ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ XI

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત ₹ : .00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્હી અને ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ(કન્વિનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
ડૉ. વિપુલ આર. શાહ
શ્રી રાજીવ એસ. ચોક્સી
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી વિજય વોરા

સમીક્ષક

ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
ડૉ. મહેશ એમ. ત્રિવેદી
શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત
શ્રી એન. બી. ગાંગાણી
શ્રી પોપટલાલ પી. પટેલ
શ્રી મૃગેશ બી. પારેખ
ડૉ. કૃષ્ણકુમાર એમ. મહેતા

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા ઠરાવ ક્રમાંકઃ મશબ/1217/1036/છ તા.25/10/2017 થી શાળા કક્ષાએ NCERT ના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ 11** ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરાવીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય કક્ષાની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERT ના પ્રતિનિધિ તરીકે આર.આઈ.ઈ. ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક ત્રિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, ડૉ. રવિ બોરાણા, શ્રી નવરોજ ગાંગાણી, શ્રી પરિમલ પુરોહીત, ડૉ. સુરેશ મકવાના (આર.આઈ.ઈ. ભોપાલ), શ્રી અજી થોમસ (આર.આઈ.ઈ. ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહ્યા હતા અને તેમણે પોતાના કિંમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન. અગ્રસચિવશ્રી(શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. આ પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા જાળવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવાઈ છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

ડૉ. એમ. આઈ. જોષી
નિયામક

ડૉ. નીતિન પેથાણી
કાર્યવાહક પ્રમુખ

તા. 26-10-2017
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ડૉ. એમ. આઈ. જોષી, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the Textbook Development Committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have

generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to the systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Chairman, Advisory Committee Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P.K. Jain, *Professor,* Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Members

A.K. Rajput, *Associate Professor,* RIE Bhopal, M.P.

A.K. Wazalwar, *Associate Professor,* DESM NCERT, New Delhi

B.S.P. Raju, *Professor,* RIE Mysore, Karnataka

C.R. Pradeep, *Assistant Professor,* Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka.

Pradeepto Hore, *Sr. Maths Master*, Sarla Birla Academy Bangalore, Karnataka.

S.B. Tripathy, *Lecturer*, Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Surajmal Vihar, Delhi.

S.K.S. Gautam, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Sanjay Kumar Sinha, *P.G.T.,* Sanskriti School Chanakyapuri, New Delhi.

Sanjay Mudgal, *Lecturer,* CIET, New Delhi

Sneha Titus, *Maths Teacher,* Aditi Mallya School Yelaharika, Bangalore, Karnataka

Sujatha Verma, *Reader* in Mathematics, IGNOU, New Delhi.

Uaday Singh, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi.

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: P. Bhaskar Kumar, *P.G.T.,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Ananthpur, (A.P.); Vinayak Bujade, *Lecturer,* Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk Nagpur, Maharashtra; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya Vikashpuri District Centre, New Delhi; P.L. Sachdeva Deptt. of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka; P.K.Tiwari *Assistant Commissioner (Retd.),* Kendriya Vidyalaya Sangathan; Jagdish Saran, Department of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, *Lecturer,* Shibli National P.G. College Azamgarh (U.P.); Sumat Kumar Jain, *Lecturer,* K.L. Jain Inter College Sasni Hathras (U.P.); R.P. Gihare, *Lecturer* (BRC), Janpad Shiksha Kendra Chicholi Distt. Betul (M.P.); Sangeeta Arora, *P.G.T.,* A.P.J. School Saket, New Delhi; P.N. Malhotra, *ADE* (Sc.), Directorate of Education, Delhi; D.R. Sharma, *P.G.T.,* J.N.V. Mungespur, Delhi; Saroj, *P.G.T.* Government Girls Sr. Secondary School, No. 1, Roop Nagar, Delhi, Manoj Kumar Thakur, *P.G.T.*, D.A.V. Public School, Rajender Nagar, Sahibabad, Ghaziabad (U.P.) and R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi.

Acknowledgements are due to Professor M. Chandra, *Head,* Department of Education in Science and Mathematics for her support.

The Council acknowledges the efforts of the Computer Incharge, Deepak Kapoor; Rakesh Kumar, Kamlesh Rao and Sajjad Haider Ansari, D.T.P. Operators; Kushal Pal Singh Yadav, Copy Editor and Proof Readers, Mukhtar Hussain and Kanwar Singh.

The contribution of APC–Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

અનુક્રમણિકા

1. ગણ **1**

1.1 પ્રાસ્તાવિક 1

1.2 ગણ અને તેમનું નિરૂપણ 1

1.3 ખાલી ગણ 6

1.4 સાન્ત અને અનંત ગણો 7

1.5 સમાન ગણ 8

1.6 ઉપગણ 10

1.7 ઘાતગણ 13

1.8 સાર્વત્રિક ગણ 13

1.9 વેન-આકૃતિ 15

1.10 ગણક્રિયાઓ 16

1.11 પૂરકગણ 20

1.12 બે ગણના યોગગણ અને છેદગણ પરના વ્યાવહારિક કૂટપ્રશ્નો 22

2. સંબંધ અને વિધેયો **32**

2.1 પ્રાસ્તાવિક 32

2.2 ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર 32

2.3 સંબંધ 36

2.4 વિધેય 38

3. ત્રિકોણમિતિય વિધેયો **49**

3.1 પ્રાસ્તાવિક 49

3.2 ખૂણા 50

3.3 ત્રિકોણમિતિય વિધેયો 55

3.4 બે ખૂણાના સરવાળા અને બાદબાકી સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયો 62

3.5 ત્રિકોણમિતિય સમીકરણો 72

3.6 *Sine* અને *Cosine* સૂત્રોની સાબિતી અને સરળ ઉપયોગ 76

4. ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત **88**

4.1 પ્રાસ્તાવિક 88

4.2 વિષયાભિમુખ 89

4.3 ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત 90

5. સંકર સંખ્યાઓ અને દ્વિઘાત સમીકરણો **99**

5.1 પ્રાસ્તાવિક 99

5.2 સંકર સંખ્યાઓ 99

5.3 સંકર સંખ્યાઓનું બીજગણિત 100

	5.4 સંકર સંખ્યાનો માનાંક તથા અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા	104
	5.5 આર્ગન્ડ આકૃતિ અને ધ્રુવીય સ્વરૂપ	106
	5.6 દ્વિઘાત સમીકરણો	109
	5.7 સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ	110
6.	**સુરેખ અસમતાઓ**	**117**
	6.1 પ્રાસ્તાવિક	117
	6.2 અસમતાઓ	117
	6.3 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાનો બૈજિક ઉકેલ અને તેનું આલેખ પર નિરૂપણ	119
	6.4 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાનો આલેખ પરથી ઉકેલ	124
	6.5 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ	128
7.	**ક્રમચય અને સંચય**	**134**
	7.1 પ્રાસ્તાવિક	134
	7.2 ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત	135
	7.3 ક્રમચયો	138
	7.4 સંચય	146
8.	**દ્વિપદી પ્રમેય**	**156**
	8.1 પ્રાસ્તાવિક	156
	8.2 ધનપૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટેનું દ્વિપદી પ્રમેય	156
	8.3 વ્યાપક અને મધ્યમપદો	163
9.	**શ્રેણી અને શ્રેઢી**	**171**
	9.1 પ્રાસ્તાવિક	171
	9.2 શ્રેણીઓ	172
	9.3 શ્રેઢી	173
	9.4 સમાંતર શ્રેણી (A.P.)	175
	9.5 સમગુણોત્તર શ્રેણી (G.P.)	179
	9.6 સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક વચ્ચેનો સંબંધ	184
	9.7 વિશિષ્ટ શ્રેણીઓનાં n પદોના સરવાળા	187
	9.8 અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી અને તેનો સરવાળો	190
10.	**રેખાઓ**	**197**
	10.1 પ્રાસ્તાવિક	197
	10.2 રેખાનો ઢાળ	199
	10.3 રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપ	205
	10.4 રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ	212
	10.5 બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર	215

10.6 બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા-સંહતિનું સમીકરણ 218
10.7 ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર 219

11. શાંકવો 227

11.1 પ્રાસ્તાવિક 227
11.2 શંકુનો પરિચ્છેદ 227
11.3 વર્તુળ 230
11.4 પરવલય 232
11.5 ઉપવલય 236
11.6 અતિવલય 243

12. ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો પરિચય 252

12.1 પ્રાસ્તાવિક 252
12.2 ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં યામાક્ષો અને યામ સમતલો 253
12.3 અવકાશમાં બિંદુના યામ 253
12.4 બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર 255
12.5 વિભાજન સૂત્ર 257

13. લક્ષ અને વિકલન 263

13.1 પ્રાસ્તાવિક 263
13.2 વિકલનનો સાહજિક ખ્યાલ 263
13.3 લક્ષ 265
13.4 ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં લક્ષ 275
13.5 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેય 279
13.6 વિકલન 281

14. ગાણિતિક તર્ક 296

14.1 પ્રાસ્તાવિક 296
14.2 વિધાન 297
14.3 જૂનાં વિધાનોમાંથી નવાં વિધાનો 299
14.4 વિશિષ્ટ શબ્દો/શબ્દસમૂહો 304
14.5 પ્રેરણ 309
14.6 વિધાનોની યથાર્થતા 313

15. આંકડાશાસ્ત્ર 321

15.1 પ્રાસ્તાવિક 321
15.2 પ્રસારનાં માપ 322
15.3 વિસ્તાર 323
15.4 સરેરાશ વિચલન 323

15.5 વિચરણ અને પ્રમાણિત વિચલન 333
15.6 આવૃત્તિ વિતરણનું વિશ્લેષણ 342

16. સંભાવના **351**

16.1 પ્રાસ્તાવિક 351
16.2 યાદૃચ્છિક પ્રયોગો 352
16.3 ઘટના 355
16.4 સંભાવનાનો પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ 362

પરિશિષ્ટ 1: અનંત શ્રેઢી **378**

A.1.1 પ્રાસ્તાવિક 378
A.1.2 કોઈપણ ઘાતાંક માટે દ્વિપદી પ્રમેય 378
A.1.3 અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી 380
A.1.4 ઘાતાંકીય શ્રેઢી 381
A.1.5 લઘુગણકીય શ્રેઢી 384

પરિશિષ્ટ 2: ગાણિતિક નમૂના **385**

A.2.1 પ્રાસ્તાવિક 385
A.2.2 પ્રાથમિકતાઓ 385
A.2.3 ગાણિતિક નમૂના શું છે ? 389

જવાબો **396**

પ્રકરણ 1

ગણ

❖ **In these days of conflict between ancient and modern studies; there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest. — G. H. HARDY** ❖

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણની સંકલ્પના એ આધુનિક ગણિતનો મૂળભૂત ભાગ છે. આજે આ સંકલ્પનાનો ગણિતની લગભગ બધી જ શાખાઓમાં ઉપયોગ થાય છે. સંબંધ અને વિધેયોના સિદ્ધાંતો વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે ગણનો ઉપયોગ થાય છે. ભૂમિતિ, શ્રેણીઓ, સંભાવના વગેરેના અભ્યાસ માટે ગણનું જ્ઞાન જરૂરી છે.

જર્મન ગણિતશાસ્ત્રી ***Georg Cantor*** એ (1845-1918) ગણની સંકલ્પનાનો સૈદ્ધાંતિક વિકાસ કર્યો. તેમણે ત્રિકોણમિતિય શ્રેઢીઓના કોયડાઓના ઉકેલ માટે પ્રથમ વખત ગણનો ઉપયોગ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે ગણ સંબંધિત પાયાની વ્યાખ્યાઓ અને ગણ પરની ક્રિયાઓ વિશે ચર્ચા કરીશું.

Georg Cantor

(1845-1918)

1.2 ગણ અને તેમનું નિરૂપણ

દૈનિક જીવનમાં, આપણે ઘણી વખત ચોક્કસ પ્રકારની વસ્તુઓના સમૂહ વિશે બોલતા હોઈએ છીએ, જેમકે પત્તાંનો ઢગ, વ્યક્તિઓનું ટોળું, ક્રિકેટ-ટીમ વગેરે. ગણિતમાં પણ આપણે કેટલાક સમૂહો વિશે વાત કરતાં હોઈએ

છીએ જેમકે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમૂહ, બિંદુઓનો સમૂહ, અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો સમૂહ વગેરે. આપણે વિશેષ રૂપે નીચેના સમૂહોનું નિરીક્ષણ કરીશું :

(i) 10 થી નાની અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, એટલે કે 1, 3, 5, 7, 9.

(ii) ભારતની નદીઓ

(iii) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના સ્વરો, એટલે કે a, e, i, o, u

(iv) વિવિધ પ્રકારના ત્રિકોણો

(v) 210 ના અવિભાજ્ય અવયવો, એટલે કે 2, 3, 5 અને 7

(vi) સમીકરણ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ નો ઉકેલ, એટલે કે 2 અને 3.

આપણે નોંધીશું કે ઉપરનું દરેક ઉદાહરણ એ આપેલી સુવ્યાખ્યાયિત વસ્તુઓ કે સંખ્યાઓનો સમૂહ છે. એટલે કે આપેલી વસ્તુ કે સંખ્યા જે-તે સમૂહનો સભ્ય છે કે નહિ તે ચોક્કસપણે નક્કી કરી શકીએ તેવો જથ્થો છે. દાખલા તરીકે આપણે કહી શકીએ કે, નાઈલ નદી એ ભારતની નદીઓના સમૂહનો સભ્ય નથી, પરંતુ ગંગા નદી આ સમૂહનો સભ્ય છે જ.

હવે, આપણે કહી શકીએ કે, ગણ એ સુવ્યાખ્યાયિત વસ્તુઓનો સમૂહ છે.

ખાસ કરીને ગણિતમાં ઉપયોગ થતો હોય તેવાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો આપીશું, જેમકે,

N : બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

Z : બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ

Q : બધી જ સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ

R : વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

$\mathbf{Z^+}$: ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ

$\mathbf{Q^+}$: ધન સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ

$\mathbf{R^+}$: ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

ઉપર દર્શાવેલા વિશિષ્ટ ગણોને જે-તે સંકેત વડે દર્શાવેલ છે. તે સંકેતોનો ઉપયોગ આપણે આ સમગ્ર અભ્યાસ દરમિયાન કરીશું.

અલબત્ત, દુનિયાના પાંચ નામાંકિત ગણિતશાસ્ત્રીઓનો સમૂહ એ સુવ્યાખ્યાયિત નથી, કારણ કે કોઈ ગણિતશાસ્ત્રી નામાંકિત છે કે નહિ તે માટેનો અભિપ્રાય વ્યક્તિ-વ્યક્તિએ બદલાતો રહેશે.

આમ, આ સુવ્યાખ્યાયિત સમૂહ નથી.

નીચેના મુદ્દાઓ નોંધીશું :

(i) ગણની વસ્તુઓ, ઘટકો અને સભ્યો એ ગણ સંબંધિત સમાનાર્થી શબ્દો છે.

(ii) સામાન્ય રીતે ગણને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના કેપિટલ અક્ષરો A, B, C, X, Y, Z વગેરે વડે દર્શાવાય છે.

(iii) ગણના સભ્યોને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના નાના અક્ષરો *a, b, c, x, y, z* વડે દર્શાવાય છે.

જો 'a' એ ગણ 'A' નો ઘટક હોય તો *"a એ A નો સભ્ય છે."* (a belongs to A) એમ કહીશું. શબ્દસમૂહ *"નો સભ્ય છે" (belongs to)*ને ગ્રીક સંકેત $\in$ વડે દર્શાવીશું. આમ આપણે $a \in$ A લખીશું. જો b એ ગણ A નો સભ્ય ન હોય, તો તેને આપણે $b \notin$ A વડે દર્શાવીશું અને *"b એ ગણ A નો સભ્ય નથી." (b does not belong to A)* પ્રમાણે વાંચીશું.

આમ, અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના સ્વરોના ગણ V માટે $a \in$ V, પરંતુ $b \notin$ V. 30 ના અવિભાજ્ય અવયવોના ગણ P માટે 3 $\in$ P, પરંતુ 15 $\notin$ P.

ગણને દર્શાવવા માટે બે પદ્ધતિ છે :

(i) *યાદીની રીત (Roster or tabular form)*

(ii) *ગુણધર્મની રીત (Set-builder form)*

(i) યાદીની રીતમાં ગણના બધા જ ઘટકોની યાદી બનાવાય છે. બે ઘટકોને દર્શાવતા સંકેત વચ્ચે અલ્પવિરામ મૂકીને તેમને જુદા પાડવામાં આવે છે અને તેમને ધનુષ્કૌંસ { } માં મુકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે 7 થી નાના ધન યુગ્મ પૂર્ણાંકોના ગણને યાદીની રીતમાં {2, 4, 6} પ્રમાણે દર્શાવાય. યાદીની રીત દર્શાવતાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો નીચે પ્રમાણે છે:

(a) જેના વડે 42 વિભાજ્ય છે તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

☛ નોંધ : યાદીની રીતમાં ઘટકોના ક્રમનું મહત્ત્વ નથી. આમ, ઉપરના ગણને {1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42}રીતે પણ રજૂ કરી શકાય.

(b) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના બધા જ સ્વરનો ગણ {a, e, i, o, u} છે.

(c) અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણને {1, 3, 5,...} રીતે દર્શાવી શકાય. ટપકાં આપણને કહે છે કે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમૂહ અનંત સુધી ચાલશે.

☛ નોંધ : એમ પણ નોંધીએ કે, યાદીની રીતે ગણ લખીએ તો ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરવામાં આવતું નથી. એટલે કે બધા ભિન્ન ઘટકો જ લેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે 'SCHOOL' શબ્દ બનાવતા મૂળાક્ષરોનો ગણ{ S, C, H, O, L} અથવા {H, O, L, C, S} થશે. અહીં ઘટકોના ક્રમનું કોઈ મહત્ત્વ નથી.

(ii) ગુણધર્મની રીતમાં ગણના બધા જ ઘટકો એક સામાન્ય ગુણધર્મ ધરાવે છે અને તે ગુણધર્મ ન ધરાવતા ઘટકો તે ગણમાં હોતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે {*a, e, i, o, u*} ના બધા જ ઘટકો એક સામાન્ય ગુણધર્મ ધરાવે છે. ગણના બધા જ ઘટકો અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના સ્વર છે અને બીજા કોઈ મૂળાક્ષર આ ગુણધર્મ ધરાવતા નથી. આ ગણને V વડે દર્શાવીએ તો આપણે V = {x : x એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીનો સ્વર છે.} પ્રમાણે લખીશું.

