Delta FED$

અને $\Delta EFC \cong \Delta FED$

આથી, ચારેય ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર રેખાઓ l, m અને n ને છેદિકાઓ p અને q એવી રીતે છેદે છે કે, l, m અને n રેખાઓ, રેખા p પર સમાન અંતઃખંડો AB અને BC કાપે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.28.) સાબિત કરો કે l, m અને n રેખા q પર પણ સમાન અંતઃખંડો DE અને EF કાપે છે.



આકૃતિ 8.28

ઉકેલ : AB = BC આપ્યું છે અને આપણે DE = EF સાબિત કરવું છે.

ચાલો, આપણે A ને F સાથે જોડીએ જેથી રેખા AF, m ને G માં છેદે.

સમલંબ ચતુષ્કોણ ACFD એ બે ત્રિકોણો Δ ACF અને Δ AFD માં વિભાજિત થાય છે,

Δ ACF માં, AC નું મધ્યબિંદુ B છે તેમ આપેલ છે (AB = BC)

અને $BG \parallel CF$ ($m \parallel n$ હોવાથી)

માટે G એ AF નું મધ્યબિંદુ થશે. (પ્રમેય 8.10 નો ઉપયોગ કરતાં)

Δ AFD માં, AF નું મધ્યબિંદુ G હોવાથી, આપણે આ જ દલીલનો ઉપયોગ કરી GE $\parallel$ AD બતાવી શકીએ અને પ્રમેય 8.10 પરથી કહી શકીએ કે, E એ DF નું મધ્યબિંદુ છે.

એટલે કે, DE = EF.

બીજી રીતે કહીએ તો, રેખાઓ l, m અને n એ રેખા q પર પણ સમાન અંતઃખંડ કાપે છે.

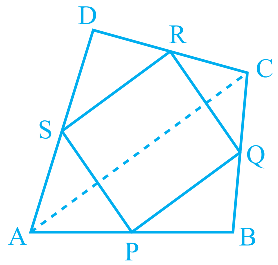
સ્વાધ્યાય 8.2

1. ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. (જુઓ આકૃતિ 8.29.) AC તેનો વિકર્ણ છે. સાબિત કરો કે,

   (i) SR $\parallel$ AC અને SR = $\frac{1}{2}$ AC

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

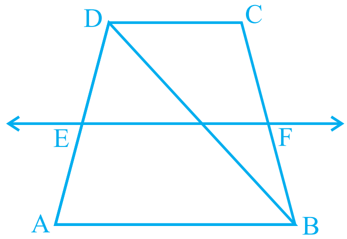


આકૃતિ 8.29

2. ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને P, Q, R અને S એ અનુક્રમે બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ PQRS એ લંબચોરસ છે.

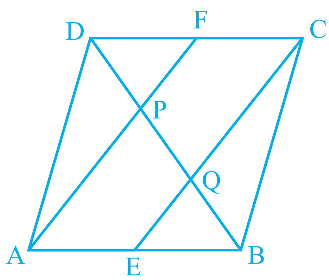
3. ABCD લંબચોરસ છે અને તેની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ PQRS એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

4. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB $\parallel$ DC, BD વિકર્ણ છે અને AD નું મધ્યબિંદુ E છે. E માંથી AB ને સમાંતર અને BC ને F માં છેદતી એક રેખા દોરી છે. (જુઓ આકૃતિ 8.30.) F એ BC નું મધ્યબિંદુ છે તેમ બતાવો.



આકૃતિ 8.30

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુઓ AB અને CD નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 8.31.) સાબિત કરો કે રેખાખંડ AF અને EC વિકર્ણ BD નું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 8.31

6. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતાં રેખાખંડ એકબીજાને દુભાગે છે.

7. Δ ABC માં $\angle$C કાટકોણ છે. કર્ણ AB ના મધ્યબિંદુ M માંથી પસાર થતી અને BC ને સમાંતર રેખા AC ને D માં છેદે છે. સાબિત કરો કે

   (i) D એ AC નું મધ્યબિંદુ છે. (ii) MD $\perp$ AC

   (iii) CM = MA = $\frac{1}{2}$AB

8.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 360° થાય છે.
2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.
3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં,

   (i) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે. (ii) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન છે.

   (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.
4. જો ચતુષ્કોણમાં (i) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય અથવા (ii) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન હોય અથવા (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે અથવા (iv) સામસામેની બાજુઓની કોઈપણ એક જોડની બાજુઓ સમાન અને સમાંતર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
5. લંબચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
6. સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
7. ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
8. ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ એ ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે અને તેનાથી અડધો છે.
9. ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.
10. ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પ્રકરણ 9

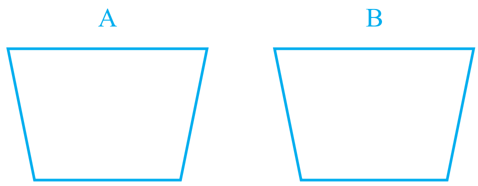
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ

9.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 5માં તમે જોઈ ગયાં કે ભૂમિતિના અભ્યાસનો પ્રારંભ ખેતરોની સીમાઓનું પુનઃનિર્માણ કરવા માટે અને તેને યોગ્ય ભાગમાં વહેંચવાની પ્રક્રિયામાં જમીનના માપનથી થયો. ઉદાહરણ તરીકે એક ખેડૂત બુધિયા પાસે ત્રિકોણાકાર ખેતર હતું અને તે પોતાની બે પુત્રી અને એક પુત્રને સરખે ભાગે વહેંચવા માંગતો હતો. તેણે ત્રિકોણાકાર ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધ્યા વગર ફક્ત એક બાજુને બરાબર ત્રણ ભાગમાં વહેંચી અને આ બાજુને વિભાજિત કરતાં બે બિંદુઓને તેની સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડી દીધા. આ રીતે ખેતર બરાબર ત્રણ ભાગમાં વહેંચાઈ ગયું અને તેણે પોતાના દરેક બાળકને એક-એક ભાગ વહેંચી દીધો. શું તમને લાગે છે કે આ પ્રમાણે તેણે જે ત્રણ ભાગ પાડ્યા તે પ્રમાણે તેમનું ક્ષેત્રફળ ખરેખર સમાન હતું? આ પ્રકારના પ્રશ્નો અને બીજી આવી સમસ્યાના ઉકેલ શોધવા માટે જેના વિશે તમે અગાઉનાં ધોરણમાં શીખી ગયાં છો તેવા સમતલ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ વિશે પુનઃવિચાર કરવાની જરૂર છે.

તમને યાદ હશે કે સરળ બંધ આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા સમતલ ભાગને તે આકૃતિનો ***સમતલીય પ્રદેશ*** *(planer region)* કહેવાય છે. આ સમતલીય પ્રદેશના ***પરિમાણ*** *(magnitude)* કે ***માપ*** *(measure)*ને આકૃતિનું ***ક્ષેત્રફળ*** *(area)* કહે છે. આ પરિમાણ કે માપને હંમેશાં એક સંખ્યા [કોઈક ***એકમ*** *(unit)*માં] ની મદદથી દર્શાવવામાં આવે છે. જેમકે 5 સેમી^{2}, 8 મીટર^2, 3 હેક્ટર વગેરે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ (કોઈ એકમમાં) એક સંખ્યા છે અને તે આકૃતિથી ઘેરાયેલા સમતલના ભાગ સાથે સંગત હોય છે.

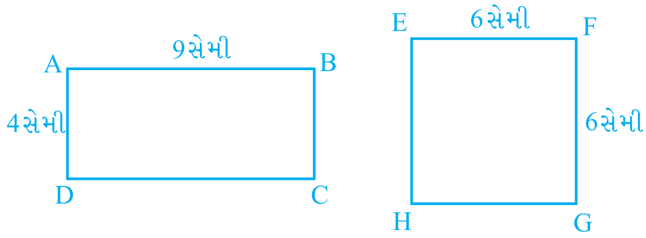
આપણે અગાઉનાં ધોરણમાં અને પ્રકરણ 7 ના અભ્યાસ દ્વારા એકરૂપ આકૃતિઓના ખ્યાલથી પરિચિત થયા છીએ કે ''જો બે આકૃતિઓનાં આકાર સમાન હોય અને તેમનાં માપ પણ સમાન હોય, તો તે બે આકૃતિઓ એકરૂપ કહેવાય.'' બીજા શબ્દોમાં જો બે આકૃતિઓ A અને B એકરૂપ હોય (આકૃતિ 9.1 જુઓ.) તો તમે એક અનુરેખણ કાગળ *(Tracing Paper)*નો



આકૃતિ 9.1

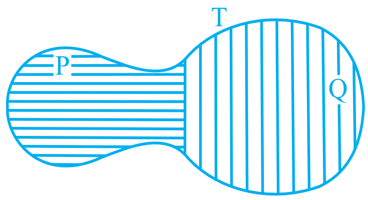
ઉપયોગ કરી, એક આકૃતિને બીજી આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકી શકો કે એક આકૃતિ, બીજી આકૃતિને સંપૂર્ણપણે ઢાંકી દે એટલે કે તેની ઉપર બંધ બેસતી આવી જાય. *તેથી " જો આ બંને આકૃતિઓ A અને B એકરૂપ હોય, તો તેમનાં ક્ષેત્રફળ પણ ચોક્કસ સમાન જ હોવા જોઈએ".* તેમ છતાં, આથી ઊલટું વિધાન સત્ય નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો "સમાન ક્ષેત્રફળ ધરાવતી બે આકૃતિઓ એકરૂપ હોય તે જરૂરી નથી."

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 9.2 માં લંબચોરસ ABCD અને લંબચોરસ EFGH નાં ક્ષેત્રફળ (9×4 સેમી^{2} અને 6×6 સેમી^{2}) સમાન છે. પરંતુ સ્પષ્ટ છે કે બંને એકરૂપ નથી (શા માટે?)



આકૃતિ 9.2

હવે નીચેની આકૃતિ 9.3 જુઓ :



આકૃતિ 9.3

તમે જોયું કે આકૃતિ T દ્વારા બનતો સમતલીય પ્રદેશ એ આકૃતિઓ P અને Q દ્વારા બનતા બે સમતલીય પ્રદેશો દ્વારા ભેગા થઈ બન્યો છે. તમે સરળતાથી જોઈ શકો છો કે

આકૃતિ T નું ક્ષેત્રફળ = આકૃતિ P નું ક્ષેત્રફળ + આકૃતિ Q નું ક્ષેત્રફળ.

તમે આકૃતિ A ના ક્ષેત્રફળને $ar(\text{A})$, આકૃતિ B ના ક્ષેત્રફળને $ar(\text{B})$ અને આકૃતિ Tના ક્ષેત્રફળને $ar(\text{T})$ સંકેતથી દર્શાવી શકો છો. અને તે જ પ્રમાણે તમે કહી શકો કે કોઈ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ એટલે કે આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા સમતલના ભાગથી સંકળાયેલ ક્ષેત્રફળ એ નીચે આપેલ બે ગુણધર્મો ધરાવતી એક સંખ્યા (કોઈ એકમમાં) છે.

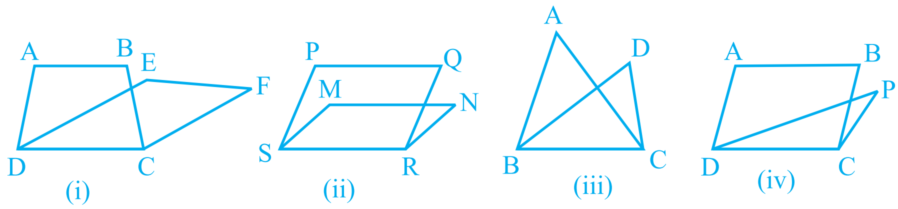
(1) *જો A અને B એકરૂપ આકૃતિઓ હોય તો* $ar(A) = ar(B)$; *અને*

(2) *જો આકૃતિ T દ્વારા બનતો પ્રદેશ, બે આકૃતિઓ P અને Q દ્વારા બનતા એકબીજાને આચ્છાદિત ન કરે તેવા પ્રદેશો (non-overlapping) ભેગા થઈને બને તો* $ar(T) = ar(P) + ar(Q)$.

તમે અગાઉનાં ધોરણમાં વિવિધ આકૃતિઓ જેવી કે લંબચોરસ, ચોરસ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, ત્રિકોણ વગેરેનાં ક્ષેત્રફળ શોધવાનાં કેટલાંક સૂત્રો વિશે માહિતી મેળવી છે. આ પ્રકરણમાં એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે હોય તે શરત ધરાવતી ભૌમિતિક આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ વચ્ચેના કોઈક સંબંધનો અભ્યાસ કરીને ઉપરોક્ત સમજને વધુ સ્પષ્ટ કરવાનો પ્રયત્ન કરવામાં આવશે. આ અભ્યાસ ત્રિકોણની સમરૂપતાને આધારિત કેટલાંક પરિણામોને સમજવા માટે પણ ઉપયોગી થશે.

9.2 એક જ પાયા ઉપર અને સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેની આકૃતિઓ

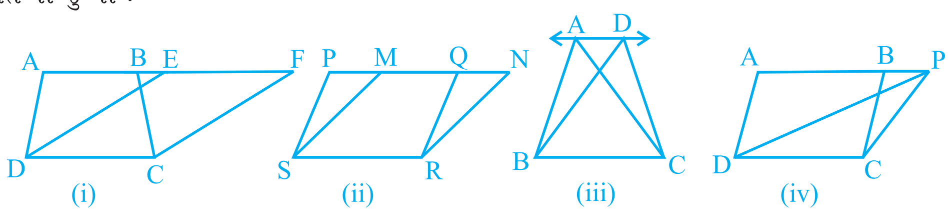
નીચે આપેલી આકૃતિઓ જુઓ :



આકૃતિ 9.4

આકૃતિ 9.4(i) માં સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD માં એક બાજુ DC સામાન્ય છે. આપણે કહીએ કે સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD ***એક જ પાયા*** DC પર આવેલા છે. આ પ્રમાણે આકૃતિ 9.4 (ii) માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ MNRS એક જ પાયા SR પર આવેલા છે. આકૃતિ 9.4(iii) માં ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ DBC એક જ પાયા BC પર આવેલા છે તથા આકૃતિ 9.4(iv) માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને ત્રિકોણ PDC એક જ પાયા DC પર આવેલા છે.

નીચેની આકૃતિઓ જુઓ :

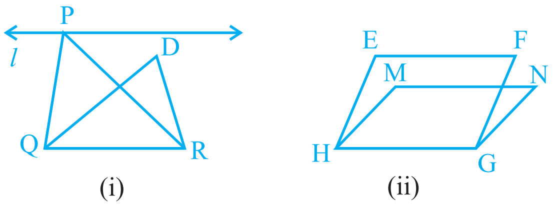


આકૃતિ 9.5

આકૃતિ 9.5(i) માં સ્પષ્ટ છે કે, સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD એક જ પાયા DC પર આવેલા છે. આ ઉપરાંત સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD નાં પાયા DC ની સામેનાં શિરોબિંદુઓ A અને B તથા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCDનાં પાયા DC ના સામેનાં શિરોબિંદુઓ E અને F એ DC ને સમાંતર રેખા AF પર આવેલાં છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD એક જ પાયા પર તથા સમાંતર રેખાઓ AF અને DC ની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા છે. આવી જ રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS અને MNRS એક જ પાયા SR પર અને સમાંતર રેખાઓ PN અને SR ની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા છે. [આકૃતિ 9.5 (ii) જુઓ.] તેવી જ રીતે ચતુષ્કોણ PQRS નાં શિરોબિંદુઓ P અને Q અને ચતુષ્કોણ MNRS નાં શિરોબિંદુઓ M અને N એ પાયા SR ને સમાંતર રેખા PN પર આવેલાં છે. આ જ પ્રમાણે ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ DBC એક જ પાયા BC પર તથા સમાંતર રેખાઓ AD અને BC ની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલાં છે. [આકૃતિ 9.5 (iii) જુઓ.] અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને ત્રિકોણ PCD એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AP અને DC ની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા છે [આકૃતિ 9.5(iv) જુઓ.]

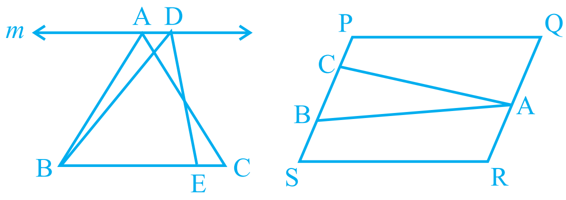
જ્યારે બે આકૃતિઓનો પાયો સામાન્ય હોય અને દરેક આકૃતિના સામાન્ય પાયાની સામેનાં શિરોબિંદુઓ (અથવા શિરોબિંદુ) પાયાને સમાંતર કોઈ એક રેખા પર આવેલાં હોય ત્યારે તે બે આકૃતિઓ એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલી છે તેમ કહેવાય.

ઉપરનાં વિધાનને ધ્યાનમાં રાખી તમે કહી ન શકો કે, આકૃતિ 9.6(i)ના Δ PQR અને Δ DQR એ સમાંતર રેખાઓ l અને QR ની વચ્ચે આવેલા છે.



આકૃતિ 9.6

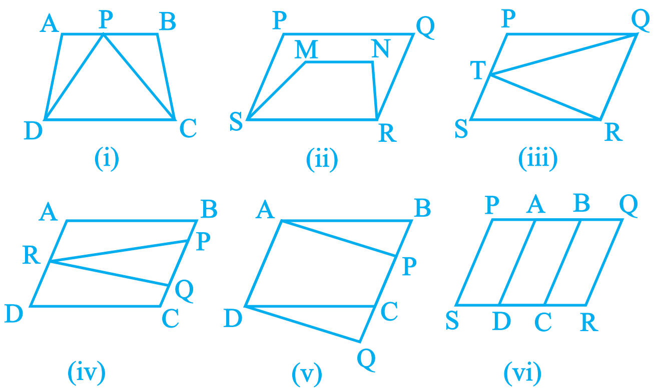
આ જ પ્રમાણે આકૃતિ 9.6(ii)માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFGH અને MNGH સમાંતર રેખાઓ EF અને HG વચ્ચે આવેલા છે તેમ ન કહી શકો. ઉપરાંત આકૃતિ 9.6(iii) માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EFCDએ સમાંતર રેખાઓ AB અને DC વચ્ચે આવેલા છે તેમ ન કહી શકો. (ભલે તે એક પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AD અને BC ની વચ્ચે આવેલા હોય.) આ પરથી તમારે ધ્યાન રાખવું જોઈએ કે ‘‘બે સમાંતર રેખાઓમાંથી એક રેખા સામાન્ય પાયામાંથી પસાર થતી હોવી જોઈએ.’’ નોંધો કે આકૃતિ 9.7(i) માં ΔABC અને ΔDBE એક સમાન પાયા પર આવેલા નથી તથા આકૃતિ 9.7(ii) માં ΔABC અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS પણ એક સમાન પાયા પર આવેલા નથી.



(i) આકૃતિ 9.7 (ii)

સ્વાધ્યાય 9.1

1. નીચેની આકૃતિઓમાં એક જ સમાન પાયા પર અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે કઈ આકૃતિઓ આવેલી છે? શક્ય હોય, તેવા કિસ્સામાં સામાન્ય પાયો અને સમાંતર રેખાઓ જણાવો.

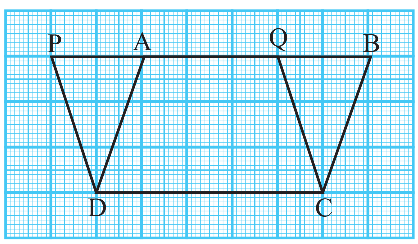


આકૃતિ 9.8

9.3 એક જ પાયા અને સમાંતર રેખાની જોડની રેખાઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

આપણે હવે એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળો વચ્ચે કોઈ સંબંધ હોય તો તે મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ. તેને સમજવા નીચેની પ્રવૃત્તિઓ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક આલેખપત્ર લો અને તેના ઉપર આકૃતિ 9.9 માં બતાવ્યા પ્રમાણે બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને PQCD દોરો.

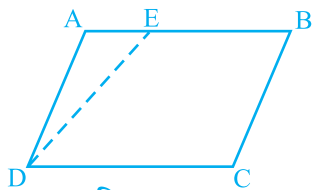


આકૃતિ 9.9

આ બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ PB અને DC ની વચ્ચે આવેલા છે. આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ તેમાં આવેલા ચોરસને ગણીને કેવી રીતે શોધી શકાય તે તમે યાદ કરો.

