શિરોબિંદુ B(12, 6) આગળ Z ની મહત્તમ કિંમત ₹ 1,68,000 મળે છે. આથી, ઉત્પાદકે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે મૉડલ A ના 12 નંગ અને મૉડલ B ના 6 નંગનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ તથા તે વખતે મહત્તમ નફો ₹ 1,68,000 થશે.

સ્વાધ્યાય 12.2

1. રેશ્મા જેમાં વિટામિન A ના ઓછામાં ઓછા 8 એકમ તથા વિટામિન B ના ઓછામાં ઓછા 11 એકમ હોય એવી રીતે P અને Q એમ બે પ્રકારનો ખોરાક મિશ્ર કરવા માગે છે. ખોરાક P ની કિંમત પ્રતિકિગ્રા ₹ 60 છે અને ખોરાક Q ની કિંમત પ્રતિકિગ્રા ₹ 80 છે. ખોરાક P, પ્રતિકિગ્રા 3 એકમ વિટામિન A અને પ્રતિકિગ્રા 5 એકમ વિટામિન B ધરાવે છે, જ્યારે ખોરાક Q પ્રતિકિગ્રા 4 એકમ વિટામિન A અને પ્રતિકિગ્રા 2 એકમ વિટામિન B ધરાવે છે. આ મિશ્રણની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.
2. એક પ્રકારની કેક બનાવવા માટે 200 ગ્રામ લોટ અને 25 ગ્રામ મલાઈની જરૂર પડે છે. બીજા પ્રકારની કેક બનાવવા માટે 100 ગ્રામ લોટ અને 50 ગ્રામ મલાઈની જરૂર પડે છે. 5 કિલોગ્રામ લોટ અને 1 કિલોગ્રામ મલાઈથી વધુમાં વધુ કેટલી કેક બનાવી શકાય ? અહીં આપણે ધારી લઈશું કે, કેક બનાવવા માટેના અન્ય જરૂરી પદાર્થોની કોઈ તંગી નથી.
3. એક કારખાનામાં ટેનિસના રૅકેટ અને ક્રિકેટના બૅટનું ઉત્પાદન થાય છે. ટેનિસનું એક રૅકેટ બનાવવા માટે 1.5 કલાક યંત્ર-સમય અને 3 કલાક કસબીનો સમય લાગે છે. ક્રિકેટનું એક બૅટ બનાવવા માટે 3 કલાક યંત્ર-સમય અને 1 કલાક કસબીનો સમય લાગે છે. કારખાનામાં એક દિવસ માટે યંત્ર-સમય 42 કલાકથી વધુ મળતો નથી અને કસબીનો સમય 24 કલાકથી વધુ મળતો નથી.
   (i) જો કારખાનું પૂરેપૂરી ક્ષમતાથી ચાલે તો કેટલાં રૅકેટ અને બૅટનું ઉત્પાદન થાય ?
   (ii) જો એક રૅકેટ અને એક બૅટ પરનો નફો અનુક્રમે ₹ 20 અને ₹ 10 હોય, તો જ્યારે કારખાનું પૂરેપૂરી ક્ષમતાથી ચાલતું હોય ત્યારે મહત્તમ નફો કેટલો થાય ?
4. એક ઉત્પાદક ચાકી અને ખીલાનું ઉત્પાદન કરે છે. એક પૅકેટ ચાકી બનાવવા માટે મશીન A પર 1 કલાક અને મશીન B પર 3 કલાકનો સમય લાગે છે. એક પૅકેટ ખીલા બનાવવા માટે મશીન A પર 3 કલાક અને મશીન B પર 1 કલાક સમય લાગે છે. તે એક પૅકેટ ચાકી પર ₹ 17.50 અને એક પૅકેટ ખીલા પર ₹ 7.00 નફો મેળવે છે. જો તેનાં મશીનો એક દિવસમાં વધુમાં વધુ 12 કલાક કામ કરતાં હોય, તો ઉત્પાદકે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે એક દિવસમાં કેટલાં પૅકેટ ચાકી અને કેટલાં પૅકેટ ખીલાનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?
5. એક કંપની A અને B એમ બે પ્રકારના સ્ક્રૂનું ઉત્પાદન કરે છે. દરેક પ્રકારના સ્ક્રૂ માટે સ્વયંસંચાલિત તથા હસ્તસંચાલિત એમ બે પ્રકારનાં મશીનનો ઉપયોગ થાય છે. A પ્રકારના સ્ક્રૂનાં પૅકેટનું ઉત્પાદન કરવા માટે સ્વયંસંચાલિત મશીન પર 4 મિનિટ અને હસ્તસંચાલિત મશીન પર 6 મિનિટનો સમય લાગે છે. જ્યારે B પ્રકારના સ્ક્રૂનાં પૅકેટનું ઉત્પાદન કરવા માટે સ્વયંસંચાલિત મશીન પર 6 મિનિટ અને હસ્તસંચાલિત મશીન પર 3 મિનિટનો સમય લાગે છે. કોઈ પણ દિવસે દરેક મશીન વધુમાં વધુ 4 કલાક ઉપલબ્ધ છે. ઉત્પાદકને A પ્રકારના સ્ક્રૂનાં પૅકેટના વેચાણથી ₹ 7 નફો મળે છે અને B પ્રકારના સ્ક્રૂનાં પૅકેટના વેચાણથી ₹ 10 નફો મળે છે. આપણે ધારી લઈશું કે તે જેટલા સ્ક્રૂનું ઉત્પાદન કરે છે તેટલા સ્ક્રૂનું વેચાણ કરી શકે છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કંપનીના માલિકે દરેક પ્રકારના સ્ક્રૂના કેટલાં પૅકેટનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ? મહત્તમ નફો શોધો.

6. એક કુટીર ઉદ્યોગ પેડેસ્ટલ ગોળા (padestal lamps) અને લાકડાના શેડ (wooden shades)નું ઉત્પાદન કરે છે. તે દરેક માટે ભૂકો કરવાના (grinding/cutting) મશીન અને છાંટવાના (sprayer) મશીનનો ઉપયોગ થાય છે. એક પેડેસ્ટલ ગોળાનું ઉત્પાદન કરવા માટે 2 કલાક જેટલો સમય ભૂકો કરવાના મશીન પર અને 3 કલાક જેટલો સમય છાંટવાના મશીન પર લાગે છે. એક શેડનું ઉત્પાદન કરવા માટે 1 કલાક જેટલો સમય ભૂકો કરવાના મશીન પર અને 2 કલાક જેટલો સમય છાંટવાના મશીન પર લાગે છે. કોઈ પણ દિવસે છાંટવાનું મશીન વધુમાં વધુ 20 કલાક માટે ઉપલબ્ધ છે અને ભૂકો કરવાનું મશીન વધુમાં વધુ 12 કલાક માટે ઉપલબ્ધ છે. એક ગોળાના વેચાણથી ₹ 5 અને એક શેડના વેચાણથી ₹ 3 નફો મળે છે. ધારો કે ઉત્પાદક જેટલા ગોળા અને શેડનું ઉત્પાદન કરે છે તે બધાનું વેચાણ કરી શકે છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે તે કેવી રીતે દૈનિક ઉત્પાદનનું આયોજન કરી શકે ?

7. એક કંપની પ્લાયવૂડમાંથી બે પ્રકારની નાવીન્યભરી સ્મરણિકા (souvenir)નું ઉત્પાદન કરે છે. A પ્રકારની એક સ્મરણિકા માટે 5 મિનિટ કાપવાનો (cutting) અને 10 મિનિટ જોડાણ કરવાનો (assembling) સમય જરૂરી છે. B પ્રકારની એક સ્મરણિકા માટે 8 મિનિટ કાપવાનો અને 8 મિનિટ જોડાણ કરવાનો સમય જરૂરી છે. કાપવા માટે 3 કલાક 20 મિનિટ અને જોડાણ કરવા માટે 4 કલાકનો સમય ઉપલબ્ધ છે. A પ્રકારની પ્રત્યેક સ્મરણિકામાંથી ₹ 5 તેમજ B પ્રકારની પ્રત્યેક સ્મરણિકામાંથી ₹ 6 નફો મળે છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કંપનીએ બંને પ્રકારની કેટલી સ્મરણિકાનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

8. એક વેપારી મેજ પર રાખી શકાય તેવા (Desktop) મૉડલ અને સુવાહ્ય (ફેરવી શકાય તેવા) (Portable) મૉડલ એમ બે પ્રકારનાં અંગત કમ્પ્યૂટર્સના વેચાણનું આયોજન કરે છે. તેમની કિંમત અનુક્રમે ₹ 25,000 અને ₹ 40,000 છે. તેનો અંદાજ એવો છે કે કમ્પ્યૂટર્સની માસિક માંગ 250 નંગથી વધશે નહિ. મેજ પર રાખવાનાં કમ્પ્યૂટર્સ દીઠ તેનો નફો ₹ 4500 છે અને સુવાહ્ય કમ્પ્યૂટર્સ દીઠ તેનો નફો ₹ 5000 છે. તે ₹ 70 લાખથી વધુ રોકાણ કરવા ઇચ્છતો નથી. તો તેણે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે દરેક પ્રકારનાં કેટલાં કમ્પ્યૂટર્સનો સંગ્રહ કરવો જોઈએ ?

9. એક સમતોલ આહાર ઓછામાં ઓછા 80 એકમ વિટામિન A અને 100 એકમ ખનીજ તત્ત્વો ધરાવે છે. F_1 અને F_2 બે પ્રકારના ખોરાક ઉપલબ્ધ છે. F_1 પ્રકારના એક એકમ ખોરાકની કિંમત ₹ 4 છે અને F_2 પ્રકારના એક એકમ ખોરાકની કિંમત ₹ 6 છે. F_1 પ્રકારનો એક એકમ ખોરાક 3 એકમ વિટામિન A અને 4 એકમ ખનીજ તત્ત્વો ધરાવે છે. F_2 પ્રકારનો એક એકમ ખોરાક 6 એકમ વિટામિન A અને 3 એકમ ખનીજ તત્ત્વો ધરાવે છે. આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે ગાણિતિક સ્વરૂપમાં દર્શાવો. બંને પ્રકારના ખોરાકના મિશ્રણથી તૈયાર થયેલ ન્યૂનતમ જરૂરી પોષક તત્ત્વો ધરાવતા સમતોલ આહારની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

10. F_1 અને F_2 બે પ્રકારનાં ખાતર પ્રાપ્ય છે. F_1માં નાઇટ્રોજનનું પ્રમાણ 10 % અને ફૉસ્ફરિક ઍસિડનું પ્રમાણ 6 % આવેલું છે. અને F_2માં નાઈટ્રોજનનું પ્રમાણ 5 % અને ફૉસ્ફરિક ઍસિડનું પ્રમાણ 10 % આવેલું છે. જમીનની ચકાસણી કર્યા પછી ખેડૂતને માલૂમ પડ્યું કે, તેના પાક માટે ઓછામાં ઓછું 14 કિગ્રા નાઈટ્રોજન અને 14 કિગ્રા ફૉસ્ફરિક ઍસિડની જરૂર પડશે. જો એક કિગ્રા ખાતર F_1ની કિંમત ₹ 6 હોય અને એક કિગ્રા ખાતર F_2ની કિંમત ₹ 5 હોય, તો દરેક પ્રકારના કેટલા ખાતરનો ઉપયોગ કરવો પડશે કે જેથી ન્યૂનતમ ખર્ચમાં જરૂરી પોષક તત્ત્વો મળી રહે ? ન્યૂનતમ ખર્ચ કેટલો થશે ?

પ્રશ્ન 11 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. મર્યાદાઓની અસમતા સંહતિ $2x + y \leq 10$, $x + 3y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ થી રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 0), (5, 0), (3, 4) અને (0, 5) છે. ધારો કે $Z = px + qy$, $p, q > 0$. જો Z ની મહત્તમ કિંમત શિરોબિંદુ (3, 4) અને (0, 5) બંને આગળ મળે તો p તથા q વચ્ચેનો સંબંધ

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $p = 3q$ (D) $q = 3p$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 9 : (આહાર સંબંધી સમસ્યાઓ) એક આહાર વિજ્ઞાનીને P અને Q એમ બે પ્રકારના ખોરાકનો ઉપયોગ કરી એક વિશિષ્ટ આહાર બનાવવો છે. ખોરાક P નું 30 ગ્રામનું દરેક પૅકેટ 12 એકમ કૅલ્શિયમ (calcium), 4 એકમ લોહતત્ત્વ, 6 એકમ ચરબી (cholesterol) અને 6 એકમ વિટામિન A ધરાવે છે. તે જ વજનના ખોરાક Q નું દરેક પૅકેટ 3 એકમ કૅલ્શિયમ, 20 એકમ લોહતત્ત્વ, 4 એકમ ચરબી અને 3 એકમ વિટામિન A ધરાવે છે. આ મિશ્ર આહારમાં ઓછામાં ઓછા 240 એકમ કૅલ્શિયમ, 460 એકમ લોહતત્ત્વ અને વધુમાં વધુ 300 એકમ ચરબી આવશ્યક છે.

આ આહારમાં વિટામિન A નું પ્રમાણ ન્યૂનતમ રાખવું હોય, તો દરેક પ્રકારના ખોરાકના કેટલાં પૅકેટની જરૂર પડશે ? વિટામિન A નું ન્યૂનતમ પ્રમાણ કેટલું હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ખોરાક P તથા Q ના ઉપયોગમાં લેવાતા પૅકેટ્સની સંખ્યા અનુક્રમે x અને y છે. સ્પષ્ટ છે કે $x \geq 0$, $y \geq 0$. આપેલા પ્રશ્નનું ગાણિતિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે થશે :

$12x + 3y \geq 240$ એટલે કે $4x + y \geq 80$ *(કૅલ્શિયમની મર્યાદા)* ...(1)

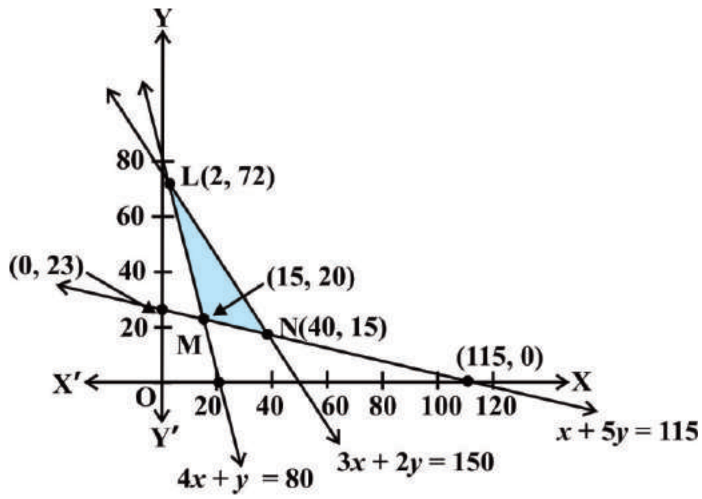
$4x + 20y \geq 460$ એટલે કે $x + 5y \geq 115$ *(લોહતત્ત્વની મર્યાદા)* ...(2)

$6x + 4y \leq 300$ એટલે કે $3x + 2y \leq 150$ *(ચરબીની મર્યાદા)* ...(3)

$x \geq 0$, $y \geq 0$ ...(4)

શરતોને અધીન $Z = 6x + 3y$ ની (વિટામિન A) ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

આપણે અસમતાઓ (1)થી (4) નો આલેખ દોરીએ. અસમતા (1)થી (4) દ્વારા રચાતા શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (રંગીન) આકૃતિ 12.10 માં દર્શાવેલ છે અને તે સીમિત છે.



આકૃતિ 12.10

શિરોબિંદુઓ L, M અને N ના યામ અનુક્રમે (2, 72), (15, 20) અને (40, 15) છે. આપણે આ શિરોબિંદુઓ આગળ Z ની કિંમત મેળવીશું.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = 6x + 3y$ નું સંગત મૂલ્ય
(2, 72)	228
(15, 20)	150→ ન્યૂનતમ
(40, 15)	285

કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે, Z ની ન્યૂનતમ કિંમત (15, 20) આગળ મળે છે. આમ, વિશિષ્ટ આહાર બનાવવા માટે જો ખોરાક P નાં 15 પૅકેટ્સ અને ખોરાક Q નાં 20 પૅકેટ્સ ઉપયોગમાં લેવામાં આવે, તો આપેલ પ્રશ્નની મર્યાદાઓમાં રહીને વિટામિન A નું પ્રમાણ ન્યૂનતમ થાય. વિટામિન A નું ન્યૂનતમ પ્રમાણ $15 \times 6 + 20 \times 3 = 150$ એકમ થાય.

ઉદાહરણ 10 : (ઉત્પાદનને લગતો પ્રશ્ન) એક ઉત્પાદકે તેના કારખાનામાં ત્રણ મશીનો I, II અને III સ્થાપિત કર્યાં છે. મશીન I અને II દૈનિક વધુમાં વધુ 12 કલાક સુધી ચાલવા માટે સક્ષમ છે અને મશીન III ને દૈનિક ઓછામાં ઓછા 5 કલાક ચલાવવું જરૂરી છે. ત્રણેય મશીનોના ઉપયોગથી તે બે પ્રકારની વસ્તુઓ M અને N નું ઉત્પાદન કરે છે. M અને N પ્રકારના એક નંગના ઉત્પાદન માટે ત્રણેય મશીનો પરનો જરૂરી સમય નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

વસ્તુ	મશીનો પરનો આવશ્યક સમય		
	I	II	III
M	1	2	1
N	2	1	1.25

તે M અને N પરનો નફો અનુક્રમે પ્રત્યેક વસ્તુ દીઠ ₹ 600 અને ₹ 400 મેળવે છે. જો આપણે ધારી લઈએ કે, તે દરેક ઉત્પાદિત વસ્તુનું વેચાણ કરી શકે છે, તો મહત્તમ નફો મેળવવા માટે તેણે દરેક વસ્તુનું કેટલું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ? મહત્તમ નફો કેટલો મળે ?

ઉકેલ : ધારો કે x અને y એ અનુક્રમે M અને N પ્રકારની ઉત્પાદિત વસ્તુઓની સંખ્યા છે.

ઉત્પાદન પર કુલ નફો = ₹ $(600x + 400y)$

આપેલ પ્રશ્નનું ગાણિતિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે છે :

$x + 2y \le 12$ *(મશીન I ની મર્યાદા)* ...(1)

$2x + y \le 12$ *(મશીન II ની મર્યાદા)* ...(2)

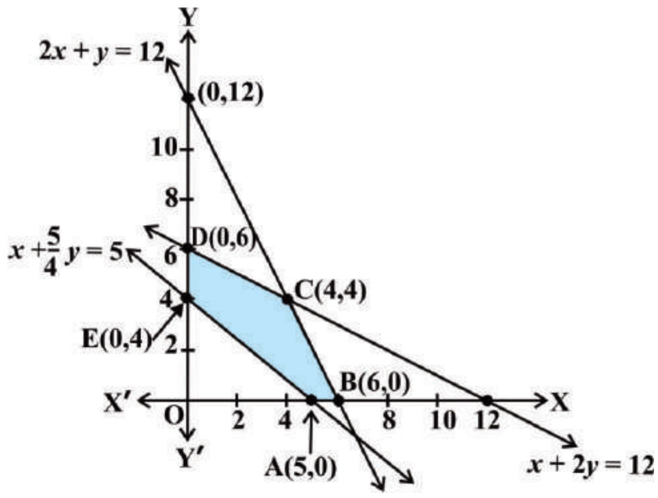
$x + \frac{5}{4}y \ge 5$ *(મશીન III ની મર્યાદા)* ...(3)

$x \ge 0, y \ge 0$ ...(4)

શરતોને અધીન $Z = 600x + 400y$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

આપણે અસમતાઓ (1) થી (4) નો આલેખ દોરીએ.

અસમતાઓ (1)થી (4) દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (રંગીન) ABCDE આકૃતિ 12.11માં દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત છે. શિરોબિંદુઓ A, B, C, D અને E ના યામ અનુક્રમે (5, 0), (6, 0), (4, 4), (0, 6) અને (0, 4) છે.



આકૃતિ 12.11

આ શિરોબિંદુઓએ $Z = 600x + 400y$ ની કિંમત શોધીએ :

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = 600x + 400y$ નું સંગત મૂલ્ય
(5, 0)	3000
(6, 0)	3600
(4, 4)	**4000 → મહત્તમ**
(0, 6)	2400
(0, 4)	1600

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, Z નું મહત્તમ મૂલ્ય બિંદુ (4, 4) આગળ મળે છે. આથી, મહત્તમ નફો ₹ 4000 મેળવવા માટે ઉત્પાદકે દરેક વસ્તુના 4 નંગનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 11 : (પરિવહનને લગતો પ્રશ્ન) બે કારખાનાંઓ અનુક્રમે સ્થળ P અને સ્થળ Q આગળ આવેલાં છે. આ સ્થળોએથી ઉત્પાદિત ચોક્કસ ચીજવસ્તુને ત્રણ સ્થળ A, B, C આગળ આવેલી વખારમાં પહોંચાડવાની છે. આ ત્રણે ય વખારમાં આ ચીજવસ્તુની સાપ્તાહિક જરૂરિયાત અનુક્રમે 5, 5 અને 4 નંગની છે. કારખાના P અને Q ની ઉત્પાદન-ક્ષમતા અનુક્રમે 8 અને 6 નંગની છે. એક નંગનો પરિવહન-ખર્ચ નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

થી/સુધી	કિંમત (₹)		
	A	**B**	**C**
P	160	100	150
Q	100	120	100

પરિવહનનો ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે માટે દરેક કારખાનાથી દરેક વખારમાં કેટલા નંગ પહોંચાડશો ? ન્યૂનતમ પરિવહન-ખર્ચ કેટલો થશે ?

ઉકેલ : આ સમસ્યાની સમજૂતી નીચે રેખાકૃતિ દ્વારા આપેલ છે (આકૃતિ 12.12).

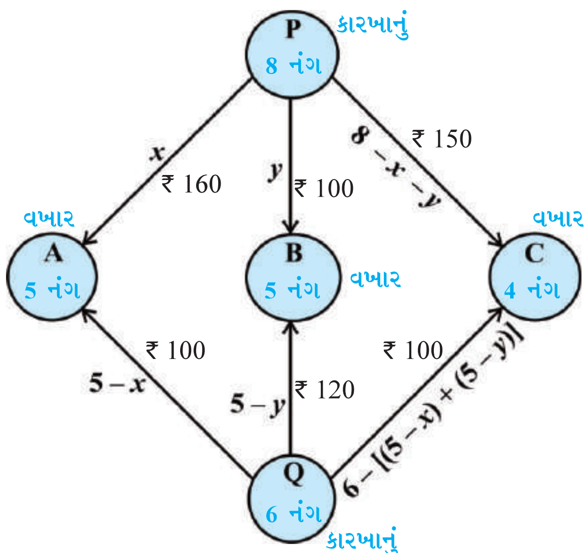
ધારો કે કારખાના P માંથી x નંગ અને y નંગ ચીજવસ્તુઓ અનુક્રમે વખાર A અને B માં પહોંચાડવામાં આવે છે. આથી $(8 - x - y)$ નંગ વખાર C માં પહોંચાડવામાં આવશે. (શા માટે ?)

આમ, $x \geq 0$, $y \geq 0$ અને $8 - x - y \geq 0$

એટલે કે, $x \geq 0$, $y \geq 0$ અને $x + y \leq 8$

હવે, વખાર A માં ચીજવસ્તુની સાપ્તાહિક જરૂરિયાત 5 નંગની છે. કારખાના P માંથી x નંગ પહોંચાડવામાં આવે છે તેથી બાકીના $(5 - x)$ નંગ કારખાના Q માંથી પહોંચાડવા જરૂરી છે.

દેખીતી રીતે, $5 - x \geq 0$ એટલે કે $x \leq 5$.



આકૃતિ 12.12

તે જ રીતે, કારખાના Q માંથી $(5 - y)$ અને $6 - (5 - x + 5 - y) = x + y - 4$ નંગ અનુક્રમે વખાર B અને C માં પહોંચાડશે.

આમ, $5 - y \ge 0,\ x + y - 4 \ge 0$

એટલે કે $y \le 5,\ x + y \ge 4$

તેથી કુલ પરિવહન-ખર્ચ Z નીચે પ્રમાણે મળે :

$$Z = 160x + 100y + 100(5 - x) + 120(5 - y) + 100(x + y - 4) + 150(8 - x - y)$$
$$= 10(x - 7y + 190)$$

આથી, પ્રશ્નને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$x \ge 0,\ y \ge 0$ ...(1)

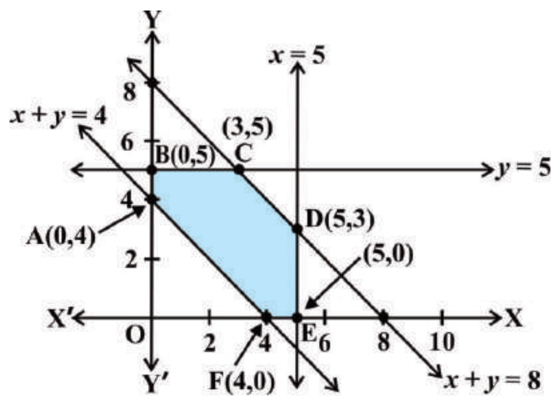
$x + y \le 8$ ...(2)

$x \le 5$ ...(3)

$y \le 5$ ...(4)

અને $x + y \ge 4$ ...(5)

શરતોને અધીન $Z = 10(x - 7y + 190)$ ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.



આકૃતિ 12.13

મર્યાદાઓ (1)થી (5) દ્વારા રચાતો પ્રદેશ એ શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ABCDEF રંગીન પ્રદેશ તરીકે દર્શાવેલ છે. (આકૃતિ 12.13). આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત છે. શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 4), (0, 5), (3, 5), (5, 3), (5, 0) અને (4, 0) છે. આપણે આ શિરોબિંદુઓ આગળ Z ની કિંમત મેળવીશું.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	**$Z = 10(x - 7y + 190)$ નું સંગત મૂલ્ય**
(0, 4)	1620
(0, 5)	**1550 → ન્યૂનતમ**
(3, 5)	1580
(5, 3)	1740
(5, 0)	1950
(4, 0)	1940

કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શિરોબિંદુ (0, 5) આગળ Z ની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 1550 મળે છે. આમ, ઈષ્ટતમ પરિવહન વ્યૂહરચના એ કારખાના P થી અનુક્રમે 0, 5 અને 3 નંગ તથા કારખાના Q થી અનુક્રમે 5, 0 અને 1 નંગ અનુક્રમે વખાર A, B અને C માં પહોંચાડવા એ થશે. આ વ્યૂહરચનાથી પરિવહન-ખર્ચ ન્યૂનતમ થશે અને તે ₹ 1550 છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 12

1. ઉદાહરણ 9 ના અનુસંધાનમાં આહારમાં વિટામિન Aનું પ્રમાણ મહત્તમ હોય, તો દરેક પ્રકારના ખોરાકના કેટલાં પૅકેટનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ ? આહારમાં વિટામિન A નું મહત્તમ પ્રમાણ કેટલું હશે ?