આપણે નોંધીશું કે ગણનો સભ્ય બતાવવા માટે સંકેત x (કોઈ પણ બીજા સંકેત y, z વગેરેનો ઉપયોગ કરી શકાય.)નો ઉપયોગ કર્યો છે અને તેના પછી " : " કૉલન લખેલ છે. કૉલનની સંજ્ઞા કર્યા પછી, ગણના બધા જ ઘટકોનો સમાવેશ થાય તેવો લાક્ષણિક ગુણધર્મ લખીએ છીએ અને પછી આપણે આ સમગ્ર વર્ણનને ધનુષ્કૌંસથી બંધ કરીએ છીએ. ઉપર વર્ણવેલ ગણ V ને "x એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરનો સ્વર હોય તેવા બધા જ x નો ગણ છે" તરીકે વાંચી શકાય. આ વર્ણનમાં કૌંસ એ "બધા જ ઘટકોનો ગણ" માટે વપરાય છે. કૉલન "કે જ્યાં" માટે ઉપયોગમાં લેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે ગણ

A = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $3 < x < 10$} ને ''જ્યાં x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને x એ 3 અને 10 ની વચ્ચે આવેલી સંખ્યા છે.'' રીતે વાંચીશું. આથી, સંખ્યાઓ 4, 5, 6, 7, 8 અને 9 ગણ A ના ઘટકો થાય.

જો આપણે ઉપર (a), (b) અને (c) માં વર્ણવેલ ગણોને અનુક્રમે સંજ્ઞા A, B અને C આપીએ, તો A, B અને C ને ગુણધર્મની રીતે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

A = {x : x એ 42 નો પ્રાકૃતિક પૂર્ણાંક અવયવ છે.}

B = {y : y એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીનો સ્વર છે.}

C = {z : z એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણ $x^2 + x - 2 = 0$ ના ઉકેલગણને યાદીની રીતે લખો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $(x - 1)\ (x + 2) = 0$ તરીકે લખી શકીએ. આમ $x = 1$ અથવા -2.

તેથી આપેલ સમીકરણના ઉકેલગણને યાદીની રીતે {1, – 2} સ્વરૂપે લખી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : ગણ {x : x એ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને $x^2 < 40$} ને યાદીની રીતે લખો.

ઉકેલ : માંગેલ સંખ્યાઓ 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે. તેથી આપેલ ગણ યાદીની રીતે {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

ઉદાહરણ 3 : ગણ A = {1, 4, 9, 16, 25, ...} ને ગુણધર્મની રીતે લખો.

ઉકેલ : આપેલ ગણ એ A = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ છે.}

બીજી રીતે, આપણે A = {x : $x = n^2$, જ્યાં $n \in$ **N**} તરીકે લખી શકીએ.

નોંધ : આ ઉકેલ અનન્ય નથી. ઉદાહરણ તરીકે B = {x : x શૂન્યેતર પૂર્ણાંકનો વર્ગ છે.} પણ ઉકેલ થાય.

ઉદાહરણ 4 : ગણ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ ને ગુણધર્મની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં આપેલ ગણના દરેક ઘટકનો અંશ તેના છેદ કરતાં એક જેટલો ઓછો છે. અંશની શરૂઆત 1 થી થાય છે અને તે 6 થી વધારે નથી. આથી આપેલ ગણને ગુણધર્મની રીતે

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ \text{જ્યાં } n \text{ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને } 1 \le n \le 6\right\}$$ લખી શકાય.

ઉદાહરણ 5 : ડાબી બાજુએ યાદીની રીતે દર્શાવેલ દરેક ગણના જમણી બાજુએ ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલા ગણ સાથે યોગ્ય જોડકાં બનાવો.

(i) {P, R, I, N, C, A, L}	(a) { x : x એ ધન પૂર્ણાંક છે અને 18 નો ભાજક છે.}
(ii) { 0 }	(b) { x : x એ પૂર્ણાંક છે અને $x^2 - 9 = 0$}
(iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c) {x : x એ પૂર્ણાંક છે અને $x + 1 = 1$}
(iv) {3, –3}	(d) {x : x એ PRINCIPAL શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

ઉકેલ : (d) માં PRINCIPAL શબ્દના 9 અક્ષરો છે અને તેમાં બે અક્ષરો P અને I પુનરાવર્તિત થાય છે. આથી (i) એ (d) સાથે જોડાશે. તે જ પ્રમાણે $x + 1 = 1$ તો $x = 0$ હોવાથી (ii) એ (c) સાથે જોડી બનાવશે. 1, 2, 3, 6, 9, 18 એ 18 ના ધન અવયવો છે અને આ સિવાય 18 ને કોઈ ધન અવયવ નથી અને તેથી (iii) એ (a) સાથે જોડાશે. છેલ્લે $x^2 - 9 = 0$ તો અને તો જ $x = 3$ અથવા -3. આથી (iv) એ (b) સાથે જોડકું બનાવશે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચેનામાંથી કયા સમૂહ ગણ દર્શાવે છે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

(i) J અક્ષરથી શરૂ થતા અંગ્રેજી કૅલેન્ડરના વર્ષના તમામ મહિનાઓનો સમૂહ

(ii) ભારતના દસ અતિ પ્રતિભાશાળી લેખકોનો સમૂહ

(iii) દુનિયાના ક્રિકેટના ઉત્તમ અગિયાર બૅટ્સમેનોની ટીમ

(iv) તમારા વર્ગના બધા જ છોકરાઓનો સમૂહ

(v) 100 થી નાની બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમૂહ

(vi) લેખક મુન્શી પ્રેમચંદે લખેલી બધી જ નવલકથાઓનો સમૂહ

(vii) બધા જ યુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સમૂહ

(viii) આ પ્રકરણના બધા પ્રશ્નોનો સમૂહ

(ix) દુનિયાનાં ખૂબ જ ભયાનક પ્રાણીઓનો સમૂહ

2. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} લો. ખાલી જગ્યામાં યોગ્ય સંજ્ઞા $\in$ અથવા $\notin$ મૂકો.

(i) 5…A (ii) 8…A (iii) 0…A

(iv) 4…A (v) 2…A (vi) 10...A

3. નીચેના ગણોને યાદીની રીતે લખો :

(i) A = {x : x એ પૂર્ણાંક છે અને $-3 < x < 7$.}

(ii) B = {x : x એ 6 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(iii) C = {x : x એ જેના અંકોનો સરવાળો 8 થતો હોય તેવી બે અંકોની સંખ્યા છે.}

(iv) D = {x : x એ 60 નો ધન અવયવ હોય તેવી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.}

(v) E = TRIGONOMETRY શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ગણ

(vi) F = BETTER શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ગણ

4. નીચેના ગણોને ગુણધર્મની રીતે લખો :

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32} (iii) {5, 25, 125, 625}

(iv) {2, 4, 6,…} (v) {1, 4, 9, …100}

5. નીચેના ગણોના બધા જ ઘટકો લખો :

(i) A = {x : x એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(ii) B = {x : x એ પૂર્ણાંક છે, $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$ }

(iii) C = {x : x એ પૂર્ણાંક છે, $x^2 \leq 4$}

(iv) D = {x : x એ "LOYAL" શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

(v) E = {x : x એ વર્ષનો 31 દિવસનો ન હોય તેવો મહિનો છે.}

(vi) F = {x : x એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની ક્રમાનુસાર યાદીમાં k પહેલાંનો વ્યંજન છે.}

6. ડાબી બાજુએ યાદીની રીતે દર્શાવેલ ગણોને જમણી બાજુએ તેના જ ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલા ગણો સાથે સાંકળો.

(i) {1, 2, 3, 6}	(a) {x : x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અને 6 નો અવયવ છે.}
(ii) {2, 3}	(b) {x : x એ 10 કરતાં નાની અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}
(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S}	(c) {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને 6 નો અવયવ છે.}
(iv) {1, 3, 5, 7, 9}	(d) {x : x એ MATHEMATICS શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

1.3 ખાલીગણ

ગણ A = { x : x એ અત્યારે એક ચોક્કસ શાળાના ધોરણ XI માં અભ્યાસ કરતો વિદ્યાર્થી છે.} લો.

આપણે શાળાએ જઈશું અને ત્યાં ધોરણ XI માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા ગણીશું. આમ, ગણ A નિશ્ચિત સંખ્યાના ઘટકો ધરાવે છે.

આપણે હવે નીચે પ્રમાણે બીજો ગણ B લઈએ:

B = { x : x એ અત્યારે ધોરણ X અને XI બંનેમાં અભ્યાસ કરતો વિદ્યાર્થી છે.}

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે એક પણ વિદ્યાર્થી બંને વર્ગ X અને XI માં એક સાથે અભ્યાસ કરી શકે નહિ.

આમ, ગણ B માં એક પણ ઘટક નથી.

વ્યાખ્યા 1 *જે ગણ એક પણ ઘટક ન ધરાવતો હોય તેવા ગણને ખાલીગણ (null set) અથવા રિક્ત ગણ (Empty set or the void set) કહે છે.*

આ વ્યાખ્યા પ્રમાણે B ખાલીગણ છે, જ્યારે A ખાલીગણ નથી. ખાલીગણને સંકેતમાં ϕ અથવા { } વડે દર્શાવાય છે.

આપણે નીચે ખાલીગણનાં કેટલાંક ઉદાહરણ આપીએ :

(i) જો A = {x : $1 < x < 2$, x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}, તો A એ ખાલીગણ છે, કારણ કે 1 અને 2 ની વચ્ચે એક પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી.

(ii) જો B = {x : $x^2 - 2 = 0$ અને x એ સંમેય સંખ્યા છે.}, તો B ખાલીગણ છે, કારણ કે કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા x એ સમીકરણ $x^2 - 2 = 0$ નું સમાધાન કરતી નથી.

(iii) જો C = {x : x એ 2 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય યુગ્મ સંખ્યા છે.}, તો C ખાલીગણ છે કારણ કે યુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા ફક્ત 2 જ છે.

(iv) જો D = { x : $x^2 = 4$, x એ અયુગ્મ છે.}, તો D ખાલીગણ છે, કારણ કે કોઈ પણ અયુગ્મ x એ સમીકરણ $x^2 = 4$ નું સમાધાન ન કરે.

1.4 સાન્ત અને અનંત ગણો

A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {a, b, c, d, e, g} અને C = { હાલમાં દુનિયાના જુદા જુદા ભાગમાં રહેતા પુરુષો}

આપણે જોઈએ છીએ કે, A એ 5 ઘટકો ધરાવે છે અને B એ 6 ઘટકો ધરાવે છે. ગણ C કેટલા ઘટકો ધરાવે છે ? C ના ઘટકોની સંખ્યા આપણે જાણતાં નથી, પરંતુ તે કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને તે ખૂબ મોટી સંખ્યા હોઈ શકે. ગણ S ના ઘટકોની સંખ્યા, એટલે ગણ S ના ભિન્ન ઘટકોની સંખ્યા એમ આપણે સમજીશું અને તેને આપણે n (S) દ્વારા દર્શાવીશું. જો n (S) એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય, તો S એ *અરિક્ત સાન્ત ગણ (non-empty finite set)* કહેવાય છે.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ લો. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આ ગણના ઘટકોની સંખ્યા સાન્ત નથી, કારણ કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની સંખ્યા અનિશ્ચિત, અસીમિત છે. આપણે કહીશું કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ *અનંત ગણ (infinite set)* છે. ઉપર આપેલા ગણ A, B અને C સાન્ત ગણ છે અને n(A) = 5, n(B) = 6 અને n(C) = એક નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક.

વ્યાખ્યા 2 *જે ગણ ખાલી હોય અથવા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી સભ્ય સંખ્યા ધરાવે, તે ગણને સાન્ત ગણ કહે છે, અન્યથા તે ગણને અનંત ગણ કહીશું.*

કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ :

(i) જો ગણ W એ અઠવાડિયાના દિવસોનો ગણ લઈએ, તો W સાન્ત ગણ છે.

(ii) જો S એ સમીકરણ $x^2 - 16 = 0$ ના ઉકેલોનો ગણ લઈએ, તો S એ સાન્ત ગણ છે.

(iii) G એ રેખા પરનાં બિંદુઓનો ગણ લઈએ, તો G અનંત ગણ થશે.

જ્યારે આપણે ગણને યાદીની રીતે દર્શાવીએ, ત્યારે આપણે ગણના બધા જ ઘટકોને { }કૌંસમાં લખીશું. અનંત ગણના બધાં જ ઘટકોને { } કૌંસમાં લખવાનું શક્ય નથી, કારણ કે આવા ગણની સભ્ય સંખ્યા સીમિત નથી. આથી આપણે કેટલાક અનંત ગણને યાદીની રીતે દર્શાવવા માટે તે ગણનું સ્પષ્ટ માળખું દર્શાવતા થોડાક સભ્યો લખી તે પછીના સભ્યો માટે (અથવા તે પૂર્વેના સભ્યો માટે) ત્રણ ટપકાં મૂકીશું.

ઉદાહરણ તરીકે {1, 2, 3...} એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે, {1, 3, 5, 7,...} એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ છે, {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2 , 3,...} એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આ બધા જ ગણો અનંત ગણ છે.

☛ નોંધ બધા જ અનંત ગણને યાદીની રીતે દર્શાવી શકાતા નથી. દાખલા તરીકે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને આ રીતે દર્શાવી શકાય નહિ, કારણ કે આ ગણનાં ઘટકો કોઈ નિશ્ચિત ભાતને અનુસરતાં નથી.

ઉદાહરણ 6 : નીચેના ગણોમાંથી કયા સાન્ત અને કયા અનંત ગણ છે તે નક્કી કરો :

(i) $\{x : x \in \text{N}$ અને $(x - 1)(x - 2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in \text{N}$ અને $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in \text{N}$ અને $2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in \text{N}$ અને x અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$

(v) $\{x : x \in \text{N}$ અને x અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.$\}$

ઉકેલ : (i) આપેલ ગણ = {1, 2}. આથી, તે સાન્ત ગણ છે.

(ii) આપેલ ગણ = {2}. આથી, તે સાન્તગણ છે.

(iii) આપેલ ગણ = ϕ. આથી, તે સાન્તગણ છે.

(iv) આપેલ ગણ એ બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ છે અને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની સંખ્યા અનંત છે. આથી આપેલ ગણ અનંત ગણ છે.

(v) અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકોની સંખ્યા અનંત હોવાથી, આપેલ ગણ અનંત ગણ છે.

1.5 સમાન ગણ

આપેલ બે ગણ A અને B માટે, જો A નો પ્રત્યેક ઘટક એ B નો પણ ઘટક હોય તથા B નો પ્રત્યેક ઘટક એ A નો પણ ઘટક હોય, તો ગણ A અને B ને સમાન ગણ કહેવાય. એ સ્પષ્ટ છે કે, બંને ગણમાં યથાર્થ રીતે એકના એક જ ઘટકો છે.

વ્યાખ્યા 3 *જો બે ગણ A અને B ને યથાર્થ રીતે એકના એક જ ઘટકો હોય, તો A અને B સમાન ગણો કહેવાય અને આપણે $A = B$ પ્રમાણે લખીશું. નહિ તો, આ ગણોને અસમાન ગણ કહીશું અને આપણે $A \neq B$ લખીશું.*

આપણે નીચેનાં ઉદાહરણ લઈશું :

(i) A = {1, 2, 3, 4} અને B = {3, 1, 4, 2} લઈએ તો A = B.

(ii) ધારો કે A એ 6 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ છે અને P એ 30 ના અવિભાજ્ય અવયવોનો ગણ છે. ફક્ત 2, 3 અને 5 એ 30 ના અવિભાજ્ય અવયવો છે તથા તેઓ 6 કરતાં નાના છે. વળી 6 કરતાં નાની પ્રત્યેક અવિભાજ્ય સંખ્યા એ 30 નો અવયવ છે. આથી A અને P સમાન છે.

નોંધ : જો ગણમાં એક અથવા વધારે ઘટકોનું પુનરાવર્તન થાય, તો ગણ બદલાતો નથી. દાખલા તરીકે, ગણ A = {1, 2, 3} અને B = {2, 2, 1, 3, 3} સમાન છે, કારણ કે ગણ A નો દરેક ઘટક ગણ B માં છે અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે. આ કારણે આપણે ગણ દર્શાવતી વખતે મહદંશે ઘટકનું પુનરાવર્તન કરતાં નથી.

ઉદાહરણ 7 : સમાન ગણોની જોડી શોધો (જો હોય તો). તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.

A = {0}, B = $\{x : x > 15$ અને $x < 5\}$,

C = $\{x : x - 5 = 0\}$, D = $\{x : x^2 = 25\}$,

E = $\{x : x$ એ સમીકરણ $x^2 - 2x - 15 = 0$ નું ધન પૂર્ણાંક બીજ છે.$\}$

ઉકેલ: $0 \in A$ અને B, C, D અને E પૈકી કોઈ પણ ગણમાં 0 આવેલો નથી. આથી આ દર્શાવે છે કે $A \neq B, A \neq C, A \neq D, A \neq E$.

$B = \phi$ પરંતુ બાકીના કોઈ પણ ગણ ખાલીગણ નથી. માટે $B \neq C$, $B \neq D$ અને $B \neq E$. $C = \{5\}$, પરંતુ $-5 \in D$ પણ છે. આથી $C \neq D$.

$E = \{5\}$, $C = E$ તથા $D = \{-5, 5\}$ અને $E = \{5\}$. આપણે જોઈ શકીએ કે $D \neq E$. આમ, સમાન ગણોની ફક્ત એક જ જોડી C અને E ની છે.

ઉદાહરણ 8 : નીચેનામાંથી કઈ જોડીના ગણ સમાન છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

(i) “ALLOY” ના મૂળાક્ષરોનો ગણ X અને “LOYAL” ના મૂળાક્ષરોનો ગણ B છે.

