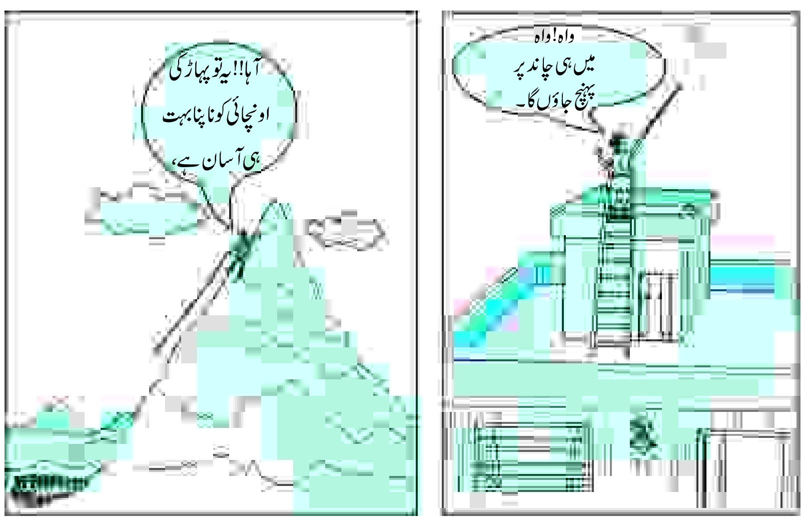
6 مثلث (TRIANGLE)

6.1 تعارف

پچھلی کلاسوں میں آپ مثلثوں اوران کی بہت سی خصوصیات سے پہلے ہی واقف ہو چکے ہیں۔نویں کلاس میں آپ نے مثلثوں کی مماثلت کے بارے میں تفصیل سے مطالعہ کیا۔یاد کیجئے کہ دو اشکال متماثل ہوتی ہیں۔اگران کی شکل (Shape) اور پیمائش (Size) یکساں ہوں۔اس باب میں ہم ان اشکال کے بارے میں پڑھیں گے جن کی شکل (Shape) ایک سی ہو لیکن ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہی ہو۔دو اشکال جن کا ایک ہی شکل ہو (ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہو) مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔مخصوص طور پر ہم مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں پڑھیں گے اوراس علم کا استعمال پہلے سے معلوم فیثا غورث کے مسئلے کو



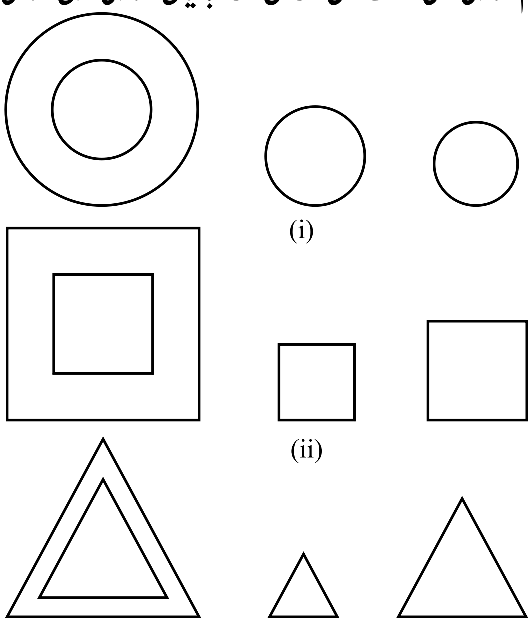
شکل 6.1

ثابت کرنے میں کریں گے۔

کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ پہاڑوں (جسے ماؤنٹ ایوریسٹ) کی اونچائی بتائی یا ایسی اشیا کے فاصلے جو کافی دوری پر واقع ہیں (جیسے چاند) کس طرح معلوم کئے جاتے ہیں؟ کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ان کو کسی ناپنے والے ٹیپ سے سیدھا ناپا جا سکتا ہے؟ درحقیقت ایسی تمام اونچائیاں اور فاصلہ پیائش کے غیر درست طریقے سے معلوم کئے جاتے ہیں، جس کی بنیاد اشکال کی مشابہت کے اصول پر ہے (مشق 6.3 کی مثال 7) سوال نمبر 15 اور اسی کتاب کا باب نمبر 8 اور 9 دیکھئے)

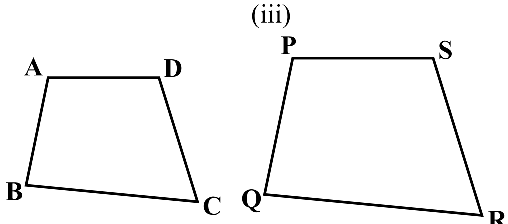
6.2 مشابہ اشکال

نویں جماعت میں آپ نے دیکھا کہ تمام دائرے جن کے نصف قطر برابر ہوں متماثل ہوتے ہیں۔تمام مربعے جن کے اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں اور تمام مساوی ضلعی مثلث جس کے ضلع کے لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں۔



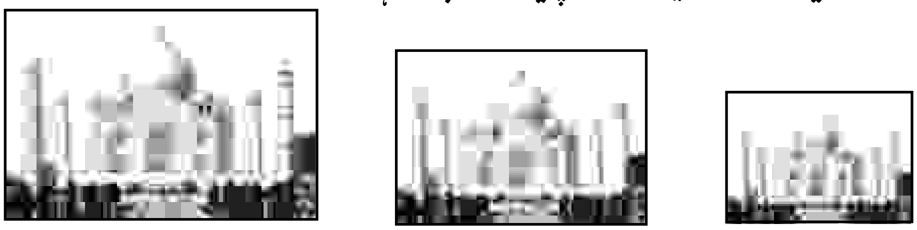
اب دو یا دو سے زیادہ دائروں پر غور کیجئے (شکل 6 (i) کو دیکھئے) کیا یہ متماثل نہیں ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ کچھ متماثل ہیں اور کچھ نہیں لیکن تمام دائروں کی شکل ایک سی ہے ضروری نہیں ہے کے سائز بھی ایک سے ہوں اس لئے تمام دائرے مشابہ ہوتے ہیں۔ دو (یا دو سے زیادہ) مربعے یا (دو یا دو سے زیادہ) مساوی ضلعی مثلثوں کے بارے میں کیا خیال ہے [شکل 6.1 (ii) اور (iii) کو دیکھئے]؟ جیسا ہم نے دائروں کے سلسلہ میں مشاہدہ کیا تھا یہاں بھی تمام مربعے اور تمام مساوی ضلعی مثلث مشابہ ہیں۔

مذکورہ بالا باتوں سے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن مشابہ اشکال ضروری نہیں کہ مشابہ ہوں۔