2. એક ખેડૂત P અને Q એમ બે પ્રકારની જાતના પશુઆહારનું મિશ્રણ કરે છે. P પ્રકારના પશુઆહારની એક થેલીનો ભાવ ₹ 250 છે. તેમાં 3 એકમ પોષકતત્ત્વો A, 2.5 એકમ પોષક તત્ત્વ B અને 2 એકમ પોષક તત્ત્વ C છે. Q પ્રકારના પશુઆહારની એક થેલીનો ભાવ ₹ 200 છે. તેમાં 1.5 એકમ પોષક તત્ત્વો A, 11.25 એકમ B અને 3 એકમ પોષક તત્ત્વ C છે. પોષક તત્ત્વો A, B અને C ની ન્યૂનતમ જરૂરિયાત અનુક્રમે 18 એકમ, 45 એકમ અને 24 એકમની છે. જો આ મિશ્રણની એક થેલીની કિંમત ન્યૂનતમ રાખવી હોય, તો દરેક પ્રકારની કેટલી થેલી મિશ્ર કરવી જોઈએ ? આ મિશ્રણની એક થેલીની ન્યૂનતમ કિંમત કેટલી થશે ?

3. એક આહારવિજ્ઞાની, વિટામિન A ના ઓછામાં ઓછા 10 એકમ હોય, વિટામિન B ના ઓછામાં ઓછા 12 એકમ હોય અને વિટામિન C ના ઓછામાં ઓછા 8 એકમ હોય તે રીતે X અને Y એમ બે પ્રકારનો ખોરાક મિશ્ર કરવા માંગે છે. 1 કિલોગ્રામ ખોરાકમાં વિટામિનનું પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

ખોરાક	વિટામિન A	વિટામિન B	વિટામિન C
X	1	2	3
Y	2	2	1

X પ્રકારના ખોરાકનો પ્રતિકિગ્રા ભાવ ₹ 16 છે અને Y પ્રકારના ખોરાકનો ભાવ પ્રતિકિગ્રા ₹ 20 છે. જરૂરી મિશ્રિત આહાર બનાવવા માટેનો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

4. એક ઉત્પાદક A અને B બે પ્રકારનાં રમકડાં બનાવે છે. આ કામ માટે ત્રણ મશીનોની જરૂર પડે છે. દરેક રમકડું બનાવવા માટે મશીન પર લાગતો સમય (મિનિટમાં) નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

રમકડાનો પ્રકાર	મશીન		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

દરેક મશીન પ્રતિદિન મહત્તમ 6 કલાક માટે ઉપલબ્ધ છે. જો A પ્રકારના એક રમકડા પરનો નફો ₹ 7.50 અને B પ્રકારના એક રમકડા પરનો નફો ₹ 5 હોય, તો સાબિત કરો કે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે ઉત્પાદકે A પ્રકારનાં 15 રમકડાં અને B પ્રકારનાં 30 રમકડાંનું દૈનિક ઉત્પાદન કરવું જોઈએ.

5. એક વિમાન વધુમાં વધુ 200 મુસાફરોને લઈ જઈ શકે છે. એક ઉચ્ચ વર્ગની ટિકિટમાંથી વિમાનકંપનીને ₹ 1000 નો નફો થાય છે અને એક સુલભ વર્ગની ટિકિટમાંથી કંપનીને ₹ 600 નફો થાય છે. વિમાનીકંપની ઓછામાં ઓછી 20 બેઠકો ઉચ્ચ વર્ગ માટે અનામત રાખે છે. આમ છતાં ઉચ્ચ વર્ગના મુસાફરો કરતાં સુલભ વર્ગમાં ઓછામાં ઓછા 4 ગણા મુસાફરો મુસાફરી કરતાં હોય છે. વિમાનીકંપનીએ દરેક વર્ગની કેટલી ટિકિટોનું વેચાણ કરવું જોઈએ કે જેથી મહત્તમ નફો થાય ? મહત્તમ નફો કેટલો થશે ?

6. બે ગોડાઉન A અને B માં અનાજને રાખવા માટેની ક્ષમતા અનુક્રમે 100 ક્વિન્ટલ અને 50 ક્વિન્ટલ છે. આ અનાજને ત્રણ રેશનની દુકાન D, E અને F માં પહોંચાડવાનું હોય છે. તેમની જરૂરિયાત અનુક્રમે 60, 50 અને 40 ક્વિન્ટલની છે. ગોડાઉનથી રેશનની દુકાન સુધીનો ક્વિન્ટલ દીઠ પરિવહનનો ખર્ચ આગળ કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

	ક્વિન્ટલ દીઠ પરિવહન-ખર્ચ (₹)	
થી / સુધી	**A**	**B**
D	6	4
E	3	2
F	2.5	3

પરિવહન-ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે માટે અનાજને કેવી રીતે પહોંચાડવું જોઈએ ? ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

7. એક ક્રૂડતેલની કંપનીની પાસે બે ડેપો A અને B અનુક્રમે 7000 લીટર અને 4000 લિટરની ક્ષમતાવાળા આવેલા છે. કંપનીએ જેની જરૂરિયાત અનુક્રમે 4500 લિટર, 3000 લિટર અને 3500 લિટર છે તેવા ત્રણ પેટ્રોલ પમ્પ D, E, F ને ક્રૂડતેલ પહોંચાડે છે. ડેપો અને પેટ્રોલ પમ્પ વચ્ચેનાં અંતરો (કિમીમાં) નીચે કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

	અંતર (કિમી)	
થી / સુધી	**A**	**B**
D	7	3
E	6	4
F	3	2

ધારો કે 10 લિટર ક્રૂડતેલનું પરિવહન-ખર્ચ કિલોમીટર દીઠ ₹ 1 છે. ક્રૂડતેલને ડેપોથી પેટ્રોલ પમ્પ પર કેવી રીતે પહોંચાડવાનું નક્કી કરશો કે જેથી પરિવહન-ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય ? ન્યૂનતમ ખર્ચ કેટલો થશે ?

8. એક ફળ-ઉત્પાદક તેના બગીચામાં P અને Q એમ બે પ્રકારની બ્રાન્ડનાં ખાતરનો ઉપયોગ કરી શકે છે. દરેક બ્રાન્ડની એક થેલી દીઠ નાઇટ્રોજન, ફૉસ્ફરિક ઍસિડ, પોટાશ અને ક્લોરિનનો જથ્થો (કિગ્રામાં) કેટલો છે તે નીચે કોષ્ટકમાં આપેલ છે. પરીક્ષણ પરથી માલૂમ પડ્યું કે, બગીચામાં ઓછામાં ઓછું 240 કિગ્રા ફૉસ્ફરિક ઍસિડ, ઓછામાં ઓછું 270 કિગ્રા પોટાશ અને વધુમાં વધુ 310 કિગ્રા ક્લોરિનની જરૂર છે. જો ઉત્પાદક બગીચામાં નાઇટ્રોજનનો ન્યૂનતમ જથ્થો ઉમેરવાનું ઇચ્છે, તો દરેક બ્રાન્ડની કેટલી થેલીનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ ? બગીચામાં નાઇટ્રોજનનો ન્યૂનતમ જથ્થો કેટલો ઉમેરવો પડશે ?

	થેલી દીઠ કિગ્રા	
	બ્રાન્ડ P	**બ્રાન્ડ Q**
નાઇટ્રોજન	3	3.5
ફૉસ્ફરિક ઍસિડ	1	2
પોટાશ	3	1.5
ક્લોરિન	1.5	2

9. પ્રશ્ન 8ના અનુસંધાનમાં જો ઉત્પાદક બગીચામાં નાઇટ્રોજનનો મહત્તમ જથ્થો ઉમેરવાનું ઇચ્છે તો દરેક બ્રાન્ડની કેટલી થેલીનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ ? બગીચામાં નાઇટ્રોજનનો મહત્તમ જથ્થો કેટલો ઉમેરવો પડશે ?

10. એક રમકડાની કંપની A અને B બે પ્રકારની ઢીંગલીઓ બનાવે છે. બજારનાં પરીક્ષણો અને ઉપલબ્ધ સ્રોતો દર્શાવે છે કે, સાપ્તાહિક સંયુક્ત ઉત્પાદનનું સ્તર 1200 ઢીંગલીઓથી વધવું ન જોઈએ અને B પ્રકારની ઢીંગલીઓની માંગ A પ્રકારની ઢીંગલીઓ કરતાં વધુમાં વધુ અડધી છે. વળી, A પ્રકારની ઢીંગલીઓનું ઉત્પાદન B પ્રકારની ઢીંગલીઓના ઉત્પાદનના ત્રણ ગણા કરતાં વધુમાં વધુ 600 જેટલું વધુ છે. જો કંપની A અને B પ્રકારની ઢીંગલી પર અનુક્રમે ₹ 12 અને ₹ 16 નફો કરતી હોય, તો મહત્તમ નફો મેળવવા માટે સાપ્તાહિક દરેક પ્રકારની કેટલી ઢીંગલીનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

સારાંશ

- સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન એ એક કરતાં વધુ ચલરાશિવાળા સુરેખ વિધેય **(હેતુલક્ષી વિધેય)**ને અમુક શરતોને અધીન ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય) શોધવા સંબંધિત છે. ચલરાશિઓ અનૃણ હોય અને બધી જ સુરેખ અસમતાઓનું **(મર્યાદાઓ)** સમાધાન કરે છે. ચલરાશિઓને ક્યારેક **નિર્ણાયક ચલરાશિઓ** કહે છે અને તે **અનૃણ** હોય છે.
- કેટલાક અગત્યના સુરેખ આયોજનની સમસ્યાઓ આ પ્રમાણે છે :
  (i) આહારસંબંધી સમસ્યાઓ
  (ii) ઉત્પાદનને લગતી સમસ્યાઓ
  (iii) પરિવહનને લગતા પ્રશ્નો
- સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નની તમામ મર્યાદાઓ, અનૃણ મર્યાદાઓ $x, y \geq 0$ સહિત, વડે રચાતા સામાન્ય પ્રદેશને પ્રશ્નનો **શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ** (અથવા **ઉકેલ પ્રદેશ**) કહે છે.
- શક્ય ઉકેલના પ્રદેશની અંદર અને તેની સીમા પર આવેલાં બિંદુઓ મર્યાદાઓ માટે **શક્ય ઉકેલ** દર્શાવે છે. શક્ય ઉકેલના પ્રદેશની બહારનું કોઈ પણ બિંદુ એ અશક્ય ઉકેલ છે.
- શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું બિંદુ M જે હેતુલક્ષી વિધેયને ઈષ્ટતમ (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ) બનાવે તે ઉકેલને ઈષ્ટતમ ઉકેલ કહે છે.
- નીચે પ્રમાણેનાં પ્રમેયો એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોના ઉકેલ માટેનાં મૂળભૂત પ્રમેયો છે :

  પ્રમેય 1 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે (તે બહિર્મુખ બહુકોણ હોય). જ્યારે Z ને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ) મળે ત્યારે તે મર્યાદાઓના કારણે ચલરાશિઓ x અને y થી બનતી સુરેખ અસમતાઓથી રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ દ્વારા રચાતા બહિર્મુખ બહુકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ જ પ્રાપ્ત થઈ શકે છે.

  પ્રમેય 2 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. જો આ પ્રદેશ R **સીમિત** હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય Z ને **મહત્તમ** તથા **ન્યૂનતમ** મૂલ્ય પ્રદેશ R ના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ પ્રાપ્ત થાય છે.
- જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત ન પણ મળે. તેમ છતાં જો મળે તો તે R ના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ જ મળે.
- સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન ઉકેલવાની **શિરોબિંદુની રીત.** આ પદ્ધતિ નીચે જણાવેલ સોપાન ધરાવે છે :
  (1) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ શોધો અને શિરોબિંદુઓ નક્કી કરો.
  (2) દરેક શિરોબિંદુ આગળ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ ની કિંમત મેળવો. ધારો કે આ બિંદુઓ આગળ તેની મહત્તમ કિંમત તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m છે.

(3) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત હોય, તો Z ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m થાય.

જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોય, તો

(i) જો $ax + by > M$ થી રચાતા ખુલ્લા અંતરાલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય તો Z ની મહત્તમ કિંમત M થાય. નહિ તો Z ને મહત્તમ કિંમત ન મળે.

(ii) જો $ax + by < m$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય, તો Z ની ન્યૂનતમ કિંમત m થાય. નહિ તો Z ને ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

- જો શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં બે શિરોબિંદુઓ આગળ સમાન પ્રકારનું ઇષ્ટતમ મૂલ્ય મળે એટલે કે બંને બિંદુઓ આગળ સમાન મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે, તો આ બંને બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડ પરના પ્રત્યેક બિંદુ આગળ પણ સમાન પ્રકારનું ઇષ્ટતમ મૂલ્ય મળે.

Historical Note

In the World War II, when the war operations had to be planned to economise expenditure, maximise damage to the enemy, linear programming problems came to the forefront.

The first problem in linear programming was formulated in C.E. 1941 by the Russian mathematician, ***L. Kantorovich*** and the American economist, ***F. L. Hitchcock***, both of whom worked at it independently of each other. This was the well known transportation problem. In C.E. 1945, an English economist, ***G. Stigler***, described yet another linear programming problem – that of determining an optimal diet.

In C.E. 1947, the American economist, ***G. B. Dantzig*** suggested an efficient method known as the simplex method which is an iterative procedure to solve any linear programming problem in a finite number of steps.

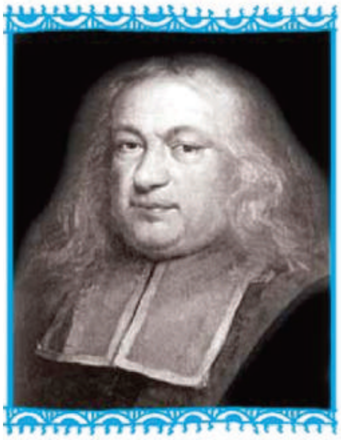
L. Katorovich and American mathematical economist, ***T. C. Koopmans*** were awarded the nobel prize in the year C.E. 1975 in economics for their pioneering work in linear programming. With the advent of computers and the necessary softwares, it has become possible to apply linear programming model to increasingly complex problems in many areas.

પ્રકરણ **13**

સંભાવના

❖ *The theory of probabilities is simply the Science of logic quantitatively treated. – C. S. PEIRCE* ❖

13.1 પ્રાસ્તાવિક



Pierre de Fermat
(C.E. 1601 - C.E. 1665)

આગળનાં ધોરણોમાં, આપણે યાદૃચ્છિક પ્રયોગની સંભાવનાનો અભ્યાસ ઘટનાઓની અનિશ્ચિતતાના માપ તરીકે કર્યો છે. આપણે રશિયન ગણિતશાસ્ત્રી, *એ. એન. કોલ્મોગોરોવે* (C.E. 1903 - C.E. 1987) સૂત્રના રૂપમાં આપવામાં આવેલ પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમની ચર્ચા કરી છે અને યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં પરિણામો પરના વિધેય તરીકે સંભાવનાનું નિરૂપણ કર્યું છે. સમસંભાવી પરિણામોના વિકલ્પમાં આપણે સંભાવનાના પૂર્વધારણાયુક્ત સિદ્ધાંત અને પ્રશિષ્ટ સિદ્ધાંતની વચ્ચે સમાનતા પણ સ્થાપિત કરી છે. આપણે અસતત નિદર્શાવકાશો સાથે સંકળાયેલ ઘટનાઓની સંભાવનાઓ આ સંબંધના આધારે મેળવી છે. આપણે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમનો અભ્યાસ પણ કર્યો છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે એક મહત્ત્વની સંકલ્પના, ઘટનાની શરતી સંભાવના એટલે કે જ્યારે એક ઘટના ઉદ્ભવી ચૂકી છે એમ આપેલ હોય તે સંજોગોમાં અન્ય ઘટના ઉદ્ભવવાની સંભાવના વિશે ચર્ચા કરીશું. તે બેયઝના પ્રમેય, સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ અને ઘટનાઓની નિરપેક્ષતાને સમજવામાં મદદરૂપ થશે. આપણે યાદૃચ્છિક ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણની મહત્ત્વની સંકલ્પના વિશે તથા સંભાવના વિતરણના મધ્યક અને વિચરણનો પણ અભ્યાસ કરીશું. આ પ્રકરણના અંતિમ વિભાગમાં, આપણે દ્વિપદી વિતરણ તરીકે ઓળખાતા અગત્યના અસતત સંભાવના વિતરણ વિશે અભ્યાસ કરીશું. આ સમગ્ર પ્રકરણમાં જ્યાં સુધી અન્યથા ઉલ્લેખ ન હોય ત્યાં સુધી આપણે સમસંભાવી પરિણામો ધરાવતા પ્રયોગો જ લઈશું.

13.2 શરતી સંભાવના

સંભાવનામાં અત્યાર સુધી આપણે ઘટનાની સંભાવના શોધવાની રીતોની ચર્ચા કરી છે. જો આપણી પાસે એક જ નિદર્શાવકાશની બે ઘટનાઓ હોય, તો શું કોઈ એક ઘટનાના ઉદ્ભવ વિશેની માહિતી બીજી ઘટનાની સંભાવનાને અસર કરશે ? ચાલો આપણે આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરીએ. તે માટે જેનાં પરિણામો ઉદ્ભવવા સમસંભાવી હોય એવો એક યાદૃચ્છિક પ્રયોગ લઈએ.

ત્રણ સમતોલ સિક્કાઓને ઉછાળવાના પ્રયોગ વિશે વિચારો. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} છે.

સિક્કાઓ સમતોલ હોવાથી આપણે પ્રત્યેક નિદર્શબિંદુને માટે સંભાવના $\frac{1}{8}$ ફાળવી શકીએ. ધારો કે 'ઓછામાં ઓછી બે છાપ દેખાય' તે ઘટના E અને 'પહેલો સિક્કો કાંટો બતાવે' તે ઘટના F છે.

આથી, E = {HHH, HHT, HTH, THH}

અને F = {THH, THT, TTH, TTT} છે.

માટે $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ (શા માટે ?)

અને $P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

વળી, $E \cap F = \{THH\}$

$\therefore \; P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$

હવે, ધારો કે 'પ્રથમ સિક્કો કાંટો બતાવે છે' એમ આપેલ છે, એટલે કે ઘટના F ઉદ્‌ભવી છે તેમ આપેલ છે, તો પછી ઘટના E ઉદ્‌ભવે તેની સંભાવના કેટલી ? ઘટના F ઉદ્‌ભવવાની માહિતી સાથે, આપણને ખાતરી છે કે જે વિકલ્પોનું પરિણામ પ્રથમ સિક્કો કાંટો ન બતાવે તેમ હોય તે પરિણામ ઘટના E ની સંભાવના શોધતી વખતે વિચારણામાં લેવાય નહિ. ઘટના E માટે આ માહિતી આપણા નિદર્શાવકાશને ગણ S ને તેના ઉપગણ F સુધી મર્યાદિત કરે છે. અન્ય શબ્દોમાં, વધારાની માહિતી ખરેખર આપણને એવું કહેવા માટે પ્રેરે છે કે, આ સંજોગોમાં જેના માટે નિદર્શાવકાશ ઘટના F ના ઉદ્‌ભવવા માટે સાનુકૂળ છે, તેવાં તમામ પરિણામો સમાવતો હોય એવા નવા યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો વિચાર કરી શકાય.

હવે, F નું જે નિદર્શબિંદુ ઘટના E માટે સાનુકૂળ છે તે THH છે. આમ, ઘટના F ને નિદર્શાવકાશ તરીકે વિચારતાં ઘટના E ની સંભાવના $\frac{1}{4}$ થાય અથવા ઘટના F ઉદ્‌ભવી છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે E ની સંભાવના $\frac{1}{4}$ થાય.

ઘટના F અગાઉથી ઉદ્‌ભવી ચૂકી છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે ઘટના E ની સંભાવનાને E ની શરતી સંભાવના કહે છે અને તેને P(E | F) વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $P(E|F) = \frac{1}{4}$.

નોંધ કરો કે F ના જે ઘટકો ઘટના E ને અનુકૂળ છે, તે E અને F ના સામાન્ય ઘટકો છે એટલે કે $E \cap F$ નાં નિદર્શબિંદુઓ છે.

આમ, આપણને આપેલ હોય કે ઘટના F ઉદ્‌ભવી ચૂકી છે, તે શરતે E ની શરતી સંભાવનાને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકીએ :

$$P(E|F) = \frac{E \cap F \text{ માટે સાનુકૂળ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંખ્યા}}{F \text{ માટે સાનુકૂળ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

અંશ અને છેદને નિદર્શાવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં, આપણે જોઈએ છીએ કે $P(E \mid F)$ ને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય છે :

$$P(E \mid F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad \text{... (1)}$$

નોંધ કરો કે $P(F) \neq 0$ એટલે કે $F \neq \phi$ (શા માટે ?) હોય, ત્યારે જ (1) માન્ય છે.

આમ, આપણે શરતી સંભાવના નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ :

વ્યાખ્યા 1 : *જો બે ઘટનાઓ E અને F, યાદૃચ્છિક પ્રયોગના એક જ નિદર્શાવકાશ સાથે સંગત હોય, તો આપેલ હોય કે ઘટના F ઉદ્‌ભવી ચૂકી છે, તે ઘટના F ની શરતે ઘટના E ની શરતી સંભાવના જેનો સંકેત* $P(E \mid F)$ *છે,* $P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P(F) \neq 0$ *દ્વારા આપવામાં આવે છે.*

13.2.1 શરતી સંભાવનાના ગુણધર્મો

ધારો કે E અને F, એક પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ S ની ઘટનાઓ છે, તો આપણી પાસે નીચેના ત્રણ ગુણધર્મો છે :

ગુણધર્મ 1 : $P(S \mid F) = P(F \mid F) = 1$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$P(S \mid F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1 \qquad \text{(કારણ કે } F \subset S\text{)}$$

વળી, $P(F \mid F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$

આમ, $P(S \mid F) = P(F \mid F) = 1$

ગુણધર્મ 2 : *જો A અને B નિદર્શાવકાશ S ની બે ઘટનાઓ હોય અને F એ ($P(F) \neq 0$) ઉપર્યુક્ત S ની ઘટના હોય, તો*

$P((A \cup B) \mid F) = P(A \mid F) + P(B \mid F) - P((A \cap B) \mid F)$

વિશેષતઃ જો A અને B પરસ્પર અલગ ઘટનાઓ હોય, તો

$P((A \cup B) \mid F) = P(A \mid F) + P(B \mid F)$

આપણી પાસે, $P((A \cup B) \mid F) = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

(ગણોના યોગના છેદક્રિયા પર વિભાજનના નિયમ દ્વારા)

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A \mid F) + P(B \mid F) - P((A \cap B) \mid F)$$

જ્યારે A અને B પરસ્પર અલગ ઘટનાઓ હોય, ત્યારે

$P((A \cap B) \mid F) = 0$

$\therefore \quad P((A \cup B) \mid F) = P(A \mid F) + P(B \mid F)$

ગુણધર્મ 3 : $P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$

ગુણધર્મ 1 પરથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $P(S \mid F) = 1$

$\therefore \quad P((E \cup E') \mid F) = 1$ કારણ કે $S = E \cup E'$

$\therefore \quad P(E \mid F) + P(E' \mid F) = 1$ કારણ કે E અને E' પરસ્પર અલગ ઘટનાઓ છે.

આમ, $P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$

ચાલો, આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : જો $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ અને $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ હોય, તો $P(A \mid B)$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$ થાય.

ઉદાહરણ 2 : એક કુટુંબમાં બે બાળકો છે. ઓછામાં ઓછો એક બાળક છોકરો છે તેમ આપેલ હોય, તો બંને બાળકો છોકરા હોવાની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે છોકરા માટે સંકેત b અને છોકરી માટે સંકેત g લેવામાં આવે છે.

પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $S = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$

E અને F નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવે છે :

E : 'બંને બાળકો છોકરા છે.'

F : 'ઓછામાં ઓછું એક બાળક છોકરો છે',

તો $E = \{(b, b)\}$ અને $F = \{(b, b), (g, b), (b, g)\}$

હવે, $E \cap F = \{(b, b)\}$

આમ, $P(F) = \frac{3}{4}$ અને $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

તેથી, $P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

ઉદાહરણ 3 : એક ખોખામાં 1 થી 10 સંખ્યાઓવાળાં કાર્ડ રાખ્યાં છે. તેમને સંપૂર્ણપણે મિશ્ર કરી દીધાં છે અને પછી એક કાર્ડ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યું છે. જો પસંદ કરેલા કાર્ડ પર 3 કરતાં મોટી સંખ્યા છે તે જાણતા હોઈએ, તો તે યુગ્મ સંખ્યા હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A 'યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કાર્ડ પર યુગ્મ સંખ્યા છે', તે અને ધારો કે ઘટના B 'યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કાર્ડ પર 3 કરતાં મોટી સંખ્યા છે' તે છે. આપણે $P(A \mid B)$ શોધવાની છે.

હવે, પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ છે

અને $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

તથા $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

વળી, $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{7}{10}$ અને $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$

તેથી $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$

ઉદાહરણ 4 : એક શાળામાં 1000 વિદ્યાર્થીઓ છે. તે પૈકી 430 છોકરીઓ છે. આ 430 છોકરીઓ પૈકી 10 % ધોરણ XII માં અભ્યાસ કરે છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી છોકરી છે તેમ આપેલ હોય, તો પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થી ધોરણ XII ની છે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના E એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી ધોરણ XII માં અભ્યાસ કરે છે તે દર્શાવે છે અને ઘટના F એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી છોકરી છે તે દર્શાવે છે. આપણે $P(E|F)$ શોધવાનું છે.

હવે, $P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43$ અને $P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043$ (શા માટે ?)

તેથી, $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$

ઉદાહરણ 5 : એક પાસાને ત્રણ વાર ફેંકવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A અને B નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

A : પાસાને ત્રીજી વખત ફેંકતાં 4 મળે.

B : પાસાને પહેલી વખત ફેંકતાં 6 અને બીજી વખત ફેંકતાં 5 મળે.

ઘટના B ઉદ્ભવી ચૂકી છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે ઘટના A ની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : નિદર્શાવકાશમાં 216 પરિણામો છે.

$$\text{હવે, } A = \left\{\begin{array}{l}(1, 1, 4), (1, 2, 4), \ldots (1, 6, 4), (2, 1, 4), (2, 2, 4), \ldots (2, 6, 4) \\ (3, 1, 4), (3, 2, 4), \ldots, (3, 6, 4), (4, 1, 4), (4, 2, 4), \ldots (4, 6, 4) \\ (5, 1, 4), (5, 2, 4), \ldots, (5, 6, 4), (6, 1, 4), (6, 2, 4), \ldots (6, 6, 4)\end{array}\right\}$$

$B = \{(6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)\}$

અને $A \cap B = \{(6, 5, 4)\}$

હવે, $P(B) = \frac{6}{216}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{216}$

તેથી, માંગેલ સંભાવના $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$

ઉદાહરણ 6 : એક પાસાને બે વખત ફેંકવામાં આવે છે અને તેના પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 છે તેમ આપેલ છે. પાસા પર ઓછામાં ઓછી એક વખત સંખ્યા 4 મળે તેની શરતી સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના E એ 'સંખ્યા 4 ઓછામાં ઓછી એક વખત મળે' તે દર્શાવે છે અને ઘટના F એ 'પાસા પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 છે' તે દર્શાવે છે.