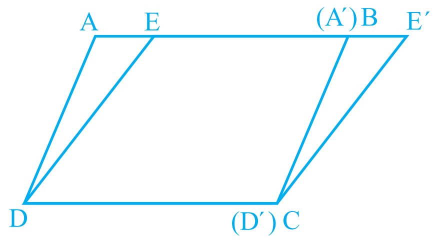
આ પદ્ધતિમાં આપેલી આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા પૂર્ણ ચોરસની સંખ્યા, જેનો અડધાથી વધારે ભાગ ઘેરાયેલો છે તે ચોરસની સંખ્યા અને જેનો અડધો ભાગ ઘેરાયેલો છે તે ચોરસની સંખ્યાનો સરવાળો કરીને આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાય છે. જે ચોરસનો અડધાથી ઓછો ભાગ આકૃતિથી ઘેરાયેલો છે તે ચોરસને કાઢી નાખવામાં આવે છે. તો તમને બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ (લગભગ) 15 ચોરસ એકમ મળશે. આલેખપત્ર પર બીજા કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની જોડીઓ દોરીને આ પ્રવૃતિનું* પુનરાવર્તન કરો તો તમે શું અવલોકન કરો છો? શું બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ ભિન્ન છે કે સમાન છે ? હકીકતમાં તે સમાન છે. તેથી આ પ્રવૃત્તિ પરથી તમને એક તારણ મળશે કે *"એક જ પાયા પર આવેલા અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમક્ષેત્ર હોય છે"*. તેમ છતાં તમે યાદ રાખો કે આ ફક્ત ચકાસણી જ છે. * આ પ્રવૃત્તિ જીઓ બોર્ડ દ્વારા પણ કરાવી શકાય.

પ્રવૃત્તિ 2 : એક મોટા કાગળ પર અથવા પૂંઠા પર એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD દોરો. આકૃતિ 9.10માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક રેખાખંડ DE દોરો.



આકૃતિ 9.10

હવે એક બીજા કાગળ પર કે પૂંઠા પર અનુરેખણ પત્રની મદદથી Δ ADE ને એકરૂપ હોય તેવો ત્રિકોણ A′ D′ E′ ને કાગળમાંથી કાપી લો. હવે આકૃતિ 9.11 માં દર્શાવ્યા મુજબ Δ A′D′E′ ને એવી રીતે ગોઠવો જેથી A′D′ બાજુ એ BC પર ગોઠવાય. ધ્યાન રાખો કે અહીં બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EE′CD છે. તે એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AE′ અને DC ની વચ્ચે આવેલા છે.



આકૃતિ 9.11

તમે તેમનાં ક્ષેત્રફળો વિશે શું કહી શકો?

$$\Delta \text{ ADE} \cong \Delta \text{ A}'\text{D}'\text{E}'$$

$$\therefore ar \text{ (ADE)} = ar \text{ (A}'\text{D}'\text{E}')$$

વળી, $ar \text{ (ABCD)} = ar \text{ (ADE)} + ar \text{ (EBCD)}$

$$= ar \text{ (A}'\text{D}'\text{E}') + ar \text{ (EBCD)}$$

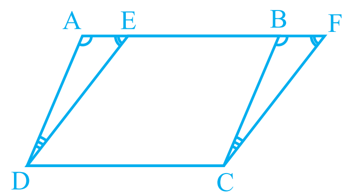
$$= ar \text{ (EE}'\text{CD)}$$

તેથી બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમક્ષેત્ર છે.

તો ચાલો આપણે આવા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ વચ્ચેના આ સંબંધને સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

પ્રમેય 9.1 : *એક જ પાયા પર આવેલા અને બે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.*

સાબિતી : એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AF અને DC ની વચ્ચે બે



આકૃતિ 9.12

* *આ પ્રવૃત્તિ જીઓ બોર્ડ દ્વારા પણ કરી શકાય.*

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EFCD આવેલા છે. (આકૃતિ 9.12 જુઓ.)

આપણે *ar* (ABCD) = *ar* (EFCD) સાબિત કરવું છે.

Δ ADE અને Δ BCFમાં

$\angle$DAE = $\angle$CBF (AD || BC અને છેદિકા AF થી બનતા અનુકોણ) (1)

$\angle$AED = $\angle$BFC (ED || FC અને છેદિકા AF થી બનતા અનુકોણ) (2)

તેથી, $\angle$ADE = $\angle$BCF (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ) (3)

તથા AD = BC (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDની સામસામેની બાજુઓ) (4)

$\therefore$ Δ ADE $\cong$ Δ BCF [પરિણામ (1), (3) અને (4) પરથી ખૂબાખૂ નિયમનો ઉપયોગ કરીને]

તેથી, *ar* (ADE) = *ar* (BCF) (એકરૂપ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય) (5)

હવે, *ar* (ABCD) = *ar* (ADE) + *ar* (EDCB)

= *ar* (BCF) + *ar* (EDCB) [(5)પરથી]

= *ar* (EFCD)

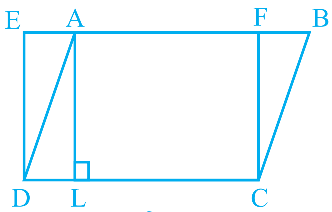
આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EFCD સમક્ષેત્ર છે. ■

ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજાય તેવાં કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 9.13 માં ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને EFCD એક લંબચોરસ છે અને AL $\perp$ DC છે. સાબિત કરો કે,

(i) *ar* (ABCD) = *ar* (EFCD)

(ii) *ar* (ABCD) = DC × AL



આકૃતિ 9.13

ઉકેલ : (i) લંબચોરસ એ હંમેશાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

તેથી *ar* (ABCD) = *ar* (EFCD) (પ્રમેય 9.1)

(ii) ઉપર્યુક્ત પરિણામ પરથી

ar (ABCD) = DC × FC (લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ) (1)

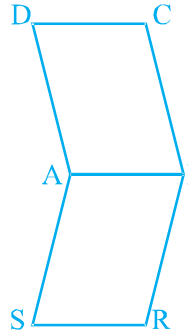
અહીં AL $\perp$ DC છે. તેથી AFCL પણ એક લંબચોરસ થાય.

AL = FC (2)

ar (ABCD) = DC × AL [પરિણામ (1) અને (2)પરથી]

શું ઉપર્યુક્ત પરિણામ (ii) પરથી જોઈ શકશો કે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેની કોઈ એક બાજુ અને તેને અનુરૂપ વેધના ગુણાકાર જેટલું હોય છે? શું તમને યાદ છે કે ધોરણVII માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળનું સૂત્ર શીખી ગયાં છો? આ સૂત્રના આધારે પ્રમેય 9.1 ને ફરીથી નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

એક જ પાયા પર (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.



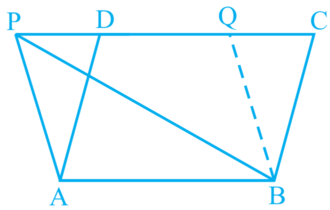
આકૃતિ 9.12 (1)

શું તમે ઉપરના વિધાનનું પ્રતીપ લખી શકો? તે આ પ્રમાણે છે. *"એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા)પર આવેલા અને પાયાની (સમાન પાયાની) એક જ બાજુએ આવેલા તથા સમાન ક્ષેત્રફળો ધરાવતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો બે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે જેમાંની એક પાયાને સમાવતી રેખા છે."* શું પ્રતીપ સાચું છે ? તમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને પ્રતીપ સાબિત કરો.

જો ચતુષ્કોણો સમાન પાયાની કે પાયાની એક જ બાજુએ ન હોય તો આકૃતિ 9.12 (1) જેવી પરિસ્થિતિ ઉભી થાય.

ઉદાહરણ 2 : જો કોઇ ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક જ પાયા અને બે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય, તો સાબિત કરો કે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું હોય છે.

ઉકેલ : ધારો કે Δ ABP અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD એક જ પાયા AB પર અને સમાંતર રેખાઓ AB અને PC ની વચ્ચે આવેલા છે. (આકૃતિ 9.14 જુઓ.)



આકૃતિ 9.14

અહીં તમે $ar\ (PAB) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$ સાબિત કરવા ઈચ્છો છો.

એક બીજો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABPQ મેળવવા માટે BQ || AP દોરો. હવે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો ABQP અને ABCD એક જ પાયા AB પર અને સમાંતર રેખાઓ AB અને PC ની વચ્ચે આવેલા છે.

$\therefore\ ar\ (ABQP) = ar\ (ABCD)$ (પ્રમેય 9.1) (1)

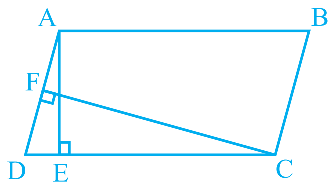
પરંતુ, $\Delta\ PAB \cong \Delta\ BQP$ (વિકર્ણ PB એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABQP ને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.)

$\therefore\ ar\ (PAB) = ar\ (BQP)$ (2)

$\therefore\ ar\ (PAB) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABQP)$ [પરિણામ (2) પરથી] (3)

$\therefore\ ar\ (PAB) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$ [(1) અને (3)પરથી]

સ્વાધ્યાય 9.2



આકૃતિ 9.15

1. આકૃતિ 9.15 માં ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. AE ⊥ DC અને CF ⊥ AD છે. જો AB = 16 સેમી, AE = 8 સેમી અને CF = 10 સેમી, તો AD શોધો.

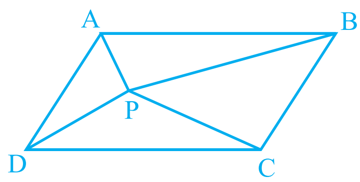
2. જો E, F, G અને H એ અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ હોય, તો સાબિત કરો કે $ar\ (EFGH) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$.

3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ DC અને AD પર અનુક્રમે બિંદુઓ P અને Q આવેલા છે તો $ar\ (APB) = ar\ (BQC)$ થાય તેમ સાબિત કરો.

4. આકૃતિ 9.16 માં P એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના અંદરના ભાગમાં આવેલું કોઈ બિંદુ છે, તો સાબિત કરો કે

   (i) $ar\ (APB) + ar\ (PCD) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$

   (ii) $ar\ (APD) + ar\ (PBC) = ar\ (APB) + ar\ (PCD)$



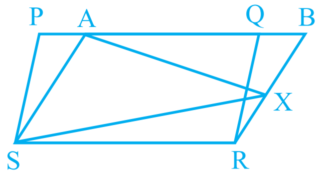
આકૃતિ 9.16

[સૂચન : P માંથી પસાર થતી અને AB ને સમાંતર એક રેખા દોરો.]

5. આકૃતિ 9.17 માં PQRS અને ABRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા બિંદુ X એ બાજુ BR પર આવેલું બિંદુ છે તો સાબિત કરો કે,

(i) ar (PQRS) = ar (ABRS).

(ii) $ar\,(AXS) = \frac{1}{2}\, ar\,(PQRS)$.

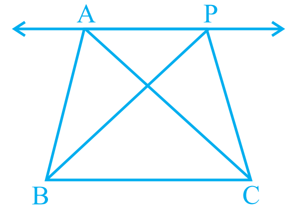


આકૃતિ 9.17

6. એક ખેડૂત પાસે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS આકારનું એક ખેતર હતું. તેણે RS પર એક બિંદુ A લીધું અને તેને P અને Q સાથે જોડી દીધું. તો ખેતર કેટલા ભાગમાં વહેંચાય છે ? આ ભાગોનો આકાર કેવો છે? આ ખેડૂત ખેતરમાં ઘઉં અને કઠોળ સમાન ભાગમાં અને જુદાજુદા ઉગાડવા માંગે છે. તેણે આ કાર્ય કેવી રીતે કરવું જોઈએ?

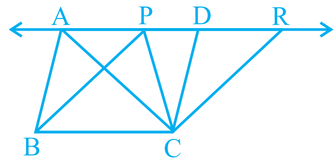
9.4 એક જ પાયા પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણ

ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.18 જોઈએ, એક જ પાયા BC અને સમાંતર રેખાઓ BC અને AP ની વચ્ચે આવેલા હોય તેવા બે ત્રિકોણો ABC અને PBC ના ક્ષેત્રફળ વિશે શું કહી શકાય ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવા તમે એક આલેખપત્ર લઈ તેના પર એક જ પાયો ધરાવતા અને સમાંતર રેખાની જોડ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણોની કેટલીક જોડ દોરીને તેનાથી ઘેરાયેલા ચોરસની ગણતરી કરી તેમનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની પ્રવૃત્તિ કરો. દરેક વખતે તમને બંને ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો લગભગ સમાન મળશે. આ પ્રવૃત્તિ જીઓ બોર્ડના ઉપયોગથી પણ કરી શકાય છે. તમને ફરીથી બંને ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ (લગભગ) સમાન મળશે. આ પ્રશ્નનો તાર્કિક ઉકેલ મેળવવા માટે તમે નીચે પ્રમાણે આગળ વધી શકો છો :



આકૃતિ 9.18

આકૃતિ 9.18 માં CD || BA અને CR || BP થાય તે રીતે બિંદુઓ D અને R ને રેખા AP પર લો. (આકૃતિ 9.19 જુઓ.)



આકૃતિ 9.19

આમાંથી તમને એક જ પાયા BC પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓ BC અને AR ની વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PBCR અને ABCD મળશે.

તેથી, ar (ABCD) = ar (PBCR) (કેમ?)

$\Delta\, ABC \cong \Delta\, CDA$ અને $\Delta\, PBC \cong \Delta\, CRP$ (કેમ?)

$ar\,(ABC) = \frac{1}{2}\, ar\,(ABCD)$ અને $ar\,(PBC) = \frac{1}{2}\, ar\,(PBCR)$ (કેમ?)

તેથી, ar (ABC) = ar (PBC) સાબિત થાય છે

આ રીતે તમે નીચેના પ્રમેય સુધી પહોંચ્યા :

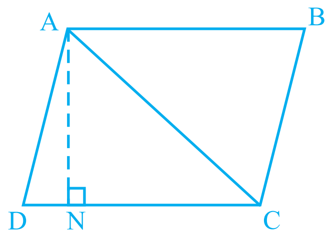
પ્રમેય 9.2 : *એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને બે સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા બે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.*

હવે, ધારો કે ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને તેનો એક વિકર્ણ AC છે. (આકૃતિ 9.20 જુઓ.) AN ⊥ DC લઈએ. નોંધો કે,

$\Delta\, ADC \cong \Delta\, CBA$ (શા માટે ?)

$\therefore\ ar\,(ADC) = ar\,(CBA)$ (શા માટે ?)

$\therefore\ ar\,(ADC) = \frac{1}{2}\, ar\,(ABCD)$



આકૃતિ 9.20

$= \frac{1}{2}$ (DC×AN) (શા માટે ?)

∴ Δ ADC નું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ × પાયો DC × અનુરૂપ વેધ AN

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો કોઈ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયા અથવા કોઈ બાજુ અને અનુરૂપ વેધ (અથવા ઊંચાઈ)ના ગુણાકારથી અડધું હોય છે. તમને યાદ હશે કે તમે ધોરણ-VII માં ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનું આ સૂત્ર ભણી ગયાં છો. આ સૂત્ર પરથી તમે જોઈ શકો કે એક જ પાયા અથવા સમાન પાયાવાળા અને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણના અનુરૂપ વેધની લંબાઈ સમાન હશે.

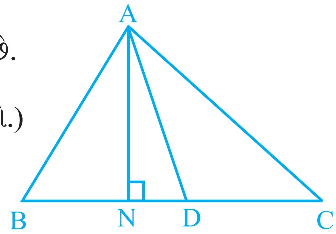
સમાન અનુરૂપ વેધ મેળવવા માટે બંને ત્રિકોણ બે સમાંતર રેખાઓની જોડ વચ્ચે હોવા જોઈએ. તેથી આપણે પ્રમેય 9.2 ના પ્રતિપ્રમેય સુધી પહોંચીશું.

પ્રમેય 9.3 : *એક જ પાયા (સમાન પાયા) પર આવેલા અને એક જ પાયા(સમાન પાયા)ની એક જ બાજુએ આવેલા તથા સમાન ક્ષેત્રફળો ધરાવતા ત્રિકોણો બે સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે જેમાંની એક રેખા પાયાને સમાવતી રેખા છે.*

હવે આ ઉપર્યુક્ત પરિણામોના ઉપયોગ બતાવવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમક્ષેત્ર ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC લઈએ અને તેની મધ્યગાઓ પૈકી એક મધ્યગા AD છે. (આકૃતિ 9.21 જુઓ.)



આકૃતિ 9.21

તમે બતાવવા ઈચ્છો છો કે, *ar* (ABD) = *ar* (ACD).

ક્ષેત્રફળના સૂત્રમાં વેધનો સમાવેશ થતો હોવાથી, ચાલો આપણે AN ⊥ BC દોરીએ.

હવે *ar* (ABD) = $\frac{1}{2}$ × પાયો × વેધ (Δ ABD માટે)

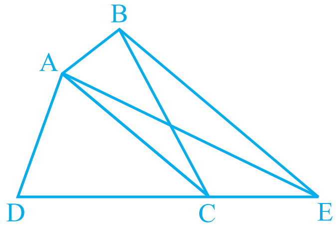
$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN$ (BD = CD)

= $\frac{1}{2}$ × પાયો × વેધ (Δ ACD માટે)

= *ar* (ACD)

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 9.22 માં ABCD એક ચતુષ્કોણ છે. BE ∥ AC છે. રેખા DC ને લંબાવતા BE ને E બિંદુમાં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે Δ ADE નું ક્ષેત્રફળ એ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય.



આકૃતિ 9.22

ઉકેલ : આકૃતિનું ધ્યાનપૂર્વક નિરીક્ષણ કરો.

Δ BAC અને Δ EAC એ એક જ પાયા AC પર આવેલા છે અને સમાંતર રેખા AC અને BE ની વચ્ચે છે.

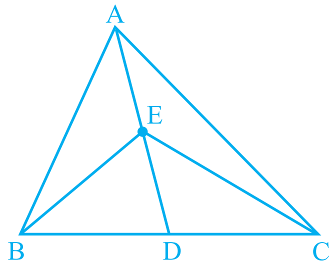
તેથી, *ar*(BAC) = *ar*(EAC) (પ્રમેય 9.2 પ્રમાણે)

હવે, *ar*(BAC) + *ar*(ADC) = *ar*(EAC) + *ar*(ADC) (બંને બાજુ સમાન ક્ષેત્રફળ ઉમેરતા)

અથવા *ar*(ABCD) = *ar*(ADE)

સ્વાધ્યાય 9.3

1. આકૃતિ 9.23 માં Δ ABC ની એક મધ્યગા AD પર કોઈપણ બિંદુ E છે. તો સાબિત કરો કે *ar* (ABE) = *ar* (ACE).

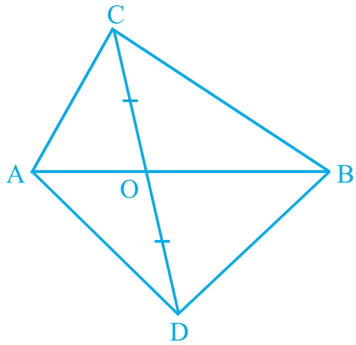


આકૃતિ 9.23

2. ABC માં મધ્યગા AD નું મધ્યબિંદુ E હોય, તો $ar\,(\text{BED}) = \frac{1}{4}\,ar(\text{ABC})$ થાય તેમ સાબિત કરો.

3. સાબિત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો તેને સમાન ક્ષેત્રફળોવાળા ચાર ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.

4. આકૃતિ 9.24માં બે ત્રિકોણ ABC અને ABD સમાન પાયા AB પર આવેલા છે. જો AB એ રેખાખંડ CD ને O બિંદુએ દુભાગે, તો સાબિત કરો કે *ar*(ABC) = *ar* (ABD).



આકૃતિ 9.24

5. Δ ABC ની બાજુઓ BC, CA અને AB નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે તો સાબિત કરો કે,

(i) BDEF એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (ii) $ar\,(\text{DEF}) = \frac{1}{4}\,ar\,(\text{ABC})$

(iii) $ar\,(\text{BDEF}) = \frac{1}{2}\,ar\,(\text{ABC})$

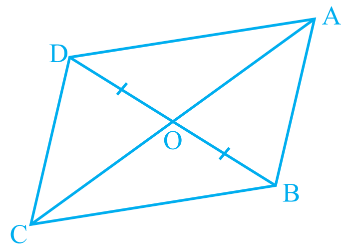
6. આકૃતિ 9.25 માં ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર O બિંદુમાં OB = OD થાય તે રીતે છેદે છે. જો AB = CD હોય, તો સાબિત કરો કે .

(i) *ar* (DOC) = *ar* (AOB)

(ii) *ar* (DCB) = *ar* (ACB)

(iii) DA || CB અથવા ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

[**સૂચન** : D અને B માંથી AC પર લંબ દોરો.]



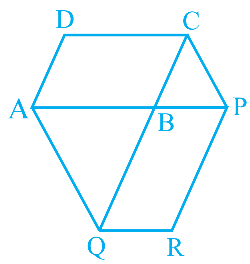
આકૃતિ 9.25

7. જો Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC પર અનુક્રમે D અને E બિંદુઓ એવી રીતે આવેલાં છે જેથી *ar* (DBC) = *ar* (EBC) થાય, તો સાબિત કરો કે DE || BC.

8. Δ ABC ની બાજુ BC ને સમાંતર એક રેખા XY છે. જો BE || AC અને CF || AB એ રેખા XY ને અનુક્રમે E અને F આગળ છેદતી હોય, તો સાબિત કરો કે *ar* (ABE) = *ar* (ACF)

9. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની એક બાજુ AB ને બિંદુ P સુધી લંબાવેલી છે. બિંદુ A માંથી CP ને સમાંતર દોરેલી એક રેખા, CB ને Q માં મળે છે જેથી કરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PBQR બને છે (આકૃતિ 9.26 જુઓ.) તો સાબિત કરો કે *ar* (ABCD) = *ar* (PBQR).