شکل 6.2

کیاایک دائرہ اورمربع مشابہ ہوسکتا ہے؟ کیاایک مثلث اورمربع مشابہ ہوسکتا ہے؟ ان سوالوں کا جواب ہم صرف اشکال کو دیکھ کر دے سکتے ہیں (اشکال 6.1 دیکھئے) یقینی طور پر یہ اشکال مشابہ نہیں ہے (کیوں؟)



شکل 6.3

دو چار ضلعی ABCD اور PQRS کے بارے میں آپ کہہ سکتے ہیں؟ (شکل 6.2 دیکھئے) کیا یہ مشابہ ہیں۔ یہ اشکال بظاہر تو مشابہ نظر آتی ہیں لیکن ضروری نہیں ہے کہ یہ مشابہ ہوں۔ اس لئے ہمارے پاس اشکال کی مشابہت کی کوئی تعریف ہونی چاہیے تا کہ اس تعریف اور کچھ اصولوں کی بنیاد پر ہم یہ طے کر سکیں کہ دو دی ہوئی اشکال مشابہ ہیں یا نہیں۔ ان کے لئے شکل 6.3 میں دئے گئے فوٹو گراف کو غور سے دیکھئے۔

آپ اس کو دیکھ کر فوراً کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک یادگار (تاج محل) کے فوٹو گراف ہیں۔ لیکن ان کے سائز مختلف ہیں، کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تینوں فوٹو گراف مشابہ ہیں؟ ہاں یہ ہیں۔

آپ ایک ہی شخص کے 10 سال کی عمر میں لئے گئے ایک فوٹو گراف اور 40 سال کی عمر میں لئے گئے اس ہی سائز کے فوٹو گراف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ کیا یہ دونوں فوٹو گراف مشابہ ہیں؟ یہ دونوں فوٹو گراف ایک ہی سائز کے ہیں لیکن یقیناً ان کی شکل (Shape) ایک سی نہیں ہے۔ اس لئے یہ مشابہ نہیں ہیں۔

ایک فوٹو گراف جب ایک ہی Negative سے مختلف سائز کے فوٹو گراف کے پرنٹ نکالتا ہے تو وہ کیا کرتا ہے؟ آپ نے اسٹیمپ سائز، پاسپورٹ سائز اور پوسٹ کارڈ سائز کے فوٹو گراف کے بارے میں سنا ہے۔ عموی طور پر وہ ایک چھوٹے سائز کی فلم پر فوٹو گراف لیتا ہے، جیسے 35 ملی میٹر کا سائز، اور پھر اس کو بڑے سائز میں تبدیل کر دیتا ہے یعنی 45 ملی میٹر (یا 55 ملی میٹر)۔ اس طرح سے اگر ہم کسی قطع خط کے ایک چھوٹا فوٹو گراف (شکل)، پر غور کریں اور اس کا نظیری قطع خط بڑے فوٹو گراف میں (شکل) اس قطع خط کا $\frac{45}{35}$ (یا $\frac{55}{35}$) ہوگا۔

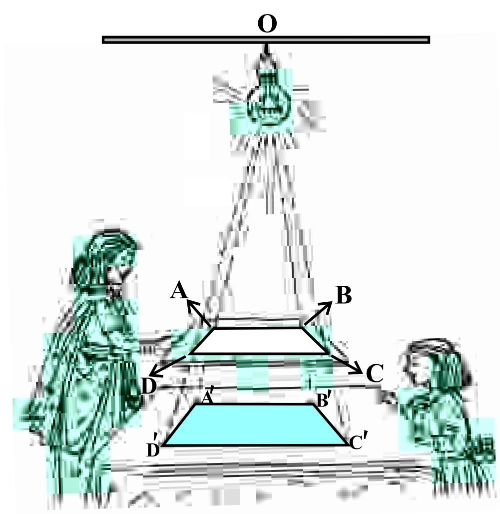
اس کا مطلب یہ ہوا کہ چھوٹے فوٹو گراف کا ہر قطع خط 35:45 (یا 35:55) کی نسبت میں بڑھا دیا گیا ہے۔ یہ بھی کہا جا سکتا ہے کہ بڑے فوٹو گراف کا ہر قطع خط 45:35 (یا 55:35) کی نسبت میں کم کر دیا گیا۔ یہ مزید اگر آپ مختلف سائزوں والے دو فوٹو گراف کے نظیری قطعات خط کے جوڑوں کے درمیان جھکاؤ (یا زاویوں) پر غور کریں۔ تو آپ دیکھیں گے کہ یہ جھکاؤ (یا

زاویہ) ہمیشہ برابر ہوں گے۔ یہ دو اشکال خاص طور سے دو کثیر ضلعی کی مشابہت کی ضروری شرط ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ:

دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہو،مشابہ ہوتے ہیں اگر (i)ان کے نظیری زاویہ مساوی ہوں اور (ii)ان کے نظیری اضلاع کی نسبت یکساں ہوں (یا متناسب ہوں)۔

نوٹ کیجئے کہ نظیری اضلاع کی یکساں نسبت کا مطلب ہے کثیر ضلعی کا Scale factor (یا ظاہر کرنے والی کسر) آپ نے ضرور سنا ہوگا کے دنیا کے نقشہ (یا global maps) اور بلڈنگوں کی تعمیر کے لئے Blue Print کو مناسب Scale factor اور مخصوص رواجٔ (Conventions) کو ذہن میں رکھتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔

واضح طور پر اشکال کی مشابہت کو سمجھنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل مشغلہ انجام دیتے ہیں۔



شکل 6.4

مشغلہ 1: اپنے کلاس روم کی چھت کے ایک نقطہ O پر ایک جلتا ہوا بلب لگائیں اور اس کے ٹھیک نیچے ایک میز رکھیں۔ایک کثیر ضلعی ،مان لیجئے ایک چار ضلعی ABCD ایک گتّے سے کاٹ کر زمین کے متوازی اس بلب اور میز کے درمیان رکھیں ۔تب ABCD کی پرچھائیں میز پر پڑے گی ۔اس پرچھائی کی Outline کو A'B'C'D' مارک کیجئے (شکل 6.4 دیکھئے)۔

نوٹ کیجئے کہ چار ضلعی A'B'C'D'،چار ضلعی ABCD کی بڑھی ہوئی شکل ہے۔ یہ روشنی کی خصوصیت کی وجہ سے ہے کیونکہ روشنی ہمیشہ ایک خط مستقیم میں چلتی ہے۔آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں A' کرن OA پر، B' کرن OB پر اور C'،OC پر اور D'،OD پر واقع ہے۔اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' اور ABCD ایک ہی شکل اور مختلف سائز کے ہیں۔

اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' چار ضلعی ABCD کے مشابہ ہیں۔ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ چار ضلعی ABCD چار ضلعی A'B'C'D' کے مشابہ ہیں۔

یہاں آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں کہ راس A'،راس A کا نظیر راس ہے راس B'،B کا اور C'،C کا D'،D کا نظیری راس ہے۔علامتی طور پر اس مطابقت کو ہم ظاہر کر سکتے ہیں $A' \leftrightarrow A$، $B' \leftrightarrow B$، $C' \leftrightarrow C$ اور $D' \leftrightarrow D$ کا نظیری راس ہے۔

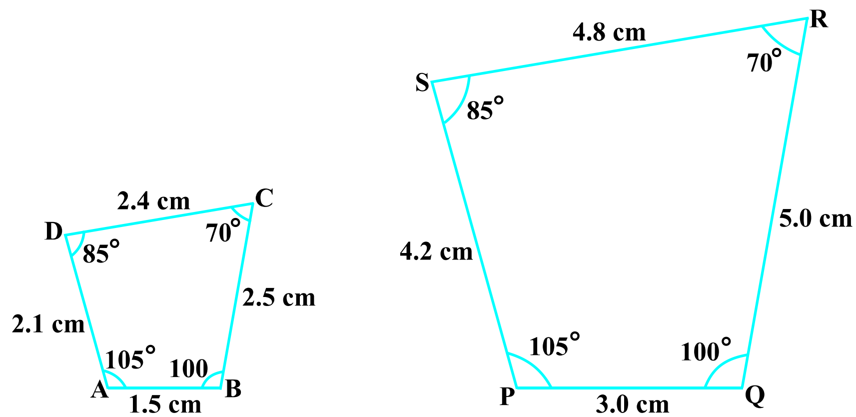
درحقیقت دونوں چارضلعی کے زاویوں اوراضلاع کی پیمائش سے آپ تصدیق کرسکتے ہیں کہ

$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D'$ (i) اور

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \text{ (ii)}$$

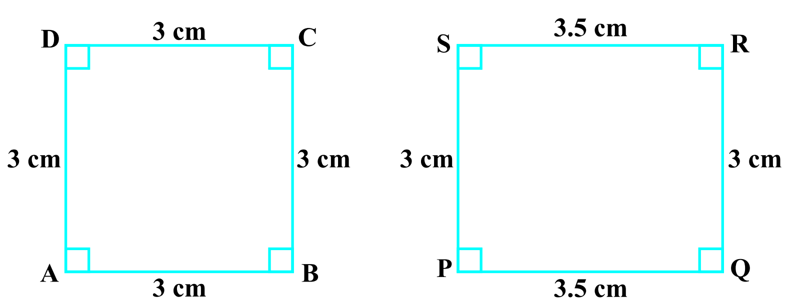
اس سے اس بات کومزید تقویت ملتی ہے کہ دوکثیرضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔مشابہ ہوں گے اگر (i) تمام نظیری زاویہ برابر ہو (ii) تمام نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں ہو(یا متناسب ہوں)

مذکورہ بالا بیان کی روسے آپ آسانی سے یہ کہہ سکتے ہیں کہ چارضلعی ABCD اور PQRS مشابہ ہیں شکل 6.5 دیکھئے۔



شکل 6.5

ریمارک: آپ تصدیق کرسکتے ہیں کہ اگرا یک کثیرضلعی دوسری کثیرضلعی کے مشابہ ہے اور دوسرا کثیرضلعی تیسرے کثیرضلعی

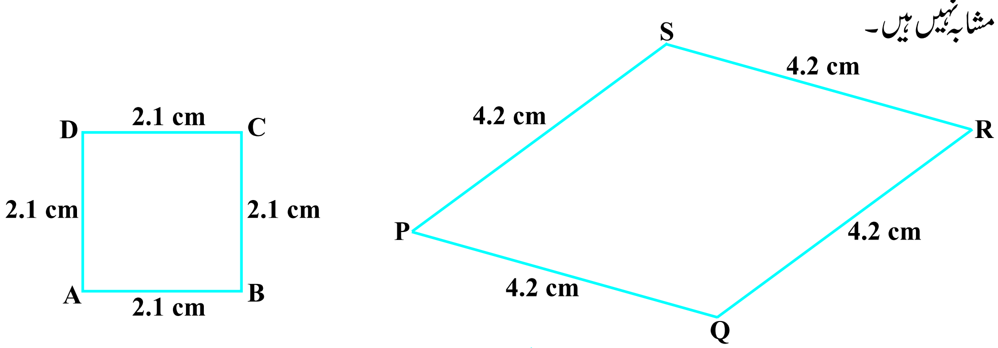


شکل 6.6

کے مشابہ ہے تو پہلا کثیر ضلعی تیسرے کے مشابہ ہوگی۔

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دو چار ضلعی کے (مربع اور مستطیل) شکل 6.6 میں نظیری زاویہ برابر ہیں لیکن ان کے نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں نہیں ہیں۔

اس لئے دو چار ضلعی مشابہ نہیں ہیں اسی طرح سے آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ شکل 6.7 کے دو چار ضلعی (مربع اور مستطیل) میں نظیر اضلاع ایک ہی نسبت میں ہیں (لیکن ان کے نظیری زاویہ برابر نہیں ہیں اس لئے یہ دونوں چار ضلعی (کثیر ضلعی) کے مشابہ نہیں ہیں۔



شکل 6.7

اس طرح سے مندرجہ بالا میں مشابہت کی کوئی سی بھی دو شرطیں (i)اور(ii)ان کی مشابہت کے لئے کافی نہیں ہیں۔

مشق 6.1

1۔ بریکٹ میں دئے گئے صحیح الفاظ سے مندرجہ ذیل خالی جگہوں کو پر کیجئے۔

(i) تمام دائرے ـــــــ (متماثل، مشابہ) ہوتے ہیں۔

(ii) تمام مربعے ـــــــ ہوتے ہیں (متماثل، مشابہ)

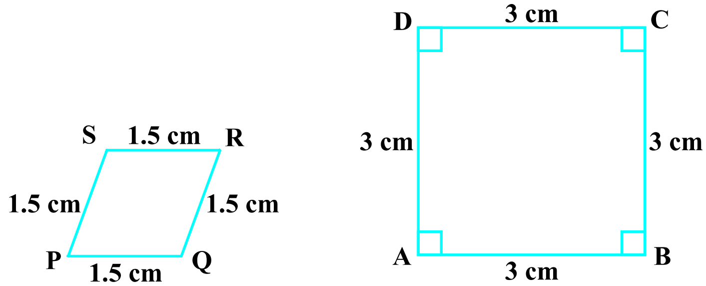
(iii) تمام ـــــــ مثلث مشابہ ہوتے ہیں (مساوی الساقین، مساوی ضلعی)