તેથી, $E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

અને $F = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

અહીં, $P(E) = \frac{11}{36}$ અને $P(F) = \frac{5}{36}$

વળી, $E \cap F = \{(2, 4), (4, 2)\}$

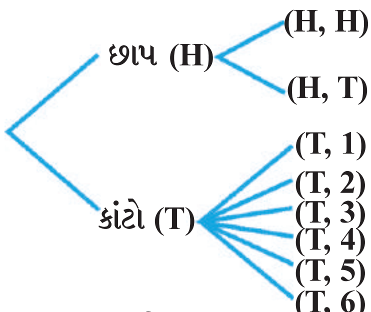
$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

તેથી માંગેલ સંભાવના $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા કરેલ શરતી સંભાવના માટે આપણે પ્રયોગની પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી છે એમ વિચાર્યું હતું અને ઘટનાની અનુરૂપ સંભાવનાનો ઉપયોગ કર્યો હતો. તેમ છતાં, વ્યાપક કિસ્સામાં જ્યારે નિદર્શાવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી ન હોય ત્યારે પણ આ જ વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી શકાય છે, અને તદનુસાર સંભાવનાઓ $P(E \cap F)$ અને $P(F)$ ની ગણતરી કરી શકાય છે. ચાલો, આપણે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ :

ઉદાહરણ 7 : સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. જો સિક્કા પર છાપ મળે તો તેને ફરીથી ઉછાળો, પરંતુ જો કાંટો મળે તો પાસો ફેંકો. સિક્કા પર ઓછામાં ઓછો એક વખત કાંટો મળે છે તેમ આપેલ હોય, તો પાસા પર મળતી સંખ્યા 4 કરતાં વધુ હોય તેની શરતી સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : પ્રયોગનાં પરિણામોને બાજુમાં આપેલી ***વૃક્ષઆકૃતિ*** તરીકે ઓળખાતી આકૃતિમાં દર્શાવાય.



આકૃતિ 13.1

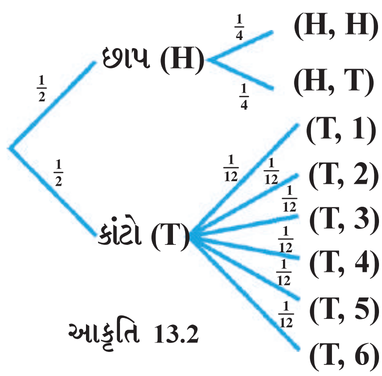
આ પ્રયોગના નિદર્શાવકાશને

$S = \{(H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$

દ્વારા દર્શાવીએ.

સિક્કાને બે વખત ઉછાળતાં બંને વખત છાપ મળે તેને (H, H) વડે દર્શાવીએ તથા પ્રથમ વખત કાંટો તથા પાસા ઉપર મળતી સંખ્યાને i ને (T, i) વડે દર્શાવીએ જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

આમ, 8 પ્રાથમિક ઘટનાઓ (H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6) ની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$ છે.



આકૃતિ 13.2

આકૃતિ 13.2 પરથી આ સ્પષ્ટ છે.

'ઓછામાં ઓછો એક કાંટો હોય' તે ઘટના F અને 'પાસો 4 કરતાં મોટી સંખ્યા બતાવે' તે ઘટના E હોય, તો

$F = \{(H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$

$E = \{(T, 5), (T, 6)\}$ અને $E \cap F = \{(T, 5), (T, 6)\}$

હવે, $P(F) = P(\{H, T\}) + P(\{T, 1\}) + P(\{T, 2\}) + P(\{T, 3\})$

$+ P(\{T, 4\}) + P(\{T, 5\}) + P(\{T, 6\})$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

અને $P(E \cap F) = P(\{T, 5\}) + P(\{T, 6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

આથી, $P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$

સ્વાધ્યાય 13.1

1. ઘટનાઓ E અને F માટે $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ અને $P(E \cap F) = 0.2$ આપેલ છે. $P(E | F)$ અને $P(F | E)$ શોધો.

2. જો $P(B) = 0.5$ અને $P(A \cap B) = 0.32$ હોય, તો $P(A | B)$ શોધો.

3. જો $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ અને $P(B | A) = 0.4$ હોય, તો

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A | B)$ (iii) $P(A \cup B)$ શોધો.

4. જો $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ અને $P(A | B) = \frac{2}{5}$ હોય, તો $P(A \cup B)$ ની કિંમત શોધો.

5. જો $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ અને $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ હોય, તો

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A | B)$ (iii) $P(B | A)$ શોધો.

પ્રશ્નો 6 થી 9 માં $P(E | F)$ શોધો :

6. એક સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે.

(i) E : ત્રીજી વખત ઉછાળતાં છાપ મળે. F : પ્રથમ બે વખત ઉછાળતાં છાપ મળે.

(ii) E : ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળે. F : વધુમાં વધુ બે છાપ મળે.

(iii) E : વધુમાં વધુ બે કાંટા મળે. F : ઓછામાં ઓછો એક કાંટો મળે.

7. બે સિક્કાઓ એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે.

(i) E : એક સિક્કા પર કાંટો મળે. F : એક સિક્કા પર છાપ મળે.

(ii) E : એક પણ કાંટો ન મળે. F : એક પણ છાપ ન મળે.

8. પાસાને ત્રણ વખત ફેંકવામાં આવે છે.

E : ત્રીજી વખત ફેંકતા 4 મળે છે.

F : પ્રથમ બે વખત ફેંકતા અનુક્રમે 6 અને 5 મળે છે.

9. કુટુંબના ફોટા માટે માતા-પિતા અને પુત્ર યાદચ્છિક રીતે એકસાથે હારમાં ઊભા રહે છે.

E : પુત્ર એક છેડા પર છે. F : પિતા મધ્યમાં છે.

10. એક કાળા રંગના અને એક લાલ રંગના પાસાને ફેંકવામાં આવે છે.

(a) જો કાળા રંગના પાસા પર સંખ્યા 5 મળે છે તેમ આપેલ હોય, તો બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 9 કરતાં વધુ હોય તેની શરતી સંભાવના શોધો.

(b) જો લાલ રંગના પાસા પર 4 કરતાં નાની સંખ્યા મળે છે તેમ આપેલ હોય, તો બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 8 મળે તેની શરતી સંભાવના શોધો.

11. એક સમતોલ પાસાને ફેંકવામાં આવે છે. ઘટનાઓ $E = \{1, 3, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ અને $G = \{2, 3, 4, 5\}$ નો વિચાર કરો.

(i) $P(E \mid F)$ અને $P(F \mid E)$ શોધો. (ii) $P(E \mid G)$ અને $P(G \mid E)$ શોધો.

(iii) $P((E \cup F) \mid G)$ અને $P((E \cap F) \mid G)$ શોધો.

12. ધારો કે પ્રત્યેક જન્મેલું બાળક છોકરો અથવા છોકરી હોય તે સમસંભાવી છે. એક કુટુંબમાં બે બાળકો છે.

(i) સૌથી નાનું બાળક છોકરી છે, (ii) ઓછામાં ઓછી એક છોકરી છે, તેમ આપેલ હોય, તો બંને છોકરીઓ હોય તેની શરતી સંભાવના કેટલી થાય ?

13. એક માર્ગદર્શક પાસે પ્રશ્નબૅંક છે. તેમાં સત્ય/અસત્ય પ્રકારના 300 સરળ તથા 200 કઠિન પ્રશ્નો છે. તદ્દુપરાંત, બહુવિકલ્પી પ્રકારના 500 સરળ તથા 400 કઠિન પ્રશ્નો છે. આ પ્રશ્નબૅંકમાંથી એક પ્રશ્ન યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો આ પ્રશ્ન બહુવિકલ્પી પ્રકારનો છે તેમ આપેલ હોય, તો તે સરળ પ્રશ્ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

14. બે પાસા ફેંકવાથી મળતી સંખ્યાઓ ભિન્ન છે તેમ આપેલ હોય, તો 'બે પાસાઓ પરની સંખ્યાઓનો સરવાળો 4 હોય' તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

15. પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 3 નો ગુણિત હોય, તો તે પાસાને ફરીથી ફેંકો અને જો પાસા પર અન્ય કોઈ પૂર્ણાંક મળે તો એક સિક્કાને ઉછાળો. પાસા પર ઓછામાં ઓછી એક વખત પૂર્ણાંક 3 મળે તેમ આપેલ હોય, તો સિક્કા પર કાંટો મળે તે ઘટનાની શરતી સંભાવના શોધો.

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. જો $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ હોય, તો $P(A \mid B) =$ ....

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) અવ્યાખ્યાયિત (D) 1

17. જો ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \mid B) = P(B \mid A)$ હોય, તો

(A) $A \subset B$ પરંતુ $A \neq B$ (B) $A = B$

(C) $A \cap B = \varnothing$ (D) $P(A) = P(B)$

13.3 સંભાવના માટેનો ગુણાકારનો પ્રમેય

ધારો કે E અને F નિદર્શાવકાશ S સાથે સંકળાયેલ બે ઘટનાઓ છે. સ્પષ્ટ છે કે, ગણ $E \cap F$ એ બંને ઘટનાઓ E અને F ઉદ્ભવી છે તે દર્શાવે છે. અન્ય શબ્દોમાં, $E \cap F$ એ ઘટનાઓ E અને F એકસાથે ઉદ્ભવે છે તે દર્શાવે છે. ઘટના $E \cap F$ ને EF તરીકે પણ લખવામાં આવે છે.

વારંવાર આપણને ઘટના EF ની સંભાવના શોધવાની જરૂર પડે છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક પછી એક બે પત્તાં પસંદ કરવાના પ્રયોગમાં, આપણને ઘટના 'એક રાજા અને એક રાણી'ની સંભાવના શોધવામાં રસ હોઈ શકે. ઘટના EF ની સંભાવના શરતી સંભાવનાનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો આપેલ હોય કે ઘટના F ઉદ્ભવી ચૂકી છે, તો ઘટના E ની શરતી સંભાવનાને $P(E \mid F)$ વડે દર્શાવાય છે અને

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)};\ P(F) \neq 0$$

દ્વારા આપવામાં આવે છે. આ પરિણામ પરથી, આપણે લખી શકીએ કે

$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E \mid F) \qquad \text{... (1)}$$

વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે

$$P(F \mid E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)};\ P(E) \neq 0$$

અથવા $P(F \mid E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$ $\qquad (E \cap F = F \cap E)$

આમ, $P(E \cap F) = P(E)\ P(F \mid E)$ ... (2)

(1) અને (2) પરથી, આપણને મળે છે

$$\mathbf{P(E \cap F) = \begin{cases} P(E)\ P(F \mid E) & P(E) \neq 0 \\ P(F)\ P(E \mid F), & P(F) \neq 0. \end{cases}}$$

ઉપરનું પરિણામ ***સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.***

ચાલો, હવે આપણે ઉદાહરણ લઈએ :

ઉદાહરણ 8 : એક પાત્રમાં 10 કાળા રંગના અને 5 સફેદ રંગના દડા છે. એક પછી એક એમ બે દડા પાત્રમાંથી પુરવણી વગર યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ બંને દડા કાળા રંગના હોવાની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટનાઓ E અને F અનુક્રમે પાત્રમાંથી પસંદ કરેલ પ્રથમ દડો કાળા રંગનો છે અને દ્વિતીય દડો કાળા રંગનો છે તેમ દર્શાવે છે. આપણે $P(E \cap F)$ અથવા $P(EF)$ શોધવાની છે.

હવે, $P(E) = P$ (પાત્રમાંથી પસંદ કરેલ પ્રથમ દડો કાળો છે.) $= \dfrac{10}{15}$

વળી, પાત્રમાંથી પસંદ કરેલ પ્રથમ દડો કાળા રંગનો છે તેમ આપેલ હોય, એટલે કે ઘટના E ઉદ્‌ભવી ચૂકી હોય, તો પાત્રમાં 9 કાળા રંગના અને 5 સફેદ રંગના દડા બાકી રહ્યા. આથી, પ્રથમ પસંદ થયેલ દડો કાળા રંગનો છે તેમ આપેલ હોય, ત્યારે બીજો પસંદ થયેલ દડો કાળા રંગનો હોય એ ઘટના E ઉદ્‌ભવ પામી હોય, ત્યારે ઘટના F ની શરતી સંભાવના સિવાય બીજું કંઈ નથી.

એટલે કે $P(F \mid E) = \dfrac{9}{14}$

સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ પરથી, આપણી પાસે,

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F \mid E) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

બે કરતાં વધારે ઘટનાઓ માટે સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ : જો E, F અને G નિદર્શાવકાશની ઘટનાઓ હોય, તો આપણી પાસે નીચેનો નિયમ છે :

$$\mathbf{P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F \mid E) \cdot P(G \mid (E \cap F)) = P(E)\ P(F \mid E)\ P(G \mid EF)}$$

આ જ પ્રમાણે, સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમને ચાર કે તેથી વધુ ઘટનાઓ માટે વિસ્તૃત કરી શકાય.

નીચેનાં ઉદાહરણો ત્રણ ઘટનાઓ માટે સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમનું વિસ્તૃતીકરણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 9 : સારી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી પુરવણી વગર યાદચ્છિક રીતે ત્રણ પત્તાં એક પછી એક પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલાં પત્તાં પૈકી પ્રથમ બે પત્તાં રાજાના અને ત્રીજું પત્તું એક્કો હોવાની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના K_1 જોડમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવેલ પ્રથમ પત્તું રાજા છે અને ઘટના K_2 જોડમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલું બીજું પત્તું રાજા છે તે દર્શાવે છે અને A જોડમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવેલ પત્તું એક્કો છે તે ઘટના દર્શાવે છે. સ્પષ્ટ છે કે આપણે $P(K_1K_2A)$ શોધવાની છે.

હવે, $P(K_1) = \dfrac{4}{52}$.

વળી, યાદચ્છિક રીતે પ્રથમ પસંદ કરેલ પત્તું રાજા હોય એ શરતે $P(K_2 | K_1)$ એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ દ્વિતીય પત્તું રાજા હોય તેની સંભાવના છે.

હવે, $(52 - 1) = 51$ પત્તાંમાં ત્રણ રાજા છે.

આને કારણે, $P(K_2 | K_1) = \frac{3}{51}$

છેલ્લે, અગાઉથી પસંદ કરેલ બે પત્તાં રાજા હોય, તો $P(A | K_1K_2)$ એ બાકીનાં 50 પત્તાંમાં રહેલ 4 એક્કા પૈકીનું પસંદ કરેલ ત્રીજું પત્તું એક્કો હોય તેની સંભાવના છે.

આને કારણે, $P(A | K_1K_2) = \frac{4}{50}$

સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ પ્રમાણે, આપણી પાસે,

$$P(K_1K_2A) = P(K_1) \cdot P(K_2 | K_1) \cdot P(A | K_1K_2)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 નિરપેક્ષ ઘટનાઓ

રમવાનાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના પ્રયોગ વિશે વિચારો. તે પ્રયોગમાં પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી છે તેમ માની લેવામાં આવ્યું છે. ઘટનાઓ E અને F, અનુક્રમે 'પસંદ કરેલું પત્તું કાળીનું છે' અને 'પસંદ કરેલું પત્તું એક્કો છે' તે દર્શાવે છે.

$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ અને $P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

તદુપરાંત 'E અને F' એ ઘટના 'પસંદ કરેલું પત્તું કાળીનો એક્કો છે.'

તેથી, $P(E \cap F) = \frac{1}{52}$

આથી, $P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$

આમ, $P(E) = \frac{1}{4} = P(E | F)$ હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે, ઘટના F નું ઉદ્‌ભવવું ઘટના E ના ઉદ્‌ભવવાની સંભાવનાને અસર કરતું નથી.

વળી આપણી પાસે, $P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13} = P(F)$

પુનઃ $P(F) = \frac{1}{13} = P(F | E)$ દર્શાવે છે કે, ઘટના E નું ઉદ્‌ભવવું ઘટના F ના ઉદ્‌ભવવાની સંભાવના માટે અસરકર્તા નથી.

આમ, E અને F એવી ઘટનાઓ છે કે જેમના પૈકી કોઈ એક ઘટનાના ઉદ્‌ભવવાની સંભાવના બીજી ઘટનાના ઉદ્‌ભવવાને અસર કરતી નથી (બીજી ઘટનાનું ઉદ્‌ભવવું પહેલા ઉદ્‌ભવેલી ઘટના માટે અસરકર્તા નથી.)

આવી ઘટનાઓને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે.

વ્યાખ્યા 2 : જો બે ઘટનાઓ E અને F માટે

$P(E) \neq 0$ અને $P(F | E) = P(F)$

અને $P(F) \neq 0$ અને $P(E | F) = P(E)$

હોય, તો E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહેવાય છે.

આમ, આ વ્યાખ્યામાં આપણી પાસે $P(E) \neq 0$ અને $P(F) \neq 0$ હોવું જરૂરી છે.

હવે, સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ દ્વારા, આપણી પાસે,

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F \mid E) \qquad \text{... (1)}$$

જો E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો (1) પરથી

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) \qquad \text{... (2)}$$

આમ, (2) નો ઉપયોગ કરીને બે ઘટનાઓની નિરપેક્ષતા નીચે પ્રમાણે પણ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય :

વ્યાખ્યા 3 : ધારો કે E અને F એક જ યાદૃચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ બે ઘટનાઓ છે. જો

$$\mathbf{P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)}$$

હોય, તો E અને F ને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે.

નોંધ :

(i) જો E અને F નિરપેક્ષ ના હોય, તો એટલે કે જો $P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F)$ તો બે ઘટનાઓ E અને F ને અવલંબી ઘટનાઓ કહે છે.

(ii) કેટલીક વાર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ વચ્ચે ગેરસમજ થાય છે. 'નિરપેક્ષ' શબ્દ ઘટનાઓની સંભાવનાના સંદર્ભમાં વ્યાખ્યાયિત છે. શબ્દસમૂહ 'પરસ્પર નિવારક' ઘટનાઓના (એટલે કે નિદર્શાવકાશના ઉપગણ) સંદર્ભમાં વ્યાખ્યાયિત છે. તદ્ઉપરાંત પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓમાં ક્યારેય સામાન્ય પરિણામ હોતાં નથી, પરંતુ નિરપેક્ષ ઘટનાઓમાં સામાન્ય પરિણામ હોઈ શકે. સ્પષ્ટ છે કે 'નિરપેક્ષ' અને 'પરસ્પર નિવારક'નો અર્થ સમાન નથી. અન્ય શબ્દોમાં, શૂન્યેતર સંભાવનાઓવાળી બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ, પરસ્પર નિવારક ન હોઈ શકે અને એથી ઊલટું પણ સત્ય છે, એટલે કે શૂન્યેતર સંભાવનાઓ ધરાવતી બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ નિરપેક્ષ ન હોઈ શકે.

(iii) જો ઘટનાઓની પ્રત્યેક જોડ E અને F માટે, જ્યારે E એ પ્રથમ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ હોય અને F એ દ્વિતીય પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ હોય અને જ્યારે બંને પ્રયોગો સાથે કરવામાં આવે ત્યારે ઘટનાઓ E અને F એકસાથે ઉદ્ભવે તેની સંભાવના, P (E) અને P (F) નો ગુણાકાર હોય, એટલે કે $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ અને P (E) અને P (F), બંને પ્રયોગના આધારે અલગ-અલગ ગણતરી કરી મેળવીને, તેમનો ગુણાકાર કરીને $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ તરીકે મેળવાય ત્યારે એ સંજોગોમાં બંને પ્રયોગોને નિરપેક્ષ કહેવામાં આવે છે.

(iv) ***જો*** $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\,P(B)}$

$\mathbf{P(A \cap C) = P(A)\,P(C)}$

$\mathbf{P(B \cap C) = P(B)\,P(C)}$

અને $\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)}$ ***હોય, તો ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિરપેક્ષ કહેવાય છે.***

ઉપર્યુક્ત આપેલ ત્રણ ઘટનાઓ માટે આપેલ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક શરતનું પણ સમાધાન ના થતું હોય, તો આપણે કહીએ છીએ કે ઘટનાઓ પરસ્પર નિરપેક્ષ નથી.

ઉદાહરણ 10 : એક પાસાને ફેંકવામાં આવે છે. જો ઘટના E એ 'પાસા પર મળતી સંખ્યા 3 નો ગુણિત છે' અને ઘટના F એ 'પાસા પર મળતી સંખ્યા યુગ્મ છે', તો E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, નિદર્શાવકાશ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ છે. હવે, $E = \{3, 6\}$, $F = \{2, 4, 6\}$ અને $E \cap F = \{6\}$. તેથી $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ અને $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

સ્પષ્ટ છે કે $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

તેથી, E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

ઉદાહરણ 11 : એક સમતોલ પાસાને બે વખત ફેંકવામાં આવે છે. ઘટના A, 'પ્રથમ પ્રયત્ને અયુગ્મ સંખ્યા મળે' અને ઘટના B, 'બીજા પ્રયત્ને અયુગ્મ સંખ્યા મળે' તેમ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે કે કેમ તે ચકાસો.

ઉકેલ : જો પ્રયોગની તમામ 36 પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી છે એવું ધારી લઈએ, તો

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ અને } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

વળી, $P(A \cap B) = P$ (બંને વખત ફેંકતા અયુગ્મ સંખ્યા મળે.)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

હવે, $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

સ્પષ્ટ છે કે $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

આમ, A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

ઉદાહરણ 12 : ત્રણ સિક્કાઓને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. ધારો કે ઘટના E 'ત્રણ છાપ અથવા ત્રણ કાંટા', ઘટના F 'ઓછામાં ઓછી બે છાપ' અને ઘટના G 'વધુમાં વધુ બે છાપ.' મળે તેમ દર્શાવે છે. જોડ (E, F), (E, G) અને (F, G) પૈકી કઈ ઘટનાઓની જોડ નિરપેક્ષ ઘટનાઓની જોડ છે ? કઈ ઘટનાઓની જોડ અવલંબી છે ?

ઉકેલ : અહીં, પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ નીચે પ્રમાણે મળે છે :

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

સ્પષ્ટ છે કે, $E = \{HHH, TTT\}$,

$F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

અને $G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$,

વળી, $E \cap F = \{HHH\}$, $E \cap G = \{TTT\}$, $F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$

તેથી, $P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(G) = \frac{7}{8}$

અને $P(E \cap F) = \frac{1}{8}$, $P(E \cap G) = \frac{1}{8}$, $P(F \cap G) = \frac{3}{8}$

વળી, $P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $\quad P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$

અને $P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$

આમ, $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$, $P(E \cap G) \neq P(E) \cdot P(G)$

અને, $P(F \cap G) \neq P(F) \cdot P(G)$

તેથી, ઘટનાઓ E અને F ની જોડ નિરપેક્ષ ઘટનાઓની જોડ છે અને ઘટનાઓ F અને G ની જોડ તથા E અને G ની જોડ અવલંબી છે.

ઉદાહરણ 13 : જો E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે ઘટનાઓ E અને F' પણ નિરપેક્ષ છે.

ઉકેલ : ઘટનાઓ E અને F નિરપેક્ષ હોવાથી આપણી પાસે,

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) \qquad \ldots (1)$$

આકૃતિ 13.3 ની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, $E \cap F$ અને $E \cap F'$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે અને વળી, $E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$

$\therefore \quad P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$

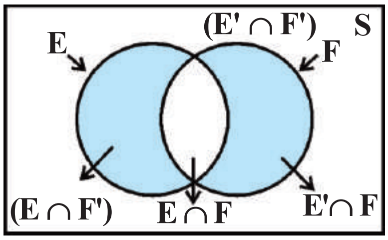
અથવા $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E)\,P(F)$ ((1) પરથી)

$= P(E)\,(1 - P(F))$

$= P(E) \cdot P(F')$

તેથી, E અને F' નિરપેક્ષ છે.



આકૃતિ 13.3

☞ **નોંધ** આ જ પ્રમાણે, જો ઘટનાઓ E અને F નિરપેક્ષ હોય, તો સાબિત કરી શકાય કે
(a) E' અને F નિરપેક્ષ છે. (b) E' અને F' નિરપેક્ષ છે.

ઉદાહરણ 14 : જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે A અને B માંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવવાની સંભાવના $1 - P(A')\,P(B')$ છે.

ઉકેલ : આપણી પાસે,

P (A અને B માંથી ઓછામાં ઓછી એક) $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$

$= P(A) + P(B)\,(1 - P(A))$

$= P(A) + P(B)\,P(A')$

$= 1 - P(A') + P(B)\,P(A')$

$= 1 - P(A')\,[1 - P(B)]$

$= 1 - P(A')\,P(B')$

બીજી રીત : $P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)')$

$= 1 - P(A' \cap B')$

$= 1 - P(A')\,P(B')$ (કારણ કે A', B' નિરપેક્ષ છે.)

સ્વાધ્યાય 13.2

1. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A) = \frac{3}{5}$ અને $P(B) = \frac{1}{5}$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.
2. રમવાની 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પુરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. બંને પત્તાં કાળા રંગનાં હોય તેની સંભાવના શોધો.
3. નારંગીના ખોખામાંથી યાદચ્છિક રીતે પુરવણી વગર ત્રણ નારંગી પસંદ કરીને તે ખોખાને તપાસવામાં આવે છે. જો તમામ ત્રણ નારંગીઓ સારી હોય, તો ખોખાનો વેચાણ માટે સ્વીકાર કરાય છે, અન્યથા તેનો અસ્વીકાર કરવામાં આવે છે. જો ખોખામાં સમાવિષ્ટ 15 નારંગી પૈકી 12 સારી અને 3 ખરાબ હોય, તો તેને વેચાણ માટે મંજૂરી મળે તેની સંભાવના શોધો.
4. એક સમતોલ સિક્કા અને એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. ધારો કે ઘટના A, 'સિક્કા પર છાપ મળે' તે અને ઘટના B 'પાસા પર 3 મળે' તે દર્શાવે છે. ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ તે ચકાસો.
5. જેની ઉપર પૂર્ણાંકો 1, 2, 3 લાલ રંગથી અને 4, 5, 6 લીલા રંગથી લખેલ હોય તેવા પાસાને ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક યુગ્મ છે તે ઘટનાને A વડે તથા પાસા પરનો પૂર્ણાંક લાલ રંગથી લખેલ છે તે ઘટનાને B વડે દર્શાવીએ, તો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે ?

