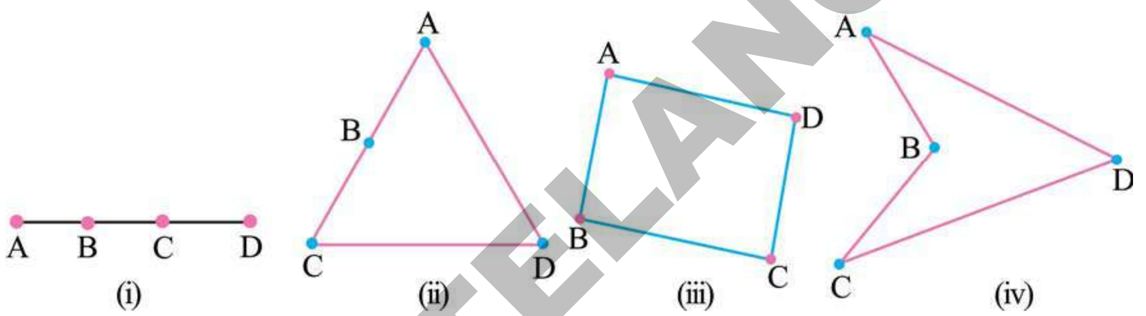
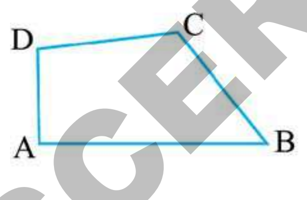
8
چار ضلعی
Quadrilaterals

8.1 تعارف

پچھلے باب میں آپ مثلثات کی کئی خصوصیات سیکھ چکے ہیں' آپ یہ جانتے ہیں کہ مثلث وہ شکل ہے جو تین غیر ہم خط نقاط کے جوڑ سے بنتی ہے۔کیا آپ جانتے ہیں کہ ایک مستوی میں چار نقاط سے کونسی شکل حاصل ہوتی ہے؟ یہ ذہن نشین کیجیے کہ اگر تمام نقاط ہم خط ہوں تب ہمیں ایک خطی قطعہ حاصل ہوگا (شکل (i)) دیکھیے چار میں تین نقاط ہم خط ہوں تب ہمیں مثلث حاصل ہوگا (شکل (ii)) دیکھیے اور اگر کوئی تین نقاط ہم خط نہ ہوں تب ہمیں چار ضلعوں والی ایک بند شکل حاصل ہوگی (شکل (iii)، (iv)) ایسی شکل کو ہم چار ضلعی کہتے ہیں۔

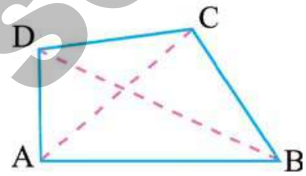


آپ بہ آسانی کئی اور چار ضلعی بنا سکتے ہیں' اور اپنے اطراف و اکناف میں کئی چار ضلعی کی شناخت کر سکتے ہیں۔شکل (iii) اور شکل (iv) میں بنائی گئی چار ضلعی ایک خاص پہلو کے لحاظ سے مختلف ہے۔ یہ کس لحاظ سے مختلف ہے؟



ہم اس باب میں صرف شکل (iii) کی قسم کے چار ضلعی کا مطالعہ کریں گے' یہ تمام محدب چار ضلعی ہیں۔

ایک مستوی میں چار خطوط سے گھری ہوئی سادہ بند شکل چار ضلعی ہے۔

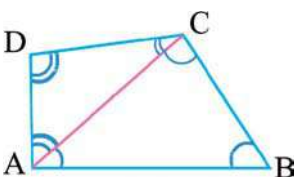


چار ضلعی ABCD کے چار ضلعے AB' BC' CD اور DA ہیں چار راس A' B' C اور D ہیں۔راسوں پر بننے والے چار زاویئے ∠A ' ∠B ' ∠C اور ∠D ہیں۔

جب ہم مخالف راس (A,C) اور (B,D) کو (شکل (vi) کے مطابق) ملاتے ہیں AC اور BD چار ضلعی ABCD کے دو وتر کہلاتے ہیں۔

8.2 چارضلعی کی خصوصیات

چارضلعی کے اندرونی چارزاویئے ہیں' کیا ہم ان چارزاویوں کا مجموعہ معلوم کرسکتے ہیں؟ آیئے ہم مثلث کے زاویوں کی خصوصیات کا اعادہ کریں گے' ہم ان خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے چارضلعی کے اندرون واقع چارزاویوں کا مجموعہ معلوم کرسکتے ہیں۔ ABCD ایک چارضلعی ہے اور AC اس کا ایک وتر ہے۔(شکل دیکھئے)



ہم جانتے ہیں کہ ΔABC کے تین زاویوں کا مجموعہ

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA = 180^\circ$ .... (1)

(مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت)

اسی طرح ΔADC میں

$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ$ .... (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\angle CAB + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ + 180^\circ$$

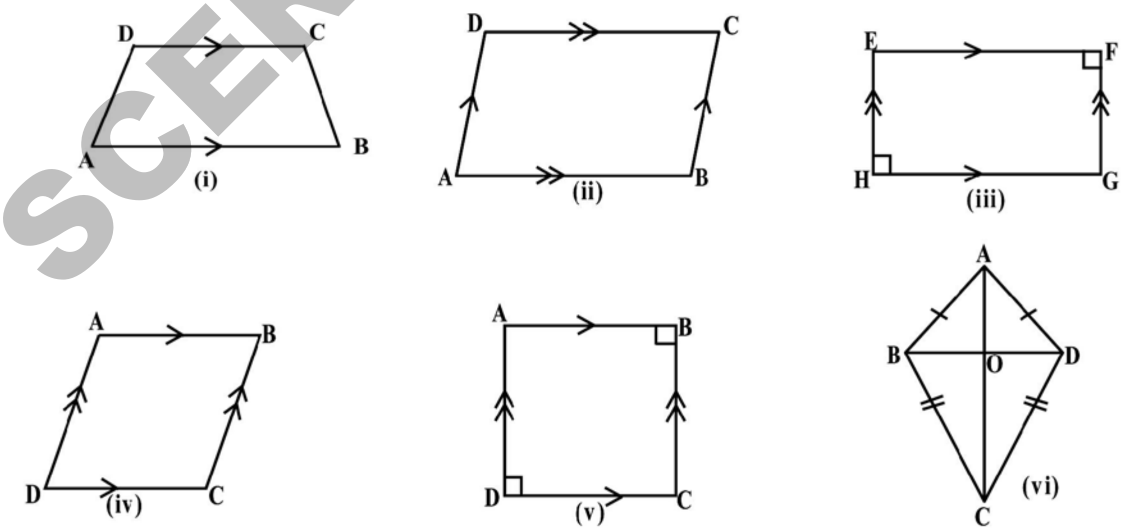
چونکہ $\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ اور $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

اس لیے $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

یعنی چارضلعی کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360^0 یا چار قائمہ ہوتا ہے۔