(iv) دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گی اگر (a) ان کے نظیری زاویہ ـــــــ ہوں اور (b) ان کے نظیری ضلع ـــــــ ہیں (مساوی، متناسب)

2۔ دو مختلف مثالیں دیجئے۔

(i) مشابہ اشکال کے جوڑوں کی (ii) غیر مشابہ اشکال کے جوڑوں کی

3۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل چار ضلعی مشابہ ہیں یا نہیں:



شکل 6.8

6.3 مثلثوں کی مشابہت

تھیلز
(640 – 546 قبل مسیح)

آپ دو مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

آپ دہرا سکتے ہیں کہ مثلث بھی ایک کثیر ضلعی ہے اس لئے ہم مثلثوں کی مشابہت کے لئے بھی وہی شرطیں بیان کر سکتے ہیں جو ہیں:

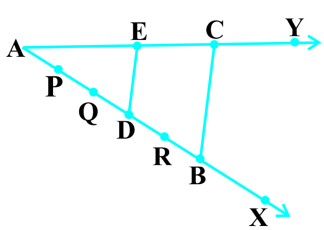
دو مثلث مشابہ ہیں اگر

(i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں

(ii) ان کے نظیر اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہوں)

ایک مشہور یونانی ریاضی داں نے دو مساوی زاوی مثلث سے متعلق ایک اہم حقیقت سے آگاہ کیا ہے دو مساوی زاوی مثلثوں کے نظیری اضلاع کی نسبت ہمیشہ برابر ہوتی ہے۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ اس نے ایک نتیجہ جو متناسب کا بنیادی مسئلہ (جواب تھیلز کا مسئلہ جانا جاتا ہے) کا استعمال کیا جاتا ہے۔

متناسب کے بنیادی مسئلے کو سمجھنے کے لئے ہم اسے ایک عملی کام کریں



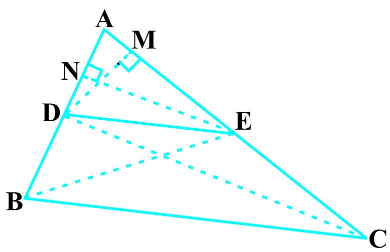
شکل 6.9

عملی کام (مشغلہ) 2: کوئی زاویہ XAY بنائیے اور اس کے ایک بازو AX پر نقاط (مان لیجئے 5 نقطہ) P,Q,D,R, اور اس طرح سے مارک کریں کے AP= PQ = QD = DR = RB اب B سے گذرتا ہوا کوئی خط جو بازو

AY کو C پر قطع کرتا ہے کھینچیے (شکل 6.9 دیکھئے)

اور D سے گذرتا ہوا بھی ایک کھینچئے جو BC کے متوازی ہو اور A اور C کو E پر قطع کرے۔ کیا آپ اپنی بناوٹ سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$؟ AE اور EC کی پیمائش کیجیے۔ $\frac{AE}{EC}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مشاہدہ کیجئے کہ $\frac{AE}{EC}$ بھی $\frac{3}{2}$ کے مساوی ہے۔ اس طرح سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ΔABC میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ کیا یہ ایک اتفاق ہے؟ نہیں یہ مندرجہ ذیل مسئلے کی وجہ سے ہے (جو متناسب کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے)۔

مسئلہ 6.1: اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کوئی خط کھینچا جائے تو وہ باقی دو اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرتا ہے اور وہ دو اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔



شکل 6.10

ثبوت: ہمیں مثلث ABC دیا ہوا ہے جس میں ایک خط BC کے متوازی ہے جو باقی دو اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے (شکل 6.10 دیکھئے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

آیئے BE اور CD کو ملائیں اور پھر $DM \perp AC$ اور $EN \perp AB$ کھینچیں۔

اب ΔADE کا رقبہ = ($\frac{1}{2}$ قاعدہ×اونچائی) = $\frac{1}{2} \times AD \times EN$

یاد کیجئے کہ آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ ΔADE کے رقبہ کو ہم ar(ADE) سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس لئے $$ar(ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$$

اسی طرح سے $$ar(BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN$$

$$ar(ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM \quad \text{اور} \quad ar(DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$$

اس لئے $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

$$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2}AE \times DM}{\frac{1}{2}EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$ اور

نوٹ کیجئے کہ Δ BDE اور DEC ایک قاعدہ DE اور متوازی خطوط BC اور DE کے درمیان میں ہے۔

اس لئے $\quad ar(BDE) = ar(DEC) \qquad (3)$

اس لئے (1) اور (2) اور (3) ہمیں ملتا ہے

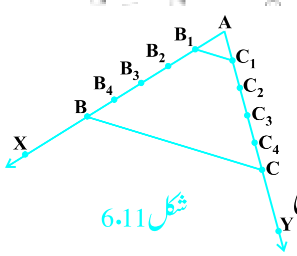
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ ■

کیا اس مسئلے کا معکوس بھی درست ہے (معکوس کے مفہوم کے لئے ضمیمہ 1 دیکھئے) اس کی جانچ کرنے کے لئے آیئے مندرجہ ذیل مشغلہ کرتے ہیں

مشغلہ 3: اپنی کاپی پر ایک زاویہ XAY بنایئے اور شعاع AX پر نقطے B_1, B_2, B_3, B_4 اور B مارک کیجئے

$$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$$

اسی طرح سے شعاع AY پر نقطے C_1, C_2, C_3, C_4 مارک کیجئے جبکہ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ تب B_1C_1 اور BC کو ملایئے (شکل 6.11 دیکھئے)۔



شکل 6.11

نوٹ کیجئے کہ $\quad \frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ہر ایک $\frac{1}{4}$ کے برابر ہے)

آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطوط B_1C_1 ور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں یعنی

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

اسی طرح سے B_2C_2، B_3C_3 اور B_4C_4 کو ملانے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ اور } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

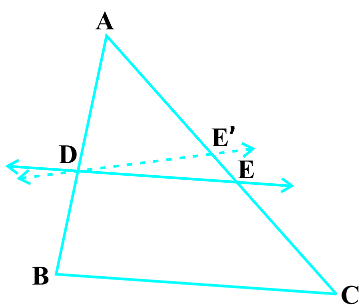
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ اور } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ اور } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1)،(2)،(3)،اور (4) یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک خط مثلث کے دو اضلاع کو ایک نسبت میں منقسم کرتا ہے تب خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوگا۔