(ii) $A = \{n : n \in Z$ અને $n^2 \leq 4\}$ અને $B = \{x : x \in R$ અને $x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

ઉકેલ : (i) અહીં, $X = \{A, L, L, O, Y\}$, $B = \{L, O, Y, A, L\}$. ગણમાં ઘટકોનું પુનરાવર્તન ગણને બદલતું ન હોવાથી X અને B સમાન ગણ છે. આમ, $X = \{A, L, O, Y\} = B$.

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$. $0 \in A$ અને $0 \notin B$, હોવાથી A અને B સમાન ગણો નથી.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેનામાંથી કયા ગણ ખાલીગણનાં ઉદાહરણ છે ?

(i) 2 વડે વિભાજ્ય અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

(ii) યુગ્મ અવિભાજ્ય પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

(iii) $\{ x : x$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $x < 5$ અને $x > 7 \}$

(iv) $\{ y : y$ એ બે ભિન્ન સમાંતર રેખાઓનું સામાન્ય બિંદુ છે.$\}$

2. નીચેનામાંથી કયા ગણ સાન્ત ગણ અને કયા ગણ અનંત ગણ છે ?

(i) વર્ષના મહિનાઓનો ગણ

(ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

(iii) $\{1, 2, 3, \ldots 99, 100\}$

(iv) 100 કરતાં મોટા ધન પૂર્ણાંકોનો ગણ

(v) 99 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ

3. નીચેના ગણોમાંથી કયા ગણ સાન્ત અને કયા ગણ અનંત છે તે શોધો.

(i) x-અક્ષને સમાંતર રેખાઓનો ગણ

(ii) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોનો ગણ

(iii) 5 ની ગુણિત સંખ્યાઓનો ગણ

(iv) પૃથ્વી પર વસતાં પ્રાણીઓનો ગણ

(v) ઊગમબિંદુ (0,0) માંથી પસાર થતાં વર્તુળોનો ગણ

4. નીચેનામાંથી નક્કી કરો કે A = B છે કે નહિ :

(i) A = $\{ a, b, c, d \}$, B = $\{ d, c, b, a \}$

(ii) A = { 4, 8, 12, 16 }, B = { 8, 4, 16, 18}

(iii) A = {2, 4, 6, 8, 10}, B = { x : x એ યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક છે અને $x \le 10$}

(iv) A = { x : x એ 10 નો ગુણિત છે}, B = { 10, 15, 20, 25, 30,...}

5. નીચે આપેલી જોડીઓના ગણ સમાન છે ? કારણ આપો :

(i) A = {2, 3}, B = {x : x એ $x^2 + 5x + 6 = 0$ નો ઉકેલ છે.}

(ii) A = { x : x એ FOLLOW શબ્દનો મૂળાક્ષર છે}, B = { y : y એ WOLF શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

6. નીચે આપેલ ગણમાંથી સમાન ગણ પસંદ કરો :

A = { 2, 4, 8, 12}, B = { 1, 2, 3, 4}, C = { 4, 8, 12, 14}, D = { 3, 1, 4, 2}

E = {–1, 1}, F = { 0, a}, G = {1, –1}, H = { 0, 1}

1.6 ઉપગણ

ધારો કે ગણ X = તમારી શાળાના તમામ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ તથા Y = તમારા વર્ગના તમામ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ.

આપણે નોંધીશું કે ગણ Y નો દરેક ઘટક એ ગણ X નો પણ ઘટક છે. આપણે કહીશું કે, ગણ Y એ X નો ઉપગણ છે. Y એ X નો ***ઉપગણ*** (*Subset*) છે તે હકીકતને આપણે સંકેતમાં $Y \subset X$ થી દર્શાવીશું. સંકેત $\subset$ એ શબ્દસમૂહ ''ઉપગણ છે'' અથવા ''માં સમાવિષ્ટ છે'' (''*is a subset of*'' અથવા ''*is contained in*'') માટે ઉપયોગ કરીશું.

વ્યાખ્યા 4 *જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક એ ગણ B નો પણ ઘટક હોય તો ગણ A ને ગણ B નો ઉપગણ કહેવાય. બીજી રીતે કહીએ તો, જ્યારે $a \in A$ હોય ત્યારે $a \in B$ હોય તો $A \subset B$ થાય.*

ઘણી વખત સંજ્ઞા ''⇒'' વાપરવી અનુકૂળ હોય છે. તેનો અર્થ પ્રેરણ (implies) કરીશું. આ સંજ્ઞાનો ઉપયોગ કરી, આપણે ઉપગણની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે લખીશું :

જો $a \in A \Rightarrow a \in B$, તો $A \subset B$.

આપણે ઉપરનું વાક્ય આ પ્રમાણે વાંચીશું. ''*જો પ્રત્યેક a માટે, a એ A નો ઘટક હોય, તો a એ B નો પણ ઘટક છે*'' એવું બને તો A એ B નો ઉપગણ છે. જો A એ B નો ઉપગણ ન હોય તો આપણે $A \not\subset B$ લખીશું.

આપણે નોંધીશું કે, A ને B નો ઉપગણ થવા માટે એ જરૂરી છે કે A નો દરેક ઘટક B માં હોવો જોઈએ. B નો દરેક ઘટક A માં હોય અથવા ન પણ હોય તેમ શક્ય છે. જો B નો દરેક ઘટક A માં પણ હોય તેવું શક્ય બને તો આપણે $B \subset A$ લખીશું. આવા કિસ્સામાં A અને B સમાન ગણો થશે, એટલે કે $A \subset B$ અને $B \subset A \Leftrightarrow A = B$,

અહીં "$\Leftrightarrow$" એ ***દ્વિપ્રેરણ*** *(two way implication)* માટેનો સંકેત છે. તેને આપણે સામાન્ય રીતે *''તો અને તો જ''* *(if and only if ટૂંકમાં, "iff")* પ્રમાણે વાંચીશું.

ઉપરની વ્યાખ્યા પરથી ફલિત થાય છે કે, દરેક ગણ A પોતે પોતાનો ઉપગણ છે, એટલે કે $A \subset A$. ખાલીગણ ϕ ને એક પણ ઘટક નથી. આથી આપણે સંમત થઈશું કે, ϕ એ દરેક ગણનો ઉપગણ છે. હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈશું :

(i) સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ **Q** એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ **R** નો ઉપગણ છે અને આપણે $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ લખીશું.

(ii) જો 56 ના ધન પૂર્ણાંક અવયવોનો ગણ A અને 56ના ધન અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક અવયવોનો ગણ B હોય, તો B એ A નો ઉપગણ થશે અને આપણે $B \subset A$ લખીશું.

(iii) જો $A = \{1, 3, 5\}$ અને $B = \{x : x$ એ 6 કરતાં નાની અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$ લઈએ, તો $A \subset B$ અને $B \subset A$ અને આથી $A = B$.

(iv) $A = \{ a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{ a, b, c, d\}$ લેતાં, A એ B નો ઉપગણ નથી. B પણ A નો ઉપગણ નથી.

ધારો કે A અને B બે ગણ છે. જો $A \subset B$ અને $A \neq B$ હોય, તો A ને B નો ***ઉચિત ઉપગણ*** *(Proper Subset)* કહે છે અને B ને A નો ***અધિગણ*** *(superset)* કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

$A = \{1, 2, 3\}$ એ ગણ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ નો **ઉચિત ઉપગણ** છે.

જો ગણ A ને એક જ સભ્ય હોય તો તેને ***એકાકી*** *(singleton)* કહે છે. આમ, $\{ a \}$ એ એકાકી છે.

ઉદાહરણ 9 : ગણ ϕ, $A = \{ 1, 3 \}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ આપેલા છે.

નીચે દર્શાવેલી દરેક ગણની જોડીની વચ્ચે સંજ્ઞા $\subset$ અથવા $\not\subset$ સમાવિષ્ટ કરો :

(i) $\phi \ldots B$ (ii) $A \ldots B$ (iii) $A \ldots C$ (iv) $B \ldots C$

ઉકેલ: (i) ϕ એ દરેક ગણનો ઉપગણ છે, આથી $\phi \subset B$.

(ii) $3 \in A$ અને $3 \notin B$. આથી $A \not\subset B$.

(iii) $A \subset C$ કારણ કે $1, 3 \in A$ અને 1, 3 એ C માં પણ છે.

(iv) $B \subset C$ કારણ કે B નો દરેક ઘટક એ C નો પણ ઘટક છે.

ઉદાહરણ 10 : $A = \{ a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{ a, b, c, d\}$ લો. A એ B નો ઉપગણ છે ? ના (શા માટે ?). B એ Aનો ઉપગણ છે ? ના (શા માટે ?)

ઉદાહરણ 11 : A, B અને C ત્રણ ગણ છે. જો $A \in B$ અને $B \subset C$ તો $A \subset C$ સાચું છે ? જો તમારો ઉત્તર 'ના' હોય, તો ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : ના. ધારો કે $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ અને $C = \{\{1\}, 2, 3\}$. અહીં $A = \{1\}$ હોવાથી $A \in B$ અને $B \subset C$. પરંતુ $A \not\subset C$ કારણ કે $1 \in A$ અને $1 \notin C$.

આપણે નોંધીશું કે ગણનો ઘટક એ પોતે પોતાનો ઉપગણ નથી.

1.6.1 વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણના ઉપગણો

વિભાગ 1.6 માં નોંધ્યા પ્રમાણે **R** ને ઘણા અગત્યના ઉપગણો છે. આપણે આવા કેટલાક ઉપગણોનું નીચે પ્રમાણે નામકરણ કરીશું :

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{Q} = \{ x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}$ અને $q \neq 0\}$

તેને આ પ્રમાણે વાંચીશું "p અને q પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર હોય તેવા અપૂર્ણાંકો $\frac{p}{q}$ નો ગણ **Q** છે."

Q માં -5 છે. (તેને $\frac{-5}{1}$ સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.) $\frac{5}{7}$, $3\frac{1}{2}$ (તેને $\frac{7}{2}$ સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.) અને $-\frac{11}{3}$ સભ્યોનો સમાવેશ પણ **Q** માં કરી શકાય.

અસંમેય સંખ્યાઓના ગણને **T** દ્વારા દર્શાવીશું. ગણ **T** એ સંમેય સંખ્યાઓ સિવાયની બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો બનેલો છે. આમ, $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \notin \mathbf{Q}\}$, એટલે કે **T** સંમેય ન હોય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. સભ્યો $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ અને π નો **T** માં સમાવેશ થાય છે.

આ ઉપગણોના કેટલાક સ્વયંસ્પષ્ટ સંબંધો :

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$.

1.6.2 R ના ઉપગણો તરીકે અંતરાલ

ધારો કે $a, b \in \mathbf{R}$ અને $a < b$. વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ $\{ y : a < y < b\}$ ને ***વિવૃત્ત અંતરાલ (open interval)*** કહે છે અને તેને (a, b) વડે દર્શાવાય છે. a અને b વચ્ચેનાં તમામ બિંદુઓ વિવૃત્ત અંતરાલ (a, b) માં આવેલાં છે. પરંતુ a અને b પોતે આ અંતરાલમાં નથી.

જે અંતરાલમાં તેનાં અંત્યબિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે તેને ***સંવૃત્ત અંતરાલ (closed interval)*** કહે છે અને તેને $[a, b]$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.

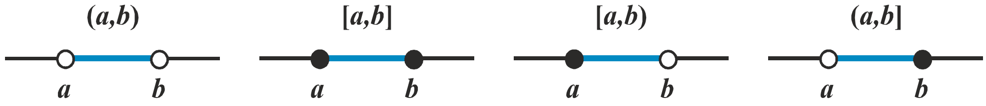
એક અંત્યબિંદુએ સંવૃત્ત અને બીજા અંત્યબિંદુએ વિવૃત્ત હોય એવા અંતરાલો પણ આપણી પાસે છે. એટલે કે,

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ એ a નો સમાવેશ કરતો હોય અને b નો સમાવેશ કરતો ના હોય તેવો a થી b સુધીનો વિવૃત્ત અંતરાલ $[a, b)$ છે.

$(a, b] = \{ x : a < x \le b \}$ એ b ને સમાવતો અને a ને ન સમાવતો a થી b સુધીનો વિવૃત્ત અંતરાલ છે.

વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણના ઉપગણને નિર્દેશિત કરવા માટે આ સંજ્ઞાઓ બીજું ભિન્ન સ્વરૂપ પૂરું પાડે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો $A = (-3, 5)$ અને $B = [-7, 9]$, તો $A \subset B$. ગણ $[0, \infty)$ એ અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ વ્યાખ્યાયિત કરે છે. ગણ $(-\infty, 0)$ એ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને વ્યાખ્યાયિત કરે છે. ગણ $(-\infty, \infty)$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ દર્શાવે છે. તે $-\infty$ થી ∞ સુધી લંબાવેલ રેખા પરનાં બિંદુઓનો ગણ દર્શાવે છે.

ઉપર વર્ણવેલા **R** ના જુદાં-જુદાં અંતરાલોને સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 1.1 પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.



આકૃતિ 1.1

અહીં, આપણે નોંધીશું કે, અંતરાલ એ અનંત સંખ્યામાં બિંદુઓનો સમાવેશ કરે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલ ગણ $\{x : x \in \mathbf{R}, -5 < x \le 7\}$, ને અંતરાલ સ્વરૂપમાં $(-5, 7]$ અને અંતરાલ $[-3, 5)$ ને ગુણધર્મની રીતે $\{x : x \in \mathbf{R}, -3 \le x < 5\}$ પ્રમાણે લખી શકાય.

સંખ્યા $(b - a)$ ને કોઈ પણ અંતરાલ (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ અથવા $(a, b]$ ની લંબાઈ કહે છે.

1.7 ઘાતગણ

ગણ $\{1, 2\}$ લો. ગણ $\{1, 2\}$ ના બધા જ ઉપગણ લખીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે ϕ એ દરેક ગણનો ઉપગણ છે. આથી ϕ એ $\{1, 2\}$ નો ઉપગણ છે. આપણે જોઈ શકીએ કે $\{1\}$ અને $\{2\}$ પણ ગણ $\{1, 2\}$ ના ઉપગણ છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, દરેક ગણ પોતે એ પોતાનો ઉપગણ છે. આથી $\{1, 2\}$ એ $\{1, 2\}$ નો ઉપગણ છે. આમ, એકંદરે ગણ $\{1, 2\}$ ને ચાર ઉપગણો, ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$ અને $\{1, 2\}$ છે. આ તમામ ઉપગણોના ગણને $\{1, 2\}$ નો ઘાતગણ કહીશું.

*વ્યાખ્યા 5 : ગણ A ના તમામ ઉપગણોથી બનતા ગણને A નો **ઘાતગણ (power set)** કહે છે. તેને P(A) વડે દર્શાવાય છે. P(A) નો દરેક ઘટક એ ગણ છે.*

આમ, ઉપર જણાવ્યા પ્રમાણે, જો $A = \{1, 2\}$, તો

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

એ પણ નોંધીશું કે $n[P(A)] = 4 = 2^2$

વ્યાપક સ્વરૂપે, જો ગણ A માટે $n(A) = m$, તો $n[P(A)] = 2^m$ બતાવી શકાય.

1.8 સાર્વત્રિક ગણ

સામાન્યતઃ કોઈ વિશિષ્ટ સંદર્ભમાં આપણે એક નિશ્ચિત મૂળભૂત ગણના ઉપગણો અને ઘટકો સાથે કામ કરતા હોઇએ છીએ અને તે વિશિષ્ટ સંદર્ભમાં સુસંગત હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે સંખ્યા સંહતિનો અભ્યાસ કરતાં

હોઈએ ત્યારે આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ અને તેના ઉપગણો જેમકે, અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગણ, યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગણ અને આવા બધામાં આપણે રસ લેતાં હોઈએ છીએ. આવા મૂળભૂત ગણને *"સાર્વત્રિક ગણ"* *(Universal Set)* કહે છે. સાર્વત્રિક ગણને સામાન્ય રીતે U દ્વારા અને તેના બધા ઉપગણોને A, B, C વગેરે મૂળાક્ષરો દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણ માટે સાર્વત્રિક ગણ તરીકે સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ અથવા વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ R હોઈ શકે. બીજા ઉદાહરણ તરીકે વસતી-ગણતરીના અભ્યાસમાં દુનિયાની બધી જ વ્યક્તિઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ શકાય.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યામાં સંજ્ઞા $\subset$ અથવા $\not\subset$ પૂરો :

(i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

(iii) $\{x : x$ એ તમારી શાળાનો ધોરણ XI નો વિદ્યાર્થી છે.$\} \ldots \{x : x$ એ તમારી શાળાનો વિદ્યાર્થી છે.$\}$

(iv) $\{x : x$ સમતલમાં વર્તુળ છે.$\} \ldots \{x : x$ એ આ જ સમતલનું 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે.$\}$

(v) $\{x : x$ એ સમતલમાં ત્રિકોણ છે.$\} \ldots \{x : x$ એ સમતલમાં લંબચોરસ છે.$\}$

(vi) $\{x : x$ એ સમતલમાં સમબાજુ ત્રિકોણ છે.$\} \ldots \{x : x$ એ આ જ સમતલનો ત્રિકોણ છે.$\}$

(vii) $\{x : x$ એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\} \ldots \{x : x$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.$\}$

2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તેની ચકાસણી કરો :

(i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

(ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીનો એક સ્વર છે.$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ એ 6 કરતાં નાની યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\} \subset \{x : x$ એ 36 નો અવયવ હોય તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

3. $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ છે. નીચેનાં વિધાનો પૈકી કયાં વિધાનો અસત્ય છે અને શા માટે ?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$

(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. નીચે આપેલા ગણોના તમામ ઉપગણો લખો :

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. જો $A = \phi$ હોય, તો P(A) ને કેટલા ઘટકો હશે ?

6. નીચેનાને અંતરાલ સ્વરૂપે લખો :

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

7. નીચે આપેલા અંતરાલોને ગુણધર્મની રીતે લખો :

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. નીચેનાં વિધાનો માટે તમે કયા ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે પસંદ કરશો :

(i) કાટકોણ ત્રિકોણોનો ગણ (ii) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણોનો ગણ

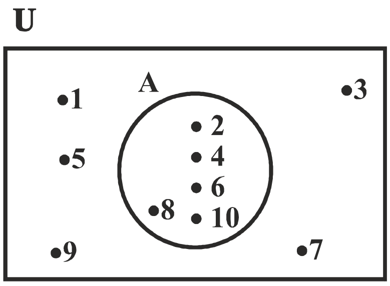
9. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ અને $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, આપેલ ગણ છે. આ ત્રણ ગણ A, B અને C માટે નીચેનામાંથી કયા ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ શકાય.