8.3 چارضلعی کی مختلف اقسام

حسب ذیل بنائی گئی چارضلعی کو دیکھئے' انہیں ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں' ہم ان کی خصوصیات کی بنیاد پر ان کے مخصوص ناموں کی شناخت کریں گے۔



ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

- شکل (i) میں چار ضلعی ABCD کے مقابل کے ضلعے کا جوڑ AB اور DC ایکدوسرے سے متوازی ہیں۔ ایسی چار ضلعی منحرف کہلاتی ہے۔

  اگر منحرف میں غیر متوازی ضلعے مساوی ہوں تب یہ منحرف مساوی الساقین منحرف ہوتا ہے۔
- شکل (ii) میں مقابل کے ضلعے کی دونوں جوڑیاں متوازی ہیں' ایسی چار ضلعی متوازی الاضلاع کہلاتی ہے۔ شکل (iii)' (iv) اور (v) بھی متوازی الاضلاع ہیں۔
- شکل (iii) میں متوازی الاضلاع EFGH کے تمام زاویئے زاویہ قائمہ ہیں۔ یہ ایک مستطیل ہے۔
- شکل (iv) میں متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے مساوی ہیں یہ ایک معین کہلاتا ہے۔
- شکل (v) میں متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے مساوی ہیں اور ہر زاویہ 90^0 ہے مربع کہلاتا ہے۔
- چار ضلعی ABCD شکل (vi) میں جس کے متصلہ ضلعوں کے دو جوڑ مساوی ہیں' یعنی AB = AD اور BC = CD یہ پتنگ کہلاتی ہے۔

غور کیجیے کہ نشاط کیا کہتی ہے

ایک معین' مربع ہوسکتا ہے' لیکن تمام مربعے' معین نہیں ہوسکتے' اس میں فرحین یہ اضافہ کرتی ہے۔
تمام مستطیل' متوازی الاضلاع ہوتے ہیں لیکن تمام متوازی الاضلاع مستطیل نہیں ہوتے۔
ان بیانات میں آپ کس بیان سے متفق ہیں۔
اپنے جواب کی وجوہات بیان کیجیے' چار ضلعی کی مختلف اقسام سے متعلق اس طرح کے دوسرے اور بیانات لکھئے۔

توضیحی مثالیں

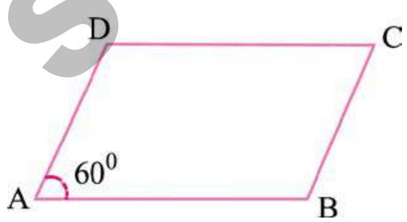
مثال (1): ABCD ایک چار ضلعی ہے' اور $\angle A = 60^\circ$ ہو تو بقیہ زاویئے معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔

اس لیے متوازی الاضلاع ABCD میں

$\angle C = \angle A = 60^\circ$ اور $\angle B = \angle D$

اور متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 کے مساوی ہوتا ہے۔



جیسا کہ $\angle A$ اور $\angle B$ متصلہ زاویئے ہیں۔

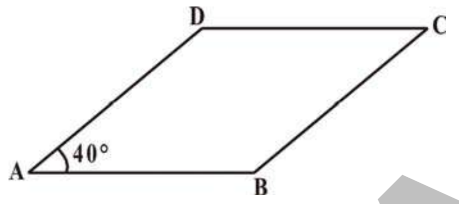
$$\angle D = \angle B = 180^\circ - \angle A$$

$$= 180^\circ - \angle 60 = 120^\circ$$

پس بقیہ زاویئے 120^0' 60^0' 120^0 ہوں گے۔

مثال (2): ایک متوازی الاضلاع ABCD میں $\angle DAB = 40^\circ$ ہوتو متوازی الاضلاع کے دوسرے زاویے معلوم کیجیے۔

حل :



ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

AD || BC اور $\angle DAB = \angle BCD = 40^0$

متصلہ زاویوں کا مجموعہ

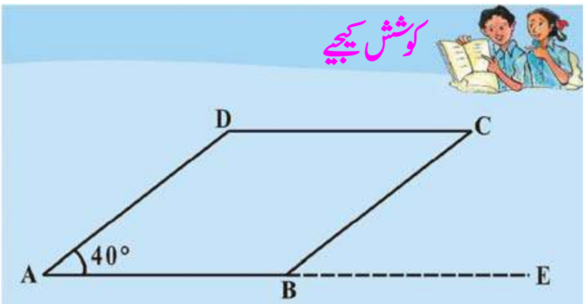
$\angle CBA + \angle DAB = 180^0$

$\therefore \angle CBA = 180^\circ - 40^\circ$

$= 140^0$

اس کے علاوہ ہم $\angle ADE = 140^\circ$ اور $\angle BCD = 40^\circ$ بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

کوشش کیجیے



AB کو E تک بڑھائیے (خارج کیجیے)

$\angle CBE$ معلوم کیجیے، آپ کیا غور کرتے ہیں۔

$\angle ABC$ اور $\angle CBE$ کس قسم کے زاویے ہیں۔

مثال (3): ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع 4.5 سمر اور 3 سمر ہیں اس کا احاطہ معلوم کیجیے۔

حل : چونکہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں اس لیے اس کے دوسرے دو اضلاع 4.5 سمر اور 3 سمر ہوں گے۔

اس لیے احاطہ $= 3 + 4.5 + 3 + 4.5 = 15$ سمر

مثال (4): ایک متوازی الاضلاع ABCD میں دو متصلہ زاویوں $\angle A$ اور $\angle B$ کے زاویٔ ناصف P پر قطع کرتے ہیں۔

بتلایئے کہ $\angle APB = 90^\circ$

حل : ABCD ایک متوازی اضلاع ہے۔ $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ متصلہ زاویے $\angle A$ اور $\angle B$ کے زاویٔ ناصف ہیں۔

جیسا کہ متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کا مجموعہ تکمیلی ہوتا ہے۔

$\angle A + \angle B = 180^\circ$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^\circ}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$

ΔAPB میں

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ$

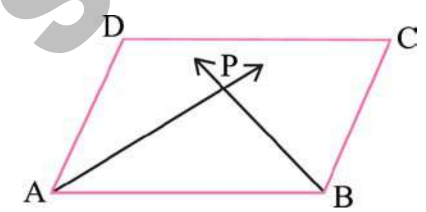
(مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت)

$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^0 - 90^0$

$= 90^0$

جو کہ ثابت کرنا تھا۔



مشق 8.1

1. حسب ذیل بیانات صادق ہیں یا کاذب؟ بیان کیجیے۔

(i) ہر متوازی الاضلاع منحرف ہوتا ہے۔ (   ) (ii) تمام متوازی الاضلاع چار ضلعی ہوتے ہیں۔ (   )

(iii) تمام منحرف متوازی الاضلاع ہوتے ہیں۔ (   ) (iv) ایک مربع، معین ہوتا ہے۔ (   )

(v) ہر معین، مربع ہوتا ہے۔ (   ) (vi) تمام متوازی الاضلاع مستطیل ہوتے ہیں۔ (   )