6. ઘટનાઓ E અને F માટે $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ અને $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ છે. E અને F નિરપેક્ષ છે ?

7. આપેલ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ અને $P(B) = p$ આપેલ છે. જો ઘટનાઓ (i) પરસ્પર નિવારક (ii) નિરપેક્ષ હોય તો p શોધો.

8. નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે P(A) = 0.3 અને P(B) = 0.4.

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(A \mid B)$ (iv) $P(B \mid A)$ શોધો.

9. જો ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ હોય, તો P(A - નહિ અને B - નહિ) શોધો.

10. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{12}$ અને

P (A - નહી અથવા B - નહી) $= \frac{1}{4}$. A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ ?

11. આપેલ બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે P(A) = 0.3 અને P(B) = 0.6 હોય, તો

(i) P (A અને B) (ii) P (A અને B નહિ.)

(iii) P (A અથવા B) (iv) P (A નહિ અને B નહિ.) શોધો.

12. એક પાસાને ત્રણ વખત ફેંકવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછી એક વખત અયુગ્મ સંખ્યા મળે તેની સંભાવના શોધો.

13. એક ખોખામાં 10 કાળા રંગના અને 8 લાલ રંગના દડા છે. તે ખોખામાંથી બે દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે.

(i) બંને દડા લાલ રંગના હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) પહેલો દડો કાળા રંગનો અને બીજો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(iii) તેમાંનો એક દડો કાળા રંગનો અને અન્ય લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

14. A અને B એક ચોક્કસ સવાલને સ્વતંત્ર રીતે ઉકેલે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{3}$ છે. જો A અને B બંને સ્વતંત્ર રીતે સવાલને ઉકેલવાનો પ્રયત્ન કરે, તો

(i) સવાલનો ઉકેલ મળે. (ii) બેમાંથી એકને જ સવાલનો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના શોધો.

15. સારી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. નીચેનાંમાંથી કયા કિસ્સાઓમાં ઘટનાઓ E અને F નિરપેક્ષ છે ?

(i) E : 'પસંદ કરેલ પત્તું કાળીનું છે'. F : 'પસંદ કરેલ પત્તું એક્કો છે'.

(ii) E : 'પસંદ કરેલ પત્તું કાળા રંગનું છે'. F : 'પસંદ કરેલ પત્તું રાજા છે'.

(iii) E : 'પસંદ કરેલ પત્તું રાજા અથવા રાણી છે'. F : 'પસંદ કરેલ પત્તું રાણી અથવા ગુલામ છે'.

16. એક છાત્રાલયમાં 60 % વિદ્યાર્થીઓ હિન્દી સમાચારપત્ર વાંચે છે, 40 % અંગ્રેજી સમાચારપત્ર વાંચે છે અને 20 % હિન્દી અને અંગ્રેજી બંને સમાચારપત્ર વાંચે છે. એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યો.

(a) તે હિન્દી કે અંગ્રેજી પૈકી એક પણ સમાચારપત્ર વાંચતો ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

(b) જો તે હિન્દી સમાચારપત્ર વાંચતો હોય, તો તે અંગ્રેજી સમાચારપત્ર વાંચે છે તેની સંભાવના શોધો.

(c) જો તે અંગ્રેજી સમાચારપત્ર વાંચતો હોય, તો તે હિન્દી સમાચારપત્ર વાંચે છે તેની સંભાવના શોધો.

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. પાસાઓની જોડને ફેંકવામાં આવે, તો પ્રત્યેક પાસા પર યુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા મળે તેની સંભાવના .... છે.

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18. નીચેના પૈકી .... વિકલ્પ માટે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ થશે :

(A) A અને B પરસ્પર નિવારક છે. (C) $P(A) = P(B)$

(B) $P(A'B') = [1 - P(A)]\ [1 - P(B)]$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 બેયૂઝનો પ્રમેય

ધારો કે બે થેલા I અને II આપેલા છે. થેલા I માં 2 સફેદ રંગના અને 3 લાલ રંગના દડા છે તથા થેલા II માં 4 સફેદ રંગના અને 5 લાલ રંગના દડા છે. બે પૈકી એક થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવ્યો. બેમાંથી કોઈ પણ થેલાને પસંદ કરવાની સંભાવના (એટલે કે $\frac{1}{2}$) અથવા એક ચોક્કસ થેલામાંથી (કહો થેલો I) કોઈ ચોક્કસ રંગનો દડો (કહો સફેદ) પસંદ કરવાની સંભાવના શોધી શકીએ. અન્ય રીતે કહેતાં, જો આપણને આપેલ હોય કે કયા થેલામાંથી દડો કાઢ્યો છે, તો પસંદ કરવામાં આવેલ દડો કયા ચોક્કસ રંગનો છે તેની સંભાવના આપણે શોધી શકીએ. પરંતુ, જો પસંદ કરવામાં આવેલ દડાનો રંગ આપવામાં આવેલ હોય, તો શું આપણે દડો એક ચોક્કસ થેલામાંથી (કહો થેલો II) પસંદ કરવામાં આવ્યો છે એની સંભાવના શોધી શકીએ ? અહીં, તે ઘટના ઉદ્‌ભવી તે પછી આપણે થેલા II પસંદ થવાની (ઊલટા ક્રમની) પ્રતિસંભાવના શોધવાની છે. સુવિખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રી, જ્હૉન બેયૂઝે શરતી સંભાવનાનો ઉપયોગ કરીને પ્રતિસંભાવના શોધવાનો કોયડો ઉકેલ્યો. તેમના દ્વારા વિકસાવવામાં આવેલ સૂત્ર 'બેયૂઝના પ્રમેય' તરીકે ઓળખાય છે. તે તેમના મરણોત્તર C.A. 1763 માં પ્રકાશિત થયું. બેયૂઝના પ્રમેયનું વિધાન કરતાં અને સાબિત કરતાં પહેલાં, ચાલો આપણે એક વ્યાખ્યા અને કેટલાંક મૂળભૂત પરિણામો લઈએ.

13.5.1 નિદર્શાવકાશનું વિભાજન

જો (a) $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, ..., n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ અને

(c) પ્રત્યેક $i = 1, 2, 3, ..., n$ માટે $P(E_i) > 0$, તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન કરે છે એમ કહેવાય.

નોંધ : n ગણ $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ માટે,

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \{x : \text{ઓછામાં ઓછા એક } x \text{ માટે, } x \in E_i;\ i = 1, 2, 3, ..., n\}$$

બીજા શબ્દોમાં, જોડયુક્ત પરસ્પર નિવારક શૂન્યેતર સંભાવનાવાળી નિ:શેષ ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ નિદર્શાવકાશનું વિભાજન દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, આપણે જોઈએ છીએ કે કોઈ પણ અરિક્તગણ E અને તેનો પૂરકગણ E', $E \cap E' = \phi$ અને $E \cup E' = S$ નું સમાધાન કરતાં હોવાથી તે નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન નિર્મિત કરે છે.

આકૃતિ 13.3 ની વેન આકૃતિઓ પરથી, આપ સહેલાઈથી નિરીક્ષણ કરી શકો છો કે જો E અને F નિદર્શાવકાશ S સાથે સંકળાયેલ કોઈ પણ બે ઘટનાઓ હોય, તો ગણ $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ એ નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન છે. અત્રે એ પણ ઉલ્લેખનીય છે કે, નિદર્શાવકાશનું વિભાજન અનન્ય નથી. એક જ નિદર્શાવકાશનાં કેટલાંય વિભાજનો હોઈ શકે.

હવે આપણે, સંપૂર્ણ સંભાવનાનું પ્રમેય તરીકે ઓળખાતા પ્રમેયને સાબિત કરીશું.

13.5.2 સંપૂર્ણ સંભાવનાનું પ્રમેય

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ એ નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન છે. ધારો કે ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ પૈકી પ્રત્યેક ઘટના ઉદ્ભવવાની સંભાવના શૂન્યેતર છે. S ની કોઈ પણ ઘટના A લો. તો

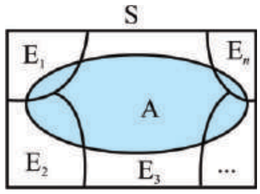
$$P(A) = P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + ... + P(E_n)\,P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)$$

સાબિતી : $E_1, E_2, ..., E_n$ નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન છે એમ આપેલ છે (આકૃતિ 13.4). તેથી

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \quad ... (1)$$

અને $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j.\ \ i, j = 1, 2, ..., n$



આકૃતિ 13.4

હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ ઘટના A માટે,

$$A = A \cap S$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$

વળી, $A \cap E_i$ અને $A \cap E_j$ એ અનુક્રમે E_i અને E_j ના ઉપગણો છે. આપણે જાણીએ છીએ કે. E_i અને E_j પરસ્પર અલગ ગણ છે. આથી, $A \cap E_i$ અને $A \cap E_j$ પણ તમામ $i \neq j,\ i, j = 1, 2, ...n$ માટે પરસ્પર અલગ ગણ છે.

આમ, $P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)]$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

હવે, સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમને આધારે, આપણી પાસે

$$P(A \cap E_i) = P(E_i)\,P(A|E_i), \text{ કારણ કે } P(E_i) \neq 0,\ \forall\ i = 1, 2, ...n$$

તેથી, $P(A) = P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + ... + P(E_n)\,P(A|E_n)$

અથવા $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)$

ઉદાહરણ 15 : એક વ્યક્તિએ બાંધકામના નિશ્ચિત કામની બાંયધરી આપી છે. કામ દરમિયાન હડતાલ પડશે તેની સંભાવના 0.65 છે. જો હડતાલ નહિ પડે તો સમયસર બાંધકામ પૂર્ણ થવાની સંભાવના 0.80 અને જો હડતાલ પડે તો સમયસર બાંધકામ પૂર્ણ થવાની સંભાવના 0.32 છે. બાંધકામનું કાર્ય સમયસર પૂર્ણ થાય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A : બાંધકામનું કાર્ય સમયસર પૂર્ણ થઈ જશે તે અને ઘટના B : હડતાળ પડશે તેમ દર્શાવે છે. આપણે P(A) શોધવાનું છે.

આપણી પાસે $P(B) = 0.65$, P (હડતાળ નહી) $= P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$

ઘટનાઓ B અને B' નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન રચે છે, તેથી સંપૂર્ણ સંભાવનાના પ્રમેય પરથી, આપણી પાસે

$$P(A) = P(B)\,P(A|B) + P(B')\,P(A|B')$$
$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.80$$
$$= 0.208 + 0.280 = 0.488$$

આમ, બાંધકામનું કાર્ય સમયસર પૂર્ણ થઈ જશે તેની સંભાવના 0.488 છે.

હવે, આપણે બેયઝનો પ્રમેય લખીશું અને સાબિત કરીશું.

બેયઝનો પ્રમેય : $E_1, E_2, \ldots, E_n$ નિદર્શાવકાશ S ના વિભાજનનું નિર્ધારણ કરતી અરિક્ત ઘટનાઓ છે. એટલે કે $E_1, E_2, \ldots, E_n$ પરસ્પર અલગ ઘટનાઓ છે અને $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ તથા A એ શૂન્યેતર સંભાવના ધરાવતી ઘટના છે, તો

પ્રત્યેક $i = 1, 2, 3, \ldots n$ માટે $$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A \mid E_j)}$$

સાબિતી : શરતી સંભાવનાના સૂત્ર પરથી, આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{P(A)} \qquad \text{(સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમના આધારે)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A \mid E_j)} \qquad \text{(સંપૂર્ણ સંભાવનાના પ્રમેય પરથી)}$$

નોંધ : જ્યારે બેયઝના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે સામાન્ય રીતે નીચેની પરિભાષાનો ઉપયોગ કરાય છે :

ઘટનાઓ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ને પૂર્વ ઘટના અથવા પક્ષ કહેવાય છે.

સંભાવના $P(E_i)$ ને પૂર્વઘટના E_i ની પૂર્વ-સંભાવના કહેવાય છે.

શરતી સંભાવના $P(E_i \mid A)$ ને પૂર્વઘટના E_i ની ઉત્તર-સંભાવના કહેવાય છે.

બેયઝના પ્રમેયને 'કારણો'ની સંભાવનાઓનું સૂત્ર પણ કહે છે. તમામ E_i નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન કરતા હોવાથી, એક અને માત્ર એક જ ઘટના E_i ઉદ્ભવે (એટલે કે ઘટનાઓ E_i પૈકી એક ઘટના ઉદ્ભવવી જ જોઈએ અને કેવળ એક જ ઉદ્ભવી શકે). તેથી, ઉપરનું સૂત્ર જ્યારે ઘટના A ઉદ્ભવી ચૂકી છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે એક ચોક્કસ E_i (એટલે કે 'કારણ')ની સંભાવના આપણને આપે છે.

વિવિધ પરિસ્થિતિઓમાં બેયઝના પ્રમેયનો ઉપયોગ છે. તેમાંનાં કેટલાંક નીચેનાં ઉદાહરણોમાં સદૃષ્ટાંત દર્શાવ્યા છે.

ઉદાહરણ 16 : થેલા I માં 3 લાલ રંગના અને 4 કાળા રંગના દડા અને થેલા II માં 5 લાલ રંગના અને 6 કાળા રંગના દડા છે. કોઈ એક થેલામાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને તે લાલ રંગનો હોવાનું માલૂમ પડે છે, તો તે થેલા II માંથી પસંદ થયેલ હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : થેલો I પસંદ થવાની ઘટનાને E_1, થેલો II પસંદ થવાની ઘટનાને E_2 અને લાલ રંગનો દડો પસંદ થાય તે ઘટનાને A લઈએ, તો $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

વળી, $P(A \mid E_1) = P$ (થેલા I માંથી લાલ રંગનો દડો પસંદ થાય.) $= \frac{3}{7}$

અને $P(A \mid E_2) = P$ (થેલા II માંથી લાલ રંગનો દડો પસંદ થાય.) $= \frac{5}{11}$

હવે, દડો લાલ રંગનો છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે, તે દડો થેલા II માંથી પસંદ કરેલ હોય, તેની સંભાવના $P(E_2 | A)$ થાય.

બેયૂઝના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણી પાસે

$$P(E_2 | A) = \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

ઉદાહરણ 17 : ત્રણ એકસરખી પેટીઓ I, II અને III આપેલ છે. પ્રત્યેકમાં બે સિક્કા છે. પેટી I માં બંને સિક્કા સોનાના છે, પેટી II માં બંને સિક્કા ચાંદીના છે અને પેટી III માં એક સોનાનો અને એક ચાંદીનો સિક્કો છે. એક વ્યક્તિ યાદચ્છિક રીતે એક પેટી પસંદ કરે છે અને તેમાંથી એક સિક્કો બહાર કાઢે છે. જો તે સિક્કો સોનાનો હોય તો પેટીમાં રહેલ બીજો સિક્કો પણ સોનાનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : પેટીઓ I, II અને III પસંદ થાય તેને અનુક્રમે ઘટનાઓ E_1, E_2 અને E_3 વડે દર્શાવીએ,

તો $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

વળી, 'પસંદ કરવામાં આવેલ સિક્કો સોનાનો છે' તે ઘટનાને A લઈએ, તો

$P(A | E_1) = P$ (થેલા I માંથી સોનાનો સિક્કો) $= \frac{2}{2} = 1$

$P(A | E_2) = P$ (થેલા II માંથી સોનાનો સિક્કો) $= 0$

$P(A | E_3) = P$ (થેલા III માંથી સોનાનો સિક્કો) $= \frac{1}{2}$

હવે, પેટીમાં રહેલ બીજો સિક્કો સોનાનો હોય તેની સંભાવના

= પેટી I માંથી કાઢવામાં આવેલ સિક્કો સોનાનો હોય તેની સંભાવના

$= P(E_1 | A)$

બેયૂઝના પ્રમેય પરથી, આપણે જાણીએ છીએ કે

$$P(E_1 | A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ઉદાહરણ 18 : ધારો કે એક HIV કસોટીની વિશ્વસનીયતાની વિગતો નીચે દર્શાવી છે : HIV ગ્રસ્ત લોકોમાંથી, પરીક્ષણના 90 ટકામાં રોગની જાણ થાય છે પરંતુ 10 % માં જાણ થતી નથી. HIV મુક્ત લોકોમાંથી, 99 % પરીક્ષણોના નિર્ણય HIV –ve હોય છે, પરંતુ 1 % નું નિદાન HIV +ve બતાવે છે. ઘણી મોટી વસતીમાંથી માત્ર 0.1 % લોકોને HIV છે. એક વ્યક્તિ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે, તે HIV પરીક્ષણ આપે છે અને રોગવિજ્ઞાનીનું નિદાન તેને HIV +ve મળે છે. તે વ્યક્તિ ખરેખર HIV ગ્રસ્ત હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના E દર્શાવે છે કે પસંદ થયેલ વ્યક્તિ ખરેખર HIV ગ્રસ્ત છે અને ઘટના A દર્શાવે છે કે વ્યક્તિનાં HIV પરીક્ષણનું નિદાન +ve આવ્યું છે. આપણને $P(E | A)$ શોધવાની આવશ્યકતા છે.

વળી, ઘટના E' દર્શાવે છે કે પસંદ થયેલ વ્યક્તિ ખરેખર HIV ગ્રસ્ત નથી.

સ્પષ્ટપણે, {E, E'} એ વસતીના તમામ લોકોના નિદર્શાવકાશનું વિભાજન છે.

આપણને આપેલ છે, $P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$

$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$

$P(A \mid E)$ = P(આપેલ છે કે તે ખરેખર HIV ગ્રસ્ત છે, તો વ્યક્તિનું પરીક્ષણ HIV+ve તરીકે થયું છે.)

$= 90\ \% = \frac{90}{100} = 0.9$

અને $P(A \mid E')$ = P(આપેલ છે કે તે ખરેખર HIV ગ્રસ્ત નથી, તો વ્યક્તિનું પરીક્ષણ HIV+ve તરીકે થયું છે.)

$= 1\ \% = \frac{1}{100} = 0.01$

હવે, બૅયઝના પ્રમેય પરથી,

$$P(E \mid A) = \frac{P(E) \cdot P(A \mid E)}{P(E)\ P(A \mid E) + P(E')\ P(A \mid E')}$$

$$= \frac{0.001 \times 0.9}{0.001 \times 0.9 + 0.999 \times 0.01} = \frac{90}{1089} = 0.083 \text{ લગભગ}$$

આમ, આપેલ હોય કે વ્યક્તિનું પરીક્ષણ HIV+ve છે, તો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વ્યક્તિ HIVગ્રસ્ત છે, તેની સંભાવના 0.083 છે.

ઉદાહરણ 19 : એક ફૅક્ટરી બોલ્ટ્સનું ઉત્પાદન કરે છે. યંત્રો A, B અને C અનુક્રમે 25 %, 35 % અને 40 % બોલ્ટ્સનું ઉત્પાદન કરે છે. તેમણે ઉત્પાદિત કરેલા બોલ્ટ્સ પૈકી અનુક્રમે, 5 %, 4 % અને 2 % ખામીયુક્ત હોય છે. એક બોલ્ટ યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કર્યો અને તે ખામીયુક્ત માલૂમ પડ્યો. તે યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત થયેલો હોવાની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ઘટનાઓ B_1, B_2, B_3 નીચે પ્રમાણે લો :

B_1 : બોલ્ટનું ઉત્પાદન યંત્ર A દ્વારા થયું છે.

B_2 : બોલ્ટનું ઉત્પાદન યંત્ર B દ્વારા થયું છે.

B_3 : બોલ્ટનું ઉત્પાદન યંત્ર C દ્વારા થયું છે.

સ્પષ્ટ છે કે B_1, B_2, B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે અને તેથી તેઓ નિદર્શાવકાશનું વિભાજન દર્શાવે છે. ઘટના E 'બોલ્ટ ખામીયુક્ત છે' તે લો.

ઘટના E, B_1 ની સાથે અથવા B_2 ની સાથે અથવા B_3 ની સાથે ઉદ્ભવે છે.

આપેલ છે $P(B_1) = 25\ \% = 0.25$, $P(B_2) = 0.35$ અને $P(B_3) = 0.40$

ફરીથી ખામીયુક્ત બોલ્ટ કાઢવામાં આવ્યો છે. આપેલ છે કે તે યંત્ર A વડે ઉત્પાદિત થયો હોય, તો તે ઘટનાની સંભાવના $P(E \mid B_1) = 5\ \% = 0.05$

આ જ પ્રમાણે $P(E \mid B_2) = 0.04$, $P(E \mid B_3) = 0.02$

તેથી, બૅયઝના પ્રમેય દ્વારા,

$$P(B_2 \mid E) = \frac{P(B_2) . P(E \mid B_2)}{P(B_1)\ P(E \mid B_1) + P(B_2)\ P(E \mid B_2) + P(B_3)\ P(E \mid B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

ઉદાહરણ 20 : એક તબીબે દર્દીની મુલાકાત લેવાની છે. ભૂતકાળના અનુભવ પરથી આપણે એ જાણીએ છીએ કે તેના ટ્રેન, બસ, સ્કૂટર અથવા અન્ય કોઈ પરિવહન દ્વારા આવવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ અને $\frac{2}{5}$ છે. જો તે અનુક્રમે ટ્રેન, બસ અને સ્કૂટર દ્વારા આવે તો તેના મોડા પડવાની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{12}$ છે. પરંતુ જો તે અન્ય કોઈ પરિવહન દ્વારા આવે, તો તે મોડા પડશે નહિ. જ્યારે તે આવી પહોંચે છે ત્યારે તે મોડા પડે છે. તે ટ્રેન દ્વારા આવ્યા હશે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : આપણે ડૉક્ટર દર્દીની મુલાકાત લેવામાં મોડા પડે છે તે ઘટનાને E વડે તેમજ ડૉક્ટર ટ્રેન, બસ, સ્કૂટર અથવા અન્ય પરિવહન દ્વારા આવે છે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે T_1, T_2, T_3, T_4 વડે દર્શાવીએ.

અહીં, $P(T_1) = \frac{3}{10}$, $P(T_2) = \frac{1}{5}$, $P(T_3) = \frac{1}{10}$ અને $P(T_4) = \frac{2}{5}$ (આપેલ છે.)

ડૉક્ટર ટ્રેન દ્વારા આવતાં મોડા પહોંચે છે, તે ઘટનાની સંભાવના $P(E\,|\,T_1) = \frac{1}{4}$

આ જ પ્રમાણે, $P(E\,|\,T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E\,|\,T_3) = \frac{1}{12}$ અને $P(E\,|\,T_4) = 0$

કારણ કે જો તે અન્ય કોઈ પરિવહન દ્વારા આવે તો તે મોડા પડતા નથી.

માટે, બૅય્ઝના પ્રમેય દ્વારા,

$P(T_1\,|\,E) =$ જો ડૉક્ટર મોડા પડ્યા હોય, તો તે ટ્રેન દ્વારા આવ્યા હોય તેની સંભાવના

$$= \frac{P(T_1)\cdot P(E\,|\,T_1)}{P(T_1)\,P(E\,|\,T_1) + P(T_2)\,P(E\,|\,T_2) + P(T_3)\,P(E\,|\,T_3) + P(T_4)\,P(E\,|\,T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0}$$

$$= \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

તેથી, માંગેલ સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 21 : એક માણસ 4 માંથી 3 વાર સત્ય બોલે છે તે જ્ઞાત છે. તે પાસાને ફેંકે છે અને જણાવે છે કે તેને છ મળે છે. ખરેખર તેને પૂર્ણાંક છ મળ્યા છે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : 'માણસ જાણ કરે છે કે તેને પાસાને ફેંકતાં પૂર્ણાંક છ મળે છે.' તેને ઘટના E અને 'ખરેખર પૂર્ણાંક છ મળે છે.' તેને ઘટના S_1 અને 'પૂર્ણાંક છ મળતા નથી' તેને ઘટના S_2 લેતાં,

તો $P(S_1) =$ પૂર્ણાંક છ ઉદ્ભવે છે તેની સંભાવના $= \frac{1}{6}$

$P(S_2) =$ પૂર્ણાંક છ ઉદ્ભવતો નથી તેની સંભાવના $= \frac{5}{6}$

$P(E\,|\,S_1) =$ જ્યારે ખરેખર પૂર્ણાંક 6 ઉદ્ભવે છે ત્યારે વ્યક્તિ પૂર્ણાંક 6 ઉદ્ભવે છે તેની જાણ કરે છે તેની સંભાવના

$=$ માણસ સત્ય બોલે છે તેની સંભાવના $= \frac{3}{4}$

$P(E\,|\,S_2) =$ જ્યારે ખરેખર પાસા પર પૂર્ણાંક છ ઉદ્ભવતા નથી ત્યારે માણસ જાણ કરે છે કે પૂર્ણાંક છ ઉદ્ભવે છે તેની સંભાવના

$=$ માણસ સત્ય બોલતો નથી તેની સંભાવના $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

આમ, બૅયૂઝના પ્રમેય દ્વારા આપણને મળે છે.

$P(S_1 | E)$ = માણસ જાણ કરે છે કે, પૂર્ણાંક છ ઉદ્ભવ્યો છે તો ખરેખર પૂર્ણાંક 6 ઉદ્ભવ્યો હોય, તેની સંભાવના

$$= \frac{P(S_1).P(E|S_1)}{P(S_1)\ P(E|S_1) + P(S_2)\ P(E|S_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

આથી, માંગેલ સંભાવના $\frac{3}{8}$ છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. એક પાત્રમાં 5 લાલ રંગના અને 5 કાળા રંગના દડા છે. યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેનો રંગ નોંધીને તેને પાત્રમાં પાછો મૂકી દેવાય છે. તદુપરાંત, જે રંગ નોંધ્યો હતો તે રંગના 2 વધારાના દડા પાત્રમાં મૂકવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. બીજો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

2. એક થેલામાં 4 લાલ રંગના અને 4 કાળા રંગના દડા છે. બીજા થેલામાં 2 લાલ રંગના અને 6 કાળા રંગના દડા છે. બેમાંથી એક થેલો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને એક દડો તે થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તે લાલ રંગનો માલૂમ પડે છે. દડો પહેલા થેલામાંથી પસંદ કર્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

3. કૉલેજના વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 60 % વિદ્યાર્થીઓ છાત્રાલયમાં રહે છે અને 40 % વિદ્યાર્થીઓ છાત્રાલયમાં રહેતા નથી તેમ જ્ઞાત છે. આગળના વર્ષના પરિણામ પરથી માહિતી મળે છે કે, છાત્રાલયમાં રહેતા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 30 % વિદ્યાર્થીઓએ વાર્ષિક પરીક્ષામાં A ગ્રેડ મેળવ્યો છે અને છાત્રાલયમાં નહિ રહેનારા વિદ્યાર્થીઓ પૈકીના 20 % વિદ્યાર્થીઓએ તેમની વાર્ષિક પરીક્ષામાં A ગ્રેડ મેળવ્યો છે. વર્ષાન્તે કૉલેજમાંથી એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યો અને તેણે A ગ્રેડ મેળવ્યો છે તેમ આપેલ હોય, તો આ વિદ્યાર્થી છાત્રાલયનો હોવાની સંભાવના કેટલી ?