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ

(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1.9 વેન-આકૃતિ

ગણો વચ્ચેના ઘણાખરા સંબંધોને આકૃતિઓ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. તેમને આપણે ***વેન આકૃતિઓ*** *(Venn diagrams)* થી જાણીએ છીએ. અંગ્રેજી તર્કશાસ્ત્રી ***John Venn*** (1834-1883) ના નામ પરથી તેમને વેન આકૃતિ નામ આપ્યું છે. આ આકૃતિઓ લંબચોરસ અને બંધ વક્રો, મહદંશે વર્તુળોની બનેલી છે. સામાન્ય રીતે સાર્વત્રિક ગણને લંબચોરસ અને તેના ઉપગણોને વર્તુળ દ્વારા દર્શાવાય છે.



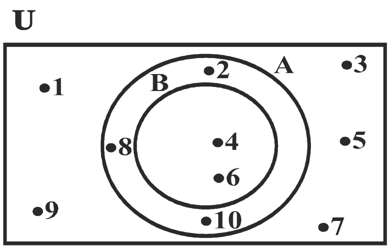
આકૃતિ 1.2

વેન-આકૃતિઓમાં ગણના ઘટકોને તેમને અનુરૂપ વર્તુળમાં દર્શાવાય છે. (આકૃતિ 1.2 અને 1.3.)

દ્રષ્ટાંત 1 : આકૃતિ 1.2 માં, $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને

$A = \{2,4,6,8,10\}$ એ તેનો ઉપગણ છે.

દ્રષ્ટાંત 2 : આકૃતિ 1.3 માં, $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને $A = \{2,4,6,8,10\}$ અને $B = \{4, 6\}$ તેના ઉપગણો છે તથા $B \subset A$ પણ છે.



આકૃતિ 1.3

જ્યારે આપણે યોગગણ, છેદગણ અને તફાવત ગણની ચર્ચા કરીશું, ત્યારે વેન-આકૃતિનો વ્યાપક ઉપયોગ જોઈ શકીશું.

1.10 ગણક્રિયાઓ

આગળના વર્ગોમાં આપણે સંખ્યાઓ પર સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની ક્રિયાઓ કેવી રીતે કરવી તેનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે દરેક ક્રિયા કરવા માટે બે સંખ્યાઓની જોડ લઈ તે પરથી અન્ય સંખ્યા મેળવતા હતા. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે આપણે સંખ્યાઓ 5 અને 13 ની જોડ પર સરવાળાની ક્રિયા કરીએ તો આપણને સંખ્યા 18 મળે. ફરીથી જોતાં આપણે સંખ્યાઓ 5 અને 13 ની જોડ પર ગુણાકારની ક્રિયા કરીએ તો આપણને 65 મળે. તે જ પ્રમાણે બે ગણ પર કેટલીક ક્રિયાઓ કરવાથી એક ગણ મળે. હવે આપણે ગણ પર ચોક્કસ ક્રિયાઓ કરીએ અને તેમના ગુણધર્મ ચકાસીએ. હવેથી આપણે બધા જ ગણોનો સંદર્ભ કોઈક સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણ તરીકે લઈશું.

1.10.1 યોગગણ : ધારો કે A અને B કોઈક ગણ છે. A અને B નો *યોગગણ (union set)* એટલે કે A ના તમામ ઘટકો તથા B ના તમામ ઘટકો તથા તેમના સામાન્ય ઘટકોને ફક્ત એક વખત લેવાથી બનતો ગણ. યોગગણ દર્શાવવા માટે સંકેત '$\cup$' નો ઉપયોગ થાય છે. સાંકેતિક રીતે, આપણે A તથા B ના યોગગણ માટે $A \cup B$ લખીશું. $A \cup B$ ને આપણે *A યોગ B*(*A union B*) વાંચીશું.

ઉદાહરણ 12 : $A = \{ 2, 4, 6, 8\}$ અને $B = \{ 6, 8, 10, 12\}$ છે. $A \cup B$ મેળવો.

ઉકેલ : આપણને $A \cup B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ મળશે. આપણે નોંધીએ કે $A \cup B$ લખતી વખતે સામાન્ય ઘટકો 6 અને 8 ને એક જ વખત લીધા છે.

ઉદાહરણ 13 : $A = \{ a, e, i, o, u \}$ અને $B = \{ a, i, u \}$ છે. બતાવો કે $A \cup B = A$.

ઉકેલ : આપણને $A \cup B = \{ a, e, i, o, u \}$ મળશે. આ ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે, ગણ A અને તેના ઉપગણનો યોગ A પોતે જ છે, એટલે કે $B \subset A$, તો $A \cup B = A$ થાય.

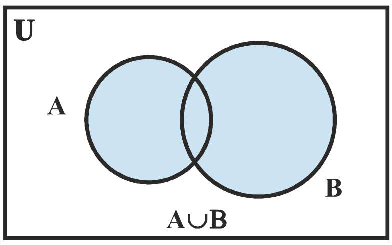
ઉદાહરણ 14 : શાળાની હૉકી ટીમમાં રમતા ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ X = { રામ, ગીતા, અકબર} છે. શાળાની ફૂટબૉલની ટીમમાં રમતા ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ Y = { ગીતા, ડેવિડ, અશોક} છે. $X \cup Y$ શોધો, અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ઉકેલ : $X \cup Y$ = {રામ, ગીતા, અકબર, ડેવિડ, અશોક} થશે. ધોરણ XI ના જે વિદ્યાર્થીઓ હૉકી ટીમમાં અથવા ફૂટબૉલ ટીમમાં અથવા બંનેમાં છે તેવા વિદ્યાર્થીઓનો આ ગણ છે.

આમ, આપણે બે ગણના યોગગણને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું :

વ્યાખ્યા 6 *ગણ A અથવા ગણ B માં આવેલા (બંને ગણમાં હોય તે સહિત) તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B નો યોગગણ કહે છે. સંકેતમાં આપણે* $A \cup B = \{x : x \in A$ *અથવા* $x \in B\}$ *લખીશું.*

બંને ગણના યોગગણને આકૃતિ 1.4. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની વેન-આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરીશું.



આકૃતિ 1.4

આકૃતિ 1.4 નો રંગીન કરેલ ભાગ $A \cup B$ દર્શાવે છે.

યોગક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો

(i) $A \cup B = B \cup A$ *(ક્રમનો નિયમ) (Commutative law)*

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(જૂથનો નિયમ) (Associative law)*

(iii) $A \cup \phi = A$ *(એકમ ઘટકનો નિયમ, ϕ એ $\cup$ નો એકમ ઘટક છે.) (identity element)*

(iv) $A \cup A = A$ *(સ્વયંઘાતી નિયમ - Idempotent law)*

(v) $U \cup A = U$ *(U નો નિયમ)*

1.10.2 છેદગણ : ગણ A અને B નો *છેદગણ* (*Intersection set*) એ બંને ગણ A અને B ના તમામ સામાન્ય ઘટકોથી બનતો ગણ છે. છેદગણ દર્શાવવા સંકેત '$\cap$' નો ઉપયોગ થાય છે. A અને B નો છેદગણ એ A અને B બંનેમાં આવેલા હોય એવા ઘટકોથી બનતો ગણ છે. સાંકેતિક રીતે $A \cap B = \{x : x \in A$ અને $x \in B\}$ લખાય.

ઉદાહરણ 15 : ઉદાહરણ 12 માં આપેલા ગણ A અને B માટે $A \cap B$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોઈ શકીએ છે કે ફક્ત 6, 8 એ બંને ગણ A અને B ના સામાન્ય ઘટકો છે. આથી $A \cap B = \{ 6, 8 \}$.

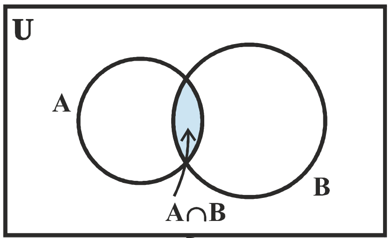
ઉદાહરણ 16 : ઉદાહરણ 14 ના ગણો X અને Y માટે $X \cap Y$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોઈશું ''ગીતા'' એ બંને ગણોનો એક માત્ર સામાન્ય ઘટક છે. આથી $X \cap Y = \{$ગીતા$\}$.

ઉદાહરણ 17 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ અને $B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$ માટે $A \cap B$ શોધો અને તે પરથી બતાવો કે $A \cap B = B$.

ઉકેલ : $A \cap B = \{ 2, 3, 5, 7 \} = B$ મળશે. આપણે નોંધીએ કે $B \subset A$ છે અને તેથી $A \cap B = B$.

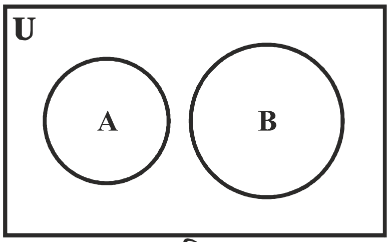
વ્યાખ્યા 7 *બે ગણ A અને B નો છેદગણ એટલે કે A અને B બંને ગણમાં આવેલા તમામ ઘટકોથી બનતો ગણ. સંકેતમાં આપણે $A \cap B = \{x : x \in A$ અને $x \in B\}$ લખીશું.* આકૃતિ 1.5 માં રંગીન ભાગ A અને B નો છેદગણ બતાવે છે.



આકૃતિ 1.5

જો ગણો A અને B માટે $A \cap B = \phi$, તો A અને B ને પરસ્પર ***અલગગણ*** *(disjoint sets)* કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ અને $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ તો A અને B પરસ્પર અલગગણ છે. કારણ કે, A અને B માં સામાન્ય હોય તેવો એક પણ ઘટક નથી. પરસ્પર અલગગણની વેન-આકૃતિ, આકૃતિ 1.6 પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 1.6

છેદક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ક્રમનો નિયમ)

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (જૂથનો નિયમ)

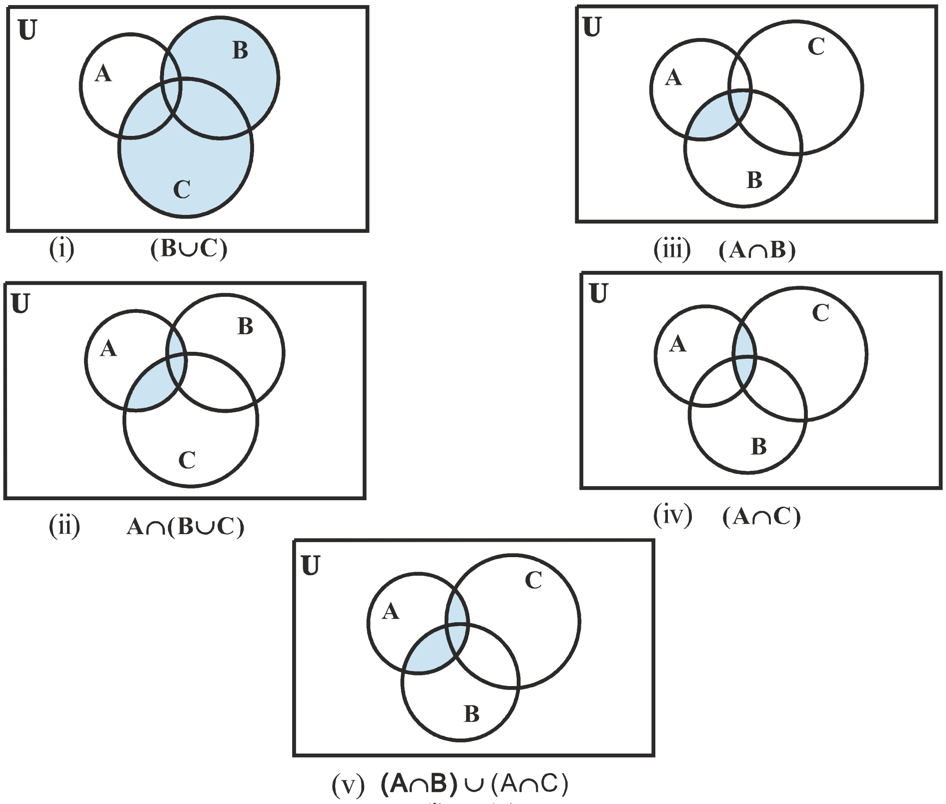
(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ (ϕ અને U નો નિયમ)

(iv) $A \cap A = A$ (સ્વયંઘાતી નિયમ)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ એટલે કે છેદક્રિયા એ યોગક્રિયા પર વિભાજન કરે છે.

(*વિભાજનનો નિયમ, Distributive law*)

નીચે દર્શાવેલ વેન-આકૃતિઓ પરથી ઉપરના નિયમો વધુ સ્પષ્ટ થશે.



(i) to (v)

આકૃતિ 1.7

1.10.3 તફાવત ગણ : *ગણ A અને ગણ B નો આ ક્રમમાં* ***તફાવત ગણ*** *(Difference set) એટલે ગણ B માં ન હોય તેવા ગણ A ના ઘટકોથી બનતો ગણ. સાંકેતિક રીતે આપણે તેને A – B દ્વારા દર્શાવીશું અને "A minus B" વાંચીશું.*

ઉદાહરણ 18 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ લો. $A - B$ અને $B - A$ શોધો.

ઉકેલ : ઘટકો 1, 3, 5 ગણ A માં છે, પરંતુ B માં નથી. આથી આપણને $A - B = \{1, 3, 5\}$ મળશે અને $B - A = \{8\}$ થશે, કારણ કે 8 એ B માં છે પરંતુ A માં નથી. આપણે નોંધીશું કે $A - B \neq B - A$.

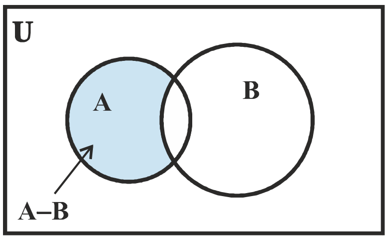
ઉદાહરણ 19 : $V = \{a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{a, i, k, u\}$ છે. $V - B$ અને $B - V$ શોધો.

ઉકેલ : ઘટકો e, o, V માં છે, પરંતુ B માં નથી. આથી $V - B = \{e, o\}$ મળશે અને ઘટક k ગણ B માં છે, પરંતુ V માં નથી. આથી $B - V = \{k\}$.

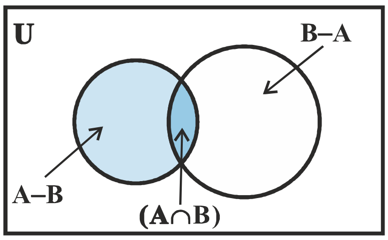
આપણે નોંધીશું કે $V - B \neq B - V$. ગુણધર્મની રીતે આપણે તફાવત ગણની વ્યાખ્યાને ફરીથી $A - B = \{x : x \in A \text{ અને } x \notin B\}$ લખીશું.

બે ગણ A અને B ના તફાવત ગણની વેન-આકૃતિને આકૃતિ 1.8 પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

આકૃતિ 1.8 માં રંગીન ભાગ એ ગણો A અને B નો તફાવત ગણ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 1.8



આકૃતિ 1.9

ટિપ્પણી : ગણો A – B, A ∩ B અને B – A પરસ્પર અલગગણ છે. એટલે કે, આકૃતિ 1.9 માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ ગણોમાંથી કોઈ પણ બે ગણનો છેદગણ ખાલીગણ છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચે આપેલી જોડીઓના ગણોનો યોગગણ લખો :

(i) X = {1, 3, 5}, Y = {1, 2, 3}

(ii) A = [a, e, i, o, u}, B = {a, b, c}

(iii) A = {x : x એ 3 ની ગુણિત પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}, B = {x : x એ 6 થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(iv) A = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $1 < x \le 6$}, B = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $6 < x < 10$ }

(v) A = {1, 2, 3}, B = ϕ

2. A = { a, b }, B = {a, b, c} લો. A ⊂ B છે ? A ∪ B શું થશે ?

3. જો A ⊂ B હોય તેવા બે ગણ આપ્યા હોય, તો A ∪ B શું થશે ?

4. જો A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6}, C = {5, 6, 7, 8 } અને D = { 7, 8, 9, 10 } હોય, તો નીચેના ગણ શોધો :

(i) A ∪ B (ii) A ∪ C (iii) B ∪ C (iv) B ∪ D

(v) A ∪ B ∪ C (vi) A ∪ B ∪ D (vii) B ∪ C ∪ D

5. પ્રશ્ન 1 માં આપેલી જોડીઓના ગણોનો છેદગણ શોધો.

6. જો A = { 3, 5, 7, 9, 11 }, B = {7, 9, 11, 13}, C = {11, 13, 15} અને D = {15, 17}; હોય, તો નીચેના ગણ શોધો :

(i) A ∩ B (ii) B ∩ C (iii) A ∩ C ∩ D

(iv) A ∩ C (v) B ∩ D (vi) A ∩ (B ∪ C)

(vii) A ∩ D (viii) A ∩ (B ∪ D) (ix) (A ∩ B) ∩ (B ∪ C)

(x) (A ∪ D) ∩ (B ∪ C)

7. જો A = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે}, B = {x : x એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે}, C = {x : x એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે} અને D = {x : x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે}, તો નીચેના ગણ મેળવો :

(i) A ∩ B (ii) A ∩ C (iii) A ∩ D

(iv) B ∩ C (v) B ∩ D (vi) C ∩ D

8. નીચેના ગણોની જોડીઓમાંથી કઈ જોડના ગણ પરસ્પર અલગગણ છે ?

(i) {1, 2, 3, 4} અને {x : x એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $4 \le x \le 6$ }

(ii) { a, e, i, o, u } અને { c, d, e, f }

(iii) {x : x એ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે} અને {x : x એ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે}

9. જો A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}, B = { 4, 8, 12, 16, 20 },

C = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }, D = {5, 10, 15, 20 }; તો નીચેના ગણ મેળવો :

(i) A – B (ii) A – C (iii) A – D (iv) B – A

(v) C – A (vi) D – A (vii) B – C (viii) B – D

(ix) C – B (x) D – B (xi) C – D (xii) D – C

10. જો X= { a, b, c, d } અને Y = { f, b, d, g}, તો નીચેના ગણ મેળવો :

(i) X – Y (ii) Y – X (iii) $X \cap Y$

11. જો **R** એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને **Q** સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ હોય, તો **R – Q** શું થશે ?

12. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) { 2, 3, 4, 5 } અને { 3, 6} પરસ્પર અલગગણ છે.

(ii) { a, e, i, o, u } અને { a, b, c, d }પરસ્પર અલગગણ છે.

(iii) { 2, 6, 10, 14 } અને { 3, 7, 11, 15} પરસ્પર અલગગણ છે.

(iv) { 2, 6, 10 } અને { 3, 7, 11} પરસ્પર અલગગણ છે.

1.11 પૂરકગણ

તમામ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ U તરીકે લો અને 42 નો ધન અવયવ ન હોય તેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ A એ ગણ U નો ઉપગણ છે. આમ, A = {x : $x \in$ U અને x એ 42 નો ધન અવયવ નથી}. આપણે જોઈશું કે $2 \in$ U, પરંતુ $2 \notin$ A, કારણ કે 2 એ 42 નો ધન અવયવ છે. તે જ પ્રમાણે $3 \in$ U પરંતુ $3 \notin$ A, અને $7 \in$ U પરંતુ $7 \notin$ A. હવે માત્ર 2, 3 અને 7 એ U ના A માં ન હોય તેવા ઘટકો છે. આ ત્રણ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગણ એટલે કે {2, 3, 7} ને U ના સંદર્ભમાં A નો ***પૂરક ગણ*** (*Complement of A*) કહે છે. અને તેને A′ વડે દર્શાવાય છે. આથી આપણને A′ = {2, 3, 7} મળશે. આમ, આપણે જોઈશું કે A′ = {x : $x \in$ U અને $x \notin$ A}. આ ચર્ચા પરથી નીચેની વ્યાખ્યા મળશે :

વ્યાખ્યા 8 : ધારો કે U એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને A એ U નો ઉપગણ છે. ગણ A માં ન હોય તેવા U ના તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A નો પૂરક ગણ કહે છે. સંકેતમાં આપણે U ના સંદર્ભમાં A ના પૂરક ગણને A′ દ્વારા દર્શાવીશું.

આમ, A′ = {x : $x \in$ U અને $x \notin$ A }. સ્વયં સ્પષ્ટ છે કે A′ = U – A

આપણે નોંધીએ કે A ના પૂરક ગણ વિશે બીજી રીતે વિચારીએ, તો A નો પૂરક ગણ એ U અને A નો તફાવત ગણ છે.

ઉદાહરણ 20 : U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} અને A = {1, 3, 5, 7, 9}. તો A' શોધો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે A માં ન હોય તેવા U ના ઘટકો માત્ર 2, 4, 6, 8, 10 છે અને તે U માં તો છે જ. આથી A' = { 2, 4, 6, 8,10}.

ઉદાહરણ 21 : એક સહશિક્ષણ આપતી શાળાના ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ U તરીકે લો અને ધોરણ XI ની છાત્રાઓનો ગણ A લો. A' શોધો.

ઉકેલ : વર્ગની છાત્રાઓનો ગણ A હોવાથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે કે વર્ગના છાત્રોનો ગણ A' છે.

> **☛ નોંધ** જો ગણ A એ સાર્વત્રિક ગણ U નો ઉપગણ હોય તો તેનો પૂરક ગણ A' પણ U નો ઉપગણ છે. ઉદાહરણ 20 માં A' = { 2, 4, 6, 8, 10 } મળે છે. આથી $(A')' = \{x : x \in U$ અને $x \notin A'\}$
>
> $= \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$
>
> પૂરક ગણની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, સાર્વત્રિક ગણ U ના કોઈ પણ ઉપગણ A માટે $(A')' = A$ થાય.

હવે આપણે $(A \cup B)'$ અને $A' \cap B'$ વિષયક પરિણામો નીચેનાં ઉદાહરણો પરથી મેળવીએ :

ઉદાહરણ 22 : U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {2, 3} અને B = {3, 4, 5}.

A', B' , $A' \cap B'$, $A \cup B$ શોધો અને તે પરથી બતાવો કે $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

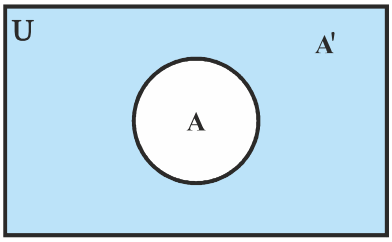
ઉકેલ : A' = {1, 4, 5, 6} અને B' = { 1, 2, 6 } છે તે સ્પષ્ટ છે. આથી $A' \cap B' = \{1, 6\}$

વળી, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$. આથી $(A \cup B)' = \{1, 6\}$

$(A \cup B)' = \{1, 6\} = A' \cap B'$

ઉપરનાં પરિણામો વ્યાપક રીતે સત્ય છે તેમ બતાવી શકાય. જો A અને B એ સાર્વત્રિક ગણ U ના ઉપગણ હોય તો $(A \cup B)' = A' \cap B'$. તે જ રીતે $(A \cap B)' = A' \cup B'$. આ બે પરિણામોને ભાષામાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય:

*બે ગણના યોગગણનો પૂરક ગણ એ તેમના પૂરકગણનો છેદગણ છે અને બે ગણના છેદગણનો પૂરક ગણ એ તેમના પૂરક ગણનો યોગગણ છે. આ નિયમોને **De Morgan's laws** કહે છે.* ગણિતશાસ્ત્રી ***De Morgan*** ના નામ પરથી આ નામ આપવામાં આવ્યું છે. ગણ A ના પૂરક ગણ A' ને વેન- આકૃતિ 1.10 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 1.10

રંગીન ભાગ A નો પૂરકગણ દર્શાવે છે.

પૂરક ગણના કેટલાક ગુણધર્મો

1. પૂરક ગણનો નિયમ : (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. દ'મોર્ગનના નિયમ : (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. દ્વિપૂરક ગણનો નિયમ : $(A')' = A$

4. ખાલીગણ અને સાર્વત્રિક ગણના નિયમો : $\phi' = U$ અને $U' = \phi$

આ નિયમોને વેન-આકૃતિ દ્વારા ચકાસી શકાય.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, A = { 1, 2, 3, 4}, B = { 2, 4, 6, 8 } અને C = { 3, 4, 5, 6 }છે. નીચેના ગણ શોધો :

(i) A′ (ii) B′ (iii) (A ∪ C)′ (iv) (A ∪ B)′ (v) (A′)′ (vi) (B – C)′

2. જો U = { a, b, c, d, e, f, g, h} હોય, તો નીચેના ગણના પૂરક ગણ શોધો :

(i) A = {a, b, c} (ii) B = {d, e, f, g}

(iii) C = {a, c, e, g} (iv) D = { f, g, h, a}

3. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ, નીચે આપેલા ગણના પૂરક ગણ શોધો :

(i) {x : x એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.} (ii) { x : x એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(iii) {x : x એ 3 નો ધન ગુણિત છે.} (iv) { x : x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.}

(v) {x : x એ 3 અને 5 વડે વિભાજ્ય પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(vi) { x : x એ પૂર્ણવર્ગ છે.} (vii) { x : x એ પૂર્ણઘન છે.}

(viii) { x : $x + 5 = 8$ } (ix) { x : $2x + 5 = 9$}

(x) { x : $x \geq 7$ } (xi) { x : $x \in$ N અને $2x + 1 > 10$ }

4. જો U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, A = {2, 4, 6, 8} અને B = { 2, 3, 5, 7} હોય, તો

(i) (A ∪ B)′ = A′ ∩ B′ (ii) (A ∩ B)′ = A′ ∪ B′ ચકાસો.

5. નીચેના દરેક માટે યોગ્ય વેન-આકૃતિ દોરો :

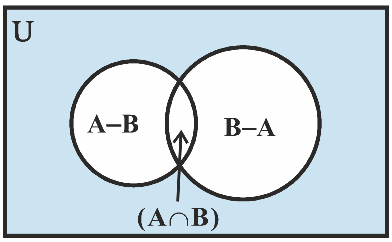
(i) (A ∪ B)′ (ii) A′ ∩ B′ (iii) (A ∩ B)′ (iv) A′ ∪ B′

6. સમતલના તમામ ત્રિકોણના ગણને U તરીકે લો. જો ઓછામાં ઓછો એક ખૂણો 60° થી ભિન્ન હોય તેવા ત્રિકોણોનો ગણ A હોય, તો A′ શું થશે ?

7. નીચેના વિધાનો સત્ય થાય તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) A ∪ A′ = … (ii) ϕ′ ∩ A = … (iii) A ∩ A′ = … (iv) U′ ∩ A = …

1.12 બે ગણના યોગગણ અને છેદગણ પરના વ્યાવહારિક કૂટપ્રશ્નો



આકૃતિ 1.11

આગળના વિભાગમાં આપણે બે ગણના યોગગણ, છેદગણ અને તફાવત ગણ વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ વિભાગમાં આપણે દૈનિક જીવનને સ્પર્શતા કેટલાક વ્યાવહારિક પ્રશ્નો જોઈશું. આ વિભાગમાં ફલિત થતાં કેટલાંક સૂત્રોનો પાછળના પ્રકરણ સંભાવના(પ્રકરણ 16) માં પણ ઉપયોગ કરીશું.

ધારો કે, A અને B સાન્ત ગણો છે. જો $A \cap B = \phi$ હોય, તો

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ... (1)

$A \cup B$ ના ઘટકો A અથવા B ના ઘટકો છે, પરંતુ $A \cap B = \phi$ હોવાથી કોઈ ઘટક બંને ગણમાં નથી. આથી, (1) તરત જ ફલિત થાય છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે, જો A અને B સાન્ત ગણ હોય, તો

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (2)

$A - B$, $A \cap B$ અને $B - A$ પરસ્પર અલગ ગણો છે તેમ નોંધીશું અને તેમનો યોગ $A \cup B$ છે (આકૃતિ 1.11). માટે

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

આમ સૂત્ર(2) ની ચકાસણી થઈ.

(iii) જો A, B અને C સાન્ત ગણો હોય તો,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$... (3)

ખરેખર તો આપણને,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$ [(2) પરથી]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)]$ [(2) પરથી]

વળી, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ હોવાથી, આપણને

$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

આમ (3) સાબિત થયું.

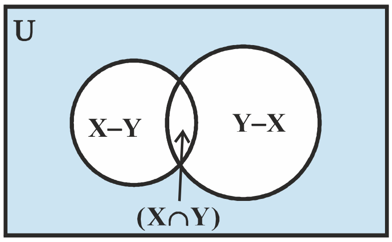
ઉદાહરણ 23 : $X \cup Y$ માં 50 ઘટકો, X માં 28 ઘટકો અને Y માં 32 ઘટકો હોય તેવા બે ગણો X અને Y આપેલા છે, તો $X \cap Y$ માં કેટલા ઘટક હશે ?

ઉકેલ : $n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$, $n(Y) = 32$ આપ્યા છે, $n(X \cap Y) = ?$

સૂત્ર $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$

$= 28 + 32 - 50 = 10$



આકૃતિ 1.12

બીજી રીતે વિચારતાં ધારો કે $n(X \cap Y) = k$ છે, તો

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$ (આકૃતિ 1.12 ની વેન-આકૃતિ દ્વારા)

આથી, $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$

$= (28 - k) + k + (32 - k)$

આથી, $k = 10$

ઉદાહરણ 24 : એક શાળામાં 20 શિક્ષકો ગણિત અથવા ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવે છે. આ શિક્ષકો પૈકી 12 ગણિત શીખવે છે અને 4 ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ગણિત બંને વિષય શીખવે છે. કેટલા શિક્ષકો ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવતા હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ગણિત શીખવતા શિક્ષકોનો ગણ M અને ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવતા શિક્ષકોનો ગણ P છે. કૂટપ્રશ્નનાં વિધાનોમાં ''અથવા'' શબ્દ આપણને યોગગણ તથા ''અને'' શબ્દ છેદગણનો ઉપયોગ કરવાનું સૂચન આપે છે. હવે, $n(M \cup P) = 20$, $n(M) = 12$ અને $n(M \cap P) = 4$ છે.

આપણે, $n(P)$ મેળવવા ઇચ્છિએ છીએ.

પરિણામ $n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$20 = 12 + n(P) - 4$ મળશે.

આમ, $n(P) = 12$

આથી 12 શિક્ષકો ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવે છે.

ઉદાહરણ 25 : 35 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં 24 ને ક્રિકેટ રમવું ગમે છે અને 16 ને ફૂટબૉલ રમવું ગમે છે. દરેક વિદ્યાર્થી બે રમતોમાંથી ઓછામાં ઓછી એક રમત રમવાનું પસંદ કરે છે. ક્રિકેટ અને ફૂટબૉલ બંને રમત રમવાનું કેટલા વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરતાં હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ક્રિકેટ રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ X અને ફૂટબૉલ રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ Y છે. $X \cup Y$ એ ઓછામાં ઓછી એક રમત રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ થશે અને $X \cap Y$ એ બંને રમત રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ થશે.

$n(X) = 24$, $n(Y) = 16$, $n(X \cup Y) = 35$ આપ્યું છે, $n(X \cap Y) = ?$

સૂત્ર $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$ મળે.

આમ, $n(X \cap Y) = 5$

એટલે કે 5 વિદ્યાર્થીઓ બંને રમત રમવાનું પસંદ કરે છે.

ઉદાહરણ 26 : એક શાળાના 400 વિદ્યાર્થીઓની મોજણી કરી. 100 વિદ્યાર્થી સફરજનનો રસ પીએ છે, 150 નારંગીનો રસ પીએ છે અને 75 વિદ્યાર્થીઓ સફરજન તેમજ નારંગી બંનેનો રસ પીએ છે. કેટલા વિદ્યાર્થીઓ સફરજન અને નારંગી પૈકી એકપણનો રસ પીતા નથી?

ઉકેલ : ધારો કે જે વિદ્યાર્થીઓની મોજણી કરવામાં આવી તેમનો ગણ U છે અને સફરજનનો રસ પીનાર વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A તથા નારંગીનો રસ પીનાર વિદ્યાર્થીઓનો ગણ B છે.

$n(U) = 400$, $n(A) = 100$, $n(B) = 150$ અને $n(A \cap B) = 75$ થશે.

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)')$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

$$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$$

આથી, 225 વિદ્યાર્થીઓ સફરજન અને નારંગી પૈકી કોઈનો પણ રસ પીતા નથી.

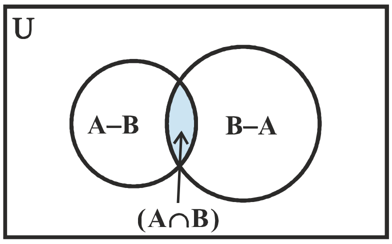
ઉદાહરણ 27 : ચામડીની વ્યાધિવાળી 200 વ્યક્તિઓ છે. 120 વ્યક્તિઓને રસાયણ C_1 અને 50 વ્યક્તિઓને રસાયણ C_2ની અસર માલૂમ પડી અને 30 ને બંને રસાયણો C_1 અને C_2ની અસર માલૂમ પડી.

(i) રસાયણ C_1 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_2ની અસર ન હોય.

(ii) રસાયણ C_2 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_1 ની અસર ન હોય.

(iii) રસાયણ C_1 અથવા રસાયણ C_2ની અસર માલૂમ પડી હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ચામડીના દર્દની બીમારીવાળી વ્યક્તિઓનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ U છે. રસાયણ C_1 ની અસરવાળી વ્યક્તિઓનો ગણ A તથા રસાયણ C_2 ની અસરવાળી વ્યક્તિઓનો ગણ B છે.



આકૃતિ 1.13

$n(U) = 200$, $n(A) = 120$, $n(B) = 50$ અને $n(A \cap B) = 30$

(i) આકૃતિ 1.13 ની વેન-આકૃતિ પરથી,

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$ (A – B અને A ∩ B અલગ ગણ હોવાથી)

આથી $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 120 - 30 = 90$

આથી રસાયણ C_1 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_2ની અસર ન હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા 90 છે.

(ii) આકૃતિ 1.13 પરથી

$B = (B - A) \cup (A \cap B)$.

અને આથી, $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$ (B – A અને A ∩ B અલગ ગણ હોવાથી)

આથી $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 50 - 30 = 20$

આમ, રસાયણ C_2 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_1ની અસર ન હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા 20 છે.

(iii) રસાયણ C_1 અથવા રસાયણ C_2ની અસર માલૂમ પડી હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા એટલે કે,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 120 + 50 - 30 = 140.$$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. જો બે ગણ X અને Y માટે $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ અને $n(X \cup Y) = 38$ હોય, તો $n(X \cap Y)$ શોધો.

2. જો બે ગણ X અને Y માટે $X \cup Y$ માં 18 ઘટકો, X માં 8 ઘટકો અને Y માં 15 ઘટકો હોય, તો $X \cap Y$ માં કેટલા ઘટકો હશે ?

3. 400 વ્યક્તિઓના સમૂહમાં, 250 હિન્દી બોલી શકે છે અને 200 અંગ્રેજી બોલી શકે છે, તો કેટલી વ્યક્તિઓ હિન્દી અને અંગ્રેજી બંને બોલી શકે ? 400 પૈકી દરેક વ્યક્તિ આ બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ભાષા બોલી શકે છે.

4. જો બે ગણો S અને T માટે S માં 21 ઘટકો, T માં 32 ઘટકો અને $S \cap T$ માં 11 ઘટકો હોય, તો $S \cup T$ માં કેટલા ઘટકો હશે ?

5. બે ગણ X અને Y એવા છે કે ગણ X માં 40 ઘટકો, $X \cup Y$ માં 60 ઘટકો અને $X \cap Y$ માં 10 ઘટકો હોય, તો Y માં કેટલા ઘટકો હશે?

6. 70 વ્યક્તિઓના જૂથમાં, 37 કૉફી પસંદ કરે છે અને 52 વ્યક્તિને ચા પસંદ છે. તથા દરેક વ્યક્તિ આ બે પીણાંમાંથી ઓછામાં ઓછું એક પીણું પસંદ કરે છે. કેટલી વ્યક્તિઓ કૉફી અને ચા બંને પસંદ કરે છે ?