[**સૂચન**: AC અને PQ ને જોડો અને *ar* (ACQ) અને *ar* (APQ) ને સરખાવો.]



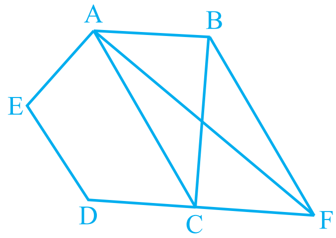
આકૃતિ 9.26

10. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AB || DC છે. વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર એકબીજાને O બિંદુમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે *ar* (AOD) = *ar* (BOC).

11. આકૃતિ 9.27 માં ABCDE પંચકોણ છે. B માંથી AC ને સમાંતર દોરેલી રેખા DC ને F માં મળે છે. સાબિત કરો કે,

(i) *ar* (ACB) = *ar* (ACF)

(ii) *ar* (AEDF) = *ar* (ABCDE)

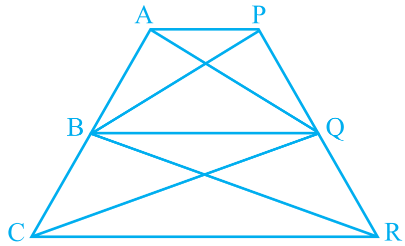


આકૃતિ 9.27

12. એક ગામના એક ખેડૂત પાસે એક ચતુષ્કોણ આકારની જમીનનો ભાગ હતો. આ ગામની ગ્રામપંચાયતે તેની પાસેથી જમીનના એક ખૂણાનો જમીનનો કેટલોક ભાગ સ્વાસ્થ્ય કેન્દ્ર બનાવવા માટે લેવાનો નિર્ણય કર્યો. ખેડૂત આ પ્રસ્તાવ એક શરત સાથે સ્વીકારે છે કે તેને પોતાની જમીનની બાજુમાં તેટલા જ ક્ષેત્રફળની જમીનનો ભાગ મળવો જોઈએ જેથી તેની કુલ જમીનનો આકાર ત્રિકોણ બને. તો તમે દર્શાવો કે આ પ્રસ્તાવ કેવી રીતે શક્ય બનશે.

13. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC છે. AC ને સમાંતર રેખા, AB ને X માં અને BC ને Y માં છેદે છે, તો સાબિત કરો કે *ar* (ADX) = *ar* (ACY). [**સૂચન :** CX ને જોડો.]

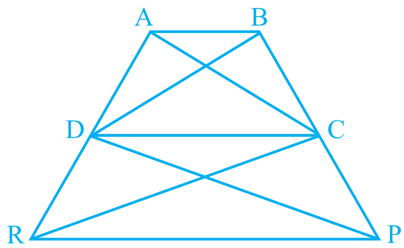
14. આકૃતિ 9.28 માં AP || BQ || CR છે તો સાબિત કરો કે *ar* (AQC) = *ar* (PBR).



આકૃતિ 9.28

15. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર એકબીજાને O બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી *ar* (AOD) = *ar* (BOC) થાય, તો સાબિત કરો કે ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

16. આકૃતિ 9.29માં *ar*(DRC) = *ar*(DPC) છે અને *ar* (BDP) = *ar* (ARC) છે. તો ચતુષ્કોણ ABCD અને DCPR સમલંબ ચતુષ્કોણ છે તેમ સાબિત કરો.

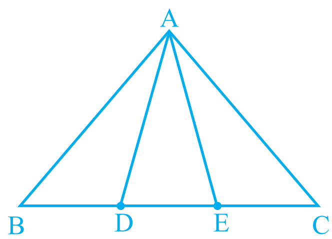


આકૃતિ 9.29

સ્વાધ્યાય 9.4 (વૈકલ્પિક)*

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને લંબચોરસ ABEF એ એક જ પાયા પર આવેલા છે અને તેમનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે. સાબિત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ એ લંબચોરસની પરિમિતિ કરતાં વધારે છે.

2. આકૃતિ 9.30 માં બાજુ BC પર બે બિંદુઓ D અને E એવી રીતે આવેલાં છે જેથી BD = DE = EC થાય તો સાબિત કરો કે *ar* (ABD) = *ar* (ADE) = *ar* (AEC) છે. શું તમે હવે અનુત્તર રહેલા પ્રસ્તાવનામાં આપેલ પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકશો કે બુધિયાના ખેતરનું બરાબર સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રણ ભાગોમાં વિભાજન થયું છે?



આકૃતિ 9.30

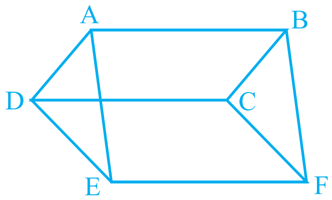
* *આ સ્વાધ્યાયને પરીક્ષાનો મુદ્દો બનાવવો નહિ.*

[**સૂચન :** નોંધો કે, BD = DE = EC લેવાથી ΔABC એ સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રણ ત્રિકોણ ABD, ADE અને AEC માં વિભાજિત થાય છે. આ જ રીતે BC નું *n* જેટલા સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરતાં બિંદુઓને BCના સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડવાથી તમે ΔABCનું *n* સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરી શકો છો.]

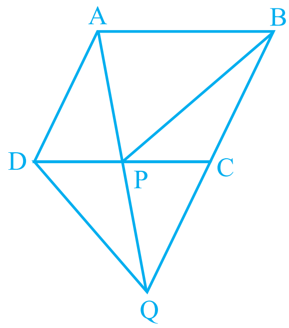
3. આકૃતિ 9.31માં ABCD, DCFE અને ABFE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, તો *ar* (ADE) = *ar* (BCF) થાય તેમ સાબિત કરો.

4. આકૃતિ 9.32 માં ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. BC ને બિંદુ Q સુધી એવી રીતે લંબાવો જેથી AD = CQ થાય. જો AQ એ DC ને P બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે *ar* (BPC) = *ar* (DPQ).

[**સૂચન :** AC જોડો.]



આકૃતિ 9.31



આકૃતિ 9.32

5. આકૃતિ 9.33 માં ABC અને BDE બે સમભુજ ત્રિકોણ છે. બિંદુ D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે. જો AE એ BC ને F માં છેદે તો સાબિત કરો કે,

(i) *ar* (BDE) = $\frac{1}{4}$ *ar* (ABC)

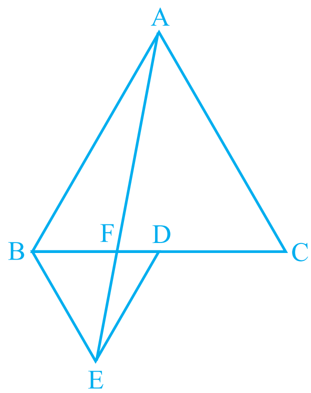
(ii) *ar* (BDE) = $\frac{1}{2}$ *ar* (BAE)

(iii) *ar* (ABC) = 2 *ar* (BEC)

(iv) *ar* (BFE) = *ar* (AFD)

(v) *ar* (BFE) = 2 *ar* (FED)

(vi) *ar* (FED) = $\frac{1}{8}$ *ar* (AFC)



આકૃતિ 9.33

[**સૂચન :** EC અને AD જોડો. BE || AC તથા DE || AB વગેરે સાબિત કરો.]

6. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર P બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે,

ar (APB) × *ar* (CPD) = *ar* (APD) × *ar* (BPC)

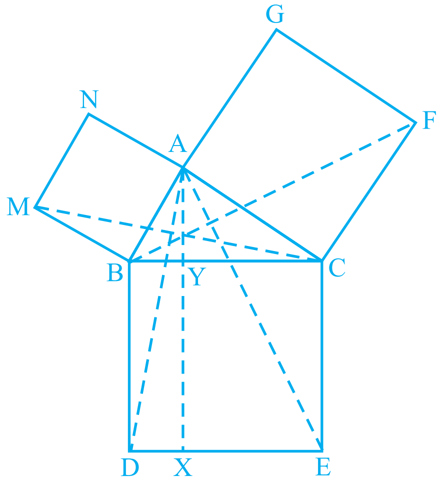
[**સૂચન :** A અને C માંથી BD પર લંબ દોરો.]

7. ΔABCની બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q છે તથા R એ AP નું મધ્યબિંદુ છે તો સાબિત કરો કે,

(i) *ar* (PRQ) = $\frac{1}{2}$ *ar* (ARC) (ii) *ar* (RQC) = $\frac{3}{8}$ *ar* (ABC)

(iii) *ar* (PBQ) = *ar* (ARC)

8. આકૃતિ 9.34 માં કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણો A કાટખૂણો છે. BCED, ACFG અને ABMN અનુક્રમે બાજુઓ BC, CA અને AB પર બનેલા ચોરસ છે. રેખાખંડ AX ⊥ DE અને તે બાજુ BC ને Y માં મળે છે. તો સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 9.34

(i) Δ MBC ≅ Δ ABD

(ii) *ar* (BYXD) = 2 *ar* (MBC)

(iii) *ar* (BYXD) = *ar* (ABMN)

(iv) Δ FCB ≅ Δ ACE

(v) *ar* (CYXE) = 2 *ar* (FCB)

(vi) *ar* (CYXE) = *ar* (ACFG)

(vii) *ar* (BCED) = *ar* (ABMN) + *ar* (ACFG)

નોંધ : પરિણામ (vii) એ પ્રસિદ્ધ પાયથાગોરસ પ્રમેય છે. તમે ધોરણ X માં આ પ્રમેયની સરળ સાબિતી શીખશો.

9.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દા શીખ્યા :

1. આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ તે આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા સમતલના ભાગ સાથે સંગત એક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા (કોઈક એકમમાં) છે.

2. બે એકરૂપ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ એકસરખું હોય છે, પરંતુ પ્રતીપ સત્ય હોય તે જરૂરી નથી.

3. જો આકૃતિ T દ્વારા બનેલ સમતલીય પ્રદેશ, આકૃતિઓ P અને Q દ્વારા બનેલ અને એકબીજાને આચ્છાદિત ન કરતા સમતલીય પ્રદેશોથી રચાતો હોય તો, *ar* (T) = *ar* (P) + *ar* (Q) છે, જ્યાં *ar* (X) એ આકૃતિ X નું ક્ષેત્રફળ છે.

4. જો બે આકૃતિઓને એક સામાન્ય પાયો (બાજુ) હોય અને શિરોબિંદુઓ (અથવા શિરોબિંદુ) દરેક આકૃતિનાં સામાન્ય પાયાની એક જ બાજુએ, પાયાને સમાંતર રેખા પર હોય, તો બે આકૃતિઓ સમાન પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલી છે તેમ કહેવાય.

5. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને બે સમાંતર રેખાની એક જોડ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.

6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ, તેના પાયા અને પાયાને અનુરૂપ વેધના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.

7. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર અને પાયાની એક જ બાજુએ આવેલા અને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો એ સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે, જે પૈકી એક પાયાને સમાવતી રેખા છે.

8. જો એક ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું હોય છે.

9. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.

10. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, તેનો પાયો અને તે પાયાને અનુરૂપ વેધના ગુણાકારથી અડધું હોય છે.

11. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને એક જ પાયાની(સમાન પાયાની) એક જ બાજુએ આવેલાં ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય તો તે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે, જે પૈકી એક પાયાને સમાવતી રેખા છે.

12. ત્રિકોણની એક મધ્યગા, તેનું બે સમાન ક્ષેત્રફળોવાળા ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે.

પ્રકરણ 10

વર્તુળ

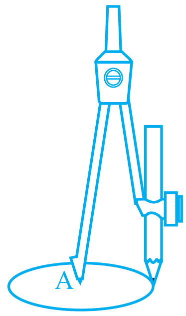
10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે તમારા રોજિંદા જીવનમાં વાહનનાં પૈડાં, બંગડીઓ, કેટલીક ઘડિયાળના ચંદા, 50 પૈસા, 1 રૂપિયો અને 5 રૂપિયાના ચલણી સિક્કા, ચાવી ભરાવવાની ગોળ કડી, ખમીશનાં બટન (જુઓ આકૃતિ10.1.) જેવી ગોળ આકારની વસ્તુઓના પરિચયમાં આવ્યાં હશો. તમે નિરીક્ષણ કર્યું હશે કે ઘડિયાળમાં સેકન્ડ કાંટો ચંદા પર ખૂબ ઝડપથી ગોળ ફરે છે અને તેની અણી ગોળ માર્ગમાં ફરે છે. સેકન્ડ કાંટાની અણીથી જે માર્ગ નિર્દેશિત થાય છે તેને વર્તુળ કહે છે. આ પ્રકરણમાં, તમે વર્તુળ, વર્તુળને સંબંધિત પદો અને વર્તુળના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરશો.

આકૃતિ 10.1

10.2 વર્તુળ અને તેને સંબંધિત પદો : એક સમીક્ષા

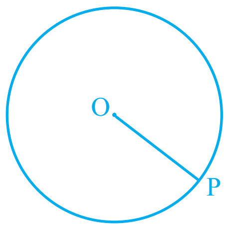
એક પરિકર લો અને તેમાં પેન્સિલ ભરાવો. કાગળ પરના એક બિંદુએ તેનો અણીવાળો ભાગ મૂકો. બીજા છેડાને થોડાક અંતર સુધી ખુલ્લો કરો. અણીવાળા છેડાને તે જ બિંદુએ રહેવા દઈ, બીજા છેડાને એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરાવો. કાગળ ઉપર પેન્સિલથી કેવી બંધ આકૃતિ દોરાઈ? તમે જાણો છો કે તે વર્તુળ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.2.) તમને વર્તુળ કેવી રીતે મળ્યું ? તમે એક બિંદુ નિશ્ચિત કર્યુ (આકૃતિ10.2 માં A) અને A થી એક નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં બધાં બિંદુઓ મેળવ્યાં. માહિતી પરથી આપણને નીચેની વ્યાખ્યા મળે છે :



આકૃતિ 10.2

સમતલના એક નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં તે સમતલનાં બિંદુઓના સમૂહને વર્તુળ કહે છે.

નિશ્ચિત બિંદુને વર્તુળનું ***કેન્દ્ર*** *(centre)* અને નિશ્ચિત અંતરને વર્તુળની ***ત્રિજ્યા*** *(radius)* કહે છે. આકૃતિ10.3 માં O કેન્દ્ર છે અને OP ની લંબાઈને તે વર્તુળની ત્રિજ્યા કહે છે.

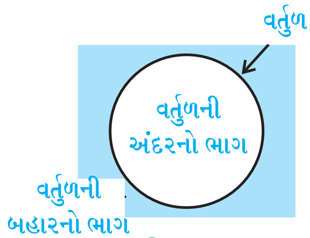


આકૃતિ 10.3

નોંધ : આપણે નોંધીશું કે, કેન્દ્ર અને વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુને જોડતા રેખાખંડને પણ વર્તુળની ત્રિજ્યા કહેવાય. એટલે કે 'ત્રિજ્યા' શબ્દ નો બે અર્થમાં ઉપયોગ કરીશું : રેખાખંડ તરીકે અને તેની લંબાઈ તરીકે પણ.

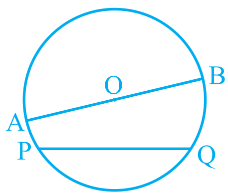
તમે ધોરણ VI માં નીચેની કેટલીક સંકલ્પનાઓ વિશે અગાઉથી પરિચિત થયાં છો. આપણે તેમને માત્ર યાદ કરીએ.

વર્તુળ જે સમતલમાં આવેલું છે તેને ત્રણ ભાગમાં વિભાજિત કરે છે. તે (i) ***વર્તુળની અંદરનો ભાગ*** *(interior)*(ii) વર્તુળ અને (iii) ***વર્તુળની બહારનો ભાગ*** *(exterior)* (જુઓ આકૃતિ10.4.) વર્તુળ અને તેનો અંદરનો ભાગ મળીને ***વર્તુળાકાર પ્રદેશ*** *(circular region)* બનાવે છે.



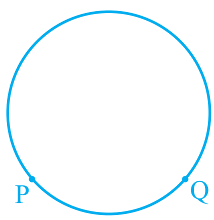
આકૃતિ 10.4

જો તમે વર્તુળ પર બે બિંદુઓ P અને Q લો, તો રેખાખંડ PQ ને વર્તુળની ***જીવા*** *(chord)* કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.5.) જે જીવા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે, તે જીવાને વર્તુળનો ***વ્યાસ*** *(diameter)* કહે છે. ત્રિજ્યાની માફક, વ્યાસ શબ્દનો પણ બે અર્થમાં ઉપયોગ થાય છે, રેખાખંડ તરીકે અને તેની લંબાઈ માટે. શું તમે વર્તુળના વ્યાસ કરતાં મોટી બીજી કોઈ જીવા શોધી શકશો ? ના, તમે જોઈ શકશો કે વ્યાસ એ વર્તુળની મોટામાં મોટી જીવા છે અને બધા વ્યાસની લંબાઈ સરખી હોય છે. તે ત્રિજ્યા કરતા બમણી હોય છે. આકૃતિ10.5માં AOB એ વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળને કેટલા વ્યાસ હોય છે? એક વર્તુળ દોરો અને જુઓ કે તમે કેટલા વ્યાસ શોધી શકો છો.



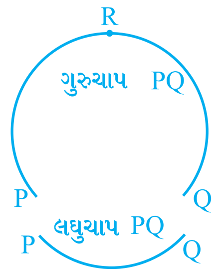
આકૃતિ 10.5

વર્તુળ પરનાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના વર્તુળના ભાગને વર્તુળનું ***ચાપ*** *(arc)* કહે છે. આકૃતિ 10.6 માં બિંદુઓ P અને Q વચ્ચેના વર્તુળની ભાગની તરફ જુઓ. તમને ત્યાં બે ભાગ મળશે એક મોટો અને બીજો નાનો. (જુઓ આકૃતિ 10.7) વર્તુળના મોટા ભાગને ***ગુરુચાપ*** *(major arc)* PQ અને નાના ભાગને ***લઘુચાપ*** *(minor arc)* PQ કહે છે. લઘુચાપ PQ ને $\overset{\frown}{PQ}$ વડે અને જો R એ P તથા Q વચ્ચેનું ગુરુચાપનું કોઈ બિંદુ હોય તો ગુરુચાપ PQ ને $\overset{\frown}{PRQ}$ વડે દર્શાવાય છે. જો કાંઈ પણ દર્શાવવામાં ન આવ્યું હોય, તો ચાપ PQ અથવા $\overset{\frown}{PQ}$ ને લઘુચાપ



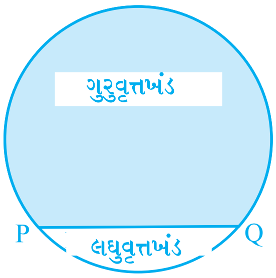
આકૃતિ 10.6

PQ સમજીશું. જ્યારે P અને Q એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ હોય, ત્યારે બંને ચાપ સમાન છે અને તેમને ***અર્ધવર્તુળ*** *(semi circle)* કહે છે.

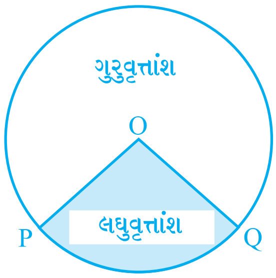


આકૃતિ 10.7

વર્તુળની પૂર્ણ લંબાઈને ***પરિઘ*** *(circumference)* કહે છે. જીવા અને તેનાં બંનેમાંથી કોઈ પણ ચાપ વચ્ચેના પ્રદેશને વર્તુળાકાર પ્રદેશનો ***વૃત્તખંડ*** *(segment)* અથવા સરળ રીતે વર્તુળનો વૃત્તખંડ કહે છે. તમે બે પ્રકારના વૃત્તખંડ પણ શોધી શકશો. તે ***ગુરુવૃત્તખંડ*** *(major segment)* અને ***લઘુવૃત્તખંડ*** *(minor segment)* છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.) ચાપ અને વર્તુળના કેન્દ્રથી ચાપના બંને અંત્યબિંદુઓને જોડતી બે ત્રિજ્યાઓ વચ્ચેના વર્તુળાકાર પ્રદેશના ભાગને ***વૃત્તાંશ*** *(sector)* કહે છે. વૃત્તખંડની માફક, તમે લઘુચાપને સંગત **લઘુવૃત્તાંશ** અને ગુરુચાપને સંગત **ગુરુવૃત્તાંશ** શોધી શકશો. આકૃતિ 10.9 માં પ્રદેશ OPQ એ લઘુવૃત્તાંશ અને વૃત્તીય પ્રદેશનો બાકીનો, ભાગ ગુરુવૃત્તાંશ છે. જ્યારે બંને ચાપ સમાન હોય એટલે કે પ્રત્યેક અર્ધવર્તુળ હોય ત્યારે બંને વૃત્તખંડ અને બંને વૃત્તાંશ સમાન હોય છે તથા પ્રત્યેકને ***અર્ધવૃત્તીય પ્રદેશ*** *(semicircular region)* કહે છે.