اس مشغلے کو ہم کو ایک ایسے زاویہ XAY بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کی پیمائش مختلف ہے اور اس کے بازو AX اور AY کے مساوی حصہ بنے ہوں۔ ہر مرتبہ آپ کو ایک ہی نتیجہ ملے گا۔ اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوگا جو مسئلہ 6.1 کا معکوس ہے۔

مسئلہ 6.2: اگر ایک خط مثلث کسی دو اضلاع کو یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے ،تب یہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہو گا۔



شکل 6.12

اس مسئلے کو ہم اس طرح سے ثابت کر سکتے ہیں ،ایک DE اس طرح لیجئے کہ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ BC،DE کے متوازی نہیں ہے۔(شکل 6.12 دیکھئے)

اگر BC,DE کے متوازی نہیں ہے،تو BC،DE' کے متوازی کیجئے۔

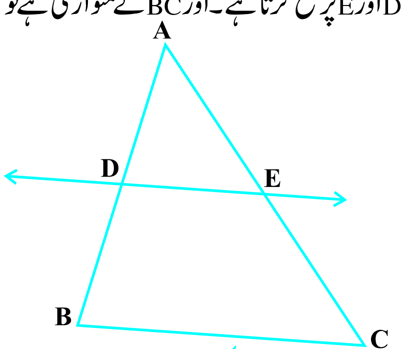
اس لئے $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

اس لئے $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

مذکورہ بالا مساوات میں دونوں طرف 1 جمع کرنے پر آپ دیکھ سکتے ہیں اور E اور E' منطبق ہیں (کیوں؟)

مذکورہ بالا مسئلوں کی مزید وضاحت کے لئے آیئے کچھ مثالوں کو لیتے ہیں۔

مثال 1: اگر ایک خط مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔اور BC کے متوازی ہے تو ثابت کیجئے کہ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (شکل 6.13 دیکھئے)



شکل 6.13

حل: DE ∥ BC دیا ہوا ہے

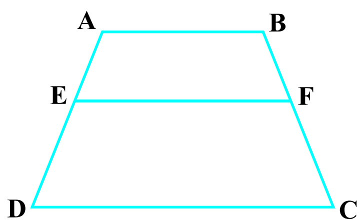
اس لئے $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (مسئلہ 6.1)

یا $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$

یا $\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}-1$

یا $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

اس لئے $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$



شکل6.14

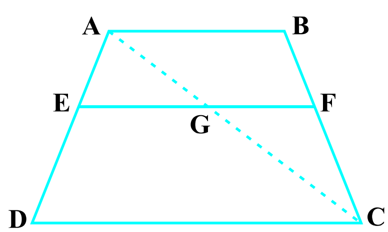
مثال 2: ABCDایک منحرف ہے جس میں AB || DC ،E اور F دو غیرمتوازی اضلاع بالترتیب ADاور BCپر نقطے ہیں جب کہ EF || AB (شکل6.14دیکھئے)

دکھایئے کہ $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$

حل: آیئےAC کوملائیں جو EFکو Gپر قطع کرے(شکل6.15دیکھئے)

AB || DCاورEF||AB(دیا ہوا ہے)

اس لئے EF || DC(خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوں گے۔



شکل6.15

اب,Δ ADCمیں

EG || DC(کیونکہ EF || DC)

اس لئے $\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (مسئلہ 6.1) (1)

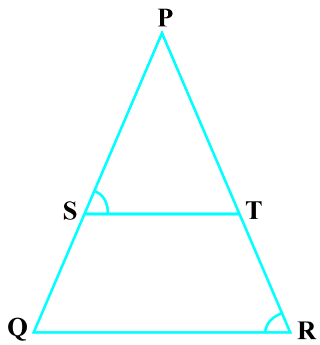
اسی طرح سے Δ CAB

$\frac{CG}{AG}=\frac{CF}{BF}$

یعنی $\frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC}$ (2)

اس لئے(1)اور(2)سے

$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$



شکل 6.16

مثال 3: شکل 6.16 میں $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ اور $\angle PST = \angle PRQ$

ثابت کیجئے کہ PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$۔

اس لئے $ST \parallel QR$ (مسئلہ 6.2)

اس لئے $\angle PST = \angle PQR$ (نظیری زاویہ) (1)

مزید یہ دیا ہوا ہے کہ

$\angle PST = \angle PRQ$

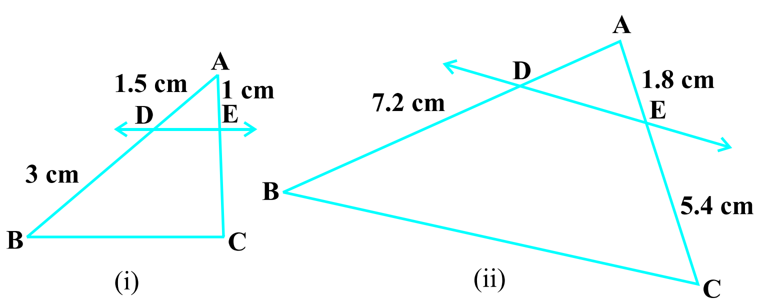
اس لئے $\angle PRQ = \angle PQR$ (1 اور 2 سے)

اس لئے $PQ = PR$ (مساوی زاویوں کے سامنے کے ضلع)

یعنی PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

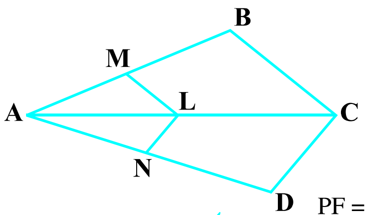
مشق 6.2

1۔ شکل 6.17 (i) اور (ii) میں $DE \parallel BC$۔ (i) میں EC اور (ii) میں AD معلوم کیجئے۔



شکل 6.17

2۔ E اور F بالترتیب مثلث PQR کے اضلاع PQ اور PR پر دو نقطے ہیں۔ مندرجہ ذیل ہر ایک حالت کے لئے بیان کیجئے



شکل 6.18

کہ EF || QR

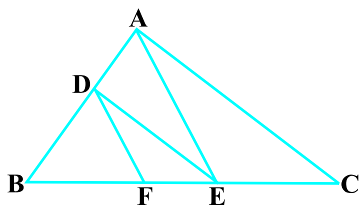
(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm اور FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm اور RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm اور PF = 0.36 cm