7. 65 વ્યક્તિઓના જૂથમાં, 40 ક્રિકેટ પસંદ કરે છે, 10 ક્રિકેટ અને ટેનિસ બંને પસંદ કરે છે. કેટલી વ્યક્તિઓ માત્ર ટેનિસ પસંદ કરે છે પરંતુ ક્રિકેટ પસંદ કરતા નથી ? કેટલા ટેનિસ પસંદ કરે છે ? 65 પૈકી દરેક વ્યક્તિ આ બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક રમત પસંદ કરે છે.

8. એક સમિતિમાં 50 વ્યક્તિઓ ફ્રેંચ બોલે છે, 20 સ્પેનિશ બોલે છે અને 10 વ્યક્તિઓ બંને સ્પેનિશ અને ફ્રેંચ બંને બોલે છે. કેટલી વ્યક્તિઓ આ બે ભાષાઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક ભાષા બોલી શકે છે ?

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 28 : ચકાસો કે " CATARACT " શબ્દ લખવા માટેના જરૂરી મૂળાક્ષરો અને " TRACT" શબ્દ લખવા માટેના જરૂરી મૂળાક્ષરોનો ગણ સમાન છે.

ઉકેલ : "CATARACT" શબ્દના અક્ષરોનો ગણ X = { C, A, T, R } થશે.

જો " TRACT" ના અક્ષરોનો ગણ Y લઈએ તો,

Y = { T, R, A, C }

X નો દરેક ઘટક Y માં અને Y નો દરેક ઘટક X માં હોવાથી X = Y.

ઉદાહરણ 29 : { –1, 0, 1 } ગણના બધા જ ઉપગણોની યાદી બનાવો.

ઉકેલ : ધારો કે ગણ A = { –1, 0, 1 } છે. એક પણ સભ્ય ન હોય તેવો ગણ ખાલીગણ ϕ એ A નો ઉપગણ છે. જેમાં એક સભ્ય

હોય તેવા A ના ઉપગણો $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ છે. જેમાં બે ઘટકો હોય તેવા A ના ઉપગણો $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$ છે. ત્રણ ઘટકોવાળો A નો ઉપગણ A પોતે જ છે. આથી ગણ A ના તમામ ઉપગણો ϕ, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$ અને $\{-1, 0, 1\}$ છે.

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે જો $A \cup B = A \cap B$ હોય, તો $A = B$.

ઉકેલ : ધારો કે $a \in A$. આથી $a \in A \cup B$. હવે $A \cup B = A \cap B$ હોવાથી, $a \in A \cap B$. આથી $a \in B$.

માટે, $A \subset B$. એ જ રીતે જો $b \in B$, તો $b \in A \cup B$.

$A \cup B = A \cap B$ હોવાથી, $b \in A \cap B$. આથી $b \in A$. માટે, $B \subset A$. આમ $A = B$

ઉદાહરણ 31 : કોઈપણ ગણ A અને B માટે સાબિત કરો કે, $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

ઉકેલ : જો $X \in P(A \cap B)$, તો $X \subset (A \cap B)$. આથી, $X \subset A$ અને $X \subset B$.

માટે $X \in P(A)$ અને $X \in P(B)$. તેથી $X \in P(A) \cap P(B)$. આથી $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.

ધારો કે $Y \in P(A) \cap P(B)$. તો $Y \in P(A)$ અને $Y \in P(B)$. આથી, $Y \subset A$ અને $Y \subset B$.

માટે, $Y \subset (A \cap B)$. તે પરથી $Y \in P(A \cap B)$ થાય.

આથી, $(P(A) \cap P(B)) \subset P(A \cap B)$

આમ, $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

ઉદાહરણ 32 : એક બજાર-સંશોધન જૂથે 1000 ઉપભોક્તાઓની મોજણી કરી અને શોધ્યું કે 720 ગ્રાહકો ઉત્પાદન A પસંદ કરે છે અને 450 ઉત્પાદન B પસંદ કરે છે. બંને ઉત્પાદન પસંદ કરનાર ઉપભોક્તાની ન્યૂનતમ સંખ્યા કેટલી હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે જેમને ઉત્પાદન સંબંધી પ્રશ્ન પૂછ્યા હોય તેવા ઉપભોક્તાઓનો ગણ U છે. ઉત્પાદન A પસંદ કરનારા ઉપભોક્તાઓનો ગણ S છે અને ઉત્પાદન B પસંદ કરનારા ઉપભોક્તાઓનો ગણ T છે.

$n(U) = 1000, n(S) = 720, n(T) = 450$

આથી $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$

$= 720 + 450 - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$

માટે, જો $n(S \cap T)$ ન્યૂનતમ હોય તો અને તો જ $n(S \cup T)$ મહત્તમ થશે. પરંતુ $(S \cup T) \subset U$ હોવાથી $n(S \cup T) \le n(U) = 1000$. આથી $n(S \cup T)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય 1000 છે. આમ, $n(S \cap T)$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 170 છે. આથી બંને ઉત્પાદન પસંદ કરનારા ઉપભોક્તાની ન્યૂનતમ સંખ્યા 170 છે.

ઉદાહરણ 33 : 500 મોટરમાલિક વિષયક સંશોધનમાં માલૂમ પડ્યું કે A પ્રકારની મોટરના માલિકોની સંખ્યા 400 અને B પ્રકારની મોટરના માલિકોની સંખ્યા 200 છે. જ્યારે 50 મોટર માલિકો A અને B બંને પ્રકારની મોટર ધરાવે છે. શું આ માહિતી સાચી છે ?

ઉકેલ : ધારો કે મોટરમાલિકોના સર્વેક્ષણનો ગણ U છે, A પ્રકારની મોટરના માલિકોનો ગણ M અને B પ્રકારની મોટર ધરાવતા માલિકોનો ગણ S છે.

$n(U) = 500$, $n(M) = 400$, $n(S) = 200$ અને $n(S \cap M) = 50$ આપ્યું છે.

હવે $n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 200 + 400 - 50 = 550$

પરંતુ $(S \cup M) \subset U$. તેથી $n(S \cup M) \le n(U)$ થવું જોઈએ.

આ વિરોધાભાસ છે. આથી આપેલ માહિતી સાચી નથી.

ઉદાહરણ 34 : એક કોલેજ દ્વારા પુરુષોની રમતમાં 38 ચંદ્રકો ફૂટબૉલમાં, 15 બાસ્કેટબૉલમાં અને 20 ક્રિકેટમાં એનાયત કરવામાં આવ્યાં. જો આ ચંદ્રકો કુલ 58 પુરુષોને મળ્યા હોય અને માત્ર 3 પુરુષોને ત્રણેય રમતના ચંદ્રકો મળ્યાં હોય. તો કેટલી વ્યક્તિને ત્રણમાંથી બરાબર બે ચંદ્રક મળ્યાં હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે F, B અને C અનુક્રમે ફૂટબૉલ, બાસ્કેટબૉલ અને ક્રિકેટમાં પુરુષોને મળેલા ચંદ્રકોના ગણ છે.

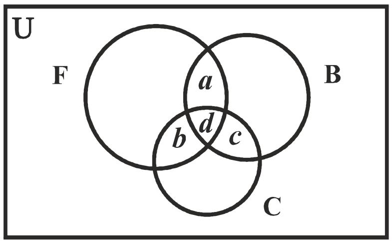
તો, $n(F) = 38$, $n(B) = 15$, $n(C) = 20$

$n(F \cup B \cup C) = 58$ અને $n(F \cap B \cap C) = 3$ છે.

માટે, $n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C)$

$- n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C) + n(F \cap B \cap C)$,

પરથી $n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$ મળે.



આકૃતિ 1.14

આકૃતિ 1.14 માં બતાવેલી વેન-આકૃતિ જોઈએ.

અહીં, માત્ર ફૂટબૉલ અને બાસ્કેટબૉલમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને a વડે દર્શાવીએ, માત્ર ફૂટબૉલ અને ક્રિકેટમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને b થી દર્શાવીએ. માત્ર બાસ્કેટબૉલ અને ક્રિકેટમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને c વડે દર્શાવીએ અને ત્રણેય રમતમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને d વડે દર્શાવીએ.

આમ, $d = n(F \cap B \cap C) = 3$ અને $a + d + b + d + c + d = 18$

માટે, $a + b + c = 9$

આમ, આપેલ ત્રણ રમતોમાંથી બરાબર બે જ રમતમાં ચંદ્રકો મેળવનાર પુરુષોની સંખ્યા 9 છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. નીચે આપેલ ગણો પૈકી ક્યા ગણ આપેલ ગણો પૈકી કયા ગણના ઉપગણ છે તે નક્કી કરો :

$A = \{x : x \in \mathbf{R}$ અને x એ સમીકરણ $x^2 - 8x + 12 = 0$ નું સમાધાન કરે છે$\}$,

$B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $D = \{6\}$.

2. નીચેના પૈકી દરેક વિધાનમાંથી કયું સત્ય અને કયું અસત્ય છે તે નક્કી કરો :

(i) જો $x \in A$ અને $A \in B$, તો $x \in B$

(ii) જો $A \subset B$ અને $B \in C$, તો $A \in C$

(iii) જો $A \subset B$ અને $B \subset C$, તો $A \subset C$

(iv) જો $A \not\subset B$ અને $B \not\subset C$, તો $A \not\subset C$

(v) જો $x \in A$ અને $A \not\subset B$, તો $x \in B$

(vi) જો $A \subset B$ અને $x \notin B$, તો $x \notin A$

3. ગણ A, B અને C માટે $A \cup B = A \cup C$ અને $A \cap B = A \cap C$ છે. સાબિત કરો કે, $B = C$.

4. સાબિત કરો કે નીચે આપેલી ચારેય શરતો સમકક્ષ છે :

(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

નોંધ : આનો અર્થ એ કે (i) $\Rightarrow$ (ii) અને (ii) $\Rightarrow$ (i) વગેરે. તે માટે (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) સાબિત કરો.

5. સાબિત કરો કે $A \subset B$, તો $(C - B) \subset (C - A)$

6. જો $P(A) = P(B)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A = B$.

7. કોઈપણ ગણ A અને B માટે $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ સત્ય છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

8. કોઈપણ ગણ A અને B માટે સાબિત કરો કે,

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ અને $A \cup (B - A) = (A \cup B)$.

9. ગણના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

10. સાબિત કરો કે $A \cap B = A \cap C$ પરથી $B = C$ કહી શકાય નહિ.

11. A અને B ગણો છે. કોઈ ગણ X માટે જો $A \cap X = B \cap X \neq \phi$ અને $A \cup X = B \cup X$ તો સાબિત કરો કે $A = B$.

(**સૂચન:** $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ અને વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરો.)

12. ગણ A, B અને C એવા શોધો કે જેથી $A \cap B$, $B \cap C$ અને $A \cap C$ અરિક્ત ગણો થાય અને $A \cap B \cap C = \phi$ બને.

13. એક શાળાના 600 વિદ્યાર્થીઓના સર્વેક્ષણમાં 150 વિદ્યાર્થીઓ ચા પીતા હતા અને 225 કૉફી પીતા હતા. 100 વિદ્યાર્થીઓ ચા અને કૉફી બંને પીતા હતા. કૉફી અને ચા બંને પૈકી કંઈપણ નહિ પીનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

14. વિદ્યાર્થીઓના એક જૂથમાં, 100 વિદ્યાર્થીઓ હિન્દી જાણે છે, 50 અંગ્રેજી જાણે છે અને 25 બંને ભાષા જાણે છે. આ જૂથમાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હશે ?

15. 60 વ્યક્તિઓના સર્વેક્ષણમાં, 25 વ્યક્તિઓ સમાચારપત્ર H વાંચતા, 26 સમાચારપત્ર T વાંચતા, 26 સમાચારપત્ર I વાંચતા, 9 H અને I વાંચતા, 11 H અને T બંને વાંચતા, 8 T અને I વાંચતા તથા 3 તમામ સમાચારપત્ર વાંચતા માલૂમ પડ્યા.

(i) ઓછામાં ઓછું એક સમાચારપત્ર વાંચનાર

(ii) માત્ર એક જ સમાચારપત્ર વાંચનાર વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો.

16. એક સર્વેક્ષણમાં 21 વ્યક્તિ ઉત્પાદન A પસંદ કરે છે, 26 ઉત્પાદન B પસંદ કરે છે અને 29 ઉત્પાદન C પસંદ કરે છે. જો 14 વ્યક્તિઓ ઉત્પાદન A અને B બંને પસંદ કરતી હોય, 12 વ્યક્તિઓ ઉત્પાદન C અને A પસંદ કરતી હોય, 14 વ્યક્તિઓ ઉત્પાદન B અને C પસંદ કરતી હોય તથા 8 વ્યક્તિઓ ત્રણેય ઉત્પાદન પસંદ કરતી હોય, તો માત્ર ઉત્પાદન C પસંદ કરતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો.

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં ગણને આવરી લેતી કેટલીક પાયાની વ્યાખ્યાઓ અને પ્રક્રિયાઓ આપવામાં આવી છે. તેમનો સારાંશ નીચે પ્રમાણે છે :

- ગણ એ સુનિશ્ચિત વસ્તુઓનો સમૂહ છે.
- જે ગણ એક પણ સભ્ય ધરાવતો નથી, તેને ખાલીગણ કહે છે.
- જે ગણમાં નિશ્ચિત સંખ્યાના ઘટકો આવેલા હોય, તેને સાન્તગણ કહે છે. અન્યથા ગણને અનંત ગણ કહે છે.
- જો ગણ A અને B માં બરાબર એકના એક જ ઘટકો હોય, તો તેમને સમાન ગણ કહે છે.
- જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B નો ઘટક હોય, તો ગણ A ને B નો ઉપગણ કહે છે. અંતરાલ એ R ના ઉપગણો છે.
- A ના તમામ ઉપગણોના ગણને A નો ઘાતગણ કહે છે. તેને P(A)થી દર્શાવાય છે.
- ગણ A માં હોય અથવા ગણ B માં હોય તેવા તમામ ઘટકોના ગણને A અને B નો યોગગણ કહે છે.
- ગણ A અને ગણ B ના બધા જ સામાન્ય ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B નો છેદગણ કહે છે. ગણ A અને B નો આ જ ક્રમમાં તફાવત ગણ એટલે ગણ A માં હોય પરંતુ B માં ન હોય તેવા ઘટકોનો ગણ.
- સાર્વત્રિક ગણ U ના સંદર્ભમાં A નો પૂરક ગણ U માં હોય પરંતુ A માં ન હોય તેવા તમામ ઘટકોનો ગણ.
- કોઈપણ બે ગણ A અને B માટે $(A \cup B)' = A' \cap B'$ અને $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $A \cap B = \phi$ હોય તેવા સાન્તગણો A અને B હોય, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. જો $A \cap B \neq \phi$, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Historical Note

The modern theory of sets is considered to have been originated largely by the German mathematician Georg Cantor (1845-1918). His papers on set theory appeared sometimes during 1874 to 1897. His study of set theory came when he was studying trigonometric series of the form $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$ He published in a paper in 1874 that the set of real numbers could not be put into one-to-one correspondence wih the integers. From 1879 onwards, he publishd several papers showing various properties of abstract sets.

Cantor's work was well received by another famous mathematician Richard Dedekind (1831-1916). But Kronecker (1810-1893) castigated him for regarding infinite set the same way as finite sets.

Another German mathematician Gottlob Frege, at the turn of the century, presented the set theory as principles of logic. Till then the entire set theory was based on the assumption of the existence of the set of all sets. It was the famous Englih Philosopher Bertand Russell (1872-1970) who showed in 1902 that the assumption of existence of a set of all sets leads to a contradiction. This led to the famous Russell's Paradox. Paul R.Halmos writes about it in his book 'Naïve Set Theory' that "nothing contains everything".

The Russell's Paradox was not the only one which arose in set theory. Many paradoxes were produced later by several mathematicians and logicians. As a consequence of all these paradoxes, the first axiomatisation of set theory was published in 1908 by Ernst Zermelo. Another one was proposed by Abraham Fraenkel in 1922. John Von Neumann in 1925 introduced explicitly the axiom of regularity. Later in 1937 Paul Bernays gave a set of more satisfactory axiomatisation. A modification of these axioms was done by Kurt Gödel in his monograph in 1940. This was known as Von Neumann-Bernays (VNB) or Gödel-Bernays (GB) set theory.

Despite all these difficulties, Cantor's set theory is used in present day mathematics. In fact, these days most of the concepts and results in mathematics are expressed in the set theoretic language.

પ્રકરણ 2

સંબંધ અને વિધેયો

❖*Mathematics is the indispensable instrument of all physical research. – BERTHELOT* ❖

2.1 પ્રાસ્તાવિક

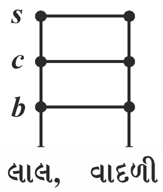
G. W. Leibnitz
(1646–1716)

ગણિતશાસ્ત્રમાં મોટેભાગે બદલાતી રાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ એટલે કે ભાત શોધવામાં આવે છે. આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે પિતા-પુત્ર, ભાઈ-બહેન, શિક્ષક-વિદ્યાર્થી જેવા સંબંધોનું અવલોકન કરીએ છીએ. ગણિતશાસ્ત્રમાં પણ આપણે સંખ્યાબંધ સંબંધો જેવા કે, 'સંખ્યા m, સંખ્યા n કરતા નાની છે', 'રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે', 'ગણ A એ ગણ B નો ઉપગણ છે' જોવા મળે છે. આ બધામાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સંબંધ ચોક્કસ ક્રમમાં વસ્તુઓની ક્રમયુક્ત જોડનો સમાવેશ કરે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે બે ગણના ઘટકોને કેવી રીતે સાંકળવા એ જોઈશું અને ક્રમયુક્ત જોડના બે ઘટકો વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરીશું. અંતમાં આપણે વિધેય તરીકે ઓળખાતા અમુક સંબંધોનો અભ્યાસ કરીશું. વિધેયનો ખ્યાલ એ ગણિતમાં બહુ મહત્ત્વનો ખ્યાલ છે, કારણ કે તે એક ચલ રાશિની બીજી ચલ રાશિ સાથે ગાણિતિક દૃષ્ટિએ ચોક્કસ સંગતતા આપે છે.