2. حسب ذیل جدول میں دی گئی مخصوص چار ضلعی کی خاصیت اگر پائی جاتی ہو تب ''ہاں'' اور نا پائی جاتی ہے۔ تب ''نہیں'' لکھتے ہوئے مکمل کیجیے۔

خصوصیات	منحرف	متوازی الاضلاع	معین	مستطیل	مربع
a. مقابل کے ضلعوں کا صرف ایک جوڑ متوازی ہوتا ہے۔	ہاں				
b. مقابل کے ضلعوں کے دو جوڑ متوازی ہوتے ہیں۔					
c. مقابل کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔					
d. مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔					
e. متصلہ زاویئے تکمیلی ہوتے ہیں۔					
f. وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔					
g. وتر مساوی ہوتے ہیں۔					
h. تمام ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔					
i. ہر زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔					
j. وتر ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔					

3. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel CD$۔ اگر $AB = BC$ تب بتلائیے کہ $\angle A = \angle B$ اور $\angle C = \angle D$

4. ایک چار ضلعی کے چار زاویئے 1:2:3:4 کی نسبت میں ہیں چار ضلعی کے ہر زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

5. ABCD ایک مستطیل ہے۔ AC اس کا وتر ہے۔ ΔACD کے زاویئے معلوم کیجیے۔ وجوہات بیان کیجیے۔

8.4 متوازی الاضلاع اوراس کی خصوصیات

ہم دیکھ چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع چار ضلعی ہوتے ہیں' حسب ذیل میں ہم متوازی الاضلاع کی خصوصیات پر غور کریں گے۔

یہ کیجیے

ایک کاغذ سے ایک متوازی الاضلاع تراشیئے بعدازاں اس کے وتر کے ساتھ مزید تراشیئے۔ آپ کو کس قسم کی شکلیں حاصل ہوتی ہیں؟

آپ ان مثلثات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ایک مثلث پر دوسرا مثلث رکھئے۔ کیا آپ ہر ضلع پر دوسرے ضلع کو ہو بہو (بالکل درستگی کے ساتھ) رکھ سکتے ہیں۔ ممکن ہے کہ اضلاع میل کھانے کے لیے آپ کو مثلث کو اطراف سے گھمانے کی ضرورت پڑے گی چونکہ یہ دو مثلثات بالکل ہو بہو میل کھاتے ہیں (ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں) اس لیے یہ ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

مزید چند متوازی الاضلاع کے ساتھ یہ عمل کیجیے' آپ اس کو تراشنے کے لیے کسی بھی وتر کا انتخاب کر سکتے ہیں۔

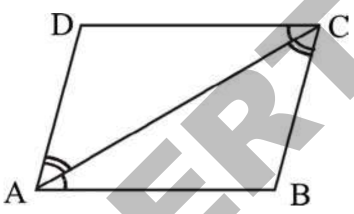
ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے اب ہم اس نتیجہ کو ثابت کریں گے۔

مسئلہ 8.1 : متوازی الاضلاع کا ایک وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

ثبوت : متوازی الاضلاع ABCD پر غور کیجیے۔

A اور C کو ملایئے۔ AC متوازی الاضلاع کا وتر ہے۔



چونکہ $DC \parallel AB$ اور AC قاطع خط ہے۔

$\angle DCA = \angle CAB$ (داخلی متبادلہ زاوایئے)

اسی طرح $DA \parallel CB$ اور AC قاطع خط ہے اس لیے

$\angle DAC = \angle BCA$ ہوتا ہے۔

اب ΔACD اور ΔCAB میں ہمیں

$\angle DCA = \angle CAB$ اور $\angle DAC = \angle BCA$

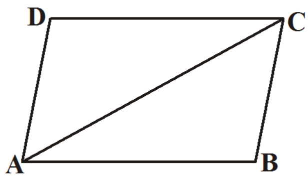
مزید $AC = CA$ (مشترک ضلع)

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

یعنی کے یہ دو مثلثات A.S.A (زاویہ' ضلع' زاویہ) اصول کے تحت متماثل ہیں۔ اس کے یہ معنٰی ہیں کہ وتر AC متوازی الاضلاع کو دو متماثل حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

مسئلہ 8.2 : متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔



پس شکل میں $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

چونکہ $AB = DC$ اور $\angle CBA = \angle ADC$

مزید $AD = BC$ اور $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

$\angle DCB = \angle DAB$

یعنی $\angle PAB = \angle DCB$

پس متوازی الاضلاع میں

(i) مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ محدب چار ضلعی میں اگر اس کے مقابل کے ضلع متوازی ہوں تب مقابل کے ضلع اور مقابل کے زاویئے مساوی ہیں۔

اب ہم یہ بتلانے کی کوشش کریں گے کہ مندرجہ بالا کا برعکس' یعنی ''ایک چار ضلعی کے مقابل کے ضلعے مساوی ہوں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہے''۔

مسئلہ 8.3 : اگر ایک چار ضلعی میں مقابل کے ضلع کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

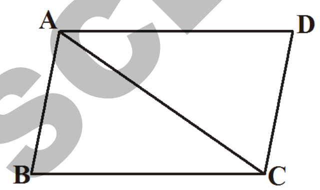
ثبوت : چار ضلعی ABCD میں $AB = DC$ اور $BC = AD$ پر غور کیجیے۔

ایک وتر AC کھینچیے۔

ΔABC اور ΔCDA پر غور کیجیے۔

ہمیں دیا گیا ہے $BC = AD$' $AB = DC$ اور $AC = CA$ (مشترک ضلع)

لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (کیوں؟)



لہٰذا $\angle BCA = \angle DAC$ قاطع خط AC کے ساتھ

یا $AB \parallel DC$ .... (1)

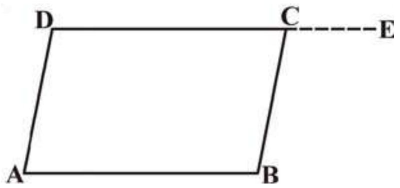
چونکہ $\angle ACD = \angle CAB$ قاطع خط CA کے ساتھ

ہمیں دیا گیا ہے $BC \parallel AD$ .... (2)

لہٰذا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے (1) اور (2) کی رو سے آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے (ضلعے) کے دو جوڑ مساوی ہوتے ہیں' اس کے برعکس اگر ایک چار ضلعی کے مقابل کے (اضلاع) ضلع کے دو جوڑ مساوی ہوں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ کیا ہم یہی نتیجہ ''ایک چار ضلعی جس کے مقابل کے زاویئے مساوی ہوتے ہیں'' کے لیے اخذ کر سکتے ہیں؟

مسئلہ 8.4 : ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے زاویوں کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

ثبوت : چار ضلعی ABCD میں $\angle A = \angle C$ اور $\angle B = \angle D$ دیا گیا ہے۔ تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



ہم یہ جانتے ہیں $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360^o}{2}$$

یعنی $\angle A + \angle B = 180^0$

DC کو E تک بڑھایئے (خارج کیجیے)