3۔ شکل 6.18 میں اگر LM || CB اور LN || CD ثابت کیجئے کہ

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}.$$

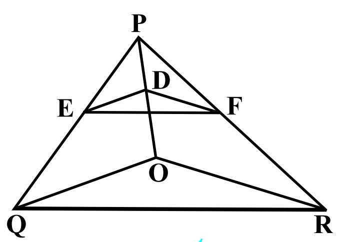


شکل 6.19

4۔ 6.19 میں DE || AC اور DF || AE ثابت کیجئے کہ

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}.$$

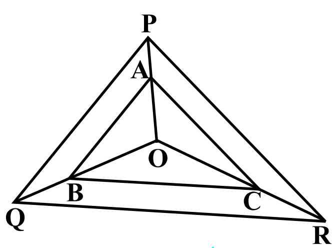
5۔ شکل 6.20 میں DE || OQ اور DF || OR دکھائیے کہ EF || QR



شکل 6.20

6۔ شکل 6.21 میں A, B اور C بالترتیب OP, OQ اور OR پر نقطے ہیں جب کہ AB || PQ اور AC || PR دکھائیے کہ BC || QR۔

7۔ مسئلہ 6.1 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجئے کہ مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گذرنے والا خط دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا ۔(یاد کیجئے کہ آپ اس کو نویں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)



شکل 6.21

8۔ مسئلہ 6.2 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجئے کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوتا ہے(یاد کیجئے کہ آپ اس کو نویں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)

9۔ ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB || DC اور اس کے وتر ایک دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں دکھائیے کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

10۔ ایک چار ضلعی ABCD کے وتر ایک دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جب کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. دکھائیے کہ چار ضلعی

ABCDایک منحرف ہے۔

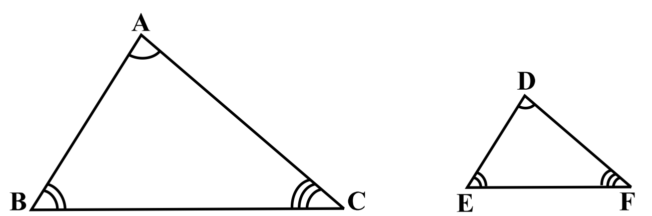
6.4 مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں

پچھلے سیکشن میں ہم نے بیان کیا کہ دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر (متناسب ہوں) ہو۔

یعنی Δ ABCاور Δ DEF میں اگر

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ اور

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (شکل 6.22 دیکھئے)



شکل 6.22

یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ A کا نظیری D,B کا نظیری Eاور C کا نظیری F ہے۔ علامتی طور پر ہم ان دو مثلثوں کی مشابہت کو 'Δ ABC ~ Δ DEF' لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں کہ مثلث ABC مثلث DEF کے مشابہ ہے۔ علامت '~'، کے مشابہ ہیں، کو ظاہر کرتی ہے، یاد کیجئے آپ نے نویں کلاس میں علامت '≅'، کو متماثل ہے، کے لئے استعمال کیا تھا۔

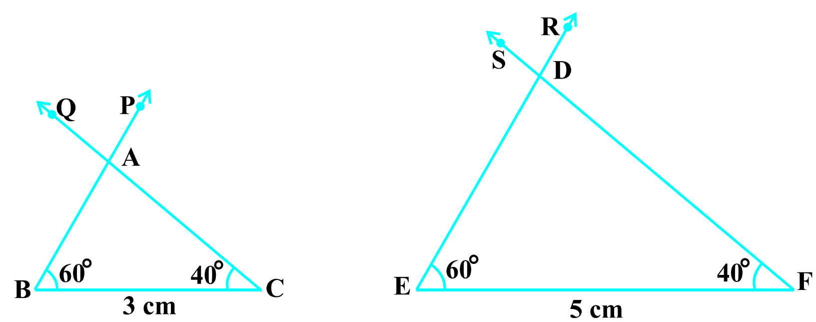
اس کو ضرور یاد رکھنا چاہیے کہ جیسے کے دو مثلثوں کی متماثلت میں کیا گیا مثلثوں کی مشابہت کو بھی علامتی طور پر ظاہر کیا جائے۔ ان کے راسوں کی صحیح مطابقت کو استعمال کرے۔ مثال کے طور پر شکل 6.22 کے مثلثوں ABCاور DFE کے لئے ہم $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ یا $\Delta ABC \sim \Delta FED$ نہیں لکھ سکتے ہیں۔ لیکن ہم $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ لکھ سکتے ہیں۔

اب قدرتی طور پر یہ سوال پیدا ہوتا ہے: دو مثلثوں ABCاور DEF کی مشابہت کی جانچ کرنے کے لئے، کیا ہم ہمیشہ ان کے نظیری زاویوں کی برابری ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) اور ان کے نظیری اضلاع کی نسبت کی برابری $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ پر غور کرتے ہیں؟ آیئے جانچ کرتے ہیں۔ یاد کیجئے کہ آپ نے نویں کلاس میں دو مثلثوں کی

کی متماثلت سے متعلق کچھ شرطیں حاصل کی تھیں ،جن میں صرف تین نظیر حصوں کے جوڑے ملوث کیجئے ۔یہاں بھی آیئے ہم ایک کوشش کریں دومثلثوں کی مشابہت کی شرطیں حاصل کرنے کی جس میں دومثلثوں کےنظیری حصوں کے چھ جوڑوں کے بجائے کم نظیری حصوں کے جوڑوں کا استعمال کر کےمثلثوں کومشابہ ثابت کردیں ۔اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل مشغلہ (عملی کام) کرتے ہیں۔

مشغلہ 4: دومختلف لمبائیوں ،مان لیجئے 3 سینٹی میٹراور 5 سینٹی میٹر، والے قطعات خط بالترتیب BCاور EF کھینچیں ۔تب نقطہ Bاور C پر بالترتیب زاویہ PBCاور QCB بنایئے جن کی پیائش مان لیجئے 60°اور 40° ہو۔مزید نقطہ Eاور F پر بالترتیب زاویہ REFاور SEF، 60°اور 40° کے بنائیں ۔(شکل 6.23 دیکھئے)

مان لیجئے شعائیں BPاور CQ ایک دوسرے کو A پر اور ERاور FS ایک دوسرے کو D پر قطع کریں دومثلثوں