2.2 ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર *(Cartesian Product of Sets)*

ધારો કે A બે રંગોનો ગણ છે અને B ત્રણ વસ્તુઓનો ગણ છે. ધારો કે A = {લાલ, વાદળી} અને

B = {b, c, s} અહીં b, c અને s અનુક્રમે બેગ, કોટ અને શર્ટ દર્શાવે છે. આ બંને ગણોમાંથી રંગ અને વસ્તુની કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ બનાવી શકાય ? એક ચોક્કસ ભાતમાં આગળ વધીએ તો જોઈ શકાય છે કે 6 અલગ અલગ ક્રમયુક્ત જોડ નીચે પ્રમાણે બનશે :



આકૃતિ 2.1

(લાલ, b), (લાલ, c), (લાલ, s), (વાદળી, b), (વાદળી, c), (વાદળી, s).

આમ, આપણને 6 ભિન્ન ક્રમયુક્ત જોડ મળશે. (આકૃતિ 2.1).

આગળના ધોરણમાં આપણે ક્રમયુક્ત જોડ વિશેનો અભ્યાસ કર્યો તે યાદ કરીએ. કોઈ ગણ P અને ગણ Q ના ઘટકોની કોઈપણ ક્રમયુક્ત જોડને નાના કૌંસમાં દર્શાવાય છે અને તે ક્રમયુક્ત જોડમાં ચોક્કસ ક્રમ અગત્યનો છે. ઉદાહરણ તરીકે (p,q) માટે $p \in$ P અને $q \in$ Q . આ અવલોકન આપણને નીચેની વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

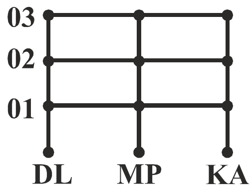
વ્યાખ્યા 1 *આપેલ અરિક્ત ગણો P અને Q નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર $P \times Q$ એ P અને Q ની તમામ ક્રમયુક્ત જોડનો ગણ છે. આમ,*

$$P \times Q = \{ (p, q) : p \in P, q \in Q \}$$

જો P અને Q પૈકી કોઈપણ ગણ ખાલીગણ હોય, તો P × Q પણ ખાલીગણ થાય, $P \times Q = \phi$

ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણ માટે,

A × B = {(લાલ, b), (લાલ, c), (લાલ, s), (વાદળી, b), (વાદળી, c), (વાદળી, s)}.



આકૃતિ 2.2

હવે નીચે દર્શાવેલ ગણો વિશે વિચારતાં,

A = {DL, MP, KA}, જ્યાં DL, MP, KA અનુક્રમે દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કર્ણાટક દર્શાવે છે અને B = {01, 02, 03} અનુક્રમે દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કર્ણાટક દ્વારા ગાડીઓ માટે આપેલ લાઈસન્સ નંબર પ્લેટના સાંકેતિક અંકો દર્શાવે છે. હવે, ત્રણે રાજ્યો દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કર્ણાટક લાઈસન્સ નંબર-પ્લેટના સંકેતો માટે એવું નક્કી થાય કે પ્રથમ ઘટક ગણ A માંથી આવે અને દ્વિતીય ઘટક B માંથી લેવાય તો આપેલ ગણમાંથી આવી કેટલી ક્રમયુક્ત જોડ બનશે? (આકૃતિ 2.2)

પ્રાપ્ત ક્રમયુક્ત જોડો : (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) છે.

હવે ગણ A અને ગણ B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર આ પ્રમાણે થશે.

A × B = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}.

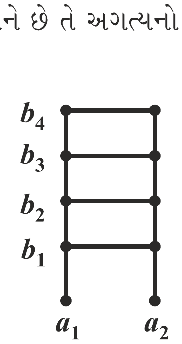
અહીં, સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે, આ કાર્તેઝિય ગુણાકારમાં 9 ક્રમયુક્ત જોડ છે, કેમ કે ગણ A અને ગણ B બંનેમાં ત્રણ-ત્રણ ઘટકો છે. તેથી આપણને 9 શક્ય જોડ મળે છે. અહીં આપણે નોંધીશું કે જે ક્રમમાં ક્રમયુક્ત જોડ બને છે તે અગત્યનો છે.

ઉદાહરણ તરીકે ક્રમયુક્ત જોડ (DL, 01) અને ક્રમયુક્ત જોડ (01, DL) સમાન નથી.

અંતમાં સમજૂતી માટે ગણ A= {a_1, a_2} અને ગણ B = {b_1, b_2, b_3, b_4} લઈએ.(આકૃતિ 2.3)

A × B = {(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)}.

જો ગણ A અને ગણ B એ વાસ્તવિક સંખ્યાગણના ઉપગણો હોય, તો આ 8 ક્રમયુક્ત જોડો સમતલમાં બિંદુઓનાં ભિન્ન સ્થાન દર્શાવશે અને તે પરથી સ્પષ્ટ થશે કે (a_1, b_2) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ એ (b_2, a_1) દ્વારા દર્શાવાતા બિંદુથી ભિન્ન છે.



આકૃતિ 2.3

નોંધ : (i) કોઈ બે ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન હોય અને બીજા ઘટક પણ સમાન હોય, તો અને તો જ તે બે ક્રમયુક્ત જોડ સમાન થાય.

(ii) જો ગણ A ના ઘટકોની સંખ્યા p અને ગણ B ના ઘટકોની સંખ્યા q હોય, તો $A \times B$ ના ઘટકોની સંખ્યા pq થાય. જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય તો $n(A \times B) = pq$.

(iii) જો A અને B અરિક્ત ગણો હોય અને A અને B પૈકી કોઈ ગણ અનંત ગણ હોય, તો $A \times B$ પણ અનંત ગણ થાય.

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. અહીં, (a, b, c) ને *ક્રમયુક્ત ત્રય* અથવા *ત્રિપુટી (triplet)* અથવા ત્રેલું કહે છે.

ઉદાહરણ 1: જો $(x + 1, y - 2) = (3,1)$, તો x અને y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં ક્રમયુક્ત જોડ સમાન છે, તેથી ક્રમવાર ઘટકો સમાન થાય.

$\therefore$ $x + 1 = 3$ અને $y - 2 = 1$.

ઉકેલતાં, $x = 2$ અને $y = 3$.

ઉદાહરણ 2 : જો $P = \{a, b, c\}$ અને $Q = \{r\}$, તો $P \times Q$ અને $Q \times P$ શોધો.

શું આ બે કાર્તેઝિય ગુણાકાર સમાન છે ?

ઉકેલ : કાર્તેઝિય ગુણાકારની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ અને $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

હવે, ક્રમિક જોડની સમાનતાની વ્યાખ્યા પ્રમાણે ક્રમયુક્ત જોડ (a, r) અને ક્રમયુક્ત જોડ (r, a) સમાન નથી. આથી આ પરથી કહી શકાય કે, $P \times Q \neq Q \times P$.

તેમ છતાં બંને ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા સમાન થશે.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ અને $C = \{4, 5, 6\}$, તો નીચેના ગણ શોધો.

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

ઉકેલ : (i) બે ગણોના છેદગણની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $(B \cap C) = \{4\}$.

તેથી, $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$.

(ii) હવે $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

અને $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

આથી, $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

(iii) અહીં, $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$. આથી,

$\therefore \quad A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

(iv) ગણો A × B અને A × C માટે ઉપરના ભાગ (ii) માંથી પરિણામોનો ઉપયોગ કરતાં,

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો $P = \{1, 2\}$, તો $P \times P \times P$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$.

ઉદાહરણ 5 : જો **R** વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ હોય, તો $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ અને $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ શું દર્શાવશે ?

ઉકેલ : કાર્તેઝિય ગુણાકાર $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ એ ગણ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ દર્શાવે છે. તે દ્વિપરિમાણીય યામ-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુનું નિરૂપણ દર્શાવે છે અને કાર્તેઝિય ગુણાકાર $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$ દર્શાવે છે. તે ત્રિપરિમાણીય અવકાશના પ્રત્યેક બિંદુનું નિરૂપણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6 : જો $A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, તો A અને B શોધો.

ઉકેલ : A = પ્રથમ ઘટકોનો ગણ = $\{p, m\}$

B = બીજા ઘટકોનો ગણ = $\{q, r\}$.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. જો $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, તો x અને y શોધો.

2. જો ગણ A માં 3 ઘટકો હોય અને ગણ $B = \{3, 4, 5\}$, તો $(A \times B)$ ના ઘટકોની સંખ્યા શોધો.

3. જો $G = \{7, 8\}$ અને $H = \{5, 4, 2\}$, તો $G \times H$ અને $H \times G$ શોધો.

4. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે અને કયું વિધાન અસત્ય છે તે જણાવો તથા અસત્ય વિધાન સત્ય બને તે રીતે ફરી લખો :

   (i) જો $P = \{m, n\}$ અને $Q = \{n, m\}$, તો $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$.

   (ii) જો A અને B અરિક્ત ગણો હોય, તો જ્યાં $x \in A$ તથા $y \in B$ હોય તેવી તમામ ક્રમયુક્ત જોડો (x, y) થી બનતો અરિક્ત ગણ $A \times B$ છે.

   (iii) જો $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, તો $A \times (B \cap \phi) = \phi$.

5. જો $A = \{-1, 1\}$, તો $A \times A \times A$ મેળવો.

6. જો $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, તો A અને B શોધો.

7. ધારો કે A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6} અને D = {5, 6, 7, 8}, તો નીચેનાં પરિણામો ચકાસો :

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times C$ એ $B \times D$ નો ઉપગણ છે.

8. જો A = {1, 2} અને B = {3, 4} તો $A \times B$ લખો. $A \times B$ ને કેટલા ઉપગણો હશે ? તે તમામ ઉપગણોની યાદી બનાવો.

9. જો $n(A) = 3$ અને $n(B) = 2$ હોય તેવા બે ગણો A અને B હોય અને ભિન્ન ઘટકો x, y અને z માટે $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ એ $A \times B$ ના ઘટકો હોય તો A અને B શોધો.

10. જો કાર્તેઝિય ગુણાકાર $A \times A$ ના ઘટકોની સંખ્યા 9 હોય અને તેમાંના બે ઘટકો (–1, 0) અને (0,1) હોય, તો A શોધો તથા $A \times A$ ના બાકીના ઘટકો લખો.

2.3 સંબંધ *(Relation)*

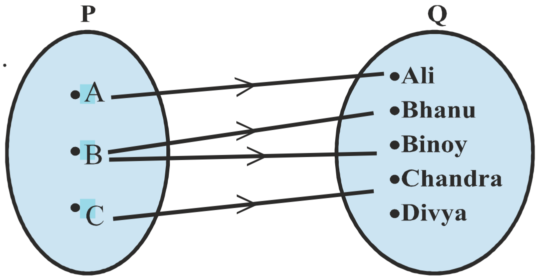
બે ગણો P = {A, B, C} અને Q = {Ali, Bhanu, Binoy, Chandra, Divya}નો વિચાર કરીએ. $P \times Q$ ના કાર્તેઝિય ગુણાકારમાં 15 ક્રમયુક્ત જોડ હશે. તેની યાદી આ પ્રમાણે થશે. $P \times Q$ = {(A, Ali), (A,Bhanu), (A, Binoy), ..., (C, Divya)}.

હવે આપણે $P \times Q$ ના એક ઉપગણ R ને P થી Q ના એક સંબંધ તરીકે દર્શાવીએ. કોઈપણ ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) નો પ્રથમ ઘટક x એ R દ્વારા બીજા ઘટક y સાથે સંબંધ ધરાવે છે.

ધારો કે R = {(x, y) : x એ નામ y નો પ્રથમ અક્ષર છે, $x \in P$, $y \in Q$}.

આમ, R = {(A, Ali), (B, Bhanu), (B, Binoy), (C, Chandra)}

આ સંબંધને વેન-આકૃતિ દ્વારા દર્શાવીએ.



(*કિરણ આકૃતિ - arrow diagram*) **આકૃતિ 2.4.**

વ્યાખ્યા 2 *અરિક્ત ગણો A અને B માટે A × B ના કોઈપણ ઉપગણને A થી B નો **સંબંધ** કહે છે. A × B નો ઉપગણ ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે. બીજા ઘટકને પ્રથમ ઘટકનું **પ્રતિબિંબ** કહે છે.*

વ્યાખ્યા 3 *જો R એ A થી B નો સંબંધ હોય, તો R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને R નો **પ્રદેશ** (Domain) કહે છે.*

વ્યાખ્યા 4 *જો R એ A થી B નો સંબંધ હોય તો, R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને R નો **વિસ્તાર** (Range) કહે છે. ગણ B ને R નો **સહપ્રદેશ** (Codomain) કહે છે. અહીં, જોઈ શકાય છે કે વિસ્તાર ⊆ સહપ્રદેશ.*

નોંધ : (i) સંબંધને યાદીના સ્વરૂપમાં કે ગુણધર્મના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

(ii) કિરણ આકૃતિ એ સંબંધનું દૃશ્ય નિરૂપણ છે.

ઉદાહરણ 7 : જો A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, R = {(x, y) : $y = x + 1$ } થાય તે રીતે સંબંધ R, A થી A પર વ્યાખ્યાયિત છે, તો

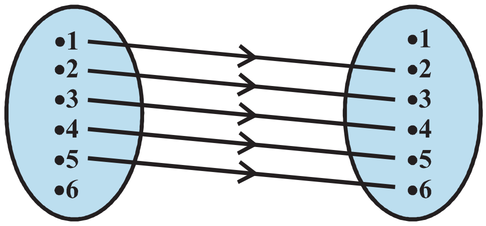
(i) આ સંબંધને કિરણ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

(ii) R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : (i) સંબંધની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$.

આ સંબંધને કિરણ આકૃતિ દ્વારા આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવેલ છે.



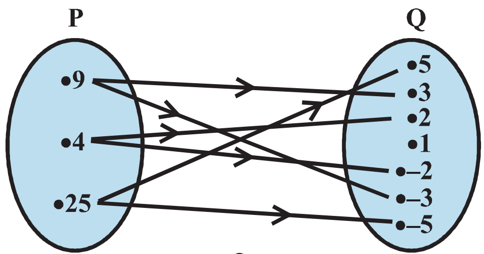
આકૃતિ 2.5

(ii) આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

પ્રદેશ = {1, 2, 3, 4, 5,}

વિસ્તાર = {2, 3, 4, 5, 6}, સહપ્રદેશ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 2.6 માં P થી Q નો સંબંધ દશાવેલ છે. આ સંબંધને (i) ગુણધર્મની રીતે (ii) યાદીની રીતે લખો. તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?



આકૃતિ 2.6

ઉકેલ: અહીં સ્પષ્ટપણે જોઈ શકાય છે કે, સંબંધ R "x એ y નો વર્ગ છે".

(i) ગુણધર્મની રીતે, $R = \{(x, y) : x$ એ y નો વર્ગ છે, $x \in P,\ y \in \mathbf{Q}\}$

(ii) યાદીની રીતે, $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

આ સંબંધનો પ્રદેશ {4, 9, 25} છે.

આ સંબંધનો વિસ્તાર {– 2, 2, –3, 3, –5, 5} છે.

અહી, જોઈ શકાય છે Q નો ઘટક 1 ગણ P ના કોઈપણ ઘટક સાથે સંકળાયો નથી.

ગણ Q એ સંબંધનો સહપ્રદેશ છે.

નોંધ ગણ A થી ગણ B પરના કુલ સંબંધોની સંખ્યા એ A × B ના ઉપગણોની સંખ્યા બરાબર થાય. જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય, તો $n(A \times B) = pq$ અને તેના સંબધોની સંખ્યા 2^{pq} થાય.

ઉદાહરણ 9 : જો A = {1, 2} અને B = {3, 4} તો A થી B ના સંબંધની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

$n(A\times B) = 4$, A×B ના ઉપગણોની સંખ્યા 2^4 થાય.

આમ, A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા 2^4 થાય.

નોંધ : જો R એ A થી A નો સંબંધ હોય, તો સંબંધ R ને A પરનો સંબંધ પણ કહેવાય છે.

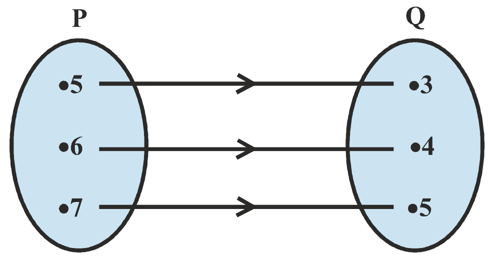
સ્વાધ્યાય 2.2

1. $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$. $R = \{(x, y) : 3x - y = 0$, જ્યાં $x, y \in A\}$. જો R એ A થી A નો સંબંધ હોય, તો R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2. $R = \{(x, y) : y = x + 5, x$ એ 4 થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $x, y \in \mathbf{N}\}$ થાય તે રીતે એક સંબંધ **N** પર વ્યાખ્યાયિત છે. R ને યાદીની રીતે લખો. R નો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ અને $B = \{4, 6, 9\}$. $R = \{(x, y)$: x અને y નો તફાવત અયુગ્મ સંખ્યા છે; $x \in A, y \in B\}$ થાય તે રીતે સંબંધ A થી B પર વ્યાખ્યાયિત છે. R ને યાદીની રીતે લખો.

4. આકૃતિ 2.7 માં P થી Q નો સંબંધ દર્શાવેલ છે. આ સંબંધને (i) ગુણધર્મની રીતે (ii) યાદીની રીતે લખો. તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?



આકૃતિ 2.7

5. જો $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
$R = \{(a, b)$: $a, b \in A$, b એ a વડે વિભાજ્ય છે.$\}$ થાય તે રીતે સંબંધ R એ A પર વ્યાખ્યાયિત છે,
(i) R ને યાદીની રીતે લખો.
(ii) R નો પ્રદેશ મેળવો.
(iii) R નો વિસ્તાર મેળવો.

6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત સંબંધનો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

7. સંબંધ $R = \{(x, x^3) : x$ એ 10 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા છે$\}$ ને યાદીના સ્વરૂપમાં લખો.

8. જો $A = \{x, y, z\}$ અને $B = \{1, 2\}$ તો A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા શોધો.

9. R એ **Z** પર $R = \{(a,b)$: $a, b \in \mathbf{Z}$, $a - b$ એ પૂર્ણાંક છે.$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. R નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2.4 વિધેયો (*Functions*)

હવે આ પરિચ્છેદમાં આપણે *વિધેય (function)* તરીકે પ્રચલિત એક વિશિષ્ટ સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. વિધેયની સંકલ્પના ગણિતશાસ્ત્રના પાયાની વિષયવસ્તુમાંની એક સંકલ્પના છે. આપણે વિધેયને નિયમ તરીકે વિચારી શકીએ. આ નિયમની મદદથી આપણે આપેલા ઘટકોમાંથી નવા ઘટકો શોધી શકીએ. વિધેયને દર્શાવવા માટે સંગતતા જેવો શબ્દ પણ વપરાય છે.