$\angle C + \angle BCE = 180^0$ لہٰذا $\angle BCE = \angle ADC$

اگر $\angle BCE = \angle D$ ہوتب $AD \parallel BC$ (کیوں؟)

DC بلحاظ قاطع خط کے

ہم اسی طرح یہ بتلاسکتے ہیں کہ $AB \parallel DC$ یا ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مشق 8.2

1. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ABEF ایک مستطیل ہے، بتلایئے کہ $\Delta AFD \cong \Delta BEC$
2. بتلایئے کہ ایک معین میں وتر اس کو 4 متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔
3. ایک چار ضلعی ABCD میں $\angle C$ اور $\angle D$ کے زاوی ناصف 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

8.5 متوازی الاضلاع کے وتر

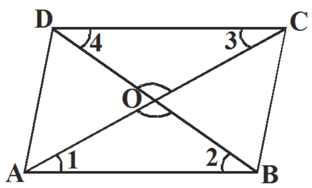
مسئلہ 8.5 : متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

ثبوت : ایک متوازی الاضلاع ABCD بنایئے۔

اسکے دو وتر AC اور BD کھینچیے تاکہ وہ نقطہ 'O' پر قطع کریں

ΔOAB اور ΔOCD میں

زاویے $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$ بناتے ہوئے ان کی نشاندہی کیجیے۔



$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ اور AC قاطع خط ہے)

$\angle 2 = \angle 4$ (کیوں؟) (اندونی متبادلہ زاویے)

اور $AB = CD$ (متوازی الاضلاع کی خاصیت)

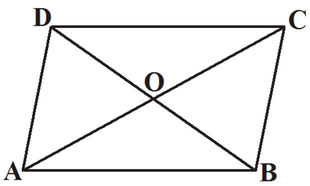
متماثلی خاصیت A.S.A سے $\Delta OCD \cong \Delta OAB$

اس لیئے $DO = OB$، $CO = OA$ یا وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں یہ جانچ کرنا ہوگا کہ کیا اس کا برعکس بھی صادق ہے۔

اس کا برعکس، اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب یہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔

مسئلہ 8.6 : اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔



ثبوت : ABCD ایک چار ضلعی ہے۔

AC اور BD وتر ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔

اس طرح کہ $OA = OC$ اور $OB = OD$

ثابت کرنا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(**اشارہ** : ΔAOB اور ΔCOD پر غور کیجیے۔ کیا یہ متماثل ہیں؟ اگر وہ متماثل ہیں تو ABCD کیسے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے؟)

8.5.1 مزید جیومٹریہ بیانات

سابقہ مثالوں میں ہم یہ بتا چکے ہیں کہ چند عام اصولوں کے ذریعہ کئی بیانات معلوم کرسکتے ہیں۔ جو کسی مخصوص شکل کے متعلق بنائے جاسکتے ہیں، ہم سابقہ نتائج کو نئے بیانات اخذ کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں (یہ بات ذہن نشین رکھیں گے) خیال رہے کہ ان بیانات کی کسی پیمائش کے ذریعہ تصدیق کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی، یہ تمام صورتوں میں صادق ثابت کیے جاچکے ہیں۔

ایسے بیانات جو کہ سابقہ واقف شدہ بیانات سے اخذ کیے گئے ہوں **ضمنی نتیجہ** (Corollary) کہلاتے ہیں۔ ضمنی نتیجہ ایک ایسا بیان ہے جس کی صداقت ثابت کردہ مسئلہ کے حوالہ سے ہوتی ہے۔

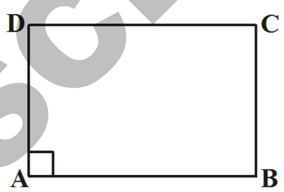
ضمنی نتیجہ (1) : بتلائیے کہ مستطیل کا ہر زاویہ ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

حل : مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہے۔

ہمیں دیا گیا ہے کہ : ABCD ایک مستطیل ہے، فرض کرو کہ زاویہ $\angle A = 90^0$ ہے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ : $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



پس $AD \parallel BC$ اور AB ایک قاطع خط ہے۔

اس لیے $\angle A + \angle B = 180^0$

(قاطع خط کے ایک ہی جانب یعنی ضلع پر کے داخلی زاویئے)

جیسا کہ $\angle A = 90^0$ (دیا گیا ہے)

$\therefore \angle B = 180^0 - \angle A$

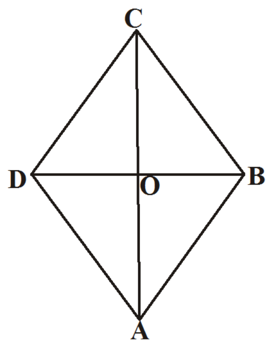
$= 180^0 - 90^0 = 90^0$

اب $\angle C = \angle A$ اور $\angle D = \angle B$ (متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے)

اس لیے $\angle C = 90^0$ اور $\angle D = 90^0$ لہٰذا مستطیل کا ہر زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

ضمنی نتیجہ (2) : بتلائیے کہ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔

ثبوت : معین ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔



ABCD ایک معین ہے، وتر AC اور BD، 'O' پر قطع کرتے ہیں۔

ہم یہ بتلانا چاہتے ہیں کہ AC عموددار ہے BD پر

ΔAOB اور ΔBOC پر غور کیجیے۔

$OA = OC$ (متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

$OB = OB$ (مثلثات AOB اور BOC کا مشترک ضلع)

$AB = BC$ (معین کے اضلاع)

لہٰذا $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (ضلع، ضلع ضلع اصول)

اس لیے $\angle AOB = \angle BOC$

لیکن $\angle AOB + \angle BOC = 180^0$ (خطی جوڑ)

اس لیے $2\angle AOB = 180^0$

یا $\angle AOB = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

اسی طرح $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$ (مساوی زاویئے)

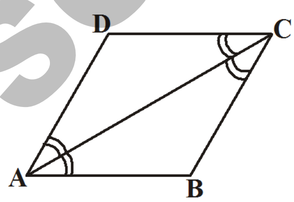
اس لیے AC عموددار ہے BD پر

اس لیے معین کے وتر ایک دوسرے پر عموددار ہوتے ہیں۔

ضمنی نتیجہ (3) : متوازی الاضلاع ABCD میں اگر وتر AC زاویہ A کی تنصیف کرتا ہے تب ABCD ایک معین ہے۔

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

لہٰذا $AB \parallel DC$، AC ایک قاطع خط ہے جو $\angle A$ اور $\angle C$ کو قطع کرتا ہے۔



اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$ (داخلی متبادل زاویہ) .... (1)

$\angle BCA = \angle DAC$ .... (2)

لیکن یہ دیا گیا ہے کہ AC، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

اس لیے $\therefore\ \angle BOC = \angle DAC$

$\angle DCA = \angle DAC$ .... (3)

پس AC، $\angle C$ کی بھی تنصیف کرتا ہے۔

(1) اور (2) کی روسے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC میں $\angle BCA = \angle BCA$ کا مطلب یہ ہے کہ $BC = AB$ (مساوی الساقین مثلث)