4. બહુવિકલ્પ કસોટીમાં પ્રશ્નનો જવાબ આપવામાં, વિદ્યાર્થી કાં તો જવાબ જાણે છે અથવા અનુમાન કરે છે. વિદ્યાર્થી જવાબ જાણે છે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ અને અનુમાન કરે છે તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. માની લો કે વિદ્યાર્થી જે જવાબનું અનુમાન કરે છે તે સાચો હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. આપેલ હોય કે તેણે તે જવાબ સાચો આપ્યો છે ત્યારે વિદ્યાર્થીએ આપેલ જવાબ તે જાણતો હતો તેની સંભાવના કેટલી ?

5. એક પ્રયોગશાળા રક્ત પરીક્ષણમાં, જ્યારે તે ખરેખર રોગ હોય ત્યારે તે રોગને શોધી કાઢવામાં 99 % અસરકારક છે. તેમ છતાં, સ્વસ્થ વ્યક્તિનો પરીક્ષણ અહેવાલ ખોટો અને હકારાત્મક 0.5 % સુધી પણ આપે છે. (એટલે કે, જો સ્વસ્થ વ્યક્તિનું પરીક્ષણ કરાય, તો 0.005 સંભાવના સાથે પરીક્ષણ નિદાન કરશે કે તેને બીમારી છે.) જો વસતીના 0.1 % લોકોને ખરેખર બીમારી હોય, તો આપેલ હોય કે તેના પરીક્ષણનું પરિણામ હકારાત્મક છે તે પરિસ્થિતિમાં તેને બીમારી હોવાની સંભાવના કેટલી ?

6. ત્રણ સિક્કા આપેલ છે. એક સિક્કાની બંને બાજુ છાપ છે. બીજો અસમતોલ સિક્કો છે. તેમાં છાપ મળવાની સંભાવના 75 % છે અને ત્રીજો સમતોલ સિક્કો છે. ત્રણમાંથી એક સિક્કો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરીને ઉછાળ્યો. તે છાપ બતાવે છે, તો તે બે છાપ ધરાવતો સિક્કો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. એક વીમાકંપનીએ 2000 સ્કૂટર-ચાલકો, 4000 કાર-ચાલકો અને 6000 ટ્રક-ચાલકોનો વીમો ઉતાર્યો. તેમના દ્વારા થતા અકસ્માતોની સંભાવના અનુક્રમે 0.01, 0.03 અને 0.15 છે. વીમાધારકો પૈકીના એક વ્યક્તિને અકસ્માત થયો. તે સ્કૂટર-ચાલક હોવાની સંભાવના કેટલી ?

8. એક ફેક્ટરી પાસે બે યંત્રો A અને B છે. ભૂતકાળની નોંધ બતાવે છે કે, યંત્ર A ઉત્પાદિત વસ્તુઓ પૈકી 60 % વસ્તુઓનું અને યંત્ર B 40 % વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. વધુમાં, યંત્ર A દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુઓ પૈકી 2 % અને યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુઓ પૈકી 1 % વસ્તુઓ ખામીયુક્ત હતી. આ બધી વસ્તુઓ એક પૂરવઠાગારમાં મૂકી દીધી અને ત્યાર બાદ આમાંથી એક વસ્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી અને તે ખામીયુક્ત માલૂમ પડી, તો તે યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત હોવાની સંભાવના કેટલી ?

9. એક નિગમમાં નિયામકોની સમિતિમાં હોદ્દો મેળવવા માટે બે સમૂહો હરીફાઈ કરી રહ્યા છે. પ્રથમ અને દ્વિતીય સમૂહો જીતશે તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે 0.6 અને 0.4 છે. વધુમાં, જો પ્રથમ સમૂહ જીતશે તો નવી ઉત્પાદિત વસ્તુ રજૂ કરવાની સંભાવના 0.7 છે અને દ્વિતીય સમૂહ માટે અનુરૂપ સંભાવના 0.3 છે. નવી ઉત્પાદિત વસ્તુ દ્વિતીય સમૂહ દ્વારા રજૂ થઈ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

10. ધારો કે એક છોકરી પાસો ઉછાળે છે. જો તેને 5 કે 6 મળે તો, તે સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળે છે અને છાપની સંખ્યા નોંધે છે. જો તેને 1, 2, 3 અથવા 4 મળે તો તે સિક્કાને એક વખત ઉછાળે છે અને છાપ અથવા કાંટો મળ્યો તે નોંધે છે. જો બરાબર એક છાપ મળી હોય, તો તે પાસા પર 1, 2, 3 અથવા 4 મળ્યા હોવાની સંભાવના કેટલી ?

11. એક કારખાનાદાર પાસે ત્રણ યંત્ર ચાલકો A, B અને C છે. પ્રથમ ચાલક A, 1 % ખામીયુક્ત વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. બીજા બે ચાલકો B અને C અનુક્રમે 5 % અને 7 % ખામીયુક્ત વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. A કામના નિશ્ચિત સમયનો, 50 % સમય કામ પર રહે છે, B 30 % સમય કામ પર રહે છે અને C 20 % સમય કાર્ય કરે છે. ખામીયુક્ત વસ્તુનું ઉત્પાદન થયું છે. તેનું ઉત્પાદન A દ્વારા થયું હોવાની સંભાવના કેટલી ?

12. 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું ખોવાઈ ગયું છે. બાકી રહેલાં પત્તાંની થોકડીમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યાં અને માલૂમ પડ્યું કે તે બંને ચોકટનાં પત્તાં છે. ખોવાયેલ પત્તું ચોકટનું હોય તેની સંભાવના શોધો.

પ્રશ્નો 13 તથા 14 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. A સત્ય બોલે છે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. એક સિક્કો ઉછાળ્યો છે. A માહિતી આપે છે કે છાપ મળી છે. ખરેખર છાપ હતી તેની સંભાવના .... હોય.

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14. જો $P(B) \neq 0$ અને $A \subset B$ હોય તેવી બે ઘટનાઓ A અને B માટે નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે?

(A) $P(A \mid B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A \mid B) < P(A)$

(C) $P(A \mid B) \geq P(A)$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

13.6 યાદચ્છિક ચલો અને તેમનાં સંભાવના વિતરણો

આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગો અને નિદર્શાવકાશો વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. આ પ્રકારના મોટા ભાગના પ્રયોગોમાં, આપણે માત્ર અમુક ચોક્કસ પરિણામ ઉદ્ભવે તેમાં જ રસ ધરાવતા ન હતા, પરંતુ નીચેનાં ઉદાહરણો/પ્રયોગોમાં બતાવ્યા પ્રમાણે, તે પરિણામો સાથે કોઈ સંખ્યા સંકળાય તેમાં પણ આપણને રસ હતો.

(i) આપણો રસ બે પાસાને ઉછાળવામાં, તેમની પર મળતી સંખ્યાઓના સરવાળામાં હોઈ શકે.

(ii) સિક્કાને 50 વાર ઉછાળવામાં, આપણે મળેલ છાપની સંખ્યા જાણવા ઇચ્છતા હોઈએ.

(iii) જેમાં 6 વસ્તુ ખામીયુક્ત છે તેવી 20 ચીજવસ્તુઓના ઢગલામાંથી યાદચ્છિક રીતે ચાર ચીજવસ્તુઓ (એક પછી એક) લેવાના પ્રયોગમાં, આપણે ચારના નિદર્શમાં ખામીયુક્ત વસ્તુની સંખ્યા જાણવા માંગીએ છીએ અને નહિ કે ખામીયુક્ત તથા ખામીરહિત ચીજવસ્તુઓની શ્રેણીમાં.

ઉપરના તમામ પ્રયોગોમાં, આપણી પાસે નિયમ છે અને તે પ્રયોગના પ્રત્યેક પરિણામને એક વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સંગત કરે છે. આ એક વાસ્તવિક સંખ્યા પ્રયોગના જુદાં-જુદાં પરિણામો સાથે બદલાઈ શકે છે. આને કારણે, તે ચલ છે. વળી, તેનું મૂલ્ય યાદચ્છિક પ્રયોગના પરિણામ પર આધારિત છે અને તેથી, તેને યાદચ્છિક ચલ કહે છે. યાદચ્છિક ચલને સામાન્ય રીતે X દ્વારા દર્શાવાય છે.

જો તમે વિધેયની વ્યાખ્યા યાદ કરશો તો તમે સ્પષ્ટપણે સમજી શકશો કે, યાદચ્છિક ચલ X, ખરેખર કહીએ તો જેનો પ્રદેશ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં પરિણામોનો ગણ (અથવા નિદર્શાવકાશ) હોય તેવું વિધેય છે. યાદચ્છિક ચલ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા ધારણ કરી શકે છે. એના પરિણામરૂપે તેનો સહપ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે અને તેથી, યાદચ્છિક ચલને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

વ્યાખ્યા 4 : ***જેનો પ્રદેશ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ છે એવા વાસ્તવિક મૂલ્યોના વિધેયને યાદચ્છિક ચલ કહે છે.***

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે એક સિક્કાને ક્રમશઃ બે વખત ઉછાળવાના પ્રયોગ વિશે વિચારીએ.

આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT} છે.

જો X મેળવેલ છાપની સંખ્યા દર્શાવે, તો X એ યાદચ્છિક ચલ છે અને પ્રત્યેક પરિણામ માટે તેનું મૂલ્ય નીચે આપ્યા પ્રમાણે છે :

$$X(HH) = 2,\ X(HT) = 1,\ X(TH) = 1,\ X(TT) = 0$$

એક જ નિદર્શાવકાશ પર એક કરતાં વધારે યાદચ્છિક ચલ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે ઉપરના નિદર્શાવકાશ S ના પ્રત્યેક પરિણામ માટે Y એ છાપની સંખ્યામાંથી કાંટાની સંખ્યાની બાદબાકી દર્શાવે છે. તો,

$$Y(HH) = 2,\ Y(HT) = 0,\ Y(TH) = 0,\ Y(TT) = -2$$

આમ, X અને Y એક જ નિદર્શાવકાશ S પર વ્યાખ્યાયિત બે જુદા-જુદા યાદચ્છિક ચલ છે.

ઉદાહરણ 22 : એક વ્યક્તિ એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવાની રમત રમે છે. પ્રત્યેક છાપ માટે, આયોજક દ્વારા તેને ₹ 2 આપવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક કાંટા માટે, તે ₹ 1.50 આયોજકને આપે છે. X વ્યક્તિએ મેળવેલી અથવા ગુમાવેલી રકમ દર્શાવે છે. દર્શાવો કે X યાદચ્છિક ચલ છે અને તેને પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ પરના વિધેય તરીકે દર્શાવો.

ઉકેલ : X એ સંખ્યા છે. તેનાં મૂલ્યો યાદચ્છિક પ્રયોગનાં પરિણામો પર વ્યાખ્યાયિત છે. આથી, X એ યાદચ્છિક ચલ છે.

હવે, પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

પછી, X(HHH) = ₹ 2 × 3 = ₹ 6

X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = ₹ (2 × 2 – 1 × 1.50) = ₹ 2.50

X(HTT) = X(THT) = X(TTH) = ₹ (1 × 2 – 2 × 1.50) = – ₹ 1

અને X(TTT) = – ₹ (3 × 1.50) = – ₹ 4.50

અત્રે ઋણ નિશાની ખેલાડીનું નુકસાન બતાવે છે. આમ, નિદર્શાવકાશના પ્રત્યેક ઘટક માટે, X અનન્ય કિંમત લે છે. આ ઉપરથી, X એ નિદર્શાવકાશ પરનું વિધેય છે. તેનો વિસ્તાર $\{-1, 2.50, -4.50, 6\}$ છે.

ઉદાહરણ 23 : એક થેલામાં 2 સફેદ રંગના દડા અને 1 લાલ રંગનો દડો છે. એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કર્યો અને પછી તેનો રંગ નોંધીને થેલામાં પરત મૂકી દીધો. ફરીથી તે પ્રક્રિયાનું પુનરાવર્તન કર્યું. જો X, બંને વખત યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ લાલ દડાની સંખ્યા દર્શાવે, તો X નું વર્ણન કરો.

ઉકેલ : થેલામાં રહેલા દડાઓને w_1, w_2, r વડે દર્શાવો. પછી નિદર્શાવકાશ

$S = \{w_1w_1, w_1w_2, w_2w_1, w_2w_2, w_1r, w_2r, rw_1, rw_2, rr\}$ મળે છે.

હવે, $\omega \in S$ માટે, $X(\omega)$ = લાલ રંગના દડાની સંખ્યા

એના પરિણામ રૂપે,

$X(\{w_1w_1\}) = X(\{w_1w_2\}) = X(\{w_2w_2\}) = X(\{w_2w_1\}) = 0$

$X(\{w_1r\}) = X(\{w_2r\}) = X(\{rw_1\}) = X(\{rw_2\}) = 1$ અને $X(\{rr\}) = 2$

આમ, X એ યાદૃચ્છિક ચલ છે અને તે કિંમતો 0, 1, 2 લે છે.

13.6.1 યાદૃચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ

ચાલો આપણે દસ કુટુંબ $f_1, f_2,..., f_{10}$ પૈકી એક કુટુંબ યાદૃચ્છિક પસંદ કરવાનો પ્રયોગ લઈએ. પ્રત્યેક કુટુંબ પસંદ થવાની ઘટના સમસંભાવી છે. ધારો કે કુટુંબ $f_1, f_2,..., f_{10}$ માં અનુક્રમે 3, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 6, 4, 5 સભ્યો છે.

ચાલો એક કુટુંબ પસંદ કરીએ અને તે કુટુંબમાં સભ્યોની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ. સ્પષ્ટ છે કે X એ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત યાદૃચ્છિક ચલ છે :

$X(f_1) = 3$, $X(f_2) = 4$, $X(f_3) = 3$, $X(f_4) = 2$, $X(f_5) = 5$, $X(f_6) = 4$, $X(f_7) = 3$, $X(f_8) = 6$, $X(f_9) = 4$, $X(f_{10}) = 5$

આમ, X એ પસંદ થયેલ કુટુંબને આધારે 2, 3, 4, 5 અથવા 6 પૈકી કોઈ પણ કિંમત લઈ શકે છે.

હવે, જ્યારે કુટુંબ f_4 પસંદ થાય ત્યારે X કિંમત 2 લેશે. જ્યારે કુટુંબો f_1, f_3, f_7 પૈકી કોઈ પણ એક કુટુંબ પસંદ થાય ત્યારે X કિંમત 3 લે છે.

આ જ પ્રમાણે, જ્યારે કુટુંબો f_2, f_6 અથવા f_9 પૈકી કોઈ કુટુંબ પસંદ થાય ત્યારે X = 4

જ્યારે કુટુંબો f_5 અથવા f_{10} પૈકી કોઈ કુટુંબ પસંદ થાય ત્યારે X = 5

અને જ્યારે કુટુંબ f_8 પસંદ થાય ત્યારે X = 6

આપણે માની લીધું હતું કે પ્રત્યેક કુટુંબ પસંદ થાય તે ઘટના સમસંભાવી છે, માટે કુટુંબ f_4 પસંદ થયું હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{10}$ છે. આમ, ચલ X કિંમત 2 લઈ શકે તેની સંભાવના $\frac{1}{10}$ છે. આપણે લખીએ $P(X = 2) = \frac{1}{10}$. વળી, કુટુંબો f_1, f_3 અથવા f_7 માંથી કોઈ એક પસંદ થાય તેની સંભાવના $P(\{f_1, f_3, f_7\}) = \frac{3}{10}$.

આપણે લખીએ $P(X = 3) = \frac{3}{10}$. આ જ પ્રમાણે, આપણને મળે છે.

$$P(X = 4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 5) = P(\{f_5, f_{10}\}) = \frac{2}{10}$$

અને $P(X = 6) = P(\{f_8\}) = \frac{1}{10}$

યાદચ્છિક ચલનાં મૂલ્યોને તેમની અનુરૂપ સંભાવનાઓ સાથે રજૂ કરતા આ વર્ણનને યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

વ્યાપક રૂપે, યાદચ્છિક ચલ X ના સંભાવના વિતરણને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે :

વ્યાખ્યા 5 : *યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ એ સંખ્યાઓની પદ્ધતિ છે :*

$$\begin{array}{lcccc} X: & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ P(X): & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

જ્યાં, $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, i = 1, 2, \ldots, n$

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ એ યાદચ્છિક ચલ X નાં સંભવિત મૂલ્યો છે અને $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ એ યાદચ્છિક ચલ X ની સંભાવનાઓ છે. તે કિંમતો x_i લઈ રહી છે, એટલે કે $P(X = x_i) = p_i$.

સમજૂતી : યાદચ્છિક ચલ X ની કોઈ શક્ય કિંમત x_i હોય, તો વિધાન $X = x_i$ નિદર્શાવકાશનાં કેટલાંક બિંદુઓ આગળ સત્ય છે. આથી X એ કિંમત x_i ધારણ કરે તેની સંભાવના હંમેશાં શૂન્યેતર છે. $P(X = x_i) \neq 0$.

ઉપરાંત, યાદચ્છિક ચલ X ની તમામ શક્ય કિંમતો માટે, નિદર્શાવકાશના તમામ ઘટકોને આવરી લેવાય છે. આને કારણે, સંભાવના વિતરણમાં તમામ સંભાવનાઓનો સરવાળો હંમેશાં 1 થવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 24 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી બે પત્તાં પુરવણી સહિત ક્રમશઃ પસંદ કરવામાં આવે છે. એક્કાઓની સંખ્યાઓનું સંભાવના વિતરણ શોધો.

ઉકેલ : એક્કાઓની સંખ્યા યાદચ્છિક ચલ છે. તેને X વડે દર્શાવીએ. સ્પષ્ટ છે કે X એ 0, 1 અથવા 2 કિંમતો લઈ શકે છે.

હવે, પત્તાં પસંદ કરવાનો પ્રયોગ પુરવણી સહિત થયો છે. આથી બે વાર પસંદ કરવાની પ્રક્રિયા નિરપેક્ષ ઘટનાનું નિર્માણ કરે છે.

આથી, $P(X = 0)$ = P (એક્કો નહિ અને એક્કો નહિ) = P (એક્કો નહિ) $\times$ P (એક્કો નહિ)

$$= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{144}{169}$$

$P(X = 1)$ = P (એક્કો અને એક્કો નહિ અથવા એક્કો નહિ અને એક્કો)

= P (એક્કો અને એક્કો નહિ) + P (એક્કો નહિ અને એક્કો)

= P (એક્કો) $\cdot$ P (એક્કો નહિ) + P (એક્કો નહિ) $\cdot$ P (એક્કો)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{24}{169}$$

અને $P(X = 2)$ = P (એક્કો અને એક્કો) $= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

આમ, માંગેલ સંભાવના વિતરણ છે :

X	0	1	2
P(X)	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

ઉદાહરણ 25 : બે પાસાઓને ત્રણ વખત ફેંકતાં મળતી સમાન જોડની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે X સમાન જોડની સંખ્યા દર્શાવે છે. શક્ય સમાન જોડ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) છે. સ્પષ્ટ છે કે X, કિંમતો 0, 1, 2 અથવા 3 લઈ શકે છે.

સમાન જોડ મેળવવાની સંભાવના $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

સમાન જોડ ન મળવાની સંભાવના $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

હવે, P(X = 0) = P(એક પણ વખત સમાન જોડ નહિ) $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

P(X = 1) = P(એક સમાન જોડ અને બે સમાન જોડ નહિ)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6} \times \frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{75}{216}$$

P(X = 2) = P(બે સમાન જોડ અને એકસમાન જોડ નહિ)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

અને P(X = 3) = P(ત્રણ સમાન જોડ) $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

આમ, માંગેલ સંભાવના વિતરણ છે :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

ચકાસણી : સંભાવનાનો સરવાળો

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{125+75+15+1}{216} = \frac{216}{216} = 1$$

ઉદાહરણ 26 : ધારો કે X યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા શાળાના દિવસ દરમિયાન તમારા અભ્યાસના કલાકો દર્શાવે છે. X એ મૂલ્ય x લે તેની સંભાવના નીચેના સ્વરૂપમાં આપેલ છે. k એ કોઈક અજ્ઞાત અચળ છે.

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \\ kx, & x = 1 \text{ અથવા } 2 \\ k(5 - x), & x = 3 \text{ અથવા } 4 \\ 0, & \text{અન્યથા} \end{cases}$$

(a) k નું મૂલ્ય શોધો.

(b) તમે ઓછામાં ઓછા બે કલાક અભ્યાસ કરો છો તેની સંભાવના કેટલી ? બરાબર બે કલાક અભ્યાસ કરો છો તેની સંભાવના કેટલી ? વધુમાં વધુ બે કલાક અભ્યાસ કરો છો તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : X નું સંભાવના વિતરણ

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	k	$2k$	$2k$	k

છે.

(a) આપણે જાણીએ છીએ કે $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. માટે $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$ એટલે $k = 0.15$.

(b) P(તમે ઓછામાં ઓછા બે કલાક અભ્યાસ કરો છો) $= P(X \geq 2)$

$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 2k + 2k + k$

$= 5k = 5 \times 0.15 = 0.75$

P(તમે બરાબર બે કલાક અભ્યાસ કરો છો) $= P(X = 2)$

$= 2k$

$= 2 \times 0.15 = 0.3$

P(તમે વધુમાં વધુ બે કલાક અભ્યાસ કરો છો) $= P(X \leq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k$

$= 0.1 + 3k$

$= 0.1 + 3 \times 0.15$

$= 0.55$

13.6.2 યાદચ્છિક ચલનો મધ્યક

ઘણા પ્રશ્નોમાં, એ ઇચ્છનીય હોય છે કે યાદચ્છિક ચલનાં કેટલાંક વિશિષ્ટ લક્ષણની ગણતરી સંભાવના વિતરણ પરથી કરી શકાય અને એક જ સંખ્યા દ્વારા વર્ણવી શકાય. આવી કેટલીક સંખ્યાઓ છે – મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક. આ વિભાગમાં, આપણે માત્ર મધ્યકની ચર્ચા કરીશું. મધ્યક એ સ્થાનનું માપ અથવા મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે. તેનો અર્થ એ છે કે મધ્યક યાદચ્છિક ચલની સરેરાશ અથવા મધ્ય મૂલ્યનું સ્થાન નક્કી કરે છે.

વ્યાખ્યા 6 : ધારો કે X એ યાદચ્છિક ચલ છે. તેનાં શક્ય મૂલ્યો $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ અનુક્રમે સંભાવનાઓ $p_1, p_2, ..., p_n$ સાથે ઉદ્ભવે છે. X નો મધ્યક μ દ્વારા દર્શાવાય છે. તે સંખ્યા $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ છે, એટલે કે X નો મધ્યક એ X ની શક્ય કિંમતોની ભારિત સરેરાશ છે. પ્રત્યેક કિંમત જે સંભાવના સાથે તે ઉદ્ભવી છે તે સંભાવનાથી ભારિત છે.

યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યકને X ની ગાણિતિક અપેક્ષા પણ કહે છે. તેને E(X) વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$

બીજા શબ્દોમાં, યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક અથવા તેની ગાણિતિક અપેક્ષા એ X નાં તમામ શક્ય મૂલ્યના તેમને અનુરૂપ સંભાવનાઓ સાથેના ગુણાકારોનો સરવાળો છે.

ઉદાહરણ 27 : ધારો કે પાસાની જોડને ઉછાળવામાં આવે છે અને યાદચ્છિક ચલ X એ બંને પાસાઓ પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો છે. X નો મધ્યક અથવા ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

ઉકેલ : પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ 36 મૂળભૂત ઘટનાઓ, ક્રમયુક્ત જોડ (x_i, y_i),

જ્યાં $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ અને $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ નું સ્વરૂપ ધરાવે છે.

યાદચ્છિક ચલ X એટલે કે બંને પાસાઓ પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો મૂલ્યો 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અથવા 12 લે છે.

હવે, $P(X = 2) = P(\{1, 1\}) = \frac{1}{36}$

$P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$

$P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36}$

$P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36}$

$P(X = 6) = P(\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}) = \frac{5}{36}$

$P(X = 7) = P(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = \frac{6}{36}$

$P(X = 8) = P(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}) = \frac{5}{36}$

$P(X = 9) = P(\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}) = \frac{4}{36}$

$P(X = 10) = P(\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}) = \frac{3}{36}$

$P(X = 11) = P(\{(5, 6), (6, 5)\}) = \frac{2}{36}$

$P(X = 12) = P(\{(6, 6)\}) = \frac{1}{36}$

X નું સંભાવના વિતરણ છે.

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$ અથવા p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

આથી, $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36}$

$+ 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36}$

$= \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12}{36} = 7$

આમ, બંને સમતોલ પાસાઓને ઉછાળતાં તેમના પર મળતી સંખ્યાઓના સરવાળાનો મધ્યક 7 છે.

13.6.3 યાદચ્છિક ચલનું વિચરણ

યાદચ્છિક ચલનો મધ્યક આપણને યાદચ્છિક ચલની કિંમતોમાં પરિવર્તનશીલતા વિશે કોઈ માહિતી આપતો નથી. વાસ્તવમાં, જો ***વિચરણ (Variance)*** નાનું હોય, તો યાદચ્છિક ચલની કિંમતો મધ્યકની નજીક હોય છે. વળી, જુદી-જુદી સંભાવના વિતરણોવાળા યાદચ્છિક ચલોના મધ્યક સમાન હોઈ શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે, નીચે આપેલાં ચલ X અને Y નાં વિતરણો પ્રમાણે,

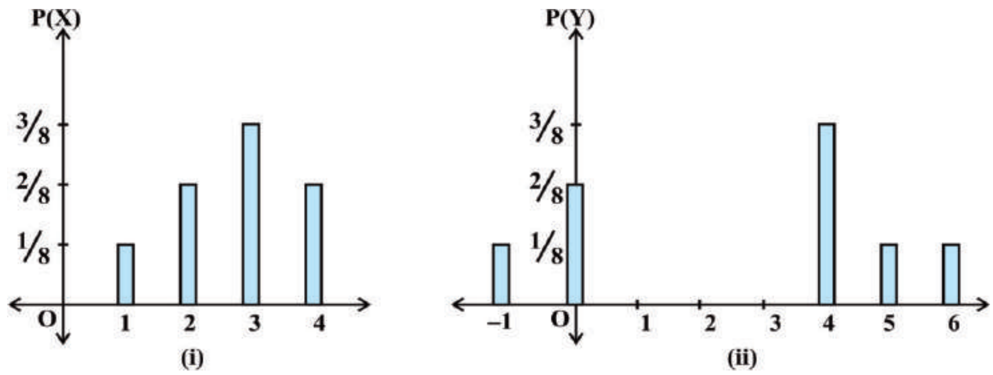
X	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Y	–1	0	4	5	6
P(Y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

સ્પષ્ટ છે કે, $E(X) = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{2}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$

અને $E(Y) = -1 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$

ચલ X અને Y જુદા-જુદા છે, તેમ છતાં તેમનાં મધ્યકો સમાન છે. તે આ વિતરણોની આકૃતિ દ્વારા ચિત્રણની પ્રસ્તુતિથી સહેલાઈથી જોઈ શકાય તેમ છે. (આકૃતિ 13.5)



આકૃતિ 13.5

X અને Y વચ્ચેનો ભેદ ઓળખવા, યાદચ્છિક ચલોની કિંમતો કઈ સીમા સુધી ફેલાયેલી છે, તેનું માપ જાણવાની આપણને જરૂર છે. આંકડાશાસ્ત્રમાં, આપણે અભ્યાસ કર્યો છે કે, વિચરણ એ માહિતીના પ્રસાર અથવા વિખેરાવનું માપ છે. એ જ પ્રમાણે યાદચ્છિક ચલની કિંમતોમાં પરિવર્તનશીલતા અથવા પ્રસાર વિચરણ દ્વારા માપી શકાય છે.