આકૃતિ 10.8



આકૃતિ 10.9

સ્વાધ્યાય 10.1

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) વર્તુળનું કેન્દ્ર વર્તુળના .... ના ભાગમાં હોય છે. (બહાર/અંદર)

(ii) જે બિંદુનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર તેની ત્રિજ્યા કરતાં વધારે હોય, તે બિંદુ વર્તુળના .... ના ભાગમાં આવેલું છે. (બહાર/અંદર)

(iii) વર્તુળની મોટામાં મોટી જીવા એ વર્તુળનો .... છે.

(iv) જ્યારે ચાપનાં અંત્યબિંદુઓ એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ હોય, તો તે ચાપ .... છે.

(v) વર્તુળનો વૃત્તખંડ એ વર્તુળના ચાપ અને .... વચ્ચેનો પ્રદેશ છે.

(vi) સમતલમાં આવેલું વર્તુળ, તે સમતલના .... ભાગ કરે છે.

2. નીચેનાં વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે લખો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :

(i) કેન્દ્રને વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુ સાથે જોડતો રેખાખંડ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

(ii) વર્તુળની સમાન જીવાઓની સંખ્યા સાન્ત હોય છે.

(iii) જો વર્તુળને ત્રણ સમાન ચાપમાં વિભાજિત કરવામાં આવે, તો તે પ્રત્યેક ગુરુચાપ છે.

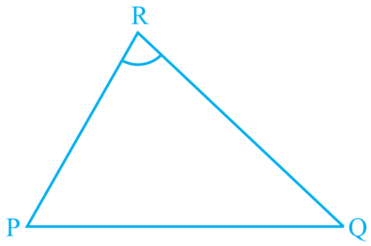
(iv) વર્તુળની જીવા કે જેની લંબાઈ ત્રિજ્યાથી બમણી છે, તેને વર્તુળનો વ્યાસ કહે છે.

(v) જીવા અને તેને સંગત ચાપની વચ્ચેના પ્રદેશને વૃત્તાંશ કહે છે.

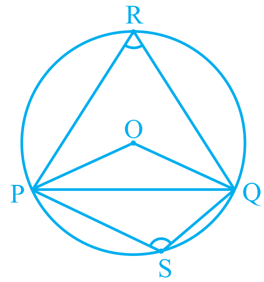
(vi) વર્તુળ એ સમતલીય આકૃતિ છે.

10.3 જીવાએ કોઈ બિંદુએ આંતરેલો ખૂણો

એક રેખાખંડ PQ લો અને PQ ને સમાવતી રેખા પર ન હોય તેવું બિંદુ R લો. PR અને QR જોડો. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) ∠ PRQ ને રેખાખંડ PQ એ બિંદુ R આગળ ***આંતરેલો ખૂણો*** *(Angle subtended at R)* કહે છે. આકૃતિ 10.11 ના ખૂણાઓ POQ, PRQ અને PSQ ને શું કહેવાય ? ∠ POQ એ જીવા PQએ કેન્દ્ર O આગળ આંતરેલો ખૂણો છે. ∠ PRQ અને ∠ PSQ એ PQ એ અનુક્રમે ગુરુચાપ પર આવેલા બિંદુ R અને લઘુચાપ પર આવેલા બિંદુ S આગળ આંતરેલા ખૂણા છે.

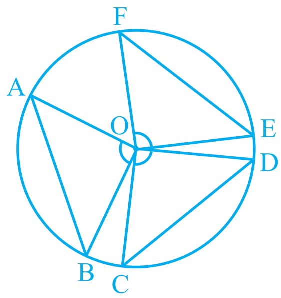


આકૃતિ 10.10



આકૃતિ 10.11

આપણે જીવાના માપ અને તેણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેના સંબંધનું પરીક્ષણ કરીએ. વર્તુળની જુદી જુદી જીવાઓ અને તેમણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા દોરી તમે જોઈ શકશો કે જેટલી લાંબી જીવા હોય તેટલો મોટો ખૂણો કેન્દ્ર આગળ બને. તમે વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ લો તો શું થશે ? કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન હશે કે નહિ ?



આકૃતિ 10.12

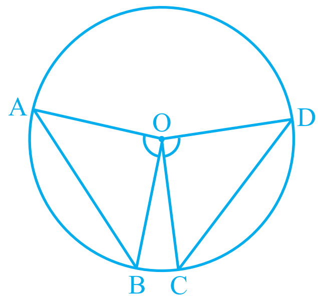
વર્તુળની બે કે તેથી વધુ સમાન જીવાઓ દોરી તેમણે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનાં માપ મેળવો. (જુઓ આકૃતિ10.12.) તમે જોઈ શકશો કે કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન છે. આપણે આ હકીકતની સાબિતી આપીએ.

પ્રમેય 10.1 : *વર્તુળની સમાન જીવાઓ, વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.*

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં તમને બે સમાન જીવાઓ AB અને CD આપેલી છે. (જુઓ આકૃતિ 10.13.) તમારે ∠ AOB = ∠ COD સાબિત કરવાનું છે.

ત્રિકોણો AOB અને COD માં,

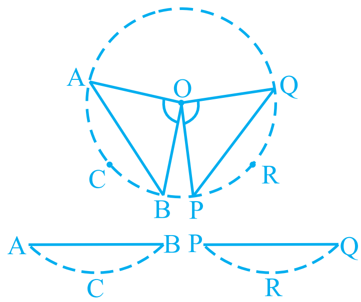
	OA = OC	(એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)
	OB = OD	(એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)
	AB = CD	(આપેલું છે.)
માટે,	Δ AOB ≅ Δ COD	(એકરૂપતાની બાબાબા શરત)
તે પરથી	∠ AOB = ∠ COD મળે.	(એકરૂપ ત્રિકોણોનાં અનુરૂપ અંગો)



આકૃતિ 10.13

હવે, જો વર્તુળની બે જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે તો જીવાઓ વિશે તમે શું કહેશો ? તેઓ સમાન છે કે નહિ ? આપણે આગળની પ્રવૃત્તિ દ્વારા તેનું પરીક્ષણ કરીએ :

એક કાગળ લઈ તેના પર વર્તુળ દોરો. વર્તુળ કાપો જેથી તકતી જેવો આકાર મળે. બિંદુઓ A અને B વર્તુળ પર હોય તેવી રીતે કેન્દ્ર O આગળ એક ખૂણો AOB દોરો. કેન્દ્ર આગળ બીજો ખૂણો POQ ∠AOB ના માપનો દોરો. તકતીને AB આગળ અને PQ આગળ કાપો. (જુઓ આકૃતિ 10.14.) તમને વર્તુળના બે વૃત્તખંડ ACB અને PRQ મળશે. એકને બીજા પર ગોઠવો. તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? તેઓ એકબીજાને આચ્છાદિત કરે છે એટલે કે તેઓ એકરૂપ છે. આથી AB = PQ.



આકૃતિ 10.14

જે તમે આ એક વિશિષ્ટ વિકલ્પ માટે જોયું, તે બીજા સમાન ખૂણાઓ માટે પણ ચકાસો. બધી જ જીવાઓ સમાન મળશે તે નીચેના પ્રમેય દ્વારા જોઈએ :

પ્રમેય 10.2 : *જો જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.*

ઉપરનું પ્રમેય એ પ્રમેય 10.1 નું પ્રતીપ છે.

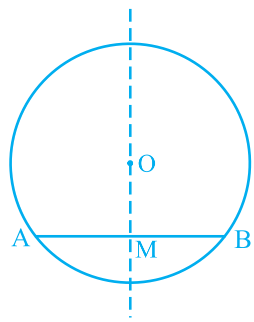
જો આકૃતિ 10.13 માં, તમે ∠ AOB = ∠ COD લેશો, તો Δ AOB ≅ Δ COD થશે (શા માટે ?) તમે AB = CD જોઈ શકો છો ?

સ્વાધ્યાય 10.2

1. યાદ કરો કે જો બે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય, તો તે બે વર્તુળો સમાન છે. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની સમાન જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
2. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

10.4 કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ

પ્રવૃત્તિ : એક કાગળ ઉપર વર્તુળ દોરો. તેનું કેન્દ્ર O લો. જીવા AB દોરો. હવે કાગળને O માંથી પસાર થતી રેખા આગળ એવી રીતે ગડીવાળો કે જેથી જીવાનો એક ભાગ એ બીજા ભાગ પર પડે. ધારો કે ગડી, AB ને M બિંદુમાં કાપે. આમ, ∠ OMA = ∠ OMB = 90° અથવા OM એ AB પરનો લંબ છે. શું બિંદુ B એ A ની બરાબર ઉપર આવે છે. (જુઓ આકૃતિ10.15.) હા, તે આવે છે. આથી MA = MB.



આકૃતિ 10.15

OA અને OB ને જોડી અને કાટકોણ ત્રિકોણો OMA અને OMB ને એકરૂપ સાબિત કરી તમે તમારી જાતે તે સાબિત કરો. આ ઉદાહરણ એ નીચેના પરિણામનું વિશિષ્ટ દૃષ્ટાંત છે :

પ્રમેય 10.3 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.*

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ શું થશે?

આ લખતાં પહેલાં, આપણે સ્પષ્ટ થઈએ કે પ્રમેય 10.3 માં શું આપ્યું છે અને શું સાબિત થાય છે. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર લંબ દોરેલો છે તેમ આપ્યું છે અને તે જીવાને દુભાગે છે તેમ સાબિત કરવાનું છે. આ પ્રમાણે પ્રતીપમાં, સિદ્ધાંત છે. 'જો વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે' અને સાબિત કરવું છે 'રેખા, જીવાને લંબ છે' આથી તેનું પ્રતીપ :

પ્રમેય 10.4 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.*

આ સત્ય છે? કેટલાંક વિકલ્પો માટે પ્રયત્ન કરો અને જુઓ. તમને જોવા મળશે કે આ વિકલ્પો માટે તે સત્ય છે. આગળ આપેલા પ્રશ્નો ઉકેલીને જુઓ કે વ્યાપક રીતે તે સત્ય છે. તેના જુદા જુદા તબક્કાઓ લખીશું અને તમે તેનાં કારણો આપશો.

ધારો કે AB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે અને O ને AB ના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડેલું છે. તમારે સાબિત કરવાનું છે કે OM ⊥ AB. OA અને OB જોડો. (જુઓ આકૃતિ 10.16.)

ત્રિકોણો OAM અને OBM માં,

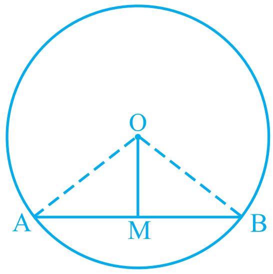
OA = OB (કેમ ?)

AM = BM (કેમ ?)

OM = OM (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (શા માટે ?)

તે પરથી $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (કેમ ?)

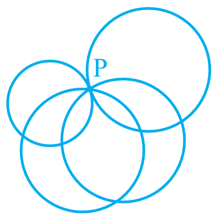


આકૃતિ 10.16

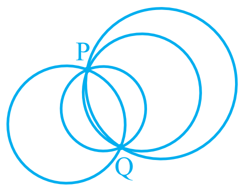
10.5 ત્રણ બિંદુઓમાંથી વર્તુળ

તમે પ્રકરણ 6 માં શીખી ગયાં છો કે રેખાના નિરૂપણ માટે બે બિંદુઓ પૂરતાં છે. એટલે કે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક રેખા પસાર થાય છે. સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે. વર્તુળના નિર્માણ માટે કેટલાં બિંદુઓ પૂરતાં છે?

એક બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી કેટલાં વર્તુળો દોરી શકાય? તમે જોઈ શકો છો કે, આ બિંદુમાંથી તમને યોગ્ય લાગે તેટલાં બધાં વર્તુળો શક્ય છે. [જુઓ આકૃતિ 10.17(i).] હવે બે બિંદુઓ P અને Q લો. ફરીથી તમે જોઈ શકો છો કે P અને Q માંથી અનંત સંખ્યામાં વર્તુળો પસાર થાય છે. [જુઓ આકૃતિ10.17(ii).] તમે ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C લો ત્યારે શું થશે ? ત્રણ સમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ તમે દોરી શકો છો ? ના, જો બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં હોય, તો ત્રીજું બિંદુ બે બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળની અંદર અથવા બહાર હશે. [જુઓ આકૃતિ10.18.]



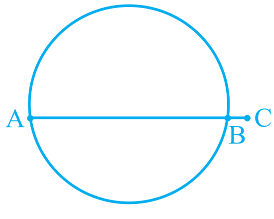
(i)



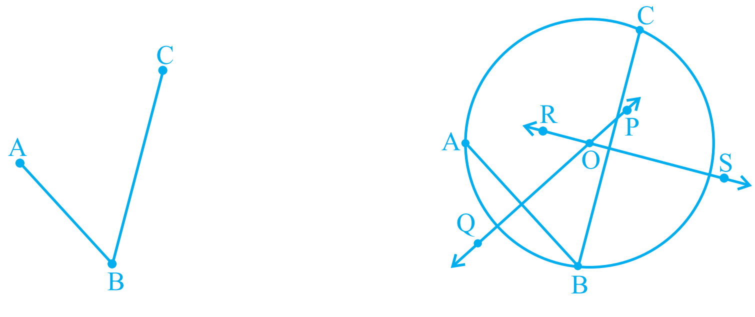
(ii)

આકૃતિ 10.17

હવે, આપણે એક જ રેખા પર ન હોય તેવાં ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C લઈએ અથવા બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, તે સમરેખ નથી. [જુઓ આકૃતિ10.19(i).] AB અને BC ના લંબદ્વિભાજક અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. ધારો કે આ બે લંબદ્વિભાજકો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. (નોંધીશું કે PQ અને RS એકબીજાને છેદે છે કારણ કે તેઓ સમાંતર નથી) [જુઓ આકૃતિ 10.19(ii).]



આકૃતિ 10.18



(i) આકૃતિ 10.19 (ii)

હવે AB ના લંબદ્વિભાજક PQ પર O આવેલું છે. હવે તમને OA = OB મળશે, કારણ કે રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તેનાં અંત્યબિંદુઓથી સરખા અંતરે હોય છે. OA = OB પરિણામ પ્રકરણ 7 માં સાબિત કરેલું છે.

તે જ પ્રમાણે O એ BCના લંબદ્વિભાજક RS પર આવેલું છે, આથી

OB = OC થશે.

આથી OA = OB = OC, આનો અર્થ થશે કે, બિંદુઓ A, B અને C એ O થી સમાન અંતરે છે. તેથી જો તમે O કેન્દ્ર લઈ OA ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો, તો તે B અને C માંથી પણ પસાર થશે. આ દર્શાવે છે કે ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C માંથી પસાર થાય તેવું એક વર્તુળ છે. તમે જાણો છો કે બે રેખાઓના લંબદ્વિભાજકો એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે આથી તમે OA ત્રિજ્યાવાળું એક જ વર્તુળ દોરી શકો છો. બીજી રીતે કહીએ તો, A, B અને C માંથી પસાર થતું એક અનન્ય વર્તુળ છે. તમે હવે નીચેનું પ્રમેય સાબિત કર્યું :

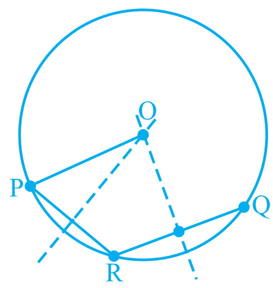
પ્રમેય 10.5 : *આપેલ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક જ વર્તુળ પસાર થાય છે.*

નોંધ : જો ABC એક ત્રિકોણ હોય, તો પ્રમેય 10.5 પ્રમાણે, ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A, B અને C માંથી એક અનન્ય વર્તુળ પસાર થાય છે. આ વર્તુળને Δ ABC નું ***પરિવૃત્ત*** *(circumcircle)* અથવા ***પરિવર્તુળ*** કહે છે. તેના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યાને અનુક્રમે ***ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર*** *(circumcentre)* અને ***પરિત્રિજ્યા*** *(circumradius)* કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 1 : વર્તુળનું ચાપ આપ્યું છે. વર્તુળ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું ચાપ PQ આપ્યું છે. આપણે વર્તુળ પૂર્ણ કરવું છે, એટલે કે આપણે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધવી છે. ચાપ પર એક બિંદુ R લો. PR અને RQ જોડો. પ્રમેય 10.5 સાબિત કરવા માટે જે રચના કરી તેનો ઉપયોગ કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધવા માટે કરો.

ઉપર પ્રમાણે મેળવેલા કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા લઈ, આપણે વર્તુળ પૂર્ણ કરી શકીશું. (જુઓ આકૃતિ. 10.20.)



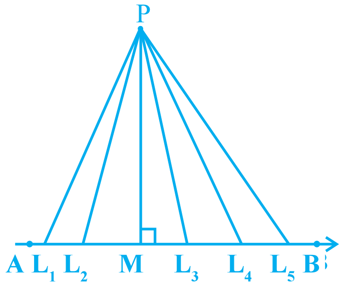
આકૃતિ 10.20

સ્વાધ્યાય 10.3

1. વર્તુળોની જુદી જુદી જોડીઓ દોરો. પ્રત્યેક જોડીમાં કેટલાં બિંદુઓ સામાન્ય છે? સામાન્ય બિંદુઓની મહત્તમ સંખ્યા કેટલી ?
2. ધારો કે તમને એક વર્તુળ આપવામાં આવ્યું છે. તેનું કેન્દ્ર શોધવાની રચના કરો.
3. જો બે વર્તુળો એકબીજાંને બે બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે તેમનાં કેન્દ્ર, સામાન્ય જીવાના લંબદ્વિભાજક પર છે.

10.6 સમાન જીવાઓ અને તેમનું કેન્દ્રથી અંતર

ધારો કે AB એક રેખા છે અને P રેખાની બહારનું એક બિંદુ છે. રેખા પર અનંત સંખ્યામાં બિંદુઓ હોવાથી, આ બિંદુઓને જો તમે P સાથે જોડશો, તો તમને અનંત સંખ્યામાં રેખાખંડો PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 વગેરે મળશે. આ બધામાંથી P થી ABનું અંતર કયું થશે ? તમે થોડી વાર વિચાર કરશો તો તમને જવાબ મળશે. આ બધા રેખાખંડોમાંથી આકૃતિ 10.21 માં P થી AB પરનો લંબ, PM એ નાનામાં નાનો થશે. ગણિતમાં, આપણે આ ઓછામાં ઓછી લંબાઈ PM ને P થી AB ના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આથી તમે કહી શકશો કે,

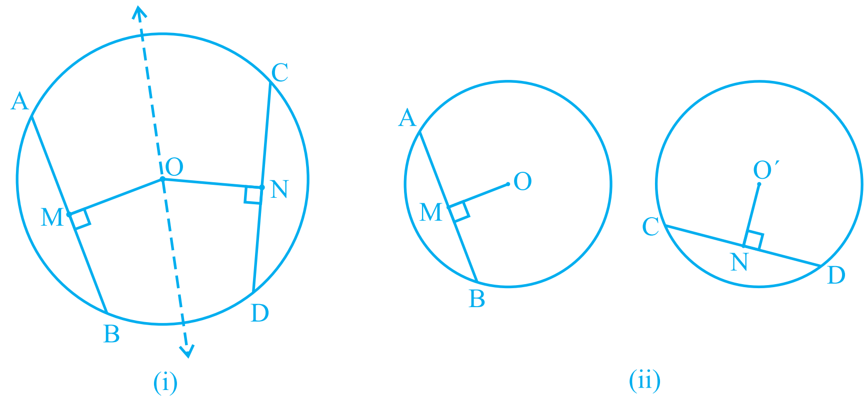


આકૃતિ 10.21

બિંદુથી રેખાના લંબઅંતરને બિંદુથી રેખાનું અંતર કહે છે.

નોંધીશું કે જો બિંદુ, રેખા પર આવેલું હોય, તો બિંદુથી રેખાનું અંતર શૂન્ય છે.

વર્તુળને અનંત જીવાઓ હોય છે. વર્તુળની જીવાઓ દોરતાં, તમે નિરીક્ષણ કરી શકશો કે ઓછી લંબાઈની જીવાઓ કરતાં વધારે લંબાઈની જીવાઓ કેન્દ્રની વધારે નજીક હોય છે. જુદી જુદી લંબાઈની વર્તુળની કેટલીક જીવાઓ દોરી તેમનું કેન્દ્રથી અંતર માપીને તમે આ હકીકતનું અવલોકન કરી શકશો. વર્તુળની લાંબામાં લાંબી જીવા કે જે વર્તુળનો વ્યાસ છે તેનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર કેટલું થશે? કેન્દ્ર તેના પર આવેલું હોવાથી, અંતર શૂન્ય થશે. જીવાની લંબાઈ અને તેનું કેન્દ્રથી અંતર આ બે વચ્ચેના કેટલાંક સંબંધો વિશે તમે કંઈક વિચારી શકો છો ? જો કોઈ સંબંધ હોય તો તે વિશે આપણે જોઈએ.