لیکن $AB = DC$ اور $BC = AD$ (متوازی الاضلاع ABCD کے مقابل کے ضلعے)

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

اس لیے ABCD ایک معین ہے۔

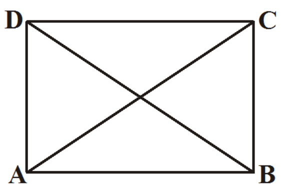
ضمنی نتیجہ (4) : بتلایئے کے مستطیل کے وتر طول میں مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ABCD ایک مستطیل ہے' اور AC اور BD اس کے وتر ہیں۔

ہم یہ جاننا چاہتے ہے کہ $AC = BD$

ABCD ایک مستطیل ہے یعنی ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے تمام زاویئے زاویہ قائمہ ہیں۔

ΔABC اور ΔBAD پر غور کیجیے۔



$AB = BA$ (مشترک)

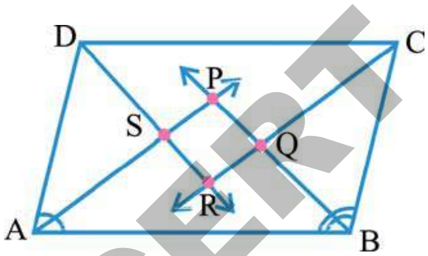
$\angle B = \angle A = 90^0$ (مستطیل کا ہر زاویہ)

$BC = AD$ (مستطیل کے مقابل کے زاویئے)

لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ضلع' زاویہ ضلع اصول)

یہ دلالت کرتا ہے کہ $AC = BD$

یا مستطیل میں وتر کے طول میں مساوی ہوتے ہیں۔



ضمنی نتیجہ (5) : ایک متوازی الاضلاع کے زاوی ناصف ایک مستطیل بناتے ہیں۔

ثبوت : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے' زاویئے $\angle A$' $\angle B$' $\angle C$

اور $\angle D$ کے زاوی ناصف P' Q' R' S پر قطع کرتے ہوئے

ایک چار ضلعی بناتے ہیں۔(متصلہ شکل دیکھئے)

چونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے $AD \parallel BC$

قاطع خط AB پر غور کیجیے جو کہ ان کو قطع کرتا ہے' تب $\angle PAB + \angle ABC = 180^0$ (متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویئے)

ہم جانتے ہیں کہ $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ اور $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC$ (چونکہ $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ بالترتیب $\angle A$ اور $\angle B$ کا زاوئی ناصف ہے)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 180^0$$

یا $\angle BAP + \angle ABP = 90^0$ .... (1)

لیکن ΔAPB میں

$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ)

اس لیے $\angle APB = 180^0 - (\angle BAP + \angle ABP)$

دلالت کرتا ہے کہ $\angle APB = 180 - 90^0$ .... (1) سے

$= 90^0$

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle SPQ = \angle APB = 90^0$

اسی طرح ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ $\angle CRD = \angle QRS = 90^0$ (مساوی زاویہ)

لیکن $\angle BQC = \angle PQR$ اور $\angle DSA = \angle PSR$ (کیوں؟)

$\therefore\ \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^0$

اس لیے PQRS کے چاروں زاویئے 90^0 کے مساوی ہوتے ہیں۔

لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ PQRS ایک مستطیل ہے۔

سوچیے، تبادلہ خیال کیجیے اور لکھیے

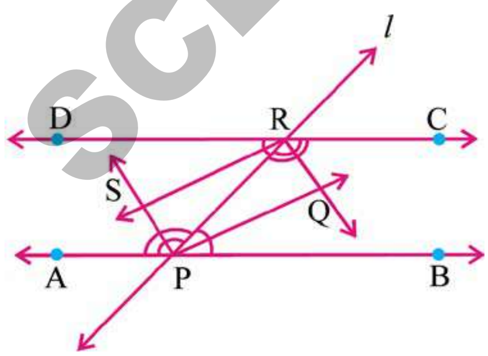
1. بتلائیے کہ ایک مربع کے وتر مساوی ہوتے ہیں اور ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
2. بتلائیے کہ ایک معین کے وتر اس کو چار متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔

چند توضیحی مثالیں

مثال (5): $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{DC}$ دو متوازی خطوط ہیں اور قاطع خط 'l'، $\overleftrightarrow{AB}$ کو P پر اور $\overleftrightarrow{DC}$ کو R پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ داخلی زاویوں کے زاوی ناصف ایک مستطیل بناتے ہیں۔

ثبوت : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$، l ایک قاطع خط ہے جو بالترتیب $\overleftrightarrow{AB}$ کو P اور $\overleftrightarrow{DC}$ کو R پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $\overleftrightarrow{PQ}$، $\overleftrightarrow{RQ}$، $\overleftrightarrow{RS}$ اور $\overleftrightarrow{PS}$ بالترتیب $\angle RPB$، $\angle CRP$، $\angle PRP$ اور $\angle APR$ کے زاوی ناصف ہیں۔



$\angle BPR = \angle DRP$ (داخلی متبادلہ زاویئے) .... (1)

لیکن $\angle RPQ = \frac{1}{2} \angle BPR$

($\because$ $\overleftrightarrow{PQ}$ زاویہ $\angle BPR$ کا زاویہ ناصف ہے)

اور $\angle PRS = \frac{1}{2} \angle DRP$

($\because$ $\overleftrightarrow{RS}$ زاویہ $\angle DPQ$ کا زاویہ ناصف ہے) .... (2)

(1) اور (2) کی رو سے

$\angle RPQ = \angle PRS$

یہ داخلی متبادل زاویے ہیں جو $\overleftrightarrow{PR}$ اور خطوط $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{RS}$ سے بنتے ہیں۔

$\therefore \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$

اسی طرح

$\angle PRQ = \angle RPS$ اس لیے $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{RQ}$

لہٰذا PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ .... (3)

ہمیں دیا گیا ہے $\angle BPR + \angle CRP = 180^\circ$

(قاطع خط کے ایک ہی جانب کے داخلی زاویے جو خطوط $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ سے بنتے ہیں)

$$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^o$$

$$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^o$$

لیکن ΔPQR میں

$\angle RPQ + \angle PRQ + \angle PRQ = 180^o$ (مثلث کے تین زاویے)

$$\angle PQR = 180^o - (\angle RRQ + \angle PRQ)$$

$= 180^o - 90^o = 90^o$ .... (4)

(3) اور (4) کی رو سے

PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے زاویوں میں ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اس لیے PQRS ایک مستطیل ہے۔

مثال (6): مثلث ABC میں AD، BC پر بڑھایا گیا وسطانیہ ہے جس کو E تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ AD = ED۔ ثابت کیجیے کہ ABEC ایک متوازی الاضلاع ہے۔