વ્યાખ્યા 7 : ધારો કે X એ યાદચ્છિક ચલ છે તેની શક્ય કિંમતો $x_1, x_2,..., x_n$ ની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $p(x_1), p(x_2),..., p(x_n)$ છે.

X નો મધ્યક $\mu = E(X)$ લો. X ના વિચરણને Var (X) અથવા σ_x^2 દ્વારા દર્શાવાય છે અને તે

$\sigma_x^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$ અથવા સમાનાર્થી $\sigma^2 = E((X - \mu)^2)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

અનૃણ સંખ્યા $\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)}$ ને યાદચ્છિક ચલ X નું પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation) કહે છે.

યાદચ્છિક ચલનું વિચરણ શોધવાનું અન્ય સૂત્ર :

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \mu^2 - 2\mu x_i) p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} 2\mu x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) + \mu^2 - 2\mu^2 \quad \left(\text{કારણ કે, } \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \text{ અને } \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - \mu^2$$

અથવા $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\right)^2$

અથવા $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, જ્યાં, $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i)$

ઉદાહરણ 28 : સમતોલ પાસાને ઉછાળતાં તેના પર મળતી સંખ્યાનું વિચરણ શોધો.

ઉકેલ : પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

ધારો કે X એ પાસાને ઉછાળવાથી મળતી સંખ્યા દર્શાવે છે. તેથી X એ 1, 2, 3, 4, 5 અથવા 6 કિંમતો લઈ શકતો યાદચ્છિક ચલ છે.

વળી, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

આને, કારણે X નું સંભાવના વિતરણ

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

છે.

હવે, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$

વળી, $E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

આમ, $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$

ઉદાહરણ 29 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એકસાથે બે પત્તાં (અથવા એક પછી એક એમ પુરવણીરહિત) પસંદ કરવામાં આવે છે. રાજાઓની સંખ્યાનો મધ્યક, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પસંદ કરવામાં આવેલ બે પત્તાંમાં, X એ રાજાઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. X એ યાદચ્છિક ચલ છે અને તે કિંમતો 0, 1 અથવા 2 ધારણ કરે છે. હવે,

$$P(X = 0) = P(\text{રાજા નહિ}) = \frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48 \times 47}{52 \times 51} = \frac{188}{221}$$

$$P(X = 1) = P(\text{એક રાજા અને એક રાજા નહિ}) = \frac{{}^{4}C_1\, {}^{48}C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{4 \times 48 \times 2}{52 \times 51} = \frac{32}{221}$$

અને $P(X = 2) = P(\text{બે રાજા}) = \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}$

આમ, X નું સંભાવના વિતરણ

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

હવે, X નો મધ્યક $= E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) = 0 \times \frac{188}{221} + 1 \times \frac{32}{221} + 2 \times \frac{1}{221} = \frac{34}{221}$

વળી, $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) = 0^2 \times \frac{188}{221} + 1^2 \times \frac{32}{221} + 2^2 \times \frac{1}{221} = \frac{36}{221}$

હવે, $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{36}{221} - \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$

આથી, $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{6800}}{221} = 0.37$

સ્વાધ્યાય 13.4

1. નીચેના પૈકી કયાં વિતરણ યાદૃચ્છિક ચલનાં સંભાવના વિતરણ નથી તે લખો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો :

(i)

X	0	1	2
P(X)	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.5	0.2	–0.1	0.3

(iii)

Y	–1	0	1
P(Y)	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	–1
P(Z)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

2. એક પાત્રમાં 5 લાલ રંગના અને 2 કાળા રંગના દડા છે. બે દડા યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. ધારો કે X એ કાળા રંગના દડાઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. X ની શક્ય કિંમતો કઈ-કઈ છે ? શું X યાદૃચ્છિક ચલ છે ?
3. ધારો કે જ્યારે સિક્કાને 6 વખત ઉછાળવામાં આવે છે ત્યારે X એ છાપની સંખ્યા અને કાંટાની સંખ્યાનો તફાવત દર્શાવે છે. X ની શક્ય કિંમતો શું છે ?
4. (i) સિક્કાને બે વખત ઉછાળતાં મળતી છાપની સંખ્યા

   (ii) ત્રણ સિક્કાઓને એકસાથે ઉછાળતાં મળતી કાંટાની સંખ્યા

   (iii) સિક્કાને ચાર વખત ઉછાળતાં મળતી છાપની સંખ્યા

   હોય, તો આ ત્રણેય કિસ્સાઓમાં સંભાવના વિતરણ શોધો.
5. જો સફળતા (i) 4 કરતાં મોટી સંખ્યા (ii) ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર પૂર્ણાંક 6 મળે, એ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થતી હોય તો પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં સફળતા મળવાની સંખ્યાઓનું સંભાવના વિતરણ શોધો.
6. 30 વીજળીના ગોળાઓમાંથી 6 ગોળા ખામીયુક્ત છે. પુરવણી સહિત 4 ગોળાઓનો નિદર્શ યાદૃચ્છિક રીતે લીધો છે. ખામીયુક્ત ગોળાઓની સંખ્યા માટેનું સંભાવના વિતરણ શોધો.
7. એક સિક્કો અસમતોલ છે. તેને ઉછાળતાં છાપ મળવાની સંભાવના તે કાંટો મળે તેની સંભાવના કરતાં ત્રણ ગણી છે. જો સિક્કાને બે વાર ઉછાળવામાં આવે, તો કાંટાની સંખ્યા માટેનું સંભાવના વિતરણ શોધો.
8. એક યાદૃચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

   મૂલ્ય નક્કી કરો : (i) k (ii) $P(X < 3)$ (iii) $P(X > 6)$ (iv) $P(0 < X < 3)$
9. યાદૃચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ P(X) નીચે આપેલ સ્વરૂપનું છે. k કોઈક સંખ્યા છે :

$$P(X) = \begin{cases} k, & x = 0 \\ 2k, & x = 1 \\ 3k, & x = 2 \\ 0, & \text{અન્યથા} \end{cases}$$

   (a) k નું મૂલ્ય શોધો.

   (b) $P(X < 2)$, $P(X \le 2)$, $P(X \ge 2)$ શોધો.

10. એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતાં મળતી છાપની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

11. બે પાસાને એકસાથે ફેંકવામાં આવે છે. જો X 6 મળવાની કુલ સંખ્યા દર્શાવે તો X ની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

12. પ્રથમ છ ધન પૂર્ણાંકોમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે સંખ્યાઓ પસંદ (પુરવણીરહિત) કરી છે. ધારો કે X એ બે મેળવેલી સંખ્યાઓ પૈકી મોટી સંખ્યા દર્શાવે છે. E(X) શોધો.

13. ધારો કે X એ બે સમતોલ પાસાઓને ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો દર્શાવે છે. તો X નું વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

14. એક વર્ગમાં 15 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમની વય 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 અને 20 વર્ષ છે. એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરવામાં આવ્યો છે. પ્રત્યેક વિદ્યાર્થી પસંદ થવાની સમાન સંભાવના હતી અને પસંદ થયેલા વિદ્યાર્થીની વય X નોંધી છે. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ શું છે ? X નો મધ્યક, વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

15. એક બેઠકમાં, એક નિશ્ચિત દરખાસ્તની તરફેણમાં 70 % સભ્યો અને તેની વિરોધમાં 30 % સભ્યો છે. એક સભ્ય યાદચ્છિક રીતે પસંદ કર્યો અને જો તે વિરોધ કરે, તો આપણે X = 0 અને જો તે તરફેણમાં હોય તો X = 1 લઈએ. E(X) અને Var (X) શોધો.

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. એક પાસાના ત્રણ પૃષ્ઠ પર 1, બે પૃષ્ઠ પર 2 અને એક પૃષ્ઠ પર 5 અંકિત હોય, તો તેને ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓનો મધ્યક .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

17. ધારો કે પત્તાંની થોકડીમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. ધારો કે X એ મળેલ એક્કાઓની સંખ્યા દર્શાવે છે, તો E(X) નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

13.7 બર્નુલી પ્રયત્નો અને દ્વિપદી વિતરણ

13.7.1 બર્નુલી પ્રયત્નો

ઘણા પ્રયોગો મૂળભૂત રીતે દ્વિભાજનકારક હોય છે. દાખલા તરીકે, ઉછાળેલો સિક્કો ‘છાપ’ અથવા ‘કાંટો’ બતાવે છે. ઉત્પાદિત વસ્તુ ‘ક્ષતિયુક્ત’ અથવા ‘ક્ષતિરહિત’, પ્રશ્નનો પ્રતિભાવ ‘હા’ અથવા ‘ના’ હોઈ શકે. ઈંડાએ ‘બચ્ચું આપ્યું’ અથવા ‘બચ્ચું ન આપ્યું’, નિર્ણય ‘હા છે’ અથવા ‘ના છે’ વગેરે. આવા કિસ્સાઓમાં, તે રોજિંદુ છે કે એક પરિણામને ‘સફળ’ કહેવું અને બીજાને ‘સફળ-નહિ’ અથવા ‘અસફળ’. ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કાને ઉછાળવામાં, જો છાપનું ઉદ્ભવવું એ ઘટનાને સફળતા તરીકે વિચારીએ, તો કાંટાનું ઉદ્ભવવું એ નિષ્ફળતા છે.

દરેક વખતે જ્યારે આપણે સિક્કો ઉછાળીએ અથવા પાસાને ઉછાળીએ કે અન્ય કોઈ પ્રયોગ કરીએ, ત્યારે આપણે તેને *પ્રયત્ન* કહીએ છીએ. જો સિક્કાને 4 વખત ઉછાળીએ, તો પ્રયત્નોની સંખ્યા 4 છે. દરેક પ્રયત્નને બે પરિણામો છે; ‘સફળતા’ અથવા ‘નિષ્ફળતા’.

દરેક પ્રયત્નનું પરિણામ બીજા કોઈ પણ પ્રયત્નના પરિણામથી નિરપેક્ષ છે. આવા પ્રયત્નોમાં સફળતા અથવા નિષ્ફળતાની સંભાવના અચળ રહે છે. આવા જે સ્વતંત્ર પ્રયત્નોનાં બે જ પરિણામ ‘સફળતા’ અને ‘નિષ્ફળતા’ હોય તેમને બર્નુલી પ્રયત્નો કહે છે.

વ્યાખ્યા 8 : નીચેની શરતોનું સમાધાન કરતા યાદચ્છિક પ્રયોગના પ્રયત્નોને બર્નુલી પ્રયત્નો કહે છે.

(i) પ્રયત્નોની સંખ્યા સાન્ત હોવી જોઈએ.

(ii) પ્રયત્નો નિરપેક્ષ હોવા જોઈએ.

(iii) પ્રત્યેક પ્રયત્નને ચોક્કસપણે બે અને બે જ પરિણામો છે : સફળતા અથવા નિષ્ફળતા

(iv) સફળતાની સંભાવના પ્રત્યેક પ્રયત્નમાં સમાન રહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, પાસાને 50 વખત ફેંકવો એ 50 બર્નુલી પ્રયત્નોનો કિસ્સો છે. તેમાં પ્રત્યેક પ્રયત્નનું પરિણામ સફળતા (યુગ્મ સંખ્યા કહો) છે અથવા નિષ્ફળતા (અયુગ્મ સંખ્યા) હોય છે અને સફળતાની સંભાવના (p) એ પાસાને 50 વખત ફેંકવાના તમામ પ્રયત્નો માટે સમાન છે. સ્પષ્ટરૂપે, વારાફરતી પાસાને ફેંકવાના પ્રયત્નો નિરપેક્ષ પ્રયોગો છે. જો પાસો સમતોલ હોય અને તેનાં છ પૃષ્ઠો પર સંખ્યાઓ 1 થી 6 અંકિત હોય, તો $p = \frac{1}{2}$ અને $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ = નિષ્ફળતાની સંભાવના.

ઉદાહરણ 30 : 7 લાલ રંગના અને 9 કાળા રંગના દડા ધરાવતા પાત્રમાંથી છ દડા વારાફરતી ક્રમિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ન પછી પસંદ કરેલ દડાને પાત્રમાં (i) પરત મૂક્યો છે (ii) પરત મૂક્યો નથી, ત્યારે દડાઓને પસંદ કરવાના પ્રયત્નો બર્નુલી પ્રયત્નો છે કે નહિ તે કહો.

ઉકેલ : (i) પ્રયત્નોની સંખ્યા સાન્ત છે. જ્યારે પુરવણી સહિત દડો પસંદ કરવાનું થાય, ત્યારે સફળતાની સંભાવના (લાલ રંગનો દડો કહો) $p = \frac{7}{16}$ છે. આથી પુરવણી સહિત દડા પસંદ કરવાના પ્રયત્ન બર્નુલી પ્રયત્ન છે.

(ii) જ્યારે દડા પસંદ કરવાનું પુરવણીરહિત થાય છે, ત્યારે સફળતાની સંભાવના (એટલે કે લાલ રંગનો દડો) પ્રથમ પ્રયત્નમાં $\frac{7}{16}$ છે. જો પ્રથમ પસંદ કરવામાં આવેલ દડો લાલ રંગનો હોય તો બીજા પ્રયત્નમાં $\frac{6}{15}$ છે અને જો પ્રથમ પસંદ કરવામાં આવેલ દડો કાળા રંગનો હોય, તો તે $\frac{7}{15}$ છે અને આમ આગળ ગણી શકાય. સ્પષ્ટ છે કે સફળતાની સંભાવના બધા જ પ્રયત્નો માટે સમાન નથી. આને કારણે આ પ્રયત્નો, બર્નુલી પ્રયત્નો નથી.

13.7.2 દ્વિપદી વિતરણ

સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. તેમાં પ્રત્યેક પ્રયત્નનું પરિણામ સફળતા (કહો છાપ) અથવા નિષ્ફળતા (કાંટો) છે. પ્રત્યેક પ્રયત્નમાં S અને F અનુક્રમે સફળતા અને નિષ્ફળતા દર્શાવે છે. ધારો કે આપણો રસ જે ઘટનામાં આપણને છ પ્રયત્નોમાં એક સફળતા મળે એ ઘટના શોધવામાં છે.

સ્પષ્ટ છે કે છ જુદા-જુદા વિકલ્પો નીચે યાદી રૂપે આપ્યા છે :

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS.

આ જ પ્રમાણે, બે સફળતાઓ અને ચાર નિષ્ફળતાઓ માટે $\frac{6!}{4! \times 2!}$ ક્રમચયો હોઈ શકે છે. આ બધા પ્રકારોની યાદી કરવી ખૂબ લાંબી પ્રક્રિયા થઈ જશે. આથી, સફળતાઓ 0, 1, 2, 3,..., n સંખ્યાની સંભાવનાઓની ગણતરી લાંબી અને ઘણો સમય માંગી લે તેવી હોઈ શકે છે. લાંબી ગણતરી અને તમામ શક્ય કિસ્સાઓની યાદી તૈયાર કરવાથી દૂર રહેવા, n બર્નુલી પ્રયત્નોમાં સફળતાઓની સંખ્યાની સંભાવનાઓ માટે એક સૂત્ર મેળવવામાં આવ્યું છે. ચાલો આપણે જે ત્રણ બર્નુલી પ્રયત્નો દ્વારા નિર્મિત થયો હોય એવો એક પ્રયોગ આ હેતુ માટે લઈએ. તેમાં પ્રત્યેક પ્રયત્ન માટે સફળતા અને નિષ્ફળતાની સંભાવના અનુક્રમે p અને $q = 1 - p$ છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ ગણ

S_1 = {SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF} છે.

સફળતાઓની સંખ્યા યાદચ્છિક ચલ X છે અને તે કિંમતો 0, 1, 2 અથવા 3 લે છે. સફળતાઓની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$P(X = 0)$ = P(સફળતા નહિ)

$= P(\{FFF\}) = P(F)\, P(F)\, P(F)$

$= q \cdot q \cdot q = q^3$ કારણ કે પ્રયત્નો નિરપેક્ષ છે.

$$P(X = 1) = P(\text{એક સફળતા})$$
$$= P(\{SFF, FSF, FFS\})$$
$$= P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\})$$
$$= P(S)\,P(F)\,P(F) + P(F)\,P(S)\,P(F) + P(F)\,P(F)\,P(S)$$
$$= pqq + qpq + qqp = 3pq^2$$

$$P(X = 2) = P(\text{બે સફળતા})$$
$$= P(\{SSF, SFS, FSS\})$$
$$= P(\{SSF\}) + P(\{SFS\}) + P(\{FSS\})$$
$$= P(S)\,P(S)\,P(F) + P(S)\,P(F)\,P(S) + P(F)\,P(S)\,P(S)$$
$$= ppq + pqp + qpp = 3p^2q$$

અને $P(X = 3) = P(\text{ત્રણ સફળતાઓ})$
$$= P(\{SSS\})$$
$$= P(S)\,P(S)\,P(S) = p^3$$

આમ, X નું સંભાવના વિતરણ છે.

X	0	1	2	3
P(X)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

વળી, $(q + p)^3$ નું દ્વિપદી વિસ્તરણ છે,

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3$$

આપણે નોંધીએ કે સફળતાઓ 0, 1, 2 અથવા 3 ની સંભાવનાઓ $(q + p)^3$ ના વિસ્તરણનાં અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય અને ચતુર્થ પદ છે.

વળી, $q + p = 1$ હોવાથી, આ બધી સંભાવનાઓનો સરવાળો, અપેક્ષા પ્રમાણે 1 છે, તેવો નિષ્કર્ષ મળે છે.

આમ, આપણે તારવી શકીએ કે n બર્નુલી પ્રયત્નોના પ્રયોગમાં 0, 1, 2,..., n સફળતાઓની સંભાવનાઓ $(q + p)^n$ ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ, દ્વિતીય,..., $(n + 1)$ મા પદ તરીકે મેળવી શકાય. આ દાવો સાબિત કરવા માટે, ચાલો આપણે n બર્નુલી પ્રયત્નોના પ્રયોગમાં x સફળતાઓની સંભાવના શોધીએ.

સ્પષ્ટ છે કે x સફળતાઓ (S) ના કિસ્સામાં, $(n - x)$ નિષ્ફળતાઓ (F) મળશે.

હવે, x સફળતાઓ (S) અને $(n - x)$ નિષ્ફળતાઓ (F), $\frac{n!}{x!(n-x)!}$ પ્રકારે મેળવી શકાય. આ પ્રકારો પૈકીના પ્રત્યેકમાં, x સફળતા અને $(n - x)$ નિષ્ફળતાની સંભાવના

$$= P(x \text{ સફળતાઓ}) \cdot P((n - x) \text{ નિષ્ફળતાઓ})$$
$$= \underbrace{P(S) \cdot P(S) \ldots, P(S)}_{x\text{-વખત}} \cdot \underbrace{P(F) \cdot P(F) \ldots, P(F)}_{(n-x)\text{ વખત}} = p^x \cdot q^{n-x}$$

આમ, n બર્નુલી પ્રયત્નોમાં x સફળતાઓની સંભાવના $\frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x \cdot q^{n-x}$

અથવા ${}^nC_x p^x \ q^{n-x}$ છે.

આમ, $P(x \text{ સફળતાઓ}) = {}^nC_x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$ **$(q = 1 - p)$**

સ્પષ્ટ છે કે, P(x સફળતાઓ), એટલે કે ${}^nC_x p^x q^{n-x}$ એ $(q + p)^n$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં $(x + 1)$ મું પદ છે.

આમ, n-બર્નુલી પ્રયત્નો ધરાવતા પ્રયોગમાં સફળતાઓની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ $(q + p)^n$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણ દ્વારા મેળવી શકાય અને તેથી, આ સફળતાઓની સંખ્યા X નું વિતરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

X	0	1	2	...	x	...	n
P(X)	${}^nC_0\, q^n$	${}^nC_1\, q^{n-1} p^1$	${}^nC_2\, q^{n-2} p^2$		${}^nC_x\, q^{n-x} p^x$		${}^nC_n\, p^n$

ઉપર્યુક્ત ***સંભાવના વિતરણ, એ પ્રચલો n અને p સાથેના દ્વિપદી વિતરણ તરીકે ઓળખાય છે, કારણ કે આપેલ કિંમતો n અને p પરથી આપણે સંપૂર્ણ સંભાવના વિતરણ શોધી શકીએ છીએ.***

x સફળતાની સંભાવના P(X = x) ને પણ P(x) વડે દર્શાવાય છે અને તેથી

$$\mathbf{P(x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x,\ x = 0, 1, 2, ..., n \qquad (q = 1 - p)}$$

આ P(x) ને દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય કહેવામાં આવે છે.

જો પ્રત્યેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p હોય, તો n-બર્નુલી પ્રયત્નો સાથેના દ્વિપદી વિતરણને B(n, p) દ્વારા દર્શાવાય છે.

ચાલો, આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 31 : જો સમતોલ સિક્કાને 10 વાર ઉછાળવામાં આવે, તો નીચેની સંભાવના શોધો :

(i) બરાબર છ વખત છાપ મળે. (ii) ઓછામાં ઓછી છ વખત છાપ મળે. (iii) વધુમાં વધુ છ વખત છાપ મળે.

ઉકેલ : સિક્કાને ઉછાળવાની પુનરાવર્તિત પ્રક્રિયા બર્નુલી પ્રયત્નો છે. ધારો કે X એ પ્રયોગના 10 પ્રયત્નોમાં મળતી છાપની સંખ્યા દર્શાવે છે.

સ્પષ્ટ છે કે X એ $n = 10$ અને $p = \frac{1}{2}$ સાથેનું દ્વિપદી વિતરણ ધરાવે છે. આથી,

$$P(X = x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x,\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

અહીં, $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$

તેથી, $$P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

હવે, (i) $P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6! \times 4!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$

(ii) P(ઓછામાં ઓછી 6 વખત છાપ) = $P(X \geq 6)$

$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$= {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left[\left(\frac{10!}{6! \times 4!}\right) + \left(\frac{10!}{7! \times 3!}\right) + \left(\frac{10!}{8! \times 2!}\right) + \left(\frac{10!}{9! \times 1!}\right) + \left(\frac{10!}{10!}\right)\right] \frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$$

(iii) P(વધુમાં વધુ છ વખત છાપ) = $P(X \leq 6)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$$

ઉદાહરણ 32 : એક જથ્થામાં 10 % ઈંડાં ખામીયુક્ત છે અને આ જથ્થામાંથી ક્રમશઃ 10 ઈંડાં પુરવણી સહિત કાઢવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછું એક ઈંડું ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે X એ પસંદ કરેલાં 10 ઈંડાંમાંથી ખામીયુક્ત ઈંડાંઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. ઈંડાં કાઢવાની પ્રક્રિયા પુરવણી સહિત કરવામાં આવી હોવાથી, પ્રયત્નો બર્નુલી પ્રયત્નો છે. સ્પષ્ટ છે કે આ X નું $n = 10$ અને $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ સાથેનું બર્નુલી વિતરણ છે.

આથી, $q = 1 - p = \frac{9}{10}$.

હવે, P(ઓછામાં ઓછું એક ખામીયુક્ત ઈંડું) $= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 - \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

સ્વાધ્યાય 13.5

1. એક પાસાને 6 વખત ફેંકવામાં આવે છે. જો 'અયુગ્મ સંખ્યા મળવી' એ સફળતા હોય, તો (i) 5 સફળતાઓ મળે ? (ii) ઓછામાં ઓછી 5 સફળતાઓ મળે. (iii) વધુમાં વધુ 5 સફળતાઓ મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

2. પાસાઓની જોડને 4 વાર ફેંકવામાં આવે છે. જો સમાન સંખ્યાનું જોડકું મળે તેને સફળતા ગણીએ, તો બે સફળતાઓ મળવાની સંભાવના શોધો.

3. વસ્તુઓના મોટા જથ્થામાં 5 % ખામીયુક્ત વસ્તુઓ છે. 10 વસ્તુઓનો નિદર્શ એક કરતાં વધારે ખામીયુક્ત વસ્તુનો સમાવેશ કરશે નહિ, તેની સંભાવના કેટલી ?

4. સરખી રીતે ચીપેલી 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી ક્રમશઃ પાંચ પત્તાં પુરવણી સહિત ખેંચવામાં આવે છે. (i) બધાં જ પાંચ પત્તાં કાળીના હોય (ii) માત્ર 3 પત્તાં જ કાળીના હોય (iii) એક પણ પત્તું કાળીનું ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

5. એક ફેક્ટરી દ્વારા ઉત્પાદિત વીજળીના ગોળા 150 દિવસના વપરાશ પછી ઊડી જાય તેની સંભાવના 0.05 છે. વીજળીના 5 ગોળાઓ પૈકી (i) એક પણ નહિ (ii) એક કરતાં વધુ નહિ (iii) એક કરતાં વધારે (iv) ઓછામાં ઓછો એક વીજળીનો ગોળો, 150 દિવસના વપરાશ પછી ઊડી જાય તેની સંભાવના શોધો.

6. એક થેલામાં 10 દડા છે. પ્રત્યેક પર 0 થી 9 માંથી એક સંખ્યા અંકિત છે. જો થેલામાંથી 4 દડા વારાફરતી પુરવણી સહિત કાઢવામાં આવે, તો એક પણ દડા પર સંખ્યા 0 અંકિત ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. એક પરીક્ષામાં, 20 પ્રશ્નો સત્ય-અસત્ય પ્રકારના પુછાયા છે. ધારો કે એક વિદ્યાર્થી પોતાના જવાબ નક્કી કરવા માટે એક સમતોલ સિક્કાને પ્રત્યેક પ્રશ્નના ઉત્તર માટે ઉછાળે છે. જો સિક્કા પર છાપ પડે, તો તે જવાબ 'સત્ય' આપે છે; જો સિક્કા પર કાંટો પડે, તો તે જવાબ 'અસત્ય' આપે છે. તે ઓછામાં ઓછા 12 પ્રશ્નોના જવાબ બરાબર આપે તેની સંભાવના શોધો.