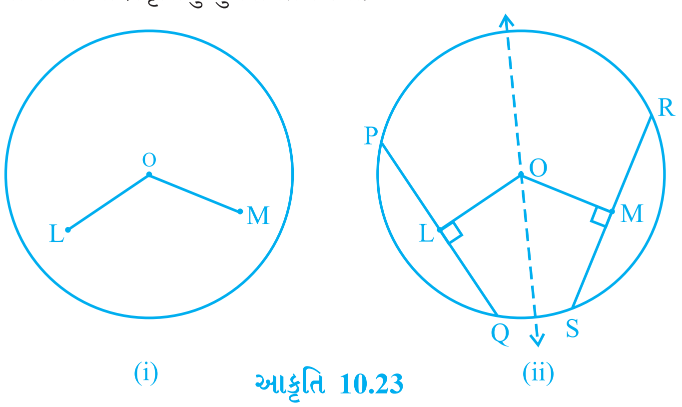


આકૃતિ 10.22

પ્રવૃત્તિ : કાગળ પર કોઈપણ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેની બે સમાન જીવાઓ AB અને CD દોરો અને કેન્દ્ર O માંથી તેમના પરના લંબ અનુક્રમે OM અને ON દોરો. આકૃતિની એવી રીતે ગડી કરો કે જેથી D એ B ઉપર પડે અને C એ A ઉપર પડે. [જુઓ આકૃતિ10.22 (i).] તમે નિરીક્ષણ કરશો કે O ગડી પર રહેશે અને N એ M ઉપર પડશે. આથી, OM = ON. કેન્દ્ર O અને O′ લઈ, એકરૂપ વર્તુળો દોરો. દરેકમાં એક-એક સમાન જીવા AB અને CD લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તેમના પર લંબ OM અને O′N દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.22(ii).] એક વર્તુળાકાર તક્તી કાપો અને તેને વર્તુળ પર એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી AB એ CD ને બંધબેસતું થાય. તમે જોઈ શકશો કે O એ O′ ને પર આવે છે અને M એ N ની પર આવે છે. આ પ્રમાણે તમે નીચેના પ્રમેયની ચકાસણી કરી શકો:

પ્રમેય 10.6 : *વર્તુળ (અથવા એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર (કેન્દ્રો)થી સમાન અંતરે આવેલી હોય છે.*

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય છે કે નહિ તે હવે પછી જોઈશું. આ માટે O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં રહે તે રીતે સમાન લંબાઈના બે રેખાખંડ OL અને OM દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.23(i).] પછી OL અને OM ને લંબ થાય તેવી વર્તુળની બે જીવાઓ અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.23(ii).] PQ અને RS ની લંબાઈ માપો. શું આ ભિન્ન છે? ના, બંને સમાન છે. સમાન લંબાઈના વધારે રેખાખંડ અને તેમને લંબ જીવાઓ દોરી આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.



આકૃતિ 10.23

આ પ્રમેય 10.6 નું પ્રતીપ છે તેની સત્યાર્થતાની ખાતરી થાય છે અને તે નીચે દર્શાવેલ છે.

પ્રમેય 10.7 : *વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.*

ઉપરના પરિણામની વધુ સમજૂતી માટે આપણે હવે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 2 : જો વર્તુળની પરસ્પર છેદતી બે જીવાઓ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે, તો સાબિત કરો કે તે જીવાઓ સમાન છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજીને E બિંદુમાં છેદે છે. $\angle AEQ = \angle DEQ$ થાય તેવો E માંથી પસાર થતો વ્યાસ PQ છે (જુઓ આકૃતિ10.24.) તમારે AB = CD સાબિત કરવાનું છે.

જીવાઓ AB અને CD પર અનુક્રમે લંબ OL અને OM દોરો. હવે,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 90° - \angle LEO$

$= 90° - \angle AEQ$

$= 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

ત્રિકોણો OLE અને OME માં,

$\angle LEO = \angle MEO$ (શા માટે ?)

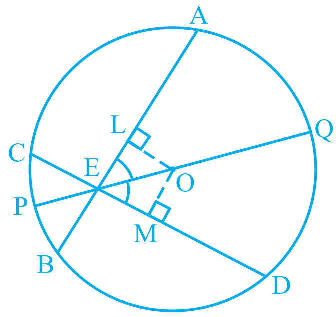
$\angle LOE = \angle MOE$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

EO = EO (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (શા માટે ?)

તે પરથી OL = OM (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ અંગ)

આથી, AB = CD (કેમ ?)



આકૃતિ 10.24

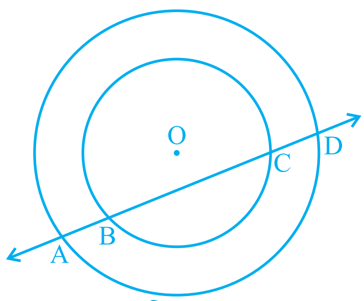
સ્વાધ્યાય 10.4

1. 5 સેમી અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો બે બિંદુમાં છેદે છે અને તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઈ શોધો.

2. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો એક જીવાના કપાતા ભાગ અને બીજી જીવાના અનુરૂપ ભાગ સમાન છે. તેમ સાબિત કરો.

3. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો સાબિત કરો કે છેદબિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા જીવાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

4. જો O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રી (*concentric*) વર્તુળો (સમાન કેન્દ્રવાળાં વર્તુળો)ને એક રેખા અનુક્રમે A, B, C અને Dમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે AB = CD. (જુઓ આકૃતિ 10.25.)



આકૃતિ 10.25

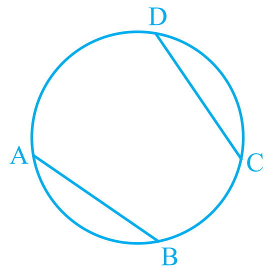
5. એક વિહારસ્થાનમાં 5 મી ત્રિજ્યાવાળા દોરેલા વર્તુળ પર રમત રમવા માટે ત્રણ છોકરીઓ રેશ્મા, સલમા અને મનદીપ ઊભાં છે. રેશ્મા દડાને સલમા તરફ ફેંકે છે. સલમા મનદીપ તરફ અને

મનદીપ રેશ્મા તરફ દડો ફેંકે છે. જો રેશ્મા અને સલમા વચ્ચેનું તથા સલમા અને મનદીપ વચ્ચેનું દરેક અંતર 6 મીટર હોય, તો રેશ્મા અને મનદીપ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે?

6. એક વસાહતમાં 20મીટર ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળાકાર વિહારસ્થાન આવેલું છે. ત્રણ છોકરાઓ અંકુર, સૈયદ અને ડેવિડ દરેકે પોતાના હાથમાં રમકડાનો ટેલિફોન એકબીજા સાથે વાત કરવા માટે રાખીને વર્તુળની સીમા પર સરખા અંતરે બેઠા છે. દરેકના ટેલિફોનની દોરીની લંબાઈ શોધો.

10.7 વર્તુળના ચાપે આંતરેલો ખૂણો

તમે જોયું કે વર્તુળના વ્યાસ સિવાયની જીવાનાં અંત્યબિંદુઓ વર્તુળનું બે ચાપમાં વિભાજન કરે છે–એક ગુરુચાપ અને બીજું લઘુચાપ. જો તમે બે સમાન જીવાઓ લો. તો તેમને સંગત ચાપનાં માપ વિશે શું કહેશો ? શું એક જીવાથી બનેલું ચાપ બીજી જીવાને અનુરૂપ બનેલા ચાપને સમાન હોય છે? હકીકતમાં, તેઓની લંબાઈ સમાન છે. જો એક ચાપને વાળ્યા અથવા વાંકું કર્યા વગર બીજા ચાપ પર મૂકવામાં આવે, તો તે બીજા પર સંપૂર્ણ રીતે આચ્છાદિત થાય છે.

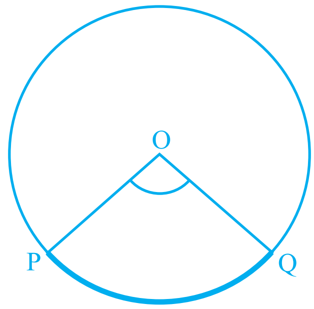


આકૃતિ 10.26

વર્તુળમાંથી જીવા CD ને અનુરૂપ ચાપ કાપી અને તેને સમાન બીજી જીવા AB ને અનુરૂપ ચાપ પર ગોઠવીને આ હકીકતની ચકાસણી તમે કરી શકશો. તમે જોઈ શકશો કે ચાપ CD એ ચાપ AB પર સંપૂર્ણ આચ્છાદિત થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.26.) આ દર્શાવે છે કે સમાન જીવાઓ સમાન ચાપ બનાવે છે અને તેનું પ્રતીપ, સમાન ચાપ વર્તુળની સમાન જીવાઓ બનાવે છે. તમે તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકશો :

જો વર્તુળની બે જીવા સમાન હોય, તો તેમને અનુરૂપ ચાપ એકરૂપ છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને અનુરૂપ જીવા સમાન છે.

વર્તુળના ચાપે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાની વ્યાખ્યા એ તે ચાપની અનુરૂપ જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા તરીકે લઈશું. જો લઘુચાપ કેન્દ્ર આગળ કોઇ ખૂણો આંતરે, તો ગુરુચાપ વિપરીત કોણ આંતરશે એમ અર્થ કરીશું. આથી આકૃતિ 10.27 માં લઘુચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ ∠POQ આંતરે છે અને ગુરુચાપ PQ એ O આગળ આંતરેલો ખૂણો એ વિપરીતકોણ POQ છે.



આકૃતિ 10.27

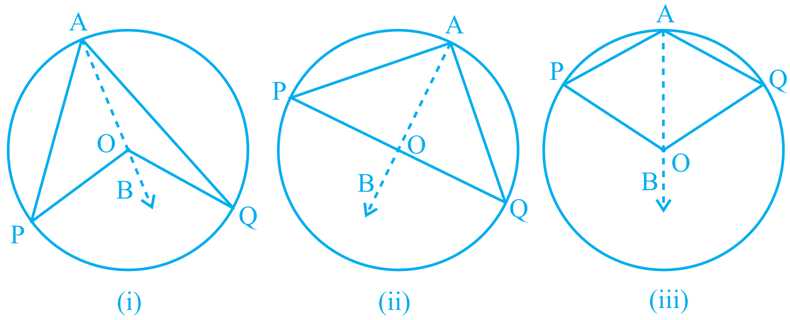
ઉપરના ગુણધર્મનું અવલોકન કરતાં અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે નીચેનું પરિણામ સત્ય છે :

વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ અથવા સમાન લંબાઈનાં ચાપ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

આથી, વર્તુળની જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો અને તેને અનુરૂપ લઘુચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો સમાન છે. નીચેનું પ્રમેય એ ચાપ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા અને વર્તુળના કોઈપણ બિંદુએ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે.

પ્રમેય 10.8 : *વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો તે ચાપે વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈપણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.*

સાબિતી : વર્તુળનું ચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ ખૂણો POQ આંતરે છે અને વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના બિંદુ A આગળ ખૂણો PAQ આંતરે છે તેમ આપ્યું છે. આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle POQ = 2 \angle PAQ$.



આકૃતિ 10.28

આકૃતિ 10.28. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ વિકલ્પ લઈએ. (i) માં ચાપ PQ એ લઘુચાપ છે (ii) માં ચાપ PQ એ અર્ધવર્તુળ છે અને (iii) માં ચાપ PQ એ ગુરુચાપ છે.

આપણે AO ને B સુધી લંબાવીએ અને ત્યાંથી શરૂઆત કરીએ.

દરેક વિકલ્પમાં $\angle$ BOQ = $\angle$ OAQ + $\angle$ AQO

કારણ કે ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ એ ત્રિકોણના અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

Δ OAQ માં,

OA = OQ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

માટે, $\angle$ OAQ = $\angle$ OQA (પ્રમેય 7.5)

તે પરથી, $\angle$ BOQ = 2 $\angle$ OAQ (1)

તે જ પ્રમાણે, $\angle$ BOP = 2 $\angle$ OAP (2)

(1) અને (2) પરથી, $\angle$ BOP + $\angle$ BOQ = 2($\angle$ OAP + $\angle$ OAQ)

$\therefore$ $\angle$ POQ = 2 $\angle$ PAQ. (3)

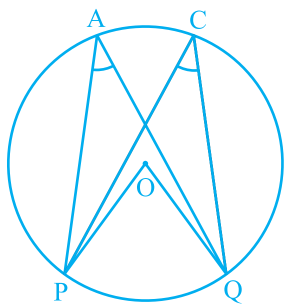
વિકલ્પ (iii) માટે, PQ એ ગુરુચાપ છે, (3) ને નીચે પ્રમાણે બદલીએ :

વિપરીતકોણ POQ = 2 $\angle$ PAQ ■

નોંધ : ધારો કે આપણે ઉપરની આકૃતિમાં બિંદુઓ P અને Q ને જોડી જીવા PQ બનાવીએ, તો પછી $\angle$ PAQ ને વર્તુળના ભાગ PAQP માં બનેલો ખૂણો એમ કહીશું.

પ્રમેય 10.8 માં A એ વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પર બીજું કોઈ પણ બિંદુ C લેતાં (જુઓ આકૃતિ 10.29.) તમને

$\angle$ POQ = 2 $\angle$ PCQ = 2 $\angle$ PAQ મળશે.



આકૃતિ 10.29

આથી, $\angle$ PCQ = $\angle$ PAQ.

આ નીચેનું પ્રમેય સાબિત કરે છે :

પ્રમેય 10.9 : *એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ સમાન હોય છે.*

પ્રમેય 10.8 ના વિકલ્પ (ii)ની ચર્ચા પુનઃ આપણે જુદી કરીએ. અહીં $\angle$PAQ એ અર્ધવર્તુળ વૃત્તખંડમાં એક ખૂણો છે વળી,

$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$. જો તમે અર્ધવર્તુળ પર બીજું કોઈ બિંદુ C લેશો, તો તમને પુનઃ

$\angle PCQ = 90°$ મળશે.

આથી, તમને વર્તુળનો એક બીજો ગુણધર્મ આ પ્રમાણે મળશે :

અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે.

પ્રમેય10.9 નું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

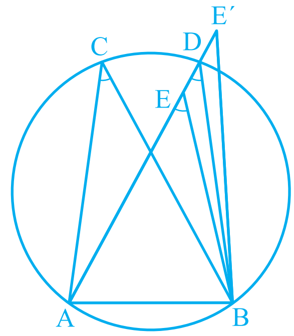
પ્રમેય 10.10 : જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, એ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે. *(આ ચારેય બિંદુઓ* ***વૃત્તીય*** *(concyclic) બિંદુઓ કહેવાય.)*

આ પરિણામની સત્યાર્થતા તમે નીચે જોઈ શકશો :

આકૃતિ 10.30 માં, રેખાખંડ AB, બિંદુઓ C અને D આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે એટલે કે

$\angle ACB = \angle ADB$

બિંદુઓ A, B, C અને D એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે તે બતાવવા માટે આપણે A, C અને B માંથી પસાર થતું એક વર્તુળ દોરીએ. ધારો કે તે બિંદુ D માંથી પસાર થતું નથી. તો પછી તે AD ને અથવા (લંબાવેલી AD) ને કોઈક બિંદુ E (અથવા E′) માં છેદશે.



આકૃતિ 10.30

જો બિંદુઓ A, C, E અને B વર્તુળ પર આવેલાં હોય, તો

$\angle ACB = \angle AEB$ (શા માટે ?)

પરંતુ $\angle ACB = \angle ADB$ આપેલ છે.

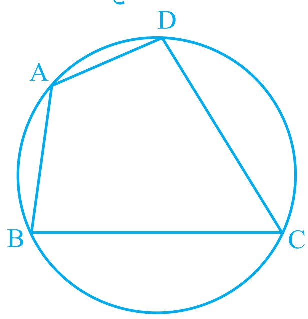
માટે, $\angle AEB = \angle ADB$

જો E એ D ઉપર હોય તો જ આ બને નહિ તો આ શક્ય નથી. (શા માટે ?)

તે જ પ્રમાણે E′ પણ D ઉપર થશે.

10.8 ચક્રીય ચતુષ્કોણ

ચતુષ્કોણ ABCDનાં બધા શિરોબિંદુઓ જો એક જ વર્તુળ પર આવેલાં હોય તો ABCD ને ***ચક્રીય*** *(cyclic)* ચતુષ્કોણ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.31.) આવા ચતુષ્કોણમાં તમને એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ જોવા મળશે. જુદી જુદી બાજુઓવાળા કેટલાક ચક્રીય ચતુષ્કોણ દોરો અને દરેકને ABCD નામ આપો. (ભિન્ન ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળાં કેટલાંક વર્તુળ દોરી અને તે દરેક પર ચાર બિંદુઓ લઈ આ પ્રક્રિયા કરવાથી તે શક્ય બનશે.) સામસામેના ખૂણાઓ માપો અને તમારાં અવલોકન નીચેના કોષ્ટકમાં લખો.



આકૃતિ 10.31

ચતુષ્કોણનો ક્રમાંક	∠ A	∠ B	∠ C	∠ D	∠ A +∠ C	∠ B +∠ D
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

આગળના કોષ્ટક પરથી તમે શું નિષ્કર્ષ કાઢશો ?

માપનની ક્ષતિને અવગણતાં, તમે મેળવી શકશો કે $\angle A + \angle C = 180°$ અને $\angle B + \angle D = 180°$. આ પરિણામથી નીચેની ચકાસણી થાય છે :

પ્રમેય 10.11 : *ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાનો સરવાળો 180° થાય છે.*

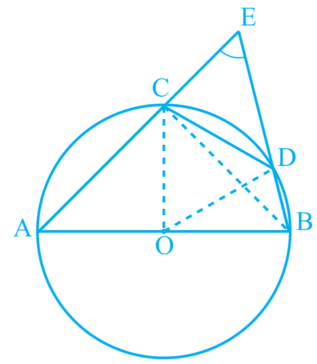
હકીકતમાં, આ પ્રમેયનું નીચે રજૂ કરેલ પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 10.12 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની જોડના ખૂણાનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.*

પ્રમેય 10.10 માં જે રીત બતાવી છે તે રીત અપનાવશો તો આ પ્રમેયની સાબિતી પણ તમને મળશે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 10.32 માં, વર્તુળનો વ્યાસ AB છે. વર્તુળની ત્રિજ્યાના માપની બરાબર જીવા CD છે. AC અને BD ને લંબાવતાં તે બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AEB = 60°$

ઉકેલ : OC, OD અને BC જોડો.



આકૃતિ 10.32

ત્રિકોણ ODC સમબાજુ ત્રિકોણ છે. (શા માટે ?)

માટે, $\angle COD = 60°$

હવે, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (પ્રમેય 10.8)

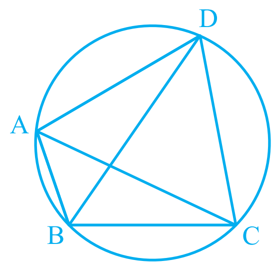
તે પરથી, $\angle CBD = 30°$ થાય.

ફરીથી, $\angle ACB = 90°$ (શા માટે?)

આથી, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

તે પરથી, $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, એટલે કે $\angle AEB = 60°$ થાય.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 10.33 માં, ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે અને AC તથા BD તેના વિકર્ણો છે. જો $\angle DBC = 55°$ અને $\angle BAC = 45°$, તો $\angle BCD$ શોધો.



આકૃતિ 10.33

ઉકેલ : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

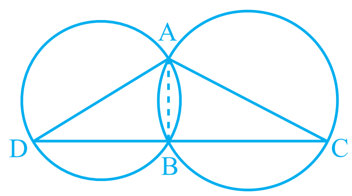
$= 55° + 45° = 100°$

પરંતુ, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

આથી, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$

ઉદાહરણ 5 : બે વર્તુળો બે બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે. આ બે વર્તુળોના વ્યાસ AD અને AC છે. (જુઓ આકૃતિ10.34.) સાબિત કરો કે B એ રેખાખંડ DC પર આવેલું છે.

ઉકેલ : AB જોડો.



આકૃતિ 10.34

$\angle ABD = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

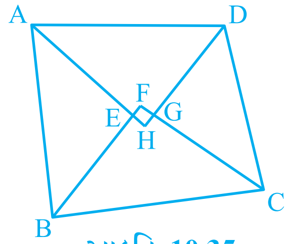
$\angle ABC = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

આથી, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

માટે, DBC એક રેખા છે એટલે કે રેખાખંડ DC પર B આવેલું છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે જો કોઈ પણ ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓના દુભાજકો વડે ચતુષ્કોણ બને (શક્ય હોય,) તો તે ચક્રીય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 10.35 માં, ચતુષ્કોણ ABCD ના અંદરના ખૂણાઓ A, B, C અને D ના દુભાજકો અનુક્રમે AH, BF, CF અને DH છે. તે ચતુષ્કોણ EFGH રચે છે.



આકૃતિ 10.35

હવે, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (કેમ ?)

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

અને $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (કેમ ?)

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

આથી, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

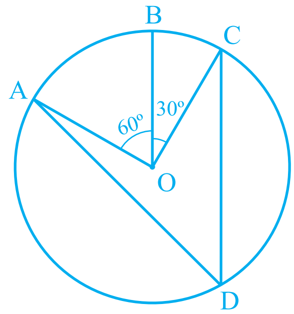
$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$

$= 360° - 180° = 180°$

માટે, પ્રમેય 10.12 પરથી ચતુષ્કોણ EFGH ચક્રીય છે.