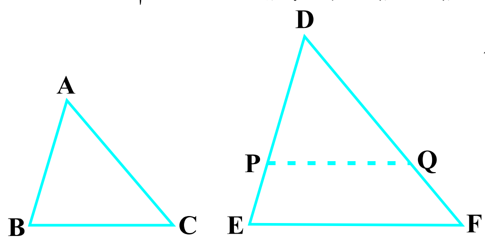
شکل 6.23

ABCاور DEF میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle A = \angle D$ اور $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ بھی ان دونوں مثلثوں کےنظیری زاویے برابر ہیں ۔آپ ان کے نظیری اضلاع کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ ، $\frac{AB}{DE}$ اور $\frac{CA}{FD}$ کے بارے میں آپ کا خیال ہے AB, DE, CA اور FD کی پیمائش کرنے پر آپ پائیں گے کہ $\frac{AB}{DE}$ اور $\frac{CA}{FD}$ بھی 0.6 کے برابر ہیں (یا نزدیکی طور پر 0.6 کے قریب ہیں ۔اگر پیمائش میں کچھ غلطی ہوگئی ہوتو) اس طرح سے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$. آپ اس عمل کوایسے دوسرے بہت سےمثلثوں کے جوڑے بنا کردہرا سکتے ہیں جن کےنظیری زاویے مساوی ہوں ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کےنظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے (یا متناسب ہیں) اس مشغلہ سےہمیں دو مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 6.3: اگر دو مثلثوں میں نظیری زاویہ برابر ہوں ۔تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت

برابر ہوتی ہے (یا متناسب) اور اس لئے دونوں مثلث مشابہ ہوں گے -

اس مشابہت کی شرط کو ہم دو مثلثوں کی مشابہت AAA (زاویہ-زاویہ-زاویہ) شرط کہتے ہیں اس مسئلے کو ہم دو مثلثوں ABC اور DEF کو لے کر کر سکتے ہیں جب کہ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ (شکل 6.24 دیکھئے)



شکل 6.24

اگر $DP = AB$ اور $DQ = AC$ کاٹئے اور PQ ملایئے

اس لئے

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

اس سے حاصل ہوتا ہے $\angle B = \angle P = \angle E$ اور $PQ \parallel EF$ (کیسے؟)

اس لئے $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (کیوں؟)

یعنی $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (کیوں؟)

اسی طرح سے، $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ اور اسی لئے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

رائے زنی (ریمارک): اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زوایوں کے برابر ہوں تب مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت سے ان کا تیسرا زاویہ بھی مساوی ہوگا۔ اس لئے AAA مشابہت کی شرط کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

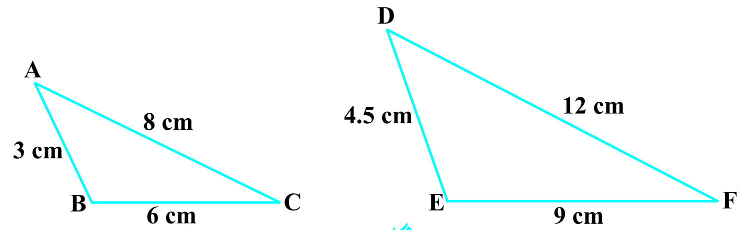
اگر ایک مثلث کے دو زاویے باالترتیب دوسرے مثلث کے دوزاویوں کے برابر ہوں تو دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

اس شرط کو ہم AA دو مثلث کی مشابہت کی شرط کہتے ہیں۔

اوپر آپ دیکھ چکے ہیں اگر کسی مثلث کے تین زاویہ باالترتیب دوسرے مثلث کے تین زاویوں کے برابر ہیں تو ان کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے (یا ان کی نسبت برابر ہوگی) اس بیان کے معکوس کے بارے میں کیا خیال ہے؟ کیا اس کا معکوس درست ہے؟ دوسرے لفظوں میں اگر ایک مثلث کے اضلاع باالترتیب دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہیں، تو کیا یہ صحیح ہے کہ ان کے نظیری زاویہ بھی برابر ہوں؟ آیئے اس کو ایک مشغلے کے ذریعے جانچیں۔

مشغلہ 5: دو مثلث ABC اور DEF اس طرح بنائیں کہ 3 سینٹی میٹر AB = 3 سینٹی میٹر 6، BC = سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر CA = ،
4.5 سینٹی میٹر DE = 9 سینٹی میٹر EF = اور 12 سینٹی میٹر FD = (شکل 6.25 دیکھئے)

اس لئے آپ کے پاس ہے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ہرایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہیں)



شکل 6.25

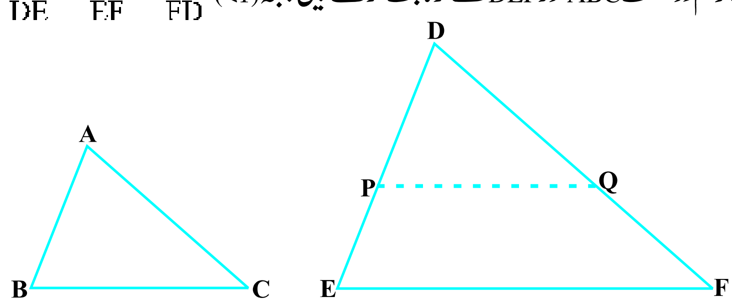
اب $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ اور $\angle F$ کی پیمائش کیجئے آپ مشاہدہ کریں گے کہ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ یعنی دونوں مثلثوں کے نظیری زاویے برابر ہیں۔

اس مشغلے کو آپ دوسرے اسی طرح کے مثلثوں کو بنا کر (جن کے اضلاع کی نسبت برابر ہو) دہرا سکتے ہیں۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری زاویے برابر ہوں گے۔ یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.4: اگر دو مثلثوں میں ،ایک مثلث کے اضلاع دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں (یا ان کی نسبت برابرہو)تب ان کے نظیری زاویے برابر ہونگے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

دو مثلثوں کی مشابہت کی اس شرط کو ہم SSS (ضلع۔ضلع۔ضلع) شرط کہتے ہیں۔

اس مسئلے کو ہم دو مثلث ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جبکہ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1) شکل 6.26 دیکھئے:



شکل 6.26

DP = AB اور DQ = AC کاٹئے اور PQ کوملایئے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $\frac{DP}{PE}=\frac{DQ}{QF}$ اور $PQ \parallel EF$ (کیسے؟)

اس لئے $\angle P = \angle E$ اور $\angle Q = \angle F$

اس لئے $\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{PQ}{EF}$

اس لئے $\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{BC}{EF}$ (کیوں؟)

اس لئے $BC = PQ$ (کیوں؟)