ثبوت : AD، ΔABC کا وسطانیہ ہے۔

AD کو E تک اس طرح بڑھایا گیا کہ AD = ED

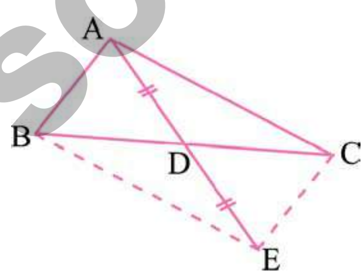
BE اور CE کو ملایئے۔

اب مثلثات ABD اور ECD میں

BD = DC ('D' BC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle ADB = \angle EDC$ (مقابل کے زاویے)

AD = ED (دیا گیا ہے)



اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (ضلع، زاویہ، ضلع)

لہٰذا AB = CE (CPCT)

اور $\angle ABD = \angle ECD$

یہ داخلی متبادل زاویے ہیں جو قاطع خط $\overleftrightarrow{BC}$ اور خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CE}$ سے ملکر بنتے ہیں۔

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

اس طرح چارضلعی ABEC میں

AB = CE اور AB || CE

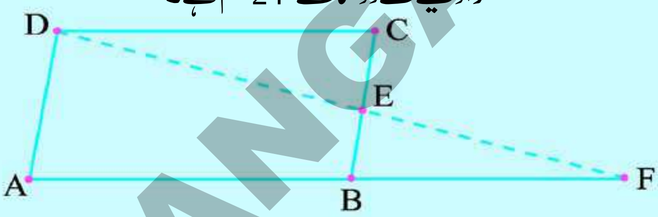
اس لیے ABEC ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مشق 8.3

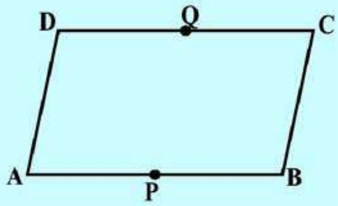
1. ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویئے $(3x - 2)^0$ اور $(x + 48)^0$ ہیں۔ متوازی الاضلاع کے دوسرے زاویوں کی پیائش معلوم کیجیے۔

2. ایک متوازی الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیائش معلوم کیجیے اگر اس کا ایک زاویہ اس کے سب سے چھوٹے زاویئے کے دوگنا سے 24^0 کم ہے۔

3. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، اور 'E' ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔ اگر DE اور AB بڑھانے پر وہ 'F' پر ملتے ہیں تب بتلائیے کہ AF = 2AB



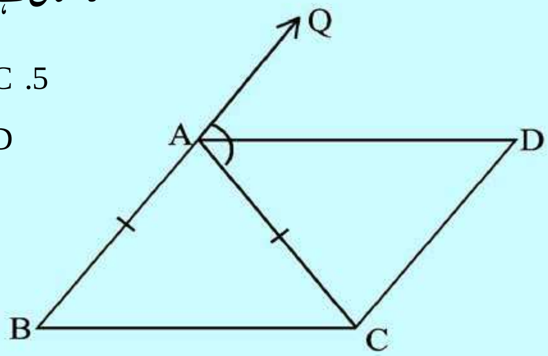
4. متصلہ شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے P، Q بالترتیب AB اور DC کے وسطی نقاط ہیں۔ بتلائیے کہ PBCQ بھی ایک متوازی الاضلاع ہے۔



5. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB = AC، AD خارجی زاویئہ QAC کی تنصیف کرتا ہے، اور CD || BA جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ بتلائیے کہ

(i) $\angle DAC = \angle BCA$

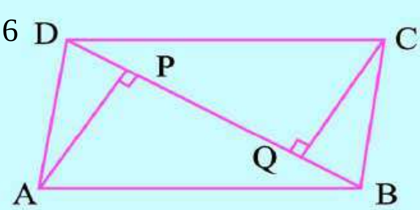
(ii) ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



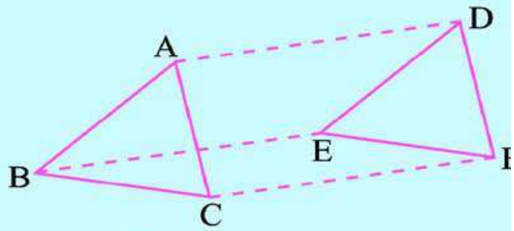
6. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AP اور CQ راس A اور C سے وتر BD پر گرائے گئے عمود ہیں۔ (شکل دیکھئے) بتلائیے کہ

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQP$

(ii) AP = CQ



7. مثلثات ABC اور DEF میں AB = DE، BC = EF اور BC || EF ہے۔ راس A، B اور C کو راس D، E اور F سے ملایا گیا۔ (شکل دیکھئے) بتلایئے کہ

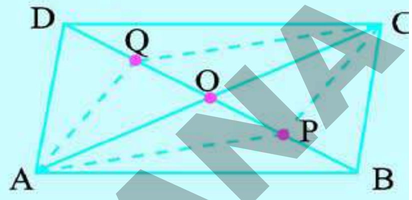


(i) ABED ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(ii) BCFE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(iii) AC = DF (iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

8. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AC اور BD وتر ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ P اور Q وتر BD کے نقاط مثلث ہیں۔ ثابت کیجیے کہ AP || CQ اور یہ بھی ثابت کیجیے کہ AC تنصیف کرتا ہے PQ کی۔ (شکل دیکھئے)



9. ABCD ایک مربع ہے E، F، G اور H ترتیب وار AB، BC، CD اور DA کے نقاط ہیں اگر AE=BF=CG=DH ہو تب بتلایئے کہ EFGH ایک مربع ہے۔

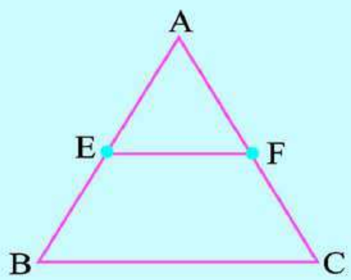
8.6 مثلث کے وسطی نقطہ کا مسئلہ

ہم مثلث اور چار ضلعی کی خصوصیات کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ آیئے ہم یہ کوشش کریں گے کہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے کیا اخذ کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

ایک مثلث ABC بنایئے اور اس کے دو اضلاع AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب E اور F کی نشاندہی کیجیے۔ نقاط E اور F کو ملایئے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

EF اور مثلث کے تیسرا ضلع BC کی پیمائش کیجیے۔ اور ∠AEF اور ∠ABC کی بھی پیمائش کیجیے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\angle AEF = \angle ABC$ اور $EF = \frac{1}{2} BC$



یہ قاطع خط AB، خطوط EF اور BC سے بنے ہوئے متناظر زاویئے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ EF || BC۔

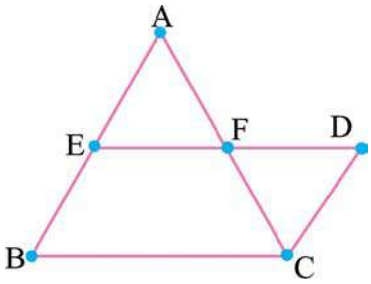
اس مشغلہ کو مزید چند مثلثات کے ساتھ دہرایئے۔

اس لیے ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں

مسئلہ 8.7 : ایک مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا خطی قطعہ تیسرے ضلع کے متوازی اور اس کا نصف ہوتا ہے۔