સ્વાધ્યાય 10.5

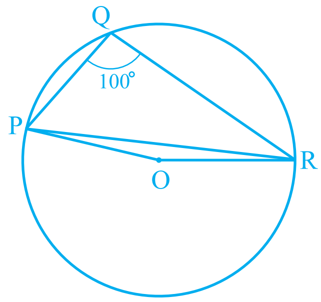
1. આકૃતિ 10.36 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર બિંદુઓ A, B અને C એવી રીતે આવેલાં છે કે જેથી $\angle BOC = 30°$ અને $\angle AOB = 60°$ થાય. જો ચાપ ABC સિવાયના વર્તુળ પર બિંદુ D હોય, તો $\angle ADC$ શોધો.



આકૃતિ 10.36

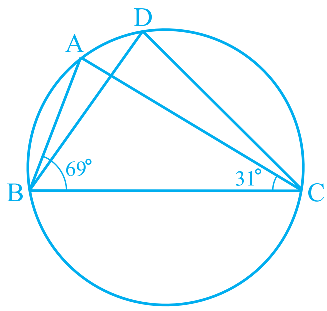
2. એક વર્તુળની જીવા અને તેની ત્રિજ્યા સમાન છે. આ જીવાએ લઘુચાપ પરના બિંદુ આગળ અને ગુરુચાપ પરના બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા શોધો.

3. આકૃતિ 10.37 માં, $\angle PQR = 100°$, જ્યાં P, Q અને R એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે. $\angle OPR$ શોધો.



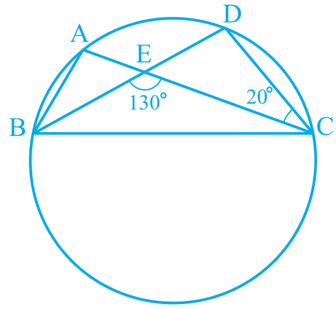
આકૃતિ 10.37

4. આકૃતિ 10.38 માં, $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$, છે, $\angle BDC$ શોધો.



આકૃતિ10.38

5. આકૃતિ 10.39 માં, વર્તુળ પર ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D આવેલાં છે. AC અને BD એ E બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી ∠ BEC = 130° અને ∠ ECD = 20°. ∠ BAC શોધો.



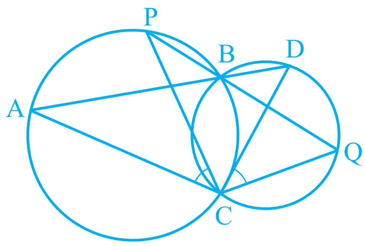
આકૃતિ 10.39

6. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો E બિંદુએ છેદે છે. જો ∠ DBC = 70°, ∠ BAC = 30°, તો ∠ BCD શોધો અને જો AB = BC, તો ∠ ECD શોધો.

7. જો ચક્રીય ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના વ્યાસ હોય, તો સાબિત કરો કે તે લંબચોરસ છે.

8. જો સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે ચક્રીય છે.

9. બે વર્તુળો એકબીજાને બે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. B માંથી પસાર થતા બે રેખાખંડ ABD અને PBQ વર્તુળોને અનુક્રમે A, D અને P, Q માં છેદે તે રીતે દોરેલા છે. (જુઓ આકૃતિ 10.40.) સાબિત કરો કે ∠ ACP = ∠ QCD.



આકૃતિ 10.40

10. જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ વ્યાસ થાય તેવી રીતે વર્તુળો દોરેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે આ વર્તુળોનું એક છેદબિંદુ, ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ પર આવેલું છે.

11. કર્ણ AC હોય તેવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ADC છે. સાબિત કરો કે ∠ CAD = ∠ CBD.

12. સાબિત કરો કે ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

સ્વાધ્યાય 10.6 (વૈકલ્પિક)*

1. સાબિત કરો કે બે છેદતાં વર્તુળોના કેન્દ્રને જોડતી રેખા વર્તુળોનાં બે છેદબિંદુ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

2. વર્તુળની 5 સેમી અને 11 સેમી લંબાઈની બે જીવાઓ અનુક્રમે AB અને CD એકબીજીને સમાંતર છે અને કેન્દ્રની વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલી છે. AB અને CD વચ્ચેનું અંતર 6 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

3. વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓની લંબાઈ 6 સેમી અને 8 સેમી છે. નાની જીવા કેન્દ્રથી 4 સેમી દૂર હોય, તો કેન્દ્રથી બીજી જીવાનું અંતર કેટલું હશે?

4. ધારો કે ખૂણા ABC નું શિરોબિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું છે અને ખૂણાની બાજુઓ સમાન જીવાઓ AD અને CE બને તે રીતે વર્તુળને છેદે છે. સાબિત કરો કે જીવાઓ AC અને DE એ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાઓના તફાવતથી અડધો ∠ABC છે.

5. સાબિત કરો કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની કોઈ પણ બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ, ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના છેદબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

6. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. A, B અને C માંથી પસાર થતું વર્તુળ CD (અથવા લંબાવેલી CD) ને E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે AE = AD.

* *આ સ્વાધ્યાયને પરીક્ષાનો મુદ્દો બનાવવો નહિ.*

7. એક વર્તુળની જીવાઓ AC અને BD એકબીજીને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે (i) AC અને BD વ્યાસ છે. (ii) ABCD લંબચોરસ છે.

8. ત્રિકોણ ABC ના ખૂણાઓ A, B અને C ના દુભાજકો, ત્રિકોણના પરિવર્તુળને અનુક્રમે D, E અને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે ત્રિકોણ DEF ના ખૂણાઓ $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ અને $90° - \frac{1}{2}C$ છે.

9. બે સમાન વર્તુળો એકબીજાને A અને B બિંદુએ છેદે છે. A માંથી એક રેખાખંડ PAQ એવી રીતે દોરેલો છે કે જેથી P અને Q વર્તુળો પર હોય. સાબિત કરો કે BP = BQ.

10. કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માં, જો $\angle A$ નો દુભાજક અને BC નો લંબદ્વિભાજક છેદતાં હોય, તો સાબિત કરો કે તેઓ ત્રિકોણ ABCના પરિવર્તુળ પર છેદે છે.

10.9 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

1. વર્તુળ એ સમતલના નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓનો સમૂહ છે.
2. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
3. જો વર્તુળ(સમાન વર્તુળો)ની બે જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.
4. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પરનો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.
5. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.
6. ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું એક અને માત્ર એક જ વર્તુળ હોય છે.
7. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે હોય છે.
8. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ના કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.
9. જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને સંગત જીવાઓ સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળની બે જીવાઓ સમાન હોય, તો તેમને સંગત (લઘુ, ગુરુ) ચાપ એકરૂપ છે.
10. વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ તેના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
11. વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપે આંતરેલો ખૂણો એ તે ચાપે વર્તુળના બાકી રહેલા ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણાથી બમણો છે.
12. વર્તુળના સમાન વૃત્તખંડના ખૂણા સમાન છે.
13. અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ છે.
14. જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, આ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.
15. ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° છે.
16. જો ચતુષ્કોણની સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

પ્રકરણ 11

રચનાઓ

11.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં પ્રકરણોમાં આપણે દોરતાં હતાં તે આકૃતિઓ માત્ર પ્રમેય સાબિત કરવા કે સ્વાધ્યાયના ઉકેલ માટે સહાયક થવા માટે જરૂરી હતી, પરંતુ તે ચોકસાઈવાળી હોય તેવું જરૂરી ન હતું. તે માત્ર પરિસ્થિતિને સમજવા અને ઉચિત તર્કને રજૂ કરવા માટે દોરવામાં આવતી હતી. આમ છતાં કેટલીક વાર ચોકસાઈવાળી આકૃતિઓની જરૂર પડે છે, ઉદાહરણ તરીકે બાંધવામાં આવનાર મકાનનો નકશો, યંત્રોના ઓજાર કે સાધનના નકશાના જુદા જુદા ભાગનાં માનચિત્રો, માર્ગનો નકશો દોરવા વગેરે. આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરવા માટે કેટલાક પાયાનાં ભૌમિતિક ઉપકરણોની જરૂર પડે છે. આ માટે તમારી પાસે નીચેની સામગ્રીઓ સમાવતી કંપાસપેટી હોવી જરૂરી છે:

(i) **અંકિત માપપટ્ટી :** તેની એક તરફ સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર તથા બીજી તરફ ઈંચ અને તેના ભાગ અંકિત થયેલ હોય છે.

(ii) **કાટખૂણિયાની જોડ :** તે પૈકી એકમાં 90°, 60° અને 30° ના ખૂણા તથા બીજામાં 90°, 45° અને 45° ના ખૂણાનો સમાવેશ થાય છે.

(iii) **વિભાજકની જોડ :** જેના બે છેડા કાગળ પર ગોઠવી શકાય તેવી સગવડ સાથે.

(iv) **પરિકરની જોડ :** જેના એક છેડે પેન્સિલ ગોઠવી શકાય તેવી સગવડ સાથે.

(v) **કોણમાપક**

સામાન્ય રીતે આ દરેક ઉપકરણની જરૂરિયાત આપેલ માપ પ્રમાણે ત્રિકોણ, વર્તુળ, ચતુષ્કોણ, બહુકોણ વગેરે જેવી ભૌમિતિક આકૃતિઓ દોરવામાં પડે છે. પરંતુ *માત્ર અન-અંકિત માપપટ્ટી કે સીધી પટ્ટી અને પરિકર જેવાં બે ઉપકરણોની મદદથી*

ભૌમિતિક આકૃતિઓ દોરવાની પ્રક્રિયાને ભૌમિતિક રચના કહે છે. જે રચનામાં માપની પણ જરૂર પડે છે, તેમાં અંકિત માપપટ્ટી અને પરિકરનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય છે. આ પ્રકરણમાં ચોક્કસ પ્રકારના ત્રિકોણોની રચના કરવામાં ઉપયોગી હોય તેવી કેટલીક પાયાની રચનાઓનો વિચાર કરીશું.

11.2 પાયાની રચનાઓ

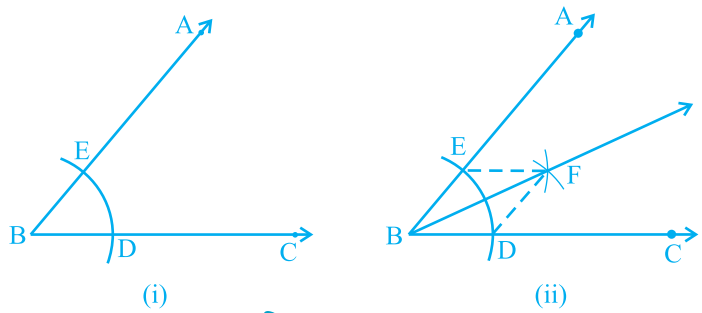
ધોરણ VI માં તમે વર્તુળ, રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક, 30°, 45°, 60°, 90° તથા 120° ના ખૂણાઓ અને આપેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક જેવી રચનાઓનો કોઈ વ્યાજબી યથાર્થતા આપ્યા વગર અભ્યાસ કરી ગયાં છો. આ વિભાગમાં આ પૈકીની તેની પાછળના તર્ક સાથે કેટલીક રચનાઓ તથા આ રચનાઓ શા માટે પ્રમાણિત છે તેનો અભ્યાસ કરીશું.

રચના 11.1 : *આપેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક રચવો.*

ખૂણો ABC આપેલ છે. આપણે તેનો દ્વિભાજક રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. B ને કેન્દ્ર લઈ અનુકૂળ ત્રિજ્યા વડે બંને બાજુએ કિરણ BA અને BC ને છેદતું ચાપ દોરો. તે છેદબિંદુને અનુક્રમે E અને D કહો. [જુઓ આકૃતિ 11.1(i).]
2. $\frac{1}{2}$ DE કરતાં મોટી ત્રિજ્યા લઈ D અને E ને કેન્દ્ર તરીકે લઈ એકબીજાને છેદતાં ચાપ દોરો. છેદબિંદુને F કહો.
3. કિરણ BF દોરો. [જુઓ આકૃતિ 11.1(ii)]



આકૃતિ 11.1

આ કિરણ BF એ ખૂણા ABC નો માંગેલ દ્વિભાજક છે.

હવે આપણે માંગેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

DF અને EF રચો.

ત્રિકોણ BEF અને ત્રિકોણ BDF માં

BE = BD (એક જ ચાપની ત્રિજ્યાઓ)

EF = DF (સમાન ત્રિજ્યાવાળું ચાપ)

BF = BF (સામાન્ય રેખાખંડ)

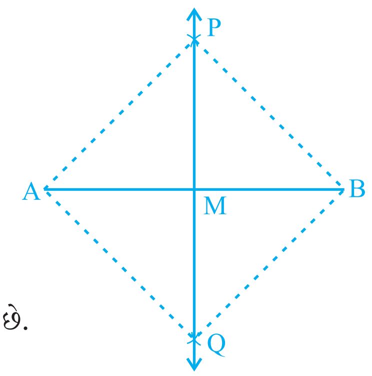
$\therefore \Delta BEF \cong \Delta BDF$ (બાબાબા શરત)

$\therefore \angle EBF = \angle DBF$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

રચના 11.2 : *આપેલા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકની રચના કરવી.*

રેખાખંડ AB આપેલ છે. આપણે તેનો લંબદ્વિભાજક રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :



આકૃતિ 11.2

1. $\frac{1}{2}$ AB કરતાં વધારે મોટી ત્રિજ્યા લઈ ક્રમશઃ A અને B ને કેન્દ્ર તરીકે લઈ AB ની બંને બાજુએ ચાપ દોરો. (એકબીજાને છેદે તેમ)
2. આ બંને ચાપ એકબીજાને P અને Q માં છેદે છે. PQ દોરો. (જુઓ આકૃતિ.11.2.)
3. હવે PQ, AB ને બિંદુ M માં છેદે છે. આથી રેખા PMQ એ AB નો માંગેલ લંબદ્વિભાજક છે.

હવે આપણે AB નો લંબદ્વિભાજક કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

A અને B ને P તથા Q બંને સાથે જોડીએ જેથી રેખાખંડ AP, AQ, BP અને BQ મળે.

ત્રિકોણો PAQ અને PBQ માં,

AP = BP (સમાન ત્રિજ્યાવાળાં ચાપ)

AQ = BQ (સમાન ત્રિજ્યાવાળાં ચાપ)

PQ = PQ (સામાન્ય)

$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (બાબાબા નિયમ)

$\therefore \angle APM = \angle BPM$ (એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો)

હવે ત્રિકોણ PMA અને PMB માં,

AP = BP (આગળ પ્રમાણે)

PM = PM (સામાન્ય)

$\angle APM = \angle BPM$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ (બાખૂબા નિયમ)

$\therefore$ AM = BM અને $\angle PMA = \angle PMB$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

પરંતુ $\angle PMA + \angle PMB = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણાની પૂર્વધારણા)

આથી $\angle PMA = \angle PMB = 90°$.

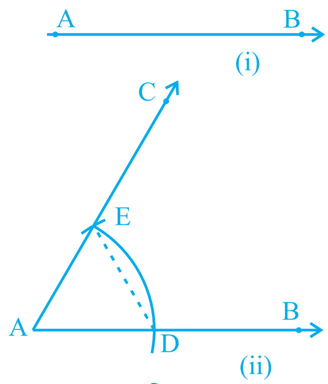
તેથી, PM એટલે કે PMQ એ AB નો લંબ દ્વિભાજક છે.

રચના 11.3 : *આપેલ કિરણના ઉદ્ભવબિંદુએ 60° માપના ખૂણાની રચના કરવી.*

ઉદ્ભવબિંદુ A વાળું કિરણ AB લઈએ. [જુઓ આકૃતિ 11.3(i).] આપણે $\angle CAB = 60°$ થાય એવું કિરણ AC રચવું છે. તેમ કરવાની એક રીત આગળ પ્રમાણે છે :

રચનાના મુદ્દા :

1. A ને કેન્દ્ર લઈ કોઈક ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળનું એક ચાપ દોરો. તે AB ને જ્યાં છેદે તે બિંદુને D નામ આપો.
2. D ને કેન્દ્ર લઈ તે જ માપની ત્રિજ્યા લઈ એક ચાપ દોરો. તે પ્રથમ ચાપને જે બિંદુમાં છેદે તેનું નામ E આપો.
3. E માંથી પસાર થાય તેવું કિરણ AC રચો [જુઓ આકૃતિ 11.3 (ii).]



આકૃતિ. 11.3

$\angle$ CAB માંગેલ 60° નો ખૂણો છે.

હવે આપણે 60° નો ખૂણો કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

DE જોડો.

હવે AE = AD = DE (રચના પરથી)

તેથી Δ EAD એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને $\angle$ EAD તથા $\angle$ CAB એક જ છે, તેનું માપ 60° જેટલું છે.

સ્વાધ્યાય 11.1

1. આપેલ કિરણના ઉદ્‌ભવબિંદુ પર 90^0 ના ખૂણાની રચના કરો અને પ્રમાણિત કરો.

2. આપેલ કિરણના ઉદ્‌ભવબિંદુ પર 45^0 ના ખૂણાની રચના કરો અને પ્રમાણિત કરો.

3. નીચે આપેલા માપના ખૂણાઓની રચના કરો :

(i) 30° (ii) $22\frac{1}{2}^{\circ}$ (iii) 15°

4. નીચે આપેલ ખૂણાઓ રચો અને કોણમાપક વડે માપીને ચકાસો :

(i) 75° (ii) 105° (iii) 135°

5. આપેલ બાજુઓના માપવાળા સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી તેની યથાર્થતા દર્શાવો.

11.3 ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ

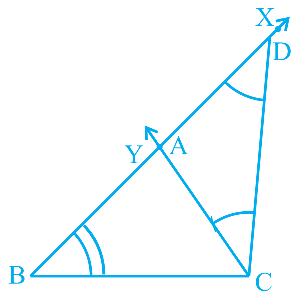
અત્યાર સુધી આપણે કેટલીક પાયાની રચનાઓનો વિચાર કર્યો. હવે પછી આપણે આગળના ધોરણની તથા ઉપર આપેલ રચનાઓનો ઉપયોગ કરીને ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ કરી. પ્રકરણ 7 ની બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેના બાખૂબા, બાબાબા, ખૂબાખૂ અને કાકબા નિયમને યાદ કરી લઈએ. (i) જો બે બાજુ અને અંતર્ગત ખૂણો આપેલ હોય. (ii) ત્રણ બાજુઓ આપેલ હોય. (iii) બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ આપેલ હોય. (iv) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ તથા એક બાજુ આપેલ હોય તો અનન્ય ત્રિકોણ મળે. તમે ધોરણ VII માં આવા ત્રિકોણની રચના કેવી રીતે કરવી તે શીખી ગયાં છો. હવે ત્રિકોણની કેટલીક વધુ રચનાઓનો વિચાર કરીએ. તમે એ નોંધ્યું હશે કે ત્રિકોણની રચના કરવા માટે તેનાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ અંગ (ભાગ) આપેલ હોવા જોઈએ. પરંતુ ત્રણ અંગોના બધા જ સંયોજન હેતુ સિદ્ધ કરવા માટે પર્યાપ્ત નથી. ઉદાહરણ તરીકે બે બાજુઓ અને એક ખૂણો (અંતર્ગત ન હોય તેવો) આપેલ હોય, તો આવા અનન્ય ત્રિકોણની રચના કરવી હંમેશાં શક્ય નથી.

રચના 11.4 : *ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓના માપનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

તમારે એવી રચના કરવાની છે કે જેમાં પાયો BC, પાયા પરનો ખૂણો ∠B અને ત્રિકોણ ABC ની બે બાજુઓનો સરવાળો AB + AC આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. પાયો BC રચો અને આપેલ ખૂણા જેવડો ખૂણો બિંદુ B પર રચો. તેને ખૂણો XBC કહો.
2. કિરણ BX પર BD = AB + AC થાય તેવો રેખાખંડ BD કાપો.
3. DC રચો અને ∠BDC જેટલો ખૂણો DCY રચો.
4. ધારો કે CY એ BX ને A માં છેદે. (જુઓ આકૃતિ 11.4.)



આકૃતિ 11.4

આમ, ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

હવે આપણે માગેલ ત્રિકોણ કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

પાયો BC અને ∠B આપ્યા પ્રમાણે દોરેલ છે. ત્યાર બાદ ત્રિકોણ ACD માં

$\angle ACD = \angle ADC$ (રચના પરથી)

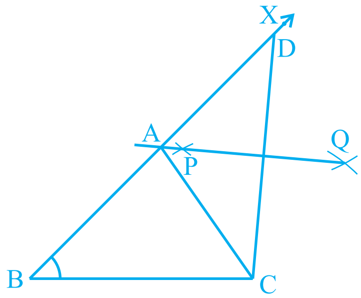
તેથી $AC = AD$

આથી, $AB = BD - AD = BD - AC$

$\therefore AB + AC = BD$

વૈકલ્પિક પદ્ધતિ :

ઉપરના વિકલ્પ પ્રમાણે પ્રથમ બે મુદ્દાને અનુસરો. ત્યાર બાદ CD નો લંબદ્વિભાજક PQ રચો. તે BD ને A માં છેદે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.) AC રચો. આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે. એ નોંધીએ કે A, CD ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે. તેથી AD = AC.