اس طرح سے $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

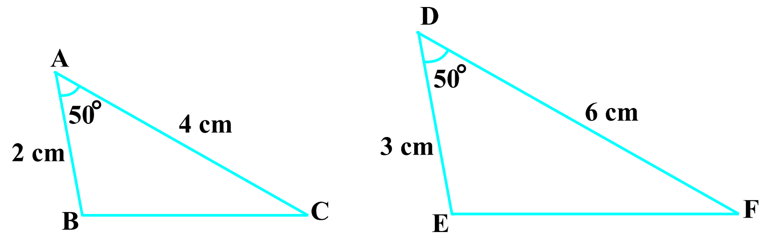
اس لئے $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ (کیسے؟)

ریمارک: آپ یاد کیجئے کہ دونوں شرطیں (i) نظیری زاویہ برابر ہیں (ii) نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے دو کثیر ضلعی کے مشابہ ہونے کے لئے کافی نہیں ہیں۔لیکن مسئلہ 6.3 اور 6.4 کی بنیاد پر اب آپ کہہ سکتے ہیں کہ دو مثلثوں کی مشابہت کے سلسلے میں دونوں شرطوں کی جانچ کرنا ضروری نہیں ہے۔ایک شرط دوسری شرط کو اپنے آپ پوری ہوجاتی ہے۔

آیئے اب نویں کلاس میں مثلثوں کی متماثلت کی مختلف شرطوں کو دہرایئے۔آپ یہ مشاہدہ کریں گے کہ مشابہت کی SSS شرط کا موازنہ متماثلت کی SSS شرط سے کیا جاسکتا ہے۔اس بات سے ہمیں تقویت ملتی ہے کہ ہم دیکھیں مثلثوں کی متماثلت کی SAS شرط کا موازنہ مشابہت کی شرط سے کیا جاسکتا ہے یا نہیں،اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل عملی کام کرتے ہیں۔

عملی کام (مشغلہ) 6: دو مثلث ABC اور DEF بنایئے جس میں $AB = 2$ سینٹی میٹر، $\angle A = 50^\circ$، $AC = 4$ سینٹی میٹر، $DE = 3$ سینٹی میٹر، $\angle D = 50^\circ$ اور $DF = 6$ سینٹی میٹر (شکل 6.27 دیکھئے)

یہاں آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہے) اور DA (ضلع AB اور AC کے درمیان



شکل 6.27

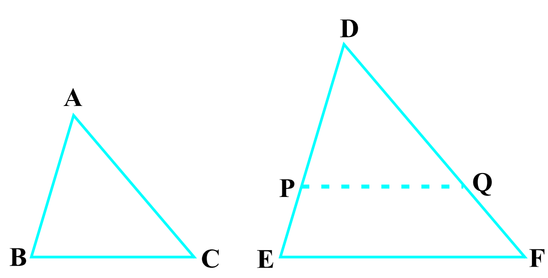
بنازاویہ) برابر ہے $\angle D$ (اضلاع DE اور DF کے درمیان بنے زاوایے) کے۔یعنی مثلث کاایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہے اوران زاویوں کے حامل اضلاع کی نسبت برابر ہو(یعنی متناسب) آیئے اب $\angle B, \angle C, \angle E$ اور $\angle F$ کی پیمائش کیجیئے۔

آپ پائیں گے کے $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ یعنی $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ اس لئے مشابہت کی AAA شرط کے مطابق $\Delta ABC \sim \Delta DEF$۔آپ اس مشغلے مثلثوں کے بہت سے ایسے جوڑے بنا کر کر سکتے ہیں جس میں مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اوران زاویوں کے حامل اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہو)۔ ہرمرتبہ آپ پائیں گے کہ مثلث مشابہ ہیں یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.5: اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاوایہ کے برابرہو اور ان زاویوں کے حامل اضلاع متناسب ہوں ،تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے -

اس شرط کوہم مثلثوں کی مشابہت کی SAS (ضلع۔زوایہ۔ضلع) شرط سے جانتے ہیں۔

جیسیا ہم نے پہلے کیا ہے ،اس مسئلے کو بھی ہم دو مثلثوں ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جب کہ $\angle A = \angle D$ اور $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (<1) (شکل 6.28 دیکھئے) $DP = AB$، $DQ = AC$ کاٹئے اور PQ ملایئے۔



شکل 6.28

اب $PQ \parallel EF$ اور $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیسے؟)

اس لئے $\angle A = \angle D, \angle B = \angle P$ اور $\angle C = \angle Q$

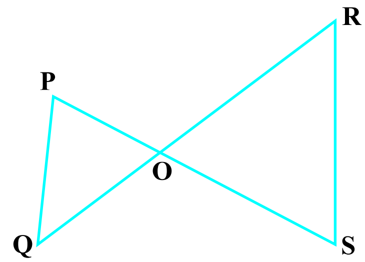
اس لئے $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (کیوں)

اس شرط کے استعمال کی مزید وضاحت کے لئے

$\angle Q$=AC $\angle P$=AI

ہم کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 4: شکل 6.29 میں اگر PQ || RS ثابت کیجئے کہ Δ POQ ~ Δ SOR



شکل 6.29

حل:

PQ || RS (دیا ہوا ہے)

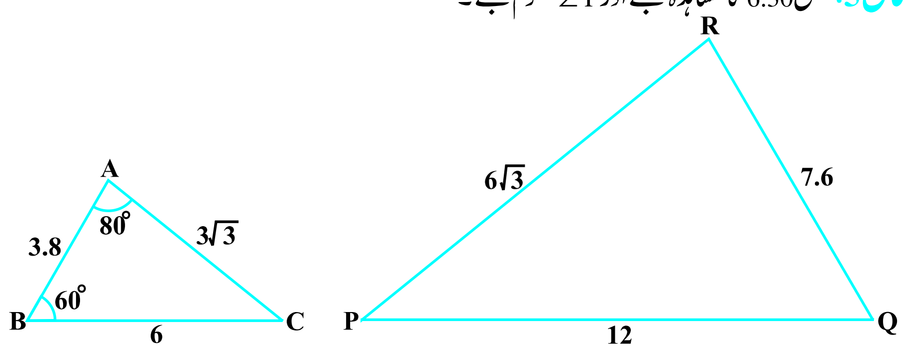
اس لئے ∠P = ∠S (متبادل زاویہ)

اور ∠Q = ∠R

اس لئے ∠POQ = ∠SOR (بالمقابل زاویہ)

اس لئے Δ POQ ~ Δ SOR (AAA مشابہت کی شرط)

مثال 5: شکل 6.30 کا مشاہدہ کیجئے اور ∠P معلوم کیجئے۔



شکل 6.30

حل: Δ ABC اور Δ PQR میں

$\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}$، $\frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$