دیا گیا ہے : ABC ایک مثلث ہے جس میں E اور F بالترتیب AB اور AC کے وسطی نقاط ہیں۔

ہمیں یہ بتلانا ہے کہ (i) EF || BC اور (ii) $EF = \frac{1}{2} BC$



ثبوت : EF کو ملائیے اور اس کو بڑھائیے اور 'C' سے BA کے متوازی ایک خط کھینچیے جو EF سے بڑھائے گئے نقطہ 'D' پر قطع کرے۔

مثلثات AEF اور CDF میں

AF = CF ('F' AC کا وسطی نقطہ ہے)

∠AFE = ∠CFD (عمودی مقابل کے زاویے)

اور ∠AEF = ∠CDF (قاطع خط ED اور BA || CD کے داخلی متبادلہ زاویے)

زاویہ، ضلع، زاویہ اصول سے

∴ ΔAEF = ΔCDF (زاویہ، ضلع، زاویہ)

اس طرح AE = CD اور EF = DF (CPCT)

ہم یہ جانتے ہے کہ AE = BE

لہٰذا BE = CD

چونکہ BE || CD اور BE = CD، BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اس لیے ED || BC

دلالت کرتا ہے کہ EF || BC

جیسا کہ BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے، ED = BC (کیسے؟) (∵ DF = EF)

ہمیں یہ بتلایا گیا ہے کہ FD = EF

∴ 2EF = BC

اس لیے $EF = \frac{1}{2} BC$

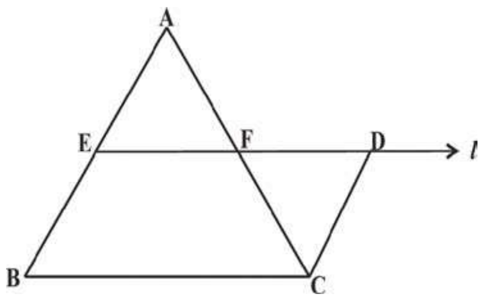
ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ مندرجہ بالا بیان کا برعکس بھی صادق ہوگا۔ آیئے ہم اس کو بیان کریں گے، اور یہ دیکھیں کہ اس کو کس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 8.8 : مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہے وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

ثبوت : ΔABC بنائیے۔ ضلع AB کے وسطی نقطہ 'E' کی نشاندہی کیجیے۔

نقطہ 'E' سے BC کے متوازی ایک خط l کھینچیے۔ یہ خط AC کو F پر قطع کرتا ہے۔ BA کے متوازی ایک خط CD بنائیے

یعنی BA || CD ہمیں یہ بتلانا ہے کہ AF = CF



ΔAEF اور ΔCFD پرغور کیجیے۔

$\angle EAF = \angle DCF$ ($BA \parallel CD$ اور AC ایک قاطع خط ہے)

(کیسے؟)

$\angle AEF = \angle D$ ($BA \parallel CD$ اور ED ایک قاطع خط ہے)

(کیسے؟)

یہاں ہم مثلثات کی متماثلت کو ثابت نہیں کرسکتے ہیں کیوں کہ ہمیں مثلثات کے کوئی بھی جوڑ کو مساوی نہیں بتایا گیا۔

ایسا کرنے کے لیے ہم $EB \parallel DC$ پرغور کرتے ہیں۔

اور $ED \parallel BC$

اس طرح $EDCB$ ایک متوازی الاضلاع ہے اور یہاں $BE = DC$

چوں کہ $BE = AE$ اور یہاں $AE = DC$

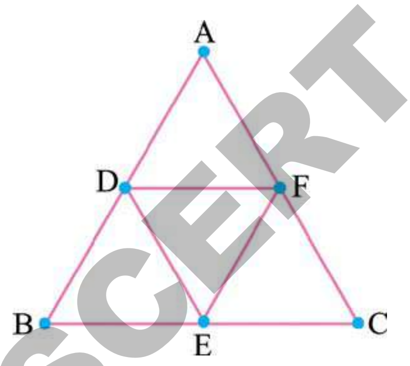
اس لیے $\Delta AEF \cong \Delta CFD$

$\therefore\ AF = CF$

مزید مثالیں

مثال (7) : ΔABC میں D‘E اور F بالترتیب AB‘BC اور CA کے وسطی نقاط ہیں۔ جب ان وسطی نقاط کو ملایا گیا تب ثابت کیجیے کہ ΔABC چار متماثل مثلثات میں تقسیم ہوتا ہے۔(ΔDEF وسطی مثلث کہلاتا ہے)

ثبوت : ΔABC میں D‘E بالترتیب $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{BC}$ کے وسطی نقاط ہیں۔



اس لیے وسطی نقطہ کے مسئلہ سے

$DE \parallel AC$

اسی طرح $DF \parallel BC$ اور $EF \parallel AB$

لہٰذا $ADEF$‘$BEFD$‘$CFDE$ متوازی الاضلاع ہیں۔

متوازی الاضلاع $ADEF$ میں DF ایک وتر ہے۔

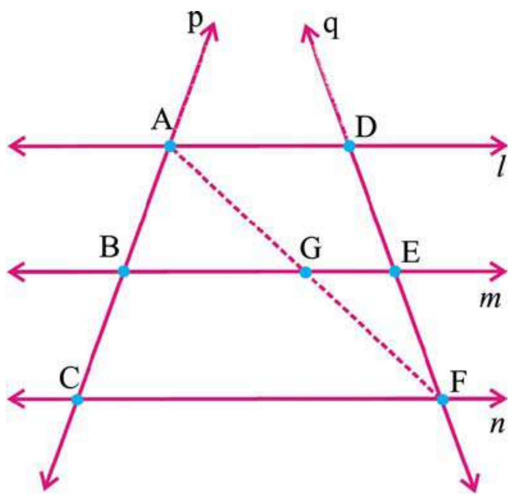
اس لیے $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے)

اسی طرح $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

اور $\Delta CEF \cong \Delta DEF$

اس لیے تمام چار مثلثات متماثل ہیں۔

ہم بتا چکے ہیں کہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے مثلث ABC چار متماثل مثلثات میں تقسیم ہو جاتا ہے۔



مثال (8) : l‘ m اور n تین متوازی خطوط ہیں۔ جو قاطع خطوط p اور q سے A‘B‘C اور D‘E‘F پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ وہ خط p پر مساوی مقطوعہ AB اور BC بناتے ہیں۔ تب بتلائیے کہ q پر بننے والے مقطوعہ DE اور EF بھی مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت : ہمیں AB اور BC کا DE اور EF سے تقابل کرنے کی ضرورت ہے‘ A سے F کو ملائیے اور خط m کے نقطہ تقاطع کو 'G' کا نام دیجیے۔

ΔACF میں $AB = BC$ (دیا گیا ہے)

لہٰذا 'B' AC کا وسطی نقطہ ہے۔

اور $BG \parallel CF$ (کیسے؟)

اس لیے 'G' AF کا وسطی نقطہ ہے (مسئلہ کی رو سے)