આકૃતિ 11.5

નોંધ : જો $AB + AC \leq BC$ હોય, તો તેવા ત્રિકોણની રચના શક્ય નથી.

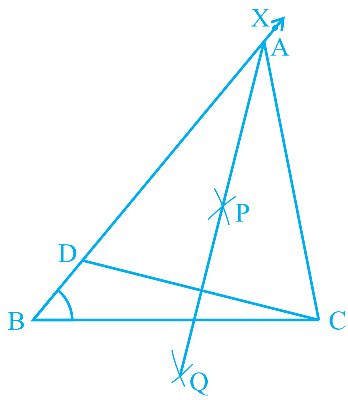
રચના 11.5 : *પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બાકીની બે બાજુઓનો તફાવત આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

પાયો BC, પાયા પરનો ∠B અને બે બાજુઓનો તફાવત AB – AC અથવા AC – AB આપેલ છે. તમારે ત્રિકોણ ABC ની રચના કરવાની છે. અહીં નીચે આપેલ બે વિકલ્પો સ્પષ્ટ છે :

વિકલ્પ (i) : ધારો કે AB > AC. તેથી AB – AC આપેલ છે :

રચનાના મુદ્દા :

1. પાયો BC રચો. આપેલ ખૂણા જેટલો ખૂણો XBC બિંદુ B પર રચો.
2. કિરણ BX પર, BD = AB – AC થાય તેવો રેખાખંડ કાપો.
3. DC રચો અને DC નો લંબ દ્વિભાજક PQ રચો.



આકૃતિ 11.6

4. ધારો કે PQ એ BX ને બિંદુ A માં છેદે છે. AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.6.)

આમ ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

હવે, આપણે માગેલ ત્રિકોણ ABC કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

પાયો BC અને $\angle B$ કહેવા પ્રમાણે દોરેલ છે.

બિંદુ A લંબદ્વિભાજક DC પર આપેલ છે.

આથી, $AD = AC$

$\therefore BD = AB - AD = AB - AC.$

વિકલ્પ (ii) : ધારો કે $AB < AC$. તેથી $AC - AB$ આપેલ છે.

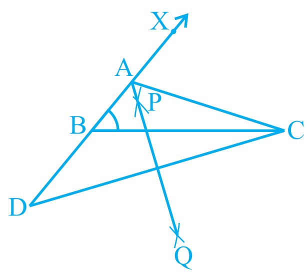
રચનાના મુદ્દા :

1. વિકલ્પ (i) પ્રમાણે

2. રેખાખંડ BC ની વિરૂદ્ધ દિશામાં લંબાવેલ રેખા BX પર $AC - AB$ ના માપનો એક રેખાખંડ BD કાપો.

3 DC રચો અને DC નો લંબદ્વિભાજક PQ રચો.

4. ધારો કે PQ એ BX ને A માં છેદે છે. AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.7.)



આકૃતિ 11.7

આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે.

તમે રચનાને વિકલ્પ (i) પ્રમાણે પ્રમાણિત કરી શકો છો.

રચના 11.6 : *ત્રિકોણની પરિમિતિ અને પાયા પરના ખૂણા આપ્યા હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

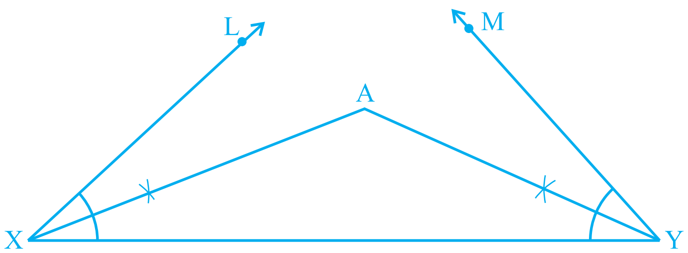
તમારે એવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરવાની છે કે જેના પાયા પરના $\angle B$, $\angle C$ અને $BC + CA + AB$ આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. $BC + CA + AB$ થાય તેવો રેખાખંડ રચો, તેને XY કહો.

2. $\angle B$ ને સમાન $\angle LXY$ અને $\angle C$ ને સમાન $\angle MYX$ રચો.

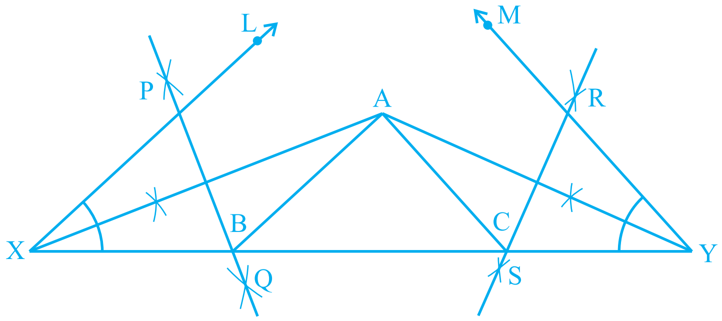
3. બિંદુ A માં છેદે તેવા $\angle LXY$ અને $\angle MYX$ ના દ્વિભાજક રચો. [જુઓ આકૃતિ 11.8(i).]



આકૃતિ 11.8 (i)

4. AX નો લંબદ્વિભાજક PQ તથા AY નો લંબદ્વિભાજક RS દોરો.

5. PQ એ XY ને B માં તથા RS એ XY ને C માં છેદે તેમ દોરો . AB અને AC રચો. [જુઓ આકૃતિ11.8(ii).]



આકૃતિ 11.8 (ii)

આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે.

આ રચનાને પ્રમાણિત કરવા માટે, તમે એ નોંધો કે AXના લંબદ્વિભાજક PQ પર B આવેલ છે.

તેથી XB = AB અને તે જ રીતે CY = AC.

આ પરથી $BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY$.

ફરીથી, $\angle BAX = \angle AXB$ ($\angle AXB$ પરથી $AB = XB$)

અને $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\ \angle AXB = \angle LXY$

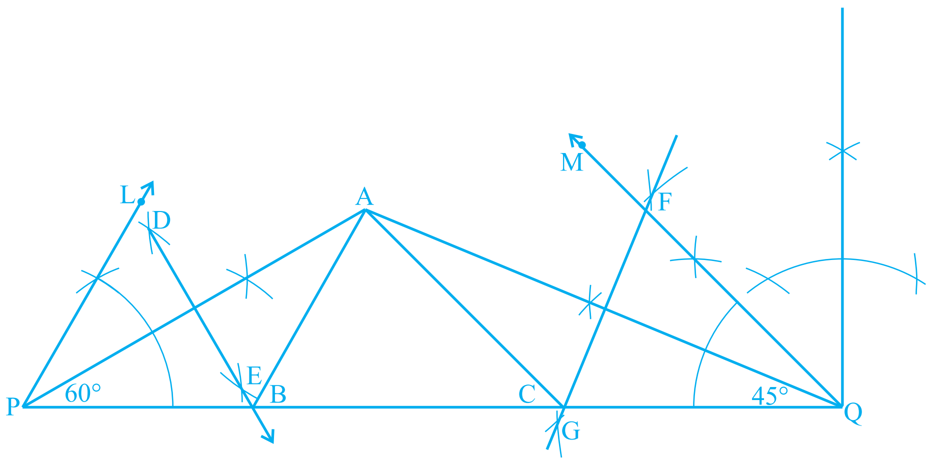
તે જ રીતે, માંગ્યા પ્રમાણે $\angle ACB = \angle MYX$

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણમાં $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ અને $AB + BC + CA = 11$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

રચનાના મુદ્દા :

1. 11 સેમીનો રેખાખંડ PQ રચો. (= AB + BC + CA)

2. P પર 60° નો ખૂણો અને Q પર 45° નો ખૂણો રચો.



આકૃતિ 11.9

3. આ ખૂણાઓનું દ્વિભાજન કરો. ધારો કે આ ખૂણાઓના દ્વિભાજક A બિંદુએ છેદે છે.

4. PQ ને B માં છેદે તેવો AP નો લંબદ્વિભાજક DE રચો તથા PQ ને C માં છેદે તેવો AQ નો લંબદ્વિભાજક FG રચો.

5. AB અને AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.9.) આમ, ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 11.2

1. BC = 7 સેમી, $\angle B = 75°$ અને AB + AC = 13 સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

2. BC = 8 સેમી, $\angle B = 45°$ અને AB – AC = 3.5 સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

3. QR = 6 સેમી, $\angle Q = 60°$ અને PR – PQ = 2 સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ PQR ની રચના કરો.

4. $\angle Y = 30°$, $\angle Z = 90°$ અને XY + YZ + ZX = 11 સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ XYZ ની રચના કરો.

5. પાયો 12 સેમી અને કર્ણ તથા બીજી બાજુનો સરવાળો 18 સેમી હોય તેવા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે પરિકર અને સીધીપટ્ટીની મદદથી નીચેની રચનાઓ દોરતા શીખ્યા :

1. આપેલ ખૂણાના દ્વિભાજકની રચના

2. આપેલ રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકની રચના

3. 60° ખૂણાની રચના અને વગેરે

4. ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

5. ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓનો તફાવત આપ્યો હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

6. ત્રિકોણના પાયાના બે ખૂણા અને ત્રિકોણની પરિમિતિ આપી હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

પ્રકરણ 12

હેરોનનું સૂત્ર

12.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે ભિન્ન આકારની આકૃતિઓ જેવી કે ચોરસ, લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને ચતુષ્કોણનો અભ્યાસ કરેલ છે. વધુમાં તમે આમાંની કેટલીક આકૃતિઓ જેવી કે લંબચોરસ, ચોરસ વગેરેની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળની ગણતરી પણ કરેલ છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે તમારા વર્ગના ભોંયતળિયાની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધી શકો.

જો આપણે ભોંયતળિયાની ફરતે ધાર પર એક ચક્કર પૂર્ણ કરીએ, તો કાપેલ અંતરને ભોંયતળિયાની પરિમિતિ કહેવાય. વળી, ભોંયતળિયાનું માપ એ તેનું ક્ષેત્રફળ છે.

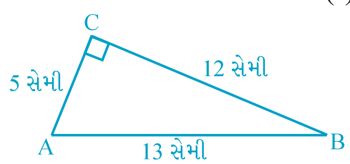
આથી જો તમારો વર્ગખંડ લંબચોરસ હોય અને તેની લંબાઈ 10 મીટર અને પહોળાઈ 8 મીટર હોય, તો તેની પરિમિતિ 2(10 મી + 8 મી) = 36 મી અને ક્ષેત્રફળ = 10 મી × 8 મી અર્થાત્, 80 મી^{2} થાય.

લંબાઈ તથા પહોળાઈના માપના એકમ મીટર (મી) અથવા સેન્ટિમીટર(સેમી) વગેરે લખાય.

કોઈ સમતલીય આકૃતિના ક્ષેત્રફળના માપનો એકમ ચોરસ મીટર (મી^{2}) અથવા ચોરસ સેન્ટિમીટર(સેમી^{2}) વગેરે લખાય.

ધારો કે તમે ત્રિકોણાકાર બગીચામાં બેઠા છો. તમે તેનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધશો ? પ્રકરણ 9 અને તમે આગળના ધોરણમાં શીખ્યાં છો તે પરથી તમે જાણો છો કે,

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ} \qquad \text{(I)}$$



આકૃતિ 12.1

આપણે જોઈ શકીએ કે જો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓને પાયો અને વેધ ગણી આ સૂત્રનો સીધો ઉપયોગ કરી શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે, કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે; તો આપણે પાયાની લંબાઈ 12 સેમી અને

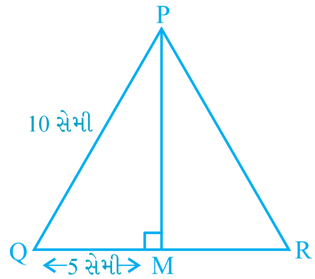
વેધ 5 સેમી લઈ શકીએ. (જુઓ આકૃતિ 12.1.) આથી,

$$\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ સેમી}^2 = 30 \text{ સેમી}^2$$

આપણે પાયો 5 સેમી અને વેધ 12 સેમી પણ લઇ શકીએ.

હવે, ધારો કે આપણે 10 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણ PQR નું ક્ષેત્રફળ શોધવું છે. (જુઓ આકૃતિ 12.2.) તેનું ક્ષેત્રફળ શોધવા આપણને તેનો વેધ જોઈશે. તમે આ ત્રિકોણનો વેધ શોધી શકો ?

આપણે યાદ કરીએ કે જ્યારે બાજુઓ જાણતા હોઈએ ત્યારે તેનો વેધ કેવી રીતે શોધી શકીએ. સમબાજુ ત્રિકોણમાં આ શક્ય છે. QR નું મધ્યબિંદુ M લો અને તેને P સાથે જોડો. આપણે જાણીએ છીએ કે PMQ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. આથી પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, નીચે પ્રમાણે આપણે PM ની લંબાઈ શોધી શકીએ.



આકૃતિ 12.2

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

$\therefore \ (10)^2 = PM^2 + (5)^2$, કારણ કે QM = MR.

$\therefore \ PM^2 = 75$

$\therefore \ PM = \sqrt{75}$ સેમી $= 5\sqrt{3}$ સેમી

આથી, Δ PQR નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \text{ સેમી}^2 = 25\sqrt{3} \text{ સેમી}^2$$

હવે આપણે જોઈએ કે આ સૂત્રના ઉપયોગથી સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરી શકાય કે નહિ. ઉદાહરણ તરીકે, ત્રિકોણ XYZ માં સમાન બાજુઓ XY અને XZ ની લંબાઈ 5 સેમી અને અસમાન બાજુ YZ ની લંબાઈ 8 સેમી લઈએ. (જુઓ આકૃતિ12.3.)

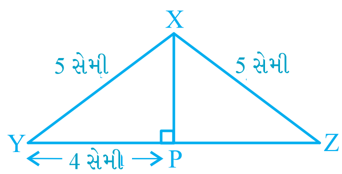
આ વિકલ્પમાં પણ આપણે ત્રિકોણનો વેધ શોધીશું. તે માટે X માંથી YZ બાજુ પર લંબ XP દોરો. આમ, જોઈ શકાય કે લંબ XP ત્રિકોણની બાજુ YZ ને બે સમાન ભાગમાં વહેંચે.

આથી, $YP = PZ = \frac{1}{2} YZ = 4$ સેમી

આથી, પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ,

$$XP^2 = XY^2 - YP^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

આથી, XP = 3 સેમી



આકૃતિ 12.3

હવે, Δ XYZ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો YZ $\times$ વેધ XP $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3$ સેમી^{2} = 12 સેમી^{2}.

હવે ધારો કે વિષમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ આપણે જાણીએ છીએ. પરંતુ વેધ જ્ઞાત નથી. તો પણ તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો? દાખલા તરીકે એક ત્રિકોણાકાર બગીચાની બાજુઓ 40 મી, 32 મી અને 24 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવું ? જો સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો હોય તો ચોક્કસપણે તમારે તેના વેધની ગણતરી કરવી પડે. પરંતુ તેના વેધ શોધવાની ચાવી

આપણી પાસે નથી. તે શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. જો તમે આ કરવા સક્ષમ ન હો તો, આ પછીનો વિભાગ જુઓ.

12.2 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ - હેરોનના સૂત્ર પરથી

Heron was born in about 10AD possibly in Alexandria in Egypt. He worked in applied mathematics. His works on mathematical and physical subjects are so numerous and varied that he is considered to be an encyclopedic writer in these fields. His geometrical works deal largely with problems on mensuration written in three books. Book I deals with the area of squares, rectangles, triangles, trapezoids (trapezia), various other specialised quadrilaterals, the regular polygons, circles, surfaces of cylinders, cones, spheres etc. In this book, Heron has derived the famous formula for the area of a triangle in terms of its three sides.

Heron (10 C.E. – 75 C.E.)

આકૃતિ 12.4

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા હેરોને આપેલ સૂત્રને ઘણી વખત ***હેરોનનું સૂત્ર*** *(Heron's formula)* પણ કહેવાય છે. તે નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{(II)}$$

અહીં, a, b અને c ત્રિકોણની બાજુઓ અને s = ***અર્ધપરિમિતિ*** અર્થાત્ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$,

જ્યાં સહેલાઈથી વેધનું માપ ના શોધી શકાતું હોય તેવા ત્રિકોણ માટે આ સૂત્ર ઉપયોગી છે. ચાલો આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ ઉપર દર્શાવેલ ત્રિકોણાકાર બગીચા ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા કરીએ. (જુઓ આકૃતિ 12.5.)

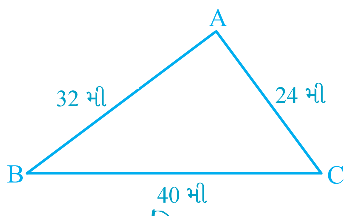
આપણે, $a = 40$ મી, $b = 24$ મી, $c = 32$ મી લઈએ.

આથી, આપણી પાસે $s = \dfrac{40+24+32}{2}$ મી $= 48$ મી

$s - a = (48 - 40)$ મી $= 8$ મી

$s - b = (48 - 24)$ મી $= 24$ મી

$s - c = (48 - 32)$ મી $= 16$ મી



આકૃતિ 12.5

આથી, બગીચા ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ મી}^2 = 384 \text{ મી}^2$$

આપણે જોઈએ કે, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$. આથી, બગીચાની બાજુઓ કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવે છે. સૌથી મોટી બાજુ અર્થાત્, કર્ણ BC = 40 મી અને બાજુઓ AB અને AC વચ્ચેનો ખૂણો 90° નો થાય.

સૂત્ર (I) નો ઉપયોગ કરતાં આપણે ચકાસી શકીએ કે બગીચાનું ક્ષેત્રફળ એ $\frac{1}{2} \times 32 \times 24$ મી^{2} = 384 મી^{2} થાય.

આ રીતે મળતું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્રથી મળતા ક્ષેત્રફળ જેટલું જ છે.

હવે, હેરોનના સૂત્રથી તમે આગળ જેની ચર્ચા કરેલ છે તે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ ચકાસો. દાખલા તરીકે,

(i) જેની પ્રત્યેક બાજુ 10 સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(ii) જેની બે સમાન બાજુ 5 સેમી અને ત્રીજી અસમાન બાજુ 8 સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

તમે જોઈ શકો છો કે,

(i) માટે, $s = \frac{10+10+10}{2}$ સેમી = 15 સેમી

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{15(15-10)\,(15-10)\,(15-10)}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ સેમી^{2} = $25\sqrt{3}$ સેમી^{2}

(ii) માટે, $s = \frac{8+5+5}{2}$ સેમી = 9 સેમી

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{9(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}$ સેમી^{2} = $\sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ સેમી^{2} = 12 સેમી^{2}

ચાલો હવે, કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ગણીએ :

ઉદાહરણ 1 : એક ત્રિકોણની પરિમિતિ 32 સેમી અને બે બાજુ 8 સેમી અને 11 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 12.6.)

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે ત્રિકોણની પરિમિતિ = 32 સેમી, a = 8 સેમી અને b = 11 સેમી,

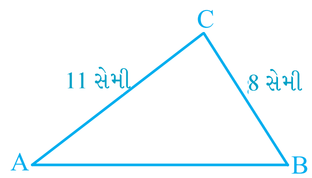
ત્રીજી બાજુ c = 32 સેમી – (8 + 11) સેમી = 13 સેમી,

અહીં, $2s = 32$, અર્થાત્ s = 16 સેમી,

$s - a$ = (16 – 8) સેમી = 8 સેમી,

$s - b$ = (16 – 11) સેમી = 5 સેમી,

$s - c$ = (16 – 13) સેમી = 3 સેમી,



આકૃતિ 12.6

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

= $\sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ સેમી^{2} = $8\sqrt{30}$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 2 : એક ત્રિકોણાકાર બગીચા ABCની બાજુઓ 120 મી, 80 મી અને 50 મી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.7.) *ધનિયા* માળીએ બધી જ તરફ તારની વાડ બાંધવાની છે અને અંદર તરફ ઘાસ વાવવાનું છે. તેને કેટલા ક્ષેત્રફળમાં વાવણી કરવાની રહેશે ? તે એક બાજુએ 3 મીટર પહોળી જગા દરવાજા માટે છોડે છે, તો તેની ફરતે કાંટાળી વાડ કરવા માટે ₹ 20 પ્રતિ મીટરના ભાવે થતો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધવા,

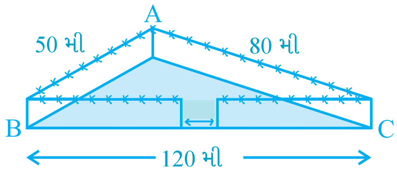
$2s$ = 50 મી + 80 મી + 120 મી = 250 મી

અર્થાત્, $s = 125$ મી

હવે, $s - a = (125 - 120)$ મી $= 5$ મી

$s - b = (125 - 80)$ મી $= 45$ મી

$s - c = (125 - 50)$ મી $= 75$ મી



આકૃતિ 12.7

આથી બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ મી^{2}

$= 375\sqrt{15}$ મી^{2}

વળી બગીચાની પરિમિતિ $=$ AB + BC + CA = 250 મી

આથી, વાડ બનાવવા માટે જરૂરી લંબાઈ = 250 મી – 3 મી (દરવાજા માટે છોડેલ) = 247 મી અને આથી, વાડ માટે થતો ખર્ચ = ₹ 20 × 247 = ₹ 4940

ઉદાહરણ 3 : એક ત્રિકોણાકાર જમીનના ટુકડાની બાજુઓની લંબાઈ 3 : 5 : 7 ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ 300 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

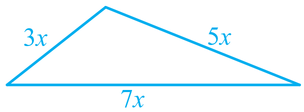
ઉકેલ : ધારો કે બાજુઓ (મીટરમાં) $3x$, $5x$ અને $7x$ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.8)

આથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $3x + 5x + 7x = 300$ (ત્રિકોણની પરિમિતિ)

માટે, $15x = 300$, અર્થાત્ $x = 20$.