8. ધારો કે X નું દ્વિપદી વિતરણ $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ છે. સાબિત કરો કે $X = 3$ એ સૌથી વધુ મળતું પરિણામ છે. (**સૂચન :** $P(X = 3)$ એ બધા જ $P(x_i)$, $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ માં મહત્તમ છે.)

9. પાંચ પ્રશ્નો પૈકી પ્રત્યેક માટે ત્રણ શક્ય જવાબો ધરાવતી બહુવિકલ્પ પસંદગી પરીક્ષામાં ઉમેદવાર માત્ર અટકળ કરીને ચાર અથવા ચાર કરતાં વધારે સાચા જવાબો મેળવશે તેની સંભાવના કેટલી ?

10. એક વ્યક્તિ 50 લૉટરીમાં એક લૉટરી ટિકિટ ખરીદે છે. તેમાંથી પ્રત્યેકમાં તેની ઈનામ જીતવાની તક $\frac{1}{100}$ છે. તે (a) ઓછામાં ઓછી એકવાર (b) ફક્ત એક જ વાર (c) ઓછામાં ઓછી બે વાર ઈનામ જીતશે તેની સંભાવના કેટલી ?

11. પાસાને 7 વાર ફેંકવામાં બરાબર બે વખત 5 મળે તેની સંભાવના શોધો.

12. એક પાસાને 6 વાર ફેંકવામાં વધુમાં વધુ બે વખત 6 મળવાની સંભાવના શોધો.

13. એ જાણીતું છે કે નિશ્ચિત ચીજવસ્તુઓના ઉત્પાદનમાં 10 % ખામીયુક્ત હોય છે. 12 પ્રકારની ચીજવસ્તુઓના યાદૃચ્છિક નિદર્શમાં 9 ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

પ્રશ્નો 14 તથા 15 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

14. 100 વીજળીના ગોળા ધરાવતા ખોખામાં, 10 ખામીયુક્ત છે. 5 ગોળાના નિદર્શમાંથી, એક પણ ખામીયુક્ત ન હોય તેની સંભાવના .... છે.

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

15. વિદ્યાર્થી તરવૈયો નથી તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ છે, તો આપેલ પાંચ વિદ્યાર્થીઓમાંથી ચાર તરવૈયા હોય તેની સંભાવના .... છે.

(A) ${}^5C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1 \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) આમાંથી કોઈ પણ નહિ.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 33 : નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચાર ખાનાંઓમાં રંગીન દડા વહેંચેલા છે :

ખાના	રંગ			
	કાળા	સફેદ	લાલ	ભૂરા
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

એક ખાનું યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને પછી એક દડો પસંદ કરેલા ખાનામાંથી યાદૃચ્છિક રીતે લેવામાં આવે છે. આ પસંદ કરેલા દડાનો રંગ કાળો છે. દડો ખાના નંબર III માંથી કાઢવામાં આવ્યો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ધારો કે A, E_1, E_2, E_3 અને E_4 એ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત ઘટનાઓ છે :

A : કાળા રંગનો દડો પસંદ થયો હોય. E_1 : ખાનું I પસંદ થયું હોય.

E_2 : ખાનું II પસંદ થયું હોય. E_3 : ખાનું III પસંદ થયું હોય.

E_4 : ખાનું IV પસંદ થયું હોય.

ખાનાઓ યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરાયાં હોવાથી, $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

વળી, $P(A|E_1) = \frac{3}{18}$, $P(A|E_2) = \frac{2}{8}$, $P(A|E_3) = \frac{1}{7}$ અને $P(A|E_4) = \frac{4}{13}$ છે.

P(પસંદ થયેલ દડો કાળા રંગનો છે તેમ આપેલ હોય, તો ખાનું III પસંદ થાય તે) = $P(E_3|A)$.

આથી, બેયૂઝના પ્રમેય દ્વારા,

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)\cdot P(A|E_3)}{P(E_1)\cdot P(A|E_1)+P(E_2)\cdot P(A|E_2)+P(E_3)\cdot P(A|E_3)+P(E_4)\cdot P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

ઉદાહરણ 34 : દ્વિપદી વિતરણ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$નો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે X એ યાદૃચ્છિક ચલ છે અને તેનું સંભાવના વિતરણ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ છે. અહીં, $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$ અને $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. આપણે જાણીએ છીએ કે, $P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$. એટલે કે X નું વિતરણ છે.

x_i	$P(x_i)$	$x_i\, P(x_i)$
0	${}^4C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^4$	0
1	${}^4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}^4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$
2	${}^4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$
3	${}^4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$
4	${}^4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

હવે, મધ્યક $\mu = \sum_{i=0}^{4} x_i\, p(x_i)$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\cdot{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4\times\frac{2^3}{3^4} + 2\times 6\times\frac{2^2}{3^4} + 3\times 4\times\frac{2}{3^4} + 4\times 1\times\frac{1}{3^4} = \frac{32+48+24+4}{3^4}$$

$$= \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

ઉદાહરણ 35 : એક નિશાનબાજ લક્ષ્ય પર નિશાન તાકવામાં સફળ થાય તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે. ઓછામાં ઓછી કેટલી વાર તેણે નિશાન લગાવવું જોઈએ, જેથી ઓછામાં ઓછી એક સફળતા મળે તેની સંભાવના 0.99 થી વધારે હોય ?

ઉકેલ : ધારો કે નિશાનબાજ n વખત ગોળીઓ છોડે છે. સ્પષ્ટ છે કે n વખત ગોળીઓ છોડવી એ n બર્નુલી પ્રયત્નો છે. પ્રત્યેક પ્રયત્નમાં, p = નિશાન લક્ષ્ય પર લાગવાની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે અને q = નિશાન લક્ષ્ય પર ન લાગવાની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે.

તેથી, $P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x = {}^nC_x \left(\frac{1}{4}\right)^{n-x} \left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x \frac{3^x}{4^n}$

હવે, આપેલ છે કે P(ઓછામાં ઓછું એકવાર લક્ષ્ય નિશાન પર લાગે) > 0.99

એટલે કે $P(X \geq 1) > 0.99$

આથી, $1 - P(X = 0) > 0.99$ અથવા $1 - {}^nC_0 \frac{1}{4^n} > 0.99$

અથવા ${}^nC_0 \frac{1}{4^n} < 0.01$

એટલે કે $\frac{1}{4^n} < 0.01$

અથવા $4^n > \frac{1}{0.01} = 100$ ...(1)

અસમતા (1) નું સમાધાન કરે તેવી n ની ન્યૂનતમ કિંમત 4 છે.

આમ, નિશાનબાજે 4 વખત લક્ષ્યને નિશાન તાકવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 36 : જ્યાં સુધી તેમનામાંથી એકને '6' ન મળે ત્યાં સુધી A અને B વારાફરતી પાસાને ફેંકે છે અને પ્રથમ 6 મેળવનાર રમત જીતી જાય. A પાસો ફેંકવાની પ્રથમ શરૂઆત કરે, તો અનુક્રમે તેમની જીતવાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે S એ સફળતા ('6' મળે તે) અને F એ નિષ્ફળતા ('6' ન મળે તે) દર્શાવે છે.

આમ, $P(S) = \frac{1}{6}$, $P(F) = \frac{5}{6}$

P(A પ્રથમ વખત ફેંકતા જ જીતે છે) $= P(S) = \frac{1}{6}$

જ્યારે A દ્વારા પ્રથમ વખત પાસો ફેંકતા નિષ્ફળતા મળે અને B દ્વારા બીજી વખત પાસો ફેંકતા નિષ્ફળતા મળે ત્યારે A ને ત્રીજી વખત પાસો ફેંકવાની તક મળે છે.

આથી, P(A ત્રીજી વખત ફેંકવામાં જીતે છે) $= P(FFS)$

$= P(F)\, P(F)\, P(S)$

$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$

અને આમ આગળ ગણતા P(A જીતે છે) $= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$

$= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$

P(B જીતે છે) = 1 – P(A જીતે છે) $= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

નોંધ : જો $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ જ્યાં $|r| < 1$ હોય તો આ અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢીનો સરવાળો $\frac{a}{1-r}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. (ધોરણ 11 ના પાઠ્યપુસ્તકનો A.1.3 જુઓ.)

ઉદાહરણ 37 : જો યંત્ર યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયેલ હોય, તો તે 90 % સ્વીકાર્ય વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. જો તે યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયેલ ન હોય તો તે માત્ર 40 % સ્વીકાર્ય વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. ભૂતકાળનો અનુભવ બતાવે છે કે યંત્ર યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયેલ હોય તેની સંભાવના 80 % છે. જો એક નિયત ગોઠવણ પછી, યંત્ર 2 સ્વીકાર્ય વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે, તો યંત્ર યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયું હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A દર્શાવે છે કે યંત્ર 2 સ્વીકાર્ય વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે.

વળી, B_1 એ મશીન યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયું છે તે ઘટના અને B_2 એ મશીન યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયું નથી તે ઘટના દર્શાવે છે.

હવે, $P(B_1) = 0.8,\ \ P(B_2) = 0.2$

$P(A \mid B_1) = 0.9 \times 0.9$ અને $P(A \mid B_2) = 0.4 \times 0.4$

આથી, $$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)\,P(A \mid B_1)}{P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 13

1. બે ઘટનાઓ A અને B માટે જો $P(A) \neq 0$ અને (i) A એ B નો ઉપગણ હોય (ii) $A \cap B = \phi$, તો $P(B \mid A)$ શોધો.
2. એક યુગલને બે બાળકો છે. (i) ઓછામાં ઓછું એક બાળક છોકરો છે તેમ આપેલ હોય, તો બંને બાળકો છોકરા હોવાની સંભાવના શોધો. (ii) જો મોટું બાળક છોકરી હોય, તો બંને બાળકો છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.
3. ધારો કે 5 % પુરુષો અને 0.25 % સ્ત્રીઓને ભૂખરા રંગના વાળ હોય છે. ભૂખરા વાળવાળી વ્યક્તિને યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરી છે. આ વ્યક્તિ પુરુષ હોવાની સંભાવના કેટલી ? સ્વીકારી લો કે પુરુષો અને સ્ત્રીઓની સંખ્યા સમાન છે.
4. ધારો કે 90 % લોકો જમણેરી છે. 10 વ્યક્તિના યાદૃચ્છિક નિદર્શમાં વધુમાં વધુ 6 લોકો જમણેરી હોવાની સંભાવના કેટલી ?
5. એક પાત્રમાં 25 દડા છે. તેમાંથી 10 દડા પર નિશાની 'X' છે અને બાકીના 15 દડા પર નિશાની 'Y' છે. પાત્રમાંથી એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે કાઢ્યો અને તેના પરની નિશાની નોંધીને તેને પાત્રમાં પરત મૂક્યો. જો આ રીતે 6 દડા કાઢવામાં આવ્યા હોય, તો (i) બધા પર નિશાની 'X' હોય. (ii) 2 કરતાં વધારે પર નિશાની 'Y' ન હોય. (iii) ઓછામાં ઓછા એક દડા પર નિશાની 'Y' હોય (iv) નિશાની 'X' અને નિશાની 'Y' વાળા દડાઓની સંખ્યા સમાન હોય તેની સંભાવના શોધો.
6. એક વિઘ્ન દોડમાં, ખેલાડીએ 10 વિઘ્નો પસાર કરવાના હોય છે. તે દરેક વિઘ્નને સફળતાપૂર્વક પસાર કરે તેની સંભાવના $\frac{5}{6}$ છે. તે બે કરતાં ઓછાં વિઘ્નોને પસાર કરશે તેની સંભાવના કેટલી ?
7. જ્યાં સુધી ત્રણ વખત પૂર્ણાંક 6 ન મળે ત્યાં સુધી એક પાસાને વારંવાર ઉછાળવામાં આવે છે. છઠ્ઠીવાર પાસાને ફેંકતાં ત્રીજી વખત પૂર્ણાંક 6 મળે તેની સંભાવના શોધો.
8. યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ લીપ વર્ષમાં 53 મંગળવાર હોય તેની સંભાવના કેટલી ?
9. એક પ્રયોગ જેટલી વાર નિષ્ફળ જાય છે તેના કરતાં બમણી વખત સફળ થાય છે. હવે પછીના 6 પ્રયત્નોમાં તેને ઓછામાં ઓછી 4 વખત સફળતા મળશે તેની સંભાવના શોધો.
10. એક માણસે એક સમતોલ સિક્કાને કેટલી વાર ઉછાળવો જોઈએ કે જેથી ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે તેની સંભાવના 90 % કરતાં વધારે હોય ?
11. સમતોલ પાસાને ફેંકવાની રમતમાં, એક માણસ પાસા પર પૂર્ણાંક 6 મળે તો એક રૂપિયો જીતે છે અને અન્ય કોઈ પણ પૂર્ણાંક મળે ત્યારે એક રૂપિયો ગુમાવે છે. એ માણસે પાસાને ત્રણ વખત ફેંકવાનો નિર્ણય

કર્યો છે, પરંતુ જેવો એને પૂર્ણાંક 6 મળશે કે તરત જ તે રમતને છોડી દેશે. તે રમત જીતે/ગુમાવે તેની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

12. ધારો કે ચાર ખોખાં A, B, C અને D માં નીચે પ્રમાણે રંગીન લખોટીઓ છે :

ખોખું	લખોટીના રંગ		
	લાલ	સફેદ	કાળી
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

કોઈ એક ખોખાને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી તેમાંથી એક લખોટી પસંદ કરવામાં આવી. જો લખોટી લાલ રંગની હોય તો તે ખોખા A માંથી પસંદ કરી હોય ? B માંથી પસંદ કરી હોય ? C માંથી પસંદ કરી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

13. ધારો કે દર્દીને હૃદયરોગનો હુમલો થવાની શક્યતા 40 % છે. એ પણ ધારેલ છે કે ધ્યાન અને યોગાસનોનો અભ્યાસ હૃદયરોગના હુમલાનું જોખમ 30 % ઘટાડે છે અને નિયત દવાઓ માટે દાક્તરની દવાચિઠ્ઠી તેની શક્યતાઓ 25 % સુધી ઘટાડે છે. એક જ સમયે દર્દી બે સમાન સંભાવનાઓવાળા વિકલ્પોમાંથી કોઈ પણ એકની પસંદગી કરી શકે છે. બેમાંથી એક વિકલ્પમાંથી પસાર થયા પછી, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વ્યક્તિ હૃદયરોગના હુમલાથી પીડિત છે તેમ આપેલ હોય, તો દર્દી ધ્યાન અને યોગાભ્યાસનો કાર્યક્રમ અનુસર્યો છે તેની સંભાવના શોધો.

14. દ્વિહાર નિશ્ચાયકનો પ્રત્યેક ઘટક શૂન્ય અથવા એક હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ધન હોવાની સંભાવના કેટલી ? (ધારો કે નિશ્ચાયકનો દરેક ઘટક નિરપેક્ષ રીતે પસંદ કરાયો હોય, તો પ્રત્યેક ઘટકની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે).

15. વિદ્યુત યંત્રના ભાગોનું જોડાણ બે ઉપરચનાઓ A અને B ધરાવે છે. અગાઉની ચકાસવાની કાર્યપ્રણાલી પરથી નીચેની સંભાવનાઓ જ્ઞાત છે તેમ ધારેલ છે :

P(A નિષ્ફળ જાય) = 0.2

P(ફક્ત B નિષ્ફળ જાય) = 0.15

P(A અને B નિષ્ફળ જાય) = 0.15

નીચેની સંભાવનાઓ શોધો :

(i) P(A નિષ્ફળ જાય | B નિષ્ફળ ગઈ છે) (ii) P(A એકલી નિષ્ફળ જાય)

16. થેલા I માં 3 લાલ રંગના અને 4 કાળા રંગના દડા તથા થેલા II માં 4 લાલ રંગના અને 5 કાળા રંગના દડા છે. એક દડો થેલા I માંથી થેલા II માં મૂક્યો છે અને પછી થેલા II માંથી એક દડો પસંદ કરેલ છે. આ રીતે પસંદ કરેલ દડો લાલ રંગનો માલૂમ પડે તો, થેલા I માંથી થેલા II માં મૂકેલ દડો કાળા રંગનો હોવાની સંભાવના શોધો.

પ્રશ્નો 17 થી 19 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જો A અને B બે ઘટનાઓ માટે $P(A) \neq 0$ અને $P(B | A) = 1$, તો

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

18. જો $P(A | B) > P(A)$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ સત્ય છે ?

(A) $P(B | A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$

(C) $P(B | A) > P(B)$ (D) $P(B | A) = P(B)$

19. જો A અને B કોઈ પણ બે ઘટનાઓ માટે P(A) + P(B) – P(A અને B) = P(A) હોય, તો

(A) $P(B | A) = 1$ (B) $P(A | B) = 1$ (C) $P(B | A) = 0$ (D) $P(A | B) = 0$

સારાંશ

પ્રકરણના સ્પષ્ટ દેખાઈ આવતા લાક્ષણિક મુદ્દાઓ :

- આપેલ હોય કે ઘટના F ઉદ્ભવી ચૂકી છે, તો ઘટના E ની શરતી સંભાવના

  $$P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)},\ P(F) \neq 0$$

- $0 \leq P(E | F) \leq 1,\ \ P(E' | F) = 1 - P(E | F)$

  $P((E \cup F) | G) = P(E | G) + P(F | G) - P((E \cap F) | G)$

- $P(E \cap F) = P(E)\ P(F | E),\ P(E) \neq 0$

  $P(E \cap F) = P(F)\ P(E | F),\ P(F) \neq 0$

- જો E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો

  $P(E \cap F) = P(E)\ P(F)$

  $P(E | F) = P(E),\ \ P(F) \neq 0$

  $P(F | E) = P(F),\ \ P(E) \neq 0$

- સંપૂર્ણ સંભાવનાનો પ્રમેય :

  ધારો કે $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ નિદર્શાવકાશનું વિભાજન છે અને પ્રત્યેક $E_1, E_2, ..., E_n$ ની સંભાવના શૂન્યેતર છે. ધારો કે A એ S ની કોઈક ઘટના છે, તો

  $P(A) = P(E_1)\ P(A | E_1) + P(E_2)\ P(A | E_2) + ... + P(E_n)\ P(A | E_n)$

  બૅયઝનો પ્રમેય : જો $E_1, E_2, ..., E_n$ ઘટનાઓ નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન કરે એટલે કે $E_1, E_2, ..., E_n$ જોડયુક્ત અલગ ઘટનાઓ હોય તથા $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ અને A શૂન્યેતર સંભાવનાવાળી કોઈ ઘટના હોય, તો

  $$P(E_i | A) = \frac{P(E_i)\ P(A | E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\ P(A | E_j)}$$

- યાદચ્છિક ચલ, જેનો પ્રદેશ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ હોય તેવું વાસ્તવિક મૂલ્યોવાળું વિધેય છે.

- યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ એ સંખ્યાઓની વ્યવસ્થા છે.

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

  જ્યાં, $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad i = 1, 2, ..., n$

- ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X ની શક્ય કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે અને $x_1, x_2, ..., x_n$ ની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ છે.

  X નો મધ્યક એ μ વડે દર્શાવાતી સંખ્યા $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ છે. યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યકને X ની ગાણિતિક અપેક્ષા પણ કહે છે. તેને E(X) વડે દર્શાવાય છે.

- ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X ની શક્ય કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે અને $x_1, x_2, ..., x_n$ ની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$ છે.

  ધારો કે μ = E(X) એ X નો મધ્યક છે. X ના વિચરણને Var (X) અથવા σ_x^2 વડે દર્શાવાય છે.

  $\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$ અથવા $\sigma_x^2 = E((X - \mu)^2)$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે.

  અનૃણ સંખ્યા $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)}$ ને યાદચ્છિક ચલ X નું પ્રમાણિત વિચલન કહે છે.

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- જો યાદચ્છિક પ્રયોગના પ્રયત્નો, નીચેની શરતોનું પાલન કરે તો તેમને *બર્નુલી* પ્રયત્નો કહે છે :

  (i) પ્રયત્નોની સંખ્યા નિશ્ચિત હોવી જોઈએ.

  (ii) પ્રયત્નો નિરપેક્ષ હોવા જોઈએ.

  (iii) પ્રત્યેક પ્રયત્ને માત્ર બે ને બે જ પરિણામો છે : સફળતા અથવા નિષ્ફળતા

  (iv) પ્રત્યેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના સમાન રહે છે. બર્નુલી વિતરણ B(n, p) માટે,

  $P(X = x) = {}^nC_x \, q^{n-x} p^x, \; x = 0, 1, 2, ..., n \qquad (q = 1 - p)$

Historical Note

The earliest indication on measurement of chances in game of dice appeared in C.E. 1477 in a commentary on Dante's Divine Comedy. A treatise on gambling named ***liber de Ludo Alcae***, by ***Geronimo Carden*** (C.E. 1501 - C.E. 1576) was published posthumously in C.E. 1663. In this treatise, he gives the number of favourable cases for each event, when two dice are thrown.

Galileo (C.E. 1564 - C.E. 1642) gave casual remarks concerning the correct evaluation of chance in a game of three dice. ***Galileo*** analysed that when three dice are thrown, the sum of the number that appear is more likely to be 10 than the sum 9, because the number of cases favourable to 10 are more than the number of cases for the appearance of number 9.

Apart from these early contributions, it is generally acknowledged that the true origin of the science of probability lies in the correspondence between two great men of the seventeenth century, ***Pascal*** (C.E. 1623 - C.E. 1662) and ***Pierre de Fermat*** (C.E. 1601 - C.E. 1665). A French gambler, ***Chevalier de Metre*** asked ***Pascal*** to explain some seeming contradiction between his theoretical reasoning and the observation gathered from gambling. In a series of letters written around C.E. 1654, ***Pascal*** and ***Fermat*** laid the first foundation of science of probability. ***Pascal*** solved the problem in algebraic manner while ***Fermat*** used the method of combinations.

Great Dutch Scientist, ***Huygens*** (C.E. 1629 - C.E. 1695), became acquainted with the content of the correspondence between ***Pascal*** and ***Fermat*** and published a first book on probability, ***"De Ratiociniis in Ludo Aleae"*** containing solution of many interesting rather than difficult problems on probability in games of chances.

The next great work on probability theory is by ***Jacob Bernoulli*** (C.E. 1654 - C.E. 1705), in the form of a great book, ***"Ars Conjectendi"*** published posthumously in C.E. 1713 by his nephew, ***Nicholes Bernoulli***. To him is due the discovery of one of the most important probability distribution known as ***Binomial distribution***. The next remarkable work on probability lies in C.E. 1993. ***A. N. Kolmogorov*** (C.E. 1903 - C.E. 1987) is credited with the axiomatic theory of probability. His book, ***'Foundations of probability'*** published in C.E. 1933, introduces probability as a set function and is considered a 'classic!'.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x$
3. $\frac{1}{2}e^{2x}$
4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x}$
6. $\frac{4}{3}e^{3x} + x + c$
7. $\frac{x^3}{3} - x + c$
8. $\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + c'$
9. $\frac{2}{3}x^3 + e^x + c$
10. $\frac{x^2}{2} + \log|x| - 2x + c$
11. $\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + c$
12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{x} + c$
13. $\frac{x^3}{3} + x + c$
14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$
15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + c$
16. $x^2 - 3\sin x + e^x + c$
17. $\frac{2}{3}x^3 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
18. $\tan x + \sec x + c$
19. $\tan x - x + c$
20. $2\tan x - 3\sec x + c$
21. C
22. A

સ્વાધ્યાય 7.2

1. $\log(1+x^2) + c$
2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3 + c$
3. $\log|1+\log x| + c$
4. $\cos(\cos x) + c$
5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b) + c$
6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + c$
7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$
8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + c$
9. $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} + c$
10. $2\log|\sqrt{x}-1| + c$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}\,(x-8) + c$
12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}} + c$
13. $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2} + c$
14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m} + c$
15. $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2| + c$
16. $\frac{1}{2}e^{2x+3} + c$
17. $-\frac{1}{2e^{x^2}} + c$
18. $e^{\tan^{-1}x} + c$
19. $\log(e^x + e^{-x}) + c$
20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x} + e^{-2x}) + c$
21. $\frac{1}{2}\tan(2x-3) - x + c$
22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x) + c$
23. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 + c$
24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x + 3\cos x| + c$
25. $\frac{1}{(1-\tan x)} + c$
26. $2\sin\sqrt{x} + c$
27. $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{2}{3}} + c$
28. $2\sqrt{1+\sin x} + c$

29. $\frac{1}{2}(\log \sin x)^2 + c$

30. $-\log |1 + \cos x| + c$

31. $\frac{1}{1+\cos x} + c$

32. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + c$

33. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|\cos x - \sin x| + c$

34. $2\sqrt{\tan x} + c$

35. $\frac{1}{3}(1 + \log x)^3 + c$

36. $\frac{1}{3}(x + \log x)^3 + c$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1} x^4) + c$

38. D

39. B

સ્વાધ્યાય 7.3

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin(4x + 10) + c$

2. $-\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + c$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x + x + \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 4x\right] + c$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x + 1) + \frac{1}{6}\cos^3(2x + 1) + c$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + c$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right] + c$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 12x\right] + c$

8. $2\tan\frac{x}{2} - x + c$

9. $x - \tan\frac{x}{2} + c$

10. $\frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

11. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + c$

12. $x - \sin x + c$

13. $2(\sin x + x\cos\alpha) + c$

14. $-\frac{1}{\cos x + \sin x} + c$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x - \frac{1}{2}\sec 2x + c$

16. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

17. $\sec x - \operatorname{cosec} x + c$

18. $\tan x + c$

19. $\log|\tan x| + \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

20. $\log|\cos x + \sin x| + c$

21. $\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + c$

22. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right| + c$

23. A

24. B

સ્વાધ્યાય 7.4

1. $\tan^{-1} x^3 + c$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right| + c$

3. $\log\left|\frac{1}{2 - x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}}\right| + c$

4. $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3} + c$

5. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2 + c$

6. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right| + c$

7. $\sqrt{x^2 - 1} - \log\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + c$

8. $\frac{1}{3}\log\left|x^3 + \sqrt{x^6 + a^6}\right| + c$

9. $\log \left| \tan x + \sqrt{\tan^2 x + 4} \right| + c$

10. $\log \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| + c$

11. $\frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{3x+1}{2} \right) + c$

12. $\sin^{-1} \left(\frac{x+3}{4} \right) + c$

13. $\log \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right| + c$

14. $\sin^{-1} \left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}} \right) + c$

15. $\log \left| x - \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)} \right| + c$

16. $2\sqrt{2x^2 + x - 3} + c$

17. $\sqrt{x^2 - 1} + 2 \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + c$

18. $\frac{5}{6} \log | 3x^2 + 2x + 1 | - \frac{11}{3\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$

19. $6\sqrt{x^2 - 9x + 20} + 34 \log \left| x - \frac{9}{2} + \sqrt{x^2 - 9x + 20} \right| + c$

20. $-\sqrt{4x - x^2} + 4\sin^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) + c$