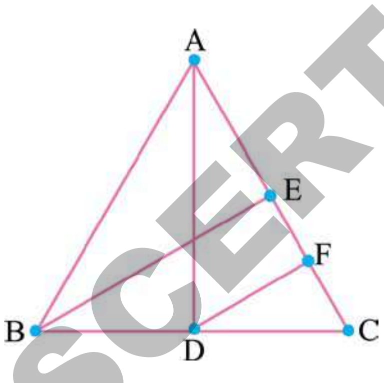
اب ΔAFD میں ہم اسی رشتہ کا اطلاق کرسکتے ہیں یعنی 'G' AF کا وسطی نقطہ ہے اور $GE \parallel AD$‘ تب 'E' DF کا وسطی نقطہ ہوگا۔

اس طرح $DE = EF$

اس لیے l‘ m اور n بھی q پر مساوی مقطوعہ بناتے ہیں۔

مثال (9) : شکل میں AD اور BE‘ ΔABC کے وسطانیے ہیں‘ اور $BE \parallel DF$

تب ثابت کیجیے کہ $CF = \frac{1}{4} AC$



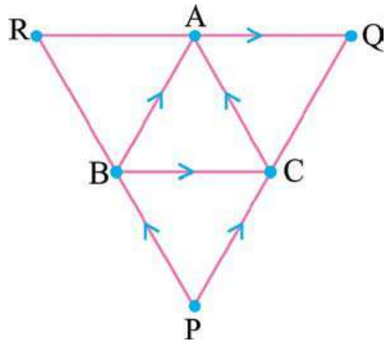
ثبوت : ΔABC میں 'D' BC کا وسطی نقطہ ہے اور $BE \parallel DF$۔ مسئلہ کی رو سے F‘ CE کا وسطی نقطہ ہے۔

$$\therefore\ CF = \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} AC\right] \quad \text{(کیسے؟)}$$

لہٰذا $CF = \frac{1}{4} AC$

مثال (10) : ABC ایک مثلث ہے‘ جہاں A‘B‘C سے بالترتیب BC‘CA اور AB کے متوازی خطوط کھینچے گئے جو P‘Q اور R پر قطع کرتے ہیں۔ تب بتلائیے کہ ΔPQR کا احاطہ ΔABC کے احاطہ کا دگنا ہے۔



ثبوت : $AB \parallel QP$ اور $BC \parallel RQ$ اس لیے ABCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اسی طرح ABPC، BCAR بھی متوازی الاضلاع ہیں۔

$\therefore BC = AQ$ اور $BC = RA$

دلالت کرتا ہے کہ 'A'، QR کا وسطی نقطہ ہے۔

اسی طرح B اور C بھی بالترتیب PR اور PQ کے وسطی نقاط ہیں

$AB = \frac{1}{2}PQ$ ، $BC = \frac{1}{2}QR$ اور $CA = \frac{1}{2}PR$ (کیسے؟)

(متعلقہ مسئلہ بیان کیجیے)

اب مثلث کا احاطہ $\Delta PQR = PQ + QR + PR$

$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

$= 2$ (ΔABC کا احاطہ)

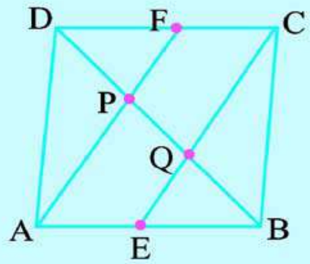
مشق 8.4

1. ABC ایک مثلث ہے 'D'، AB پر ایک نقطہ D ایسا ہے کہ $AD = \frac{1}{4}AB$ اور AC پر ایک نقطہ 'E' ایسا ہے کہ $AE = \frac{1}{4}AC$ اگر $DE = 2cm$ ہو تب BC معلوم کیجیے۔

2. ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ E، F، G اور H بالترتیب AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقاط ہیں تب ثابت کیجیے کہ EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے۔

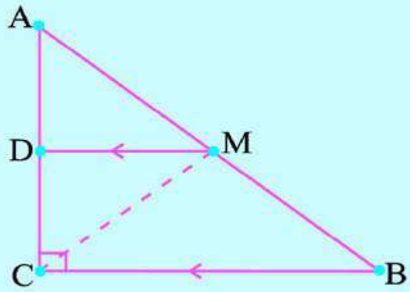
3. بتلائیے کہ ایک معین کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے بننے والی شکل ایک مستطیل ہوگی۔

4. ایک متوازی الاضلاع ABCD میں E اور F بالترتیب AB اور DC کے وسطی نقاط ہیں تب بتلائیے کہ AF اور EC وتر BD کی تثلیث کرتے ہیں۔
(اشارہ 1:2 اور 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں)



5. بتلائیے کہ ایک چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے پر بننے والے خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

6. ABC، C پر ایک قائم الزاویہ مثلث ہے، وتر AB کے وسطی نقطہ M سے BC کے متوازی ایک خط کھینچا گیا جو AC کو D پر قطع کرتا ہے۔ تب بتلائیے کہ
(i) 'D'، AC کا وسطی نقطہ ہے۔ (ii) $MD \perp AC$
(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

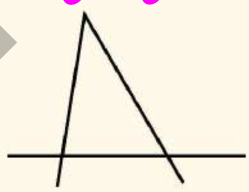


ہم نے کیا سیکھا

1. ایک مستوی میں چار خطوط سے بننے والی سادہ بند شکل کو چار ضلعی کہتے ہیں۔
2. چار ضلعی کے چاروں زاویوں کا مجموعہ 360^0 یا چار زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
3. منحرف، متوازی الاضلاع، معین، مستطیل، مربع اور پتنگ چار ضلعی کی خاص اقسام ہیں۔
4. متوازی الاضلاع چار ضلعی کی ایک خاص قسم ہے جس کی کئی خصوصیات ہوتی ہیں، اس باب میں ہم نے حسب ذیل مسئلوں کو ثابت کیا ہے۔
   (a) متوازی الاضلاع میں وتر اس کو دو متماثل مثلثات میں تقسیم کرتے ہیں۔
   (b) متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع اور زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔
   (c) ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے اضلاع کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
   (d) ایک چار ضلعی میں اگر مقابل کے زاویوں کا ہر جوڑ مساوی ہو تب وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
   (e) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
   (f) اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہوں تو وہ ایک متوازی الاضلاع ہوگا۔
5. مثلث کے وسطی نقطہ کا مسئلہ اور اس کا برعکس
   (a) ایک مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی اور اس کا نصف ہوتا ہے۔
   (b) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا، خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہے تب وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا۔

دماغی ورزش

1. مثلثات کا پزل (Puzzle) بنایئے۔



مندرجہ بالا ڈائیگرام میں دو خطوط مستقیم کا اضافہ کیا جاے اور 10 مثلثات بنایئے۔

2. ایک مثلثی شیٹ لیجیے جسکا طول 16 سمر اور عرض 9 سمر ہو۔ ان کو 2 حصوں میں تقسیم کیا جائے ان کو ملانے پر ایک مربع حاصل ہو۔