આથી, ત્રિકોણની બાજુઓ 3 × 20 મી, 5 × 20 મી અને 7 × 20 મી થાય.

અર્થાત્, 60 મી, 100 મી અને 140 મી થાય.



આકૃતિ 12.8

તમે ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? [હેરોનના સૂત્ર પરથી]

અહીં, $s = \frac{60 + 100 + 140}{2}$ મી = 150 મી

અને આથી, ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}$ મી^{2}

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ મી^{2}

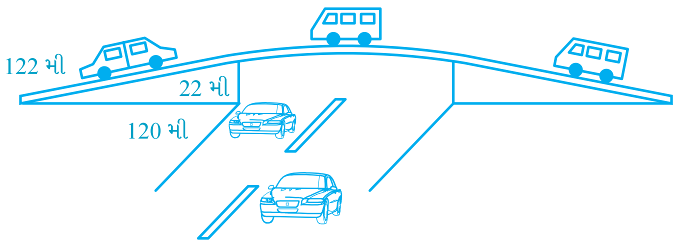
$= 1500\sqrt{3}$ મી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.1

1. જેની બાજુની લંબાઈ 'a' હોય તેવા સમબાજુ ત્રિકોણ આકારના ટ્રાફિક સિગ્નલના પાટિયામાં 'SCHOOL AHEAD' એમ લખેલ છે. તો આ પાટિયાનું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્ર પરથી મેળવો. જો તેની પરિમિતિ 180 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય ?

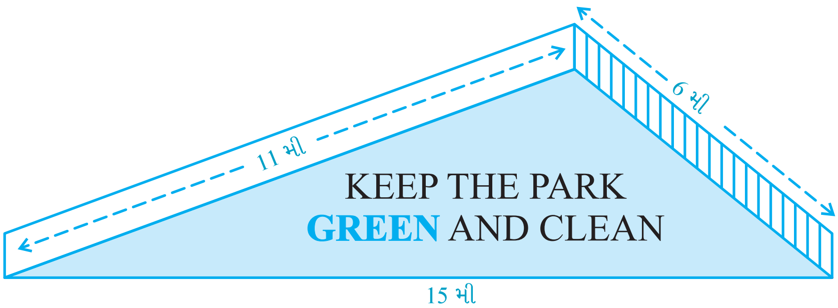
2. એક ફ્લાય ઓવરની ત્રિકોણાકાર દિવાલોનો ઉપયોગ જાહેરાત માટે કરવામાં આવે છે. આ દિવાલોની બાજુઓ 122 મી, 22 મી અને 120 મી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.9.) જાહેરાત પ્રતિવર્ષ ₹ 5000 પ્રતિ મી^{2} ના દરે કમાણી કરી આપે છે.

એક કંપની તે દીવાલોમાંની એક 3 મહિના માટે ભાડે રાખે છે, તો તેણે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડે :



આકૃતિ 12.9

3. બગીચામાં એક લપસણી છે. તેની એક બાજુની દીવાલ કોઈક રંગથી રંગી તેના પર "KEEP THE PARK GREEN AND CLEAN" એવો સંદેશ લખેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.10.) જો દીવાલની બાજુઓ 15 મી, 11 મી અને 6 મીની હોય, તો રંગેલ દીવાલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.10

4. જો ત્રિકોણની પરિમિતિ 42 સેમી અને બે બાજુઓ 18 સેમી તથા 10 સેમીની હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. ત્રિકોણની બાજુઓ 12 : 17 : 25 ના પ્રમાણમાં હોય અને તેની પરિમિતિ 540 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ 30 સેમી અને સમાન બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 12 સેમી છે, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

12.3 ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા હેરોનના સૂત્રનો ઉપયોગ

ધારો કે એક ખેડૂતને પોતાની જમીન ખેડવાની છે અને તે આ કામ માટે કેટલાક મજૂરો રાખે છે. જો ખેડવા માટે મજૂરી પ્રતિ ચોરસ મીટર ચૂકવવાની હોય, તો તે આ કેવી રીતે કરી શકે ? ઘણી વખત ખેતરોના આકાર ચતુષ્કોણ હોય છે. આપણે ચતુષ્કોણના ત્રિકોણાકાર ભાગ પાડી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર વાપરી શકીએ. ચાલો નીચેનો પ્રશ્ન જોઈએ :

ઉદાહરણ 4 : કમલા પાસે ત્રિકોણાકાર ખેતર છે. તેની બાજુની લંબાઈ 240 મી, 200 મી, 360 મી છે. ત્યાં તે ઘઉં ઉગાડે છે. તેને અડીને આવેલ બીજા ત્રિકોણાકાર ખેતરની બાજુઓ 240 મી, 320 મી, 400 મી છે. ત્યાં તે ડુંગળી અને બટાટા ઉગાડે છે. (જુઓ આકૃતિ 12.11.) તે સૌથી મોટી બાજુના મધ્યબિંદુને સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડી ખેતરના બે ભાગ કરે છે અને એક ભાગમાં બટાટા અને બીજા ભાગમાં ડુંગળી ઉગાડે છે, તો ઘઉં, બટાટા અને ડુંગળી પ્રત્યેક માટે કેટલું ક્ષેત્રફળ(હેક્ટરમાં) ઉપયોગમાં લેવાયું હશે? (1 હેક્ટર = 10000 મી^{2})

ઉકેલ : ધારો કે તે ખેતર ABC માં ઘઉં ઉગાડે છે. વળી, ધારો કે તે ખેતર ACD માં AD ના મધ્યબિંદુ E ને C સાથે જોડી બે ભાગમાં વિભાજિત કરાય છે. ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા આપણી પાસે,

$a = 200$ મી, $b = 240$ મી, $c = 360$ મી છે.

આથી, $s = \frac{200 + 240 + 360}{2}$ મી $= 400$ મી.

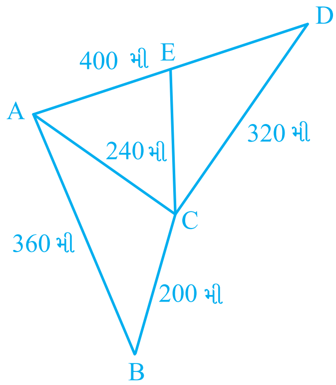
આથી, ઘઉં ઉગાડવા માટે પ્રાપ્ત ક્ષેત્રફળ,

$= \sqrt{400(400-200)(400-240)(400-360)}$ મી^{2}

$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40}$ મી^{2}

$= 16000\sqrt{2}$ મી^{2} $= 1.6 \times \sqrt{2}$ હેક્ટર

$= 2.26$ હેક્ટર (લગભગ)



આકૃતિ 12.11

હવે, ત્રિકોણ ACD નું ક્ષેત્રફળ શોધીએ.

અહીં, $s = \frac{240 + 320 + 400}{2}$ મી $= 480$ મી

આથી, Δ ACD નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{480(480-240)(480-320)(480-400)}$ મી^{2}

$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80}$ મી^{2} $= 38400$ મી^{2} $= 3.84$ હેક્ટર

આપણે નોંધીએ કે AD ના મધ્યબિંદુ E ને C સાથે જોડતો રેખાખંડ Δ ACD ને બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ભાગમાં વહેંચે છે. તમે તેનું કારણ આપી શકો ? અલબત્ત તેમના પાયા AE અને ED સમાન લંબાઈના તથા વેધ પણ સમાન છે.

આથી, ડુંગળી ઉગાડવા માટેનું ક્ષેત્રફળ = બટાટા ઉગાડવા માટેનું ક્ષેત્રફળ

$= (3.84 \div 2)$ હેક્ટર $= 1.92$ હેક્ટર

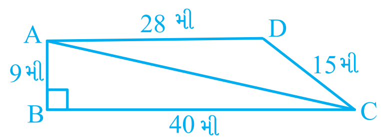
ઉદાહરણ 5 : સ્વચ્છતા અભિયાન માટે શાળાના વિદ્યાર્થીઓ રેલી કાઢે છે. તે શેરીઓમાં બે સમૂહમાં ચાલે છે. એક સમૂહ AB, BC અને CA શેરીઓમાં તથા બીજો સમૂહ AC, CD અને DA શેરીઓમાં (જુઓ આકૃતિ 12.12.) ચાલે છે. પછી તે આ શેરીઓથી ઘેરાયેલા ક્ષેત્રફળની સફાઈ કરે છે. જો AB = 9 મી, BC = 40 મી, CD = 15 મી, DA = 28 મી અને $\angle$ B = 90° હોય, તો કયો સમૂહ વધુ ક્ષેત્રફળની સફાઈ કરે છે અને કેટલાં વધુ ક્ષેત્રફળ જેટલી ? વિદ્યાર્થી દ્વારા કુલ કેટલા ક્ષેત્રફળ જેટલી સફાઈ થઈ છે ? (શેરીની પહોળાઈને અવગણતાં)

ઉકેલ : AB = 9 મી અને BC = 40 મી, $\angle$ B = 90° હોવાથી,

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2} \text{ મી}$$

$$= \sqrt{81 + 1600} \text{ મી}$$

$$= \sqrt{1681} \text{ મી} = 41 \text{ મી}$$



આકૃતિ 12.12

હવે પ્રથમ સમૂહ Δ ABC ના ક્ષેત્રફળ જેટલી સફાઈ કરે છે. તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

આથી Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 9 \text{ મી}^2 = 180 \text{ મી}^2$$

બીજો સમૂહ Δ ACD ના ક્ષેત્રફળ જેટલી સફાઈ કરે છે. તે વિષમબાજુ ત્રિકોણ છે અને તેની બાજુઓ 41 મી, 15 મી અને 28 મી છે.

અહીં, $s = \frac{41 + 15 + 28}{2}$ મી = 42 મી

આથી, Δ ACD નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)} \text{ મી}^2$$

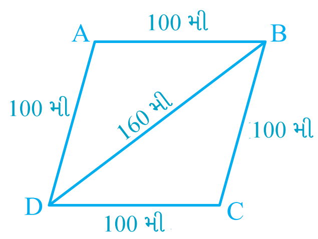
$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14} \text{ મી}^2 = 126 \text{ મી}^2$$

આથી, પ્રથમ સમૂહ 180 મી^{2} જેટલી સફાઈ કરે છે. તે (180 – 126) મી^{2} અર્થાત્, બીજા સમૂહ દ્વારા થતી સફાઈના ક્ષેત્રફળ કરતાં 54 મી^{2} વધુ છે.

બધા જ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા સફાઈ થયેલ કુલ ક્ષેત્રફળ = (180 + 126) મી^{2} = 306 મી^{2}

ઉદાહરણ 6 : સાન્યા પાસે સમભુજ ચતુષ્કોણ આકારનો જમીનનો એક ટુકડો છે. (જુઓ આકૃતિ 12.13) તે તેના એક પુત્ર અને પુત્રીને આ જમીનમાં કામ કરી ભિન્ન-ભિન્ન પાક ઉગાડે તેમ ઇચ્છે છે. તે જમીનના બે સમાન ભાગ કરે છે. જો જમીનની પરિમિતિ 400 મી અને એક વિકર્ણની લંબાઈ 160 મી હોય, તો પાક ઉગાડવા માટે બંનેને કેટલું ક્ષેત્રફળ મળશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ABCD ખેતર છે.



આકૃતિ 12.13

પરિમિતિ = 400 મી

આથી દરેક બાજુ = 400 મી ÷ 4 = 100 મી

આથી, AB = AD = 100 મી

ધારો કે વિકર્ણ BD = 160 મી

આથી, Δ ABD ની અર્ધપરિમિતિ

$$s = \frac{100 + 100 + 160}{2} \text{ મી} = 180 \text{ મી}$$

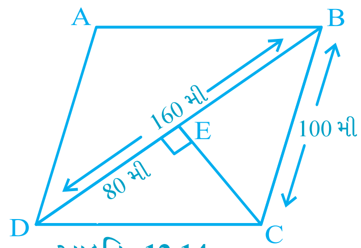
આથી, Δ ABD નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{180(180-100)(180-100)(180-160)}$ મી^{2}

$$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20} \text{ મી}^2$$

$$= 4800 \text{ મી}^2$$

આથી, દરેકને મળતું ક્ષેત્રફળ 4800 મી^{2} જેટલું હશે.

વૈકલ્પિક રીત : CE ⊥ BD દોરો (જુઓ આકૃતિ 12.14.)



આકૃતિ 12.14

BD = 160 મી હોવાથી

DE = 160 મી ÷ 2 = 80 મી

અને, $DE^2 + CE^2 = DC^2$,

$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

અથવા $CE = \sqrt{100^2 - 80^2}$ મી $= 60$ મી

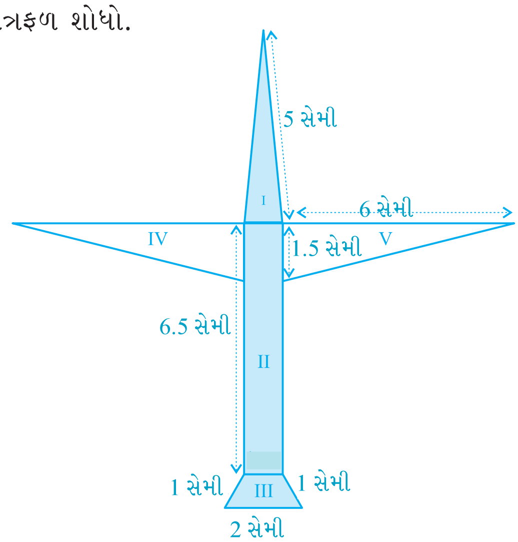
માટે Δ BCD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60$ મી^{2} = 4800 મી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.2

1. એક બગીચો ABCD ચતુષ્કોણ આકારનો છે, જ્યાં, ∠ C = 90°, AB = 9 મી, BC = 12 મી, CD = 5 મી અને AD = 8 મી. તેનાથી ઘેરાયેલ ભાગનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થશે ?

2. જો AB = 3 સેમી, BC = 4 સેમી, CD = 4 સેમી, DA = 5 સેમી અને AC = 5 સેમી હોય, તો ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. રાધા રંગીન કાગળનો ઉપયોગ કરી આકૃતિ 12.15 માં બતાવ્યા મુજબનું હવાઈ જહાજનું ચિત્ર તૈયાર કરે છે. આ માટે વપરાતા કાગળનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

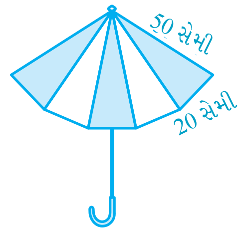


આકૃતિ 12.15

4. એક ત્રિકોણ અને એક સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ તથા આધાર સમાન છે. જો ત્રિકોણની બાજુઓ 26 સેમી, 28 સેમી અને 30 સેમી હોય અને સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ 28 સેમીના આધાર પર રહેલ હોય તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

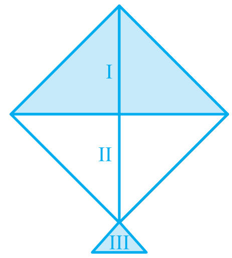
5. સમબાજુ ચતુષ્કોણ આકારના ખેતરમાં 18 ગાયોને ચરવા લીલું ઘાસ ઉગાડેલ છે. જો સમબાજુ ચતુષ્કોણની દરેક બાજુની લંબાઈ 30 મી હોય અને મોટા વિકર્ણનું માપ 48 મી હોય, તો દરેક ગાયને ચરવા કેટલા ક્ષેત્રફળ જેટલું ઘાસ ખેતરમાંથી મળશે ?

6. એક છત્રી બે અલગ રંગના 10 ત્રિકોણાકાર કપડાંમાંથી સીવીને બનાવેલ છે.(જુઓ આકૃતિ 12.16.) દરેક ટુકડાની લંબાઈ 20 સેમી, 50 સેમી અને 50 સેમી છે. છત્રી બનાવવા દરેક રંગના કુલ કેટલા કાપડનો ઉપયોગ થયો હશે ?



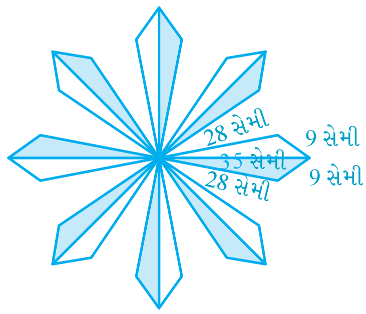
આકૃતિ 12.16

7. એક પતંગ ચોરસ આકારનો છે. તેના વિકર્ણની લંબાઈ 32 સેમી છે અને એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો 8 સેમી અને પ્રત્યેક સમાન બાજુ 6 સેમી છે. તેને ત્રણ જુદા જુદા રંગથી આકૃતિ 12.17 માં બતાવ્યા પ્રમાણે બનાવવામાં આવે છે. તેમાં દરેક રંગનો કેટલો કાગળ વપરાયો હશે ?



આકૃતિ 12.17

8. એક ભોંયતળિયે 16 ત્રિકોણાકાર ટાઇલ્સનો ઉપયોગ કરી ફૂલની આકૃતિ બનાવવામાં આવી છે. ત્રિકોણની બાજુઓ 9 સેમી, 28 સેમી અને 35 સેમી હોય, તો 50 પૈસા પ્રતિ સેમી^{2} ના દરે ટાઇલ્સને પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ શોધો.(આકૃતિ 12.18.)



આકૃતિ 12.18

9. એક ખેતરનો આકાર સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. તેની સમાંતર બાજુઓ 25 મી અને 10 મી લંબાઈની છે. સમાંતર ના હોય તેવી બાજુઓ 14 મી અને 13 મી હોય, તો ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

12.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદા શીખ્યાં :

1. જે ત્રિકોણની બાજુઓ a, b અને c હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટેનું હેરોનનું સૂત્ર

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ છે.}$$

$$\text{જ્યાં, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

2. જે ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં અને એક વિકર્ણનાં માપ આપેલ હોય તે ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા તેને બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરો અને હેરોનના સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

પ્રકરણ 13

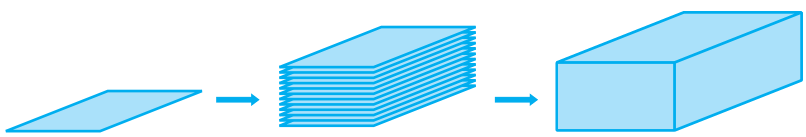
પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

13.1 પ્રાસ્તાવિક

સામાન્ય રીતે, જ્યાં જોઈએ ત્યાં આપણે ઘન પદાર્થ જોઈએ છીએ. આપણે અત્યાર સુધી આપણી નોંધપોથી કે કાળાપાટિયા પર સહેલાઈથી દોરી શકાય તેવી આકૃતિનો અભ્યાસ કર્યો. એવી આકૃતિઓને સમતલીય આકૃતિઓ કહેવાય. આપણે લંબચોરસ, ચોરસ અને વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવાં તેની સમજ આગળના ધોરણમાં મેળવી ચૂકયાં છીએ. એ જોવું રસપ્રદ બનશે કે આવી ઘણી બધી સમાન આકાર અને કદની સમતલીય આકૃતિઓને કાગળના પૂંઠામાંથી કાપી અને તેની લંબરૂપે થપ્પી કરતાં શું મળશે તે જોવું રસપ્રદ થશે. આમ કરતાં, આપણને ***લંબઘન*** (*cuboid*), ***નળાકાર*** (*cylinder*) વગેરે જેવી ઘન આકૃતિઓ મળે છે. અગાઉના ધોરણમાં તમે લંબઘન, સમઘન અને નળાકારનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધવા તે વિશે શીખી ગયા છો. હવે આપણે લંબઘન અને નળાકારનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધવાની ચર્ચા ઊંડાણથી કરીશું અને તે પરથી ***શંકુ*** (*cone*) અને ***ગોલક*** (*sphere*) જેવી ઘનાકૃતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

13.2 લંબઘન અને સમઘનનાં પૃષ્ઠફળ

શું તમે ઘણાબધા કાગળનું બંડલ જોયું છે? તે કેવું દેખાય છે? શું તે આકૃતિ 13.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું લાગે છે ?



આકૃતિ 13.1

તે લંબઘન બનાવે છે. જો આપણે તેને ઢાંકવું હોય, તો તે માટે કેટલો ખાખી કાગળ જોઈએ ? ચાલો આપણે જોઈએ :