21. $\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \log \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right| + c$

22. $\frac{1}{2} \log | x^2 - 2x - 5 | + \frac{2}{\sqrt{6}} \log \left| \frac{x - 1 - \sqrt{6}}{x - 1 + \sqrt{6}} \right| + c$

23. $5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \log \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10} \right| + c$

24. B

25. B

સ્વાધ્યાય 7.5

1. $\log \frac{(x+2)^2}{|x+1|} + c$

2. $\frac{1}{6} \log \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$

3. $\log | x - 1 | - 5 \log | x - 2 | + 4 \log | x - 3 | + c$

4. $\frac{1}{2} \log | x - 1 | - 2 \log | x - 2 | + \frac{3}{2} \log | x - 3 | + c$

5. $4 \log | x + 2 | - 2 \log | x + 1 | + c$

6. $\frac{x}{2} + \log | x | - \frac{3}{4} \log | 1 - 2x | + c$

7. $\frac{1}{2} \log | x - 1 | - \frac{1}{4} \log (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

8. $\frac{2}{9} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3(x-1)} + c$

9. $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{4}{x-1} + c$

10. $\frac{5}{2} \log | x + 1 | - \frac{1}{10} \log | x - 1 | - \frac{12}{5} \log | 2x + 3 | + c$

11. $\frac{5}{3} \log | x + 1 | - \frac{5}{2} \log | x + 2 | + \frac{5}{6} \log | x - 2 | + c$

12. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log | x + 1 | + \frac{3}{2} \log | x - 1 | + c$

13. $- \log | x - 1 | + \frac{1}{2} \log (1 + x^2) + \tan^{-1} x + c$

14. $3 \log | x + 2 | + \frac{7}{x+2} + c$

15. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right| + c$

17. $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right| + c$

18. $x + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} - 3\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

19. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right) + c$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right| + c$

21. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right) + c$

22. B

23. A

સ્વાધ્યાય 7.6

1. $-x\cos x + \sin x + c$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c$

3. $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

4. $\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{x^2}{4} + c$

6. $\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + c$

7. $\frac{1}{4}(2x^2-1)\sin^{-1}x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + c$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

9. $(2x^2-1)\frac{\cos^{-1}x}{4} - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + c$

10. $(\sin^{-1}x)^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - 2x + c$

11. $-\left[\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x + x\right] + c$

12. $x\tan x + \log|\cos x| + c$

13. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + c$

15. $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \frac{x^3}{9} - x + c$

16. $e^x\sin x + c$

17. $\frac{e^x}{1+x} + c$

18. $e^x\tan\frac{x}{2} + c$

19. $\frac{e^x}{x} + c$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2} + c$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + c$

22. $2x\tan^{-1}x - \log(1+x^2) + c$

23. A

24. B

સ્વાધ્યાય 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + c$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + c$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6} + \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + c$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1} - \frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + c$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + c$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5} - \frac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right| + c$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2} + \frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right) + c$

8. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x} - \frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right| + c$

9. $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9} + \frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + c$

10. A

11. D

12. $\frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8} + \frac{1}{16}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + c$

13. $\frac{1}{6}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+3} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right| + c$

14. $-\frac{1}{3}(3-4x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + \frac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2} + c$

સ્વાધ્યાય 7.8

1. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

2. $\frac{35}{2}$

3. $\frac{19}{3}$

4. $\frac{27}{2}$

5. $e - \frac{1}{e}$

6. $\frac{15+e^8}{2}$

સ્વાધ્યાય 7.9

1. 2

2. $\log\frac{3}{2}$

3. $\frac{64}{3}$

4. $\frac{1}{2}$

5. 0

6. $e^4(e-1)$

7. $\frac{1}{2}\log 2$

8. $\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$

9. $\frac{\pi}{2}$

10. $\frac{\pi}{4}$

11. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

12. $\frac{\pi}{4}$

13. $\frac{1}{2}\log 2$

14. $\frac{1}{5}\log 6 + \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

15. $\frac{1}{2}(e-1)$

16. $5 - \frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4} - \log\frac{3}{2}\right)$

17. $\frac{\pi^4}{1024} + \frac{\pi}{2} + 2$

18. 0

19. $3\log 2 + \frac{3\pi}{8}$

20. $1 + \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

21. D

22. C

સ્વાધ્યાય 7.10

1. $\frac{1}{2}\log 2$
2. $\frac{64}{231}$
3. $\frac{\pi}{2} - \log 2$
4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$
5. $\frac{\pi}{4}$
6. $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$
7. $\frac{\pi}{8}$
8. $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$
9. A
10. B

સ્વાધ્યાય 7.11

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{4}$
5. 29
6. 9
7. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
8. $\frac{\pi}{8}\log 2$
9. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$
10. $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$
11. $\frac{\pi}{2}$
12. π
13. 0
14. 0
15. 0
16. $-\pi\log 2$
17. $\frac{a}{2}$
18. 5
20. C
21. C

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 7

1. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right| + c$
2. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - (x+b)^{\frac{3}{2}}\right] + c$
3. $-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}} + c$
4. $-\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} + c$
5. $2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log(1+x^{\frac{1}{6}}) + c$
6. $-\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$
7. $\sin a\log|\sin(x-a)| + x\cos a + c$
8. $\frac{x^3}{3} + c$
9. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$
10. $-\frac{1}{2}\sin 2x + c$
11. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + c$
12. $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + c$
13. $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right) + c$
14. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$
15. $-\frac{1}{4}\cos^4 x + c$
16. $\frac{1}{4}\log(x^4+1) + c$

17. $\dfrac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)} + c$

18. $\dfrac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}} + c$

19. $\dfrac{2(2x-1)}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x} + \dfrac{2\sqrt{x-x^2}}{\pi} - x + c$

20. $-2\sqrt{1-x} + \cos^{-1}\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2} + c$

21. $e^x \tan x + c$

22. $-2\log|x+1| - \dfrac{1}{x+1} + 3\log|x+2| + c$

23. $\dfrac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}\right] + c$

24. $-\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{3}\right] + c$

25. $e^{\frac{\pi}{2}}$

26. $\dfrac{\pi}{8}$

27. $\dfrac{\pi}{6}$

28. $2\sin^{-1}\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

29. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

30. $\dfrac{1}{40}\log 9$

31. $\dfrac{\pi}{2} - 1$

32. $\dfrac{\pi}{2}(\pi - 2)$

33. $\dfrac{19}{2}$

40. $\dfrac{1}{3}\left(e^2 - \dfrac{1}{e}\right)$

41. A

42. B

43. D

44. B

સ્વાધ્યાય 8.1

1. $\dfrac{14}{3}$ ચો એકમ

2. $(16 - 4\sqrt{2})$ ચો એકમ

3. $\dfrac{32-8\sqrt{2}}{3}$ ચો એકમ

4. 12π ચો એકમ

5. 6π ચો એકમ

6. $\dfrac{\pi}{3}$ ચો એકમ

7. $\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ ચો એકમ

8. $(4)^{\frac{2}{3}}$

9. $\dfrac{1}{3}$ ચો એકમ

10. $\dfrac{9}{8}$ ચો એકમ

11. $8\sqrt{3}$ ચો એકમ

12. A

13. B

સ્વાધ્યાય 8.2

1. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6} + \dfrac{9}{4}\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ ચો એકમ

2. $\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ચો એકમ

3. $\dfrac{21}{2}$ ચો એકમ

4. 4 ચો એકમ

5. 8 ચો એકમ

6. B

7. B

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 8

1. (i) $\frac{7}{3}$ ચો એકમ (ii) 624.8 ચો એકમ
2. $\frac{1}{6}$ ચો એકમ
3. $\frac{7}{3}$ ચો એકમ
4. 9
5. 4 ચો એકમ
6. $\frac{8a^2}{3m^3}$ ચો એકમ
7. 27 ચો એકમ
8. $\frac{3}{2}(\pi - 2)$ ચો એકમ
9. $\frac{ab}{4}(\pi - 2)$ ચો એકમ
10. $\frac{9}{2}$ ચો એકમ
11. 2 ચો એકમ
12. $\frac{1}{3}$ ચો એકમ
13. 7 ચો એકમ
14. $\frac{7}{2}$ ચો એકમ
15. $\left(\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ ચો એકમ
16. D
17. C
18. C
19. B

સ્વાધ્યાય 9.1

1. કક્ષા 4; પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત
2. કક્ષા 1; પરિમાણ 1
3. કક્ષા 2; પરિમાણ 1
4. કક્ષા 2; પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત
5. કક્ષા 2; પરિમાણ 1
6. કક્ષા 3; પરિમાણ 2
7. કક્ષા 3; પરિમાણ 1
8. કક્ષા 1; પરિમાણ 1
9. કક્ષા 2; પરિમાણ 1
10. કક્ષા 2; પરિમાણ 1
11. D
12. A

સ્વાધ્યાય 9.2

11. D
12. D

સ્વાધ્યાય 9.3

1. $y'' = 0$
2. $xy\, y'' + x(y')^2 - yy' = 0$
3. $y'' - y' - 6y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$
5. $y'' - 2y' + 2y = 0$
6. $2xyy' + x^2 = y^2$
7. $xy' - 2y = 0$
8. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
9. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
10. $(x^2 - 9)(y')^2 + x^2 = 0$
11. B
12. C

સ્વાધ્યાય 9.4

1. $y = 2\, tan\frac{x}{2} - x + c$
2. $y = 2sin\,(x + c)$
3. $y = 1 + Ae^{-x}$
4. $tan\, x\, tan\, y = c$
5. $y = \log\,(e^x + e^{-x}) + c$
6. $tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + c$
7. $y = e^{cx}$
8. $x^{-4} + y^{-4} = c$

9. $y = x\ sin^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + c$

10. $tan\ y = c\,(1 - e^x)$

11. $y = \frac{1}{4}\log\,[(x + 1)^2\,(x^2 + 1)^3] - \frac{1}{2}tan^{-1}x + 1$

12. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\,\frac{3}{4}$

13. $cos\left(\frac{y - 2}{x}\right) = a$

14. $y = sec\ x$

15. $2y - 1 = e^x\,(sin\ x - cos\ x)$

16. $y - x + 2 = \log\,(x^2\,(y + 2)^2)$

17. $y^2 - x^2 = 4$

18. $(x + 4)^2 = y + 3$

19. $(63t + 27)^{\frac{1}{3}}$

20. 6.93 %

21. ₹ 1648

22. $\frac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$

23. A

સ્વાધ્યાય 9.5

1. $(x - y)^2 = cx\ e^{\frac{-y}{x}}$

2. $y = x\log|x| + cx$

3. $tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\log\,(x^2 + y^2) + c$

4. $x^2 + y^2 = cx$

5. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x + \sqrt{2}y}{x - \sqrt{2}y}\right| = \log|x| + c$

6. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

7. $xy\ cos\left|\frac{x}{y}\right| = c$

8. $x\left[1 - cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] = c\ sin\left(\frac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\left|\frac{y}{x}\right| - 1$

10. $ye^{\frac{x}{y}} + x = c$

11. $\log\,(x^2 + y^2) + 2tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + \log 2$

12. $y + 2x = 3x^2y$

13. $cot\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

14. $cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

15. $y = \frac{2x}{1 - \log|x|}$ $(x \neq 0,\ x \neq e)$

16. C

17. D

સ્વાધ્યાય 9.6

1. $y = \frac{1}{5}(2sin\ x - cos\ x) + ce^{-2x}$

2. $y = e^{-2x} + ce^{-3x}$

3. $xy = \frac{x^4}{4} + c$

4. $y\,(sec\ x + tan\ x) = sec\ x + tan\ x - x + c$

5. $y = (tan\ x - 1) + ce^{-tan\ x}$

6. $y = \frac{x^2}{16}\,(4\log|x| - 1) + cx^{-2}$

7. $y \log x = \frac{-2}{x}(1 + \log|x|) + c$

8. $y = (1 + x)^{-1} \log|\sin x| + c(1 + x^2)^{-1}$

9. $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{c}{x \sin x}$

10. $(x + y + 1) = ce^y$

11. $x = \frac{y^2}{3} + \frac{c}{y}$

12. $x = 3y^2 + cy$

13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$

14. $y(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$

16. $x + y + 1 = e^x$

17. $y = 4 - x - 2e^x$

18. C

19. D

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 9

1. (i) કક્ષા 2; પરિમાણ 1 (ii) કક્ષા 1; પરિમાણ 3 (iii) કક્ષા 4; પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત

3. $y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$

5. $(x + yy')^2 = (x - y)^2(1 + (y')^2)$

6. $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = c$

8. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

9. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$

10. $e^{\frac{x}{y}} = y + c$

11. $\log|x - y| = x + y + 1$

12. $ye^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + c)$

13. $y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$ $(\sin x \neq 0)$

14. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, \quad x \neq -1$

15. 31,250

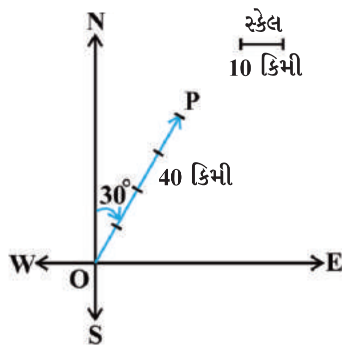
16. C

17. C

18. C

સ્વાધ્યાય 10.1

1. નીચેની આકૃતિમાં સદિશ $\overrightarrow{OP}$ આવશ્યક સ્થાનાંતર દર્શાવે છે :



2. (i) અદિશ (ii) સદિશ (iii) અદિશ (iv) અદિશ (v) અદિશ (vi) સદિશ

3. (i) અદિશ (ii) અદિશ (iii) સદિશ (iv) સદિશ (v) અદિશ

4. (i) સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{d}$ સમઉદ્‌ભવ છે.

(ii) સદિશ $\vec{b}$ અને $\vec{d}$ સમાન છે.

(iii) સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{c}$ સમરેખ છે પરંતુ સમાન નથી.

3. (i) સત્ય (ii) અસત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય

સ્વાધ્યાય 10.2

1. $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = \sqrt{62}, |\vec{c}| = 1$

2. અગણિત શક્ય જવાબો

3. અગણિત શક્ય જવાબો

4. $x = 2, y = 3$

5. -7 અને 6; $-7\hat{i}$ અને $6\hat{j}$

6. $-4\hat{j} - \hat{k}$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$

12. $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

15. (i) $-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i} + 3\hat{k}$

16. $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

18. C

19. C

સ્વાધ્યાય 10.3

1. $\frac{\pi}{4}$

2. $cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

3. 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$

6. $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

7. $6|\vec{a}|^2 + 11\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 35|\vec{b}|^2$

8. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$

9. $\sqrt{13}$

10. 8

12. સદિશ $\vec{b}$ કોઈ પણ સદિશ હોઈ શકે.

13. $\frac{-3}{2}$

14. કોઈ પણ બે શૂન્યેતર પરસ્પર લંબ સદિશો $\vec{a}$ તથા $\vec{b}$ પસંદ કરો.

15. $cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$

18. D

સ્વાધ્યાય 10.4

1. $19\sqrt{2}$

2. $\pm\frac{2}{3}\hat{i} \mp \frac{2}{3}\hat{j} \mp \frac{1}{3}\hat{k}$

3. $\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$

4. $3, \frac{27}{2}$

6. $|\vec{a}| = 0$ અથવા $|\vec{b}| = 0$

8. ના, કોઈ પણ બે શૂન્યેતર સમરેખ સદિશો લો.

9. $\frac{\sqrt{61}}{2}$

10. $15\sqrt{2}$

11. B

12. C

સ્વાધ્યાય 10.5

1. 24

3. $\lambda = 15$

4. (a) $c_3 = 2$

6. $x = 5$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 10

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$; $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

3. $\frac{-5}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. ના, $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ ત્રિકોણની બાજુઓ દર્શાવતા સદિશો લો.

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i} + \frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$

7. $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. 2:3

9. $3\vec{a} + 5\vec{b}$

10. $\frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$; $11\sqrt{5}$

12. $\frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} - 70\hat{k})$

13. $\lambda = 1$

16. B

17. D

18. C

19. B

સ્વાધ્યાય 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}; \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

સ્વાધ્યાય 11.2

4. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$, λ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

5. $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ અને

કાર્તેઝિય સ્વરૂપ $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ છે.

6. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$

7. $\vec{r} = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$

8. રેખાનું સદિશ સમીકરણ : $\vec{r} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$;

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ : $\frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$

9. રેખાનું સદિશ સમીકરણ : $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(11\hat{k})$

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ : $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{11}$

10. (i) $\theta = cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ (ii) $\theta = cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

11. (i) $\theta = cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

12. $p = \frac{70}{11}$

14. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

15. $2\sqrt{29}$

16. $\frac{3}{\sqrt{19}}$

17. $\frac{8}{\sqrt{29}}$

સ્વાધ્યાય 11.3

1. (a) 0, 0, 1; 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}; \frac{5}{\sqrt{14}}$ (d) 0, –5, 0; $\frac{8}{5}$

2. $\vec{r} \cdot \left(\frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$

3. (a) $x + y - z = 2$ (b) $2x + 3y - 4z = 1$

(c) $(s - 2t)\, x + (3 - t)\, y + (2s + t)\, z = 15$

4. (a) $\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ (b) $\left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(0, \frac{-8}{5}, 0\right)$

5. (a) $[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})] \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0;\ x + y - z = 3$

(b) $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})] \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0;\ x - 2y + z + 1 = 0$

6. (a) બિંદુઓ સમરેખ છે. તેમનામાંથી અગણિત સમતલો પસાર થાય.

(b) $2x + 3y - 3z = 5$

7. $\frac{5}{2}$, 5, –5 **8.** $y = 3$ **9.** $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

10. $\vec{r} \cdot (38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}) = 153$ **11.** $x - z + 2 = 0$

12. $\cos^{-1}\frac{15}{\sqrt{731}}$

13. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ (b) સમતલો પરસ્પર લંબ છે.

(c) સમતલો સમાંતર છે. (d) સમતલો સમાંતર છે. (e) 45°

14. (a) $\frac{3}{13}$ (b) $\frac{13}{3}$

(c) 3 (d) 2

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 11

3. 90° **4.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ **5.** 0° અથવા 180°

6. $k = \frac{-10}{7}$ **7.** $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

8. $x + y + z = a + b + c$ **9.** 9

10. $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ **11.** $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ **12.** (1, –2, 7)

13. $7x - 8y + 3z + 25 = 0$

14. $p = 1$ અથવા $\frac{7}{3}$

15. $y - 3z + 6 = 0$

16. $x + 2y - 3z - 14 = 0$

17. $33x + 45y + 50z - 41 = 0$

18. 13

19. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

20. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

22. D

23. B

સ્વાધ્યાય 12.1

1. (0, 4) આગળ મહત્તમ Z = 16

2. (4, 0) આગળ ન્યૂનતમ Z = –12

3. $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ આગળ મહત્તમ $Z = \frac{235}{19}$

4. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ આગળ ન્યૂનતમ Z = 7

5. (4, 3) આગળ મહત્તમ Z = 18

6. (6, 0) અને (0, 3) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડ પરનાં બધાં જ બિંદુએ ન્યૂનતમ Z = 6

7. (60, 0) આગળ ન્યૂનતમ Z = 300

(120, 0) અને (60, 30) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડ પરનાં બધાં જ બિંદુએ મહત્તમ Z = 600

8. (0, 50) અને (20, 40) ને જોડતા રેખાખંડ પરનાં બધાં બિંદુએ ન્યૂનતમ Z = 100

(0, 200) આગળ મહત્તમ Z = 400

9. Z ને મહત્તમ કિંમત નથી.

10. શક્ય ઉકેલનો કોઈ પ્રદેશ નથી. Z ને મહત્તમ કિંમત નથી.

સ્વાધ્યાય 12.2

1. $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ તથા $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ને જોડતા રેખાખંડ પરનાં બધાં જ બિંદુએ ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 160.

2. કેકની મહત્તમ સંખ્યા 30 (એક પ્રકારની 20 કેક અને બીજા પ્રકારની કેકની સંખ્યા 10).

3. (i) 4 ટેનિસ રૅકેટ્સ, 12 ક્રિકેટ બૅટ

(ii) મહત્તમ નફો ₹ 200

4. ખીલાના 3 તથા ચાકીના 3 પૅકેટ્સ, મહત્તમ નફો ₹ 73.50

5. A પ્રકારના સ્ક્રૂના 30 તથા B પ્રકારના સ્ક્રૂના 20 પૅકેટ્સ, મહત્તમ નફો ₹ 410

6. 4 બેઠકવાળા લૅમ્પ્સ તથા 4 લાકડાંના શેડ્સ, મહત્તમ નફો ₹ 32

7. A પ્રકારની 8 સ્મરણિકા તથા B પ્રકારની 20 સ્મરણિકા, મહત્તમ નફો ₹ 160

8. 200 એકમો મેજ પર રાખી શકાય તેવા (Desktop) અને 50 એકમો સુવાહ્ય (Portable) પ્રકારના કમ્પ્યૂટર્સ, મહત્તમ નફો ₹ 11,50,000

9. $Z = 4x + 6y$ નું નીચે આપેલ શરતોને અધીન ન્યૂનતમ મૂલ્ય :
$3x + 6y \geq 80$ અને $4x + 3y \geq 100$, $x \geq 0$ અને $y \geq 0$, જ્યાં x અને y અનુક્રમે ખોરાક F_1 તથા F_2 ના એકમોની સંખ્યા છે. ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 104

10. ખાતર F_1 100 કિગ્રા તથા ખાતર F_2 80 કિગ્રા, ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 1000

11. D

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 12

1. ખોરાક P ના 40 પૅકેટ્સ અને ખોરાક Q ના 15 પૅકેટ્સ. વિટામિન A નો મહત્તમ જથ્થો 285 એકમ

2. P પ્રકારની 3 થેલી અને Q પ્રકારની 6 થેલી, મિશ્રણની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 1950 છે.

3. ખોરાક X 2 કિગ્રા તથા ખોરાક Y 4 કિગ્રા લેતાં મિશ્રણની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 112 છે.

5. ઉચ્ચ વર્ગની 40 ટિકિટ તથા સુલભ વર્ગની 160 ટિકિટ; મહત્તમ નફો ₹ 1,36,000

6. A માંથી 10, 50 તથા 40 ક્વિન્ટલ તથા B માંથી 50, 0 તથા 0 ક્વિન્ટલ અનુક્રમે D, E તથા F તરફ, ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 510

7. A માંથી 500, 3000 અને 3500 લિટર તથા B માંથી 4000, 0 તથા 0 લિટર અનુક્રમે D, E તથા F તરફ, ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 4400

8. P પ્રકારની 40 થેલી તથા Q પ્રકારની 100 થેલી, નાઇટ્રોજનનો લઘુતમ જથ્થો 470 કિગ્રા

9. P પ્રકારની 140 થેલી તથા Q પ્રકારની 50 થેલી, નાઇટ્રોજનનો મહત્તમ જથ્થો 595 કિગ્રા

10. A પ્રકારની 800 ઢિંગલી તથા B પ્રકારની 400 ઢિંગલી, મહત્તમ નફો ₹ 16,000

સ્વાધ્યાય 13.1

1. $P(E|F) = \frac{2}{3}$, $P(F|E) = \frac{1}{3}$ **2.** $P(A|B) = \frac{16}{25}$

3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98

4. $\frac{11}{26}$

5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$

7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$ **9.** 1 **10.** (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ **15.** 0 **16.** C **17.** D

સ્વાધ્યાય 13.2

1. $\frac{3}{25}$ **2.** $\frac{25}{102}$ **3.** $\frac{44}{91}$

4. A અને B નિરપેક્ષ છે. **5.** A અને B નિરપેક્ષ નથી.

6. E અને F નિરપેક્ષ નથી.

7. (i) $p = \frac{1}{10}$ (ii) $p = \frac{1}{5}$

8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

9. $\frac{3}{8}$ **10.** A અને B નિરપેક્ષ નથી.

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

12. $\frac{7}{8}$ **13.** (i) $\frac{16}{81}$ (ii) $\frac{20}{81}$ (iii) $\frac{40}{81}$

14. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$ **15.** (i), (ii) **16.** (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$

17. D **18.** B

સ્વાધ્યાય 13.3

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{9}{13}$ **4.** $\frac{12}{13}$

5. $\frac{22}{133}$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$ **8.** $\frac{1}{4}$

9. $\frac{2}{9}$ **10.** $\frac{8}{11}$ **11.** $\frac{5}{34}$ **12.** $\frac{11}{50}$

13. A **14.** C

સ્વાધ્યાય 13.4

1. (ii), (iii) અને (iv) **2.** X = 0, 1, 2; હા **3.** X = 6, 4, 2, 0

4. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

5. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ii)

X	0	1
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

6.

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

7.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

8. (i) $k = \frac{1}{10}$ (ii) $P(X < 3) = \frac{3}{10}$ (iii) $P(X > 6) = \frac{17}{100}$ (iv) $P(0 < X < 3) = \frac{3}{10}$

9. (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $P(X < 2) = \frac{1}{2}$, $P(X \le 2) = 1$, $P(X \ge 2) = \frac{1}{2}$

10. 1.5 **11.** $\frac{1}{3}$ **12.** $\frac{14}{3}$

13. Var(X) = 5.833, S.D. = 2.415

14.

X	14	15	16	17	18	19	20	21
P(X)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

મધ્યક = 17.53, Var(X) = 4.78 અને S.D.(X) = 2.19

15. E(X) = 0.7 અને Var(X) = 0.21 **16.** B **17.** D

સ્વાધ્યાય 13.5

1. (i) $\frac{3}{32}$ (ii) $\frac{7}{64}$ (iii) $\frac{63}{64}$

2. $\frac{25}{216}$ **3.** $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

4. (i) $\frac{1}{1024}$ (ii) $\frac{45}{512}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

5. (i) $(0.95)^5$ (ii) $(0.95)^4 \times 1.2$ (iii) $1 - (0.95)^4 \times 1.2$

(iv) $1 - (0.95)^5$

6. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$ **7.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} [{}^{20}C_{12} + {}^{20}C_{13} + ... + {}^{20}C_{20}]$ **9.** $\frac{11}{243}$

10. (a) $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (c) $1 - \frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

11. $\frac{7}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^5$ **12.** $\frac{35}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^4$ **13.** $\frac{22 \times 9^3}{10^{11}}$

14. C **15.** A

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 13

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$

4. $1 - \sum\limits_{r=7}^{10} {}^{10}C_r\,(0.9)^r\,(0.1)^{10-r}$

5. (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (ii) $7\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (iii) $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^6$ (iv) $\frac{864}{3125}$

6. $\frac{5^{10}}{2 \times 6^9}$

7. $\frac{625}{23328}$

8. $\frac{2}{7}$

9. $\frac{31}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^4$

10. $n \geq 4$

11. $\frac{-91}{54}$

12. $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$

13. $\frac{14}{29}$

14. $\frac{3}{16}$

15. (i) 0.5 (ii) 0.05

16. $\frac{16}{31}$

17. A

18. C

19. B