વ્યાખ્યા 5 *અરિક્ત ગણ A અને ગણ B માટે, સંબંધ f દ્વારા ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે તો આ સંબંધ f ને A થી B નું વિધેય કહે છે.*

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો જેનો પ્રદેશ અરિક્ત ગણ A હોય અને જે સંબંધની કોઈ પણ બે ભિન્ન ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન ન હોય તેવા અરિક્ત ગણ A થી અરિક્ત ગણ B ના સંબંધને વિધેય કહે છે.

જો f એ A થી B નું વિધેય હોય અને, $(a, b) \in f$, તો $f(a) = b$. અહીં b એ f દ્વારા મળતું a નું પ્રતિબિંબ કહેવાય છે અને a ને f દ્વારા b નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ કહેવાય છે.

A થી B પરના વિધેયને $f: A \rightarrow B$ લખાય છે. અગાઉ જોયેલાં ઉદાહરણો પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ તો, સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે ઉદાહરણ 7 માં આપેલ સંબંધ એ વિધેય નથી. કારણ કે, ઘટક 6 ને કોઈ પ્રતિબિંબ નથી.

ફરી, ઉદાહરણ 8 માં દર્શાવેલ સંબંધ પણ વિધેય નથી. કારણ કે, પ્રદેશના અમુક ઘટકોને એક કરતાં વધુ પ્રતિબિંબ છે. તે જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 9 નો સંબંધ પણ વિધેય નથી (કેમ ?). નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આપણે બીજા ઘણા સંબંધ જોઈશું. તે પૈકી કેટલાક વિધેય છે અને કેટલાક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 10 : **N** એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે અને તેની પર વ્યાખ્યાયિત કોઈ સંબંધ R એવો છે કે $R = \{(x, y) : y = 2x,\ x, y \in \mathbf{N}\}$ તો R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો. શું આ સંબંધ વિધેય છે ?

ઉકેલ : અહીં, સંબંધ R નો પ્રદેશ ગણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ **N** છે, સહપ્રદેશ પણ **N** છે અને વિસ્તાર એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

અહીં, પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n ને એક અને માત્ર એક પ્રતિબિંબ છે. આમ, આ સંબંધ વિધેય છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આપેલ સંબંધ ચકાસો અને પ્રત્યેક સંબંધ વિધેય છે કે નહિ તે કારણ આપી જણાવો.

(i) $R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$,

(ii) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

(iii) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$

ઉકેલ : (i) અહીં 2, 3 અને 4 એ R ના પ્રદેશના ઘટકો છે અને તે દરેક ઘટકને અનુરૂપ અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે છે. તેથી આ સંબંધ R એ વિધેય છે.

(ii) અહીં, R ના પ્રદેશના એક ઘટક 2 ને બે પ્રતિબિંબ 2 અને 4 મળે છે. તેથી આ સંબંધ વિધેય નથી.

(iii) અહીં, પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટકને અનુરૂપ એક અને માત્ર એક પ્રતિબિંબ છે તેથી આ સંબંધ વિધેય છે.

વ્યાખ્યા 6 : *જો કોઈ વિધેયનો વિસ્તાર R કે R નો કોઈ ઉપગણ હોય તો તે વિધેયને **વાસ્તવિક કિંમતોનું વિધેય** કહે છે અને જો તેનો પ્રદેશ પણ R અથવા R નો કોઈ ઉપગણ હોય, તો તેને **વાસ્તવિક વિધેય** કહે છે.*

ઉદાહરણ 12 : **N** એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$. $f(x) = 2x + 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. આ વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

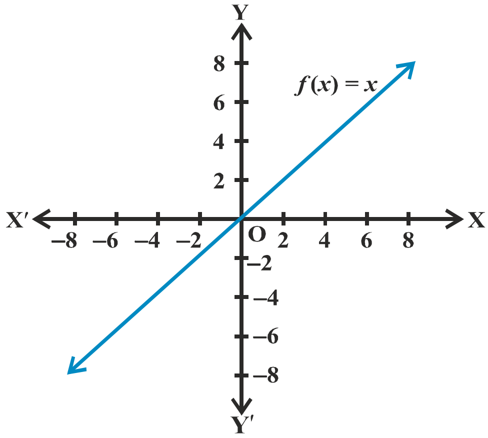
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = \ldots$	$f(2) = \ldots$	$f(3) = \ldots$	$f(4) = \ldots$	$f(5) = \ldots$	$f(6) = \ldots$	$f(7) = \ldots$

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે મુજબ છે :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

2.4.1 કેટલાંક વિધેયો અને તેમના આલેખો :

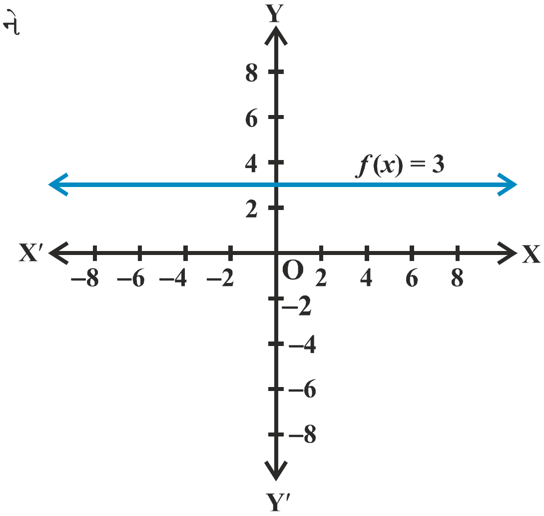
(i) **તદેવ વિધેય** (***Identity Function***) : જો **R** એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ હોય, તો પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયને તદેવ વિધેય કહેવાય. આ વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર **R** છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.8 માં દર્શાવેલ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા થશે.



આકૃતિ 2.8

(ii) **અચળ વિધેય** (***Constant Function***) : c કોઈ અચળ હોય તથા પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $y = f(x) = c$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ને અચળ વિધેય કહે છે. અહીં, f નો પ્રદેશ **R** અને વિસ્તાર $\{c\}$ છે.

અચળ વિધેયનો આલેખ X-અક્ષને સમાંતર રેખા થાય. ઉદાહરણ તરીકે જો પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $f(x)=3$ તો આ આલેખ આકૃતિ 2.9 માં દર્શાવેલ રેખા થશે.



આકૃતિ 2.9

(iii) **બહુપદી વિધેય** (***Polynomial Function***): જો પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, ને n ઘાતનું બહુપદી વિધેય કહે છે. અહીં, n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે અને $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ તથા $a_n \neq 0$. $f(x) = x^3 - x^2 + 2$, અને $g(x) = x^4 + \sqrt{2}x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો બહુપદી વિધેયનાં ઉદાહરણો છે, જ્યારે $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય બહુપદી વિધેય નથી. (કેમ ?)

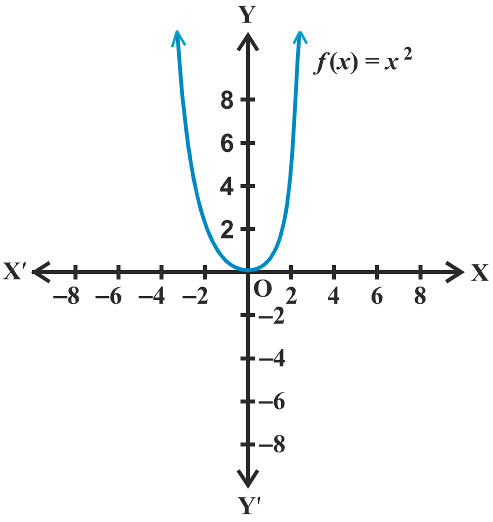
ઉદાહરણ 13 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ થી વ્યાખ્યાયિત એક વિધેય છે. આ વ્યાખ્યાના આધારે નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ? f નો આલેખ દોરો.

x	− 4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે આપેલ છે :

x	− 4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f નો પ્રદેશ $= \{x : x \in \mathbf{R}\}$. f નો વિસ્તાર $= \{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. આ વિધેય f નો આલેખ આકૃતિ 2.10 પ્રમાણેનો મળે.



આકૃતિ 2.10

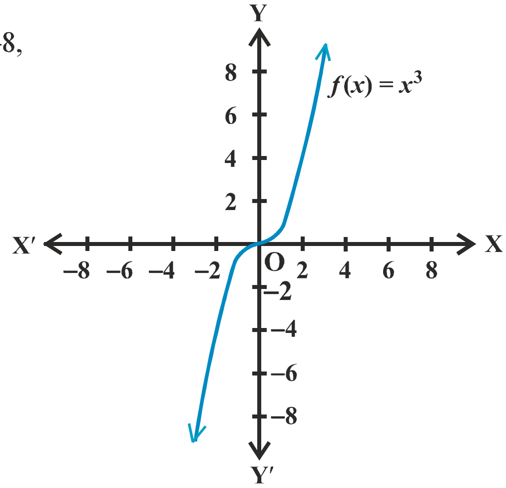
ઉદાહરણ 14 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(-2) = -8,$

$f(3) = 27; f(-3) = -27$, વગેરે.

અહીં, $f = \{(x, x^3) : x \in \mathbf{R}\}$.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.11 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.11

(iv) સંમેય વિધેય (*Rational Function*) : $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત બહુપદી વિધેય $f(x)$ અને $g(x)$ માટે $\frac{f(x)}{g(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય છે.

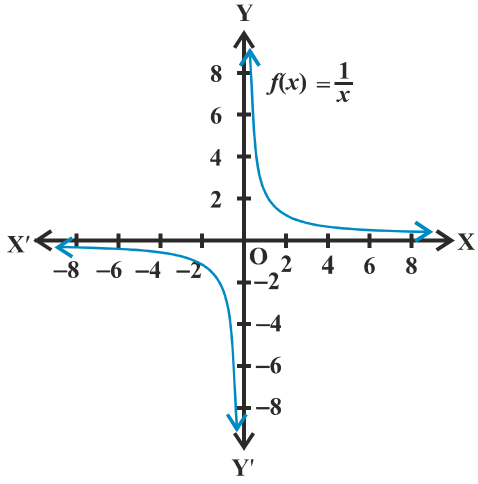
ઉદાહરણ 15 : $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ થી વ્યાખ્યાયિત એક વિધેય આપેલ છે. આ વ્યાખ્યાના આધારે નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	– 0.5	– 0.67	–1	– 2	4	2	1	0.67	0.5

વિધેયનો પ્રદેશ પ્રત્યેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ થશે અને તેનો વિસ્તાર પણ પ્રત્યેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ થશે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.12 માં દર્શાવેલ છે.

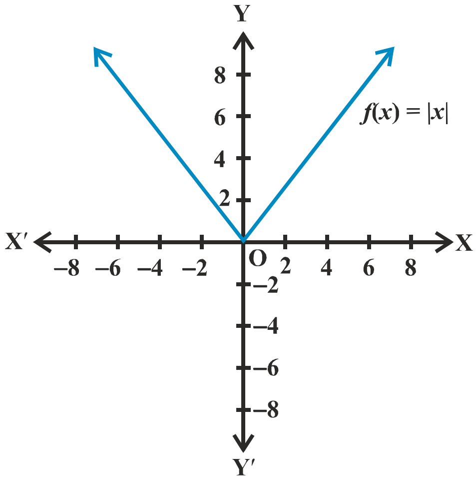


આકૃતિ 2.12

(v) માનાંક વિધેય(*Modulus Function*) : પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વિધેય f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ થી વ્યાખ્યાયિત થતું વિધેય માનાંક વિધેય કહેવાય છે. પ્રત્યેક અનૃણ x માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય x બરાબર હોય અને પ્રત્યેક ઋણ x માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય $-x$ બરોબર હોય છે.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

માનાંક વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે થાય.

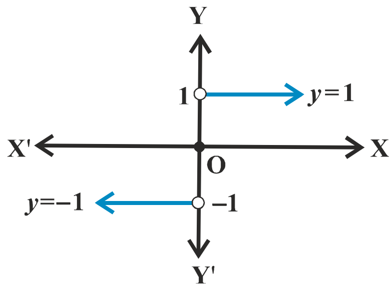


આકૃતિ 2.13

(vi) ચિહ્ન વિધેય (*Signum Function*) : વિધેય f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

થી વ્યાખ્યાયિત થતા વિધેયને ચિહ્ન વિધેય કહેવાય છે. આ વિધેયનો પ્રદેશ **R** છે અને વિસ્તાર $\{-1, 0, 1\}$ છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.14 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો થાય.



આકૃતિ 2.14

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(vii) મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય (*Greatest integer Function*) : વિધેય f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ એ x થી નાના હોય અથવા x ને સમાન હોય તેવા તમામ પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક દર્શાવે, તો આ વિધેયને મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય કહે છે.

$[x]$ ની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે,

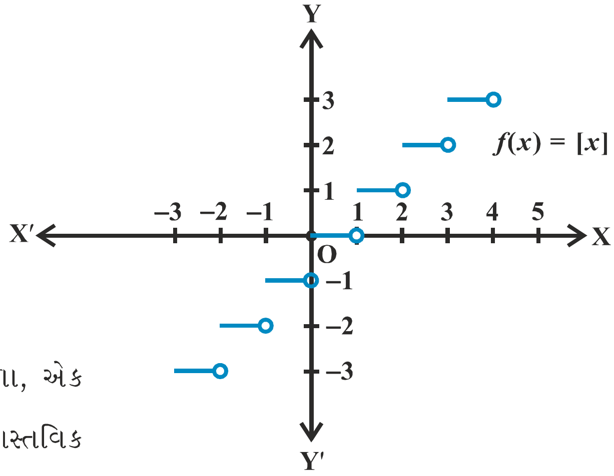
$[x] = -1, \quad -1 \le x < 0$

$[x] = \ \ 0, \quad 0 \le x < 1$

$[x] = \ \ 1, \quad 1 \le x < 2$

$[x] = \ \ 2, \quad 2 \le x < 3$ વગેરે .

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.15 માં દર્શાવ્યા મુજબ થશે.



આકૃતિ 2.15

2.4.2 વાસ્તવિક વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ :

આ વિભાગમાં આપણે બે વાસ્તવિક વિધેયના સરવાળા, એક વાસ્તવિક વિધેયની બીજા વાસ્તવિક વિધેયમાંથી બાદબાકી, વાસ્તવિક વિધેયનો અદિશ સાથે ગુણાકાર(અહીં અદિશ એટલે વાસ્તવિક સંખ્યા એમ સમજીશું), બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર અને એક વાસ્તવિક વિધેયનો બીજા વાસ્તવિક વિધેય સાથે ભાગાકાર વિશે અભ્યાસ કરીશું :

(i) બે વિધેયોનો સરવાળો : $X \subset \mathbf{R}$ માટે $f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમનો સરવાળો $f + g : X \to \mathbf{R}$, પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(ii) બે વિધેયોની બાદબાકી : $X \subset \mathbf{R}$ માટે $f : X \to \mathbf{R}$ અને $g: X \to \mathbf{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમની બાદબાકી પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(iii) અદિશ વડે વિધેયનો ગુણાકાર : ધારો કે, $f : X \to \mathbf{R}$ એ વાસ્તવિક વિધેય છે અને α એ કોઈ અદિશ છે. અહીં, અદિશ એટલે કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા. તેમનો ગુણાકાર αf એ X થી $\mathbf{R}$ નું વિધેય છે અને તે પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(iv) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર : $X \subset \mathbf{R}$ માટે બે વાસ્તવિક વિધેયો $f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$ નો ગુણાકાર $fg : X \to \mathbf{R}$, પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(fg)(x) = f(x)g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(v) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ભાગાકાર : ધારો કે $X \subset \mathbf{R}$ માટે બે વાસ્તવિક વિધેયો f અને g, X થી R પર વ્યાખ્યાયિત છે, બે વિધેયો f અને g નો ભાગાકાર $\frac{f}{g}$ દ્વારા દર્શાવાય છે અને $g(x) \ne 0$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = x^2$ અને $g(x) = 2x + 1$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો

$$(f + g)(x),\ (f - g)(x),\ (fg)(x),\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ શોધો.}$$

ઉકેલ : અહીં,

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1, \quad (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1},\ x \ne -\frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 17 : $f(x) = \sqrt{x}$ અને $g(x) = x$ એ બે અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાના ગણ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય, તો $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ અને $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x$, $(f-g)(x) = \sqrt{x} - x$,

$$(fg)\,x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ અને } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. નીચેના પૈકી કયો સંબંધ વિધેય છે ? કારણ આપો. જો તે વિધેય હોય, તો તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

   (i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$

   (ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$

   (iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$

2. નીચેના વાસ્તવિક વિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો :

   (i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

3. $f(x) = 2x - 5$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે નીચેની કિંમતો શોધો :

   (i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$

4. વિધેય 't' એ સેલ્સિયસમાં ઉષ્ણતામાન અને ફેરનહીટમાં ઉષ્ણતામાન વચ્ચે રૂપાંતર કરતું સૂત્ર $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો નીચેનાં મૂલ્યો શોધો :

   (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) જો $t(C) = 212$ હોય, તો C શોધો.

5. નીચેનાં વિધેયોના વિસ્તાર શોધો :

   (i) $f(x) = 2 - 3x$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$

   (ii) $f(x) = x^2 + 2$, x વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

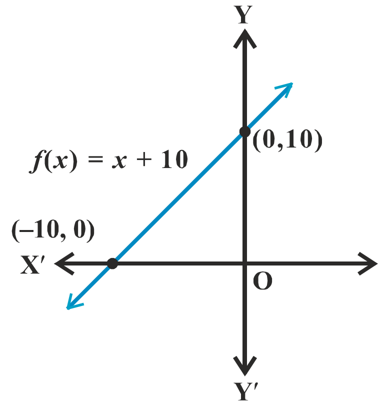
   (iii) $f(x) = x$, x વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 18 : વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ **R** પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 10$ હોય, તો વિધેય f નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = 10$, $f(1) = 11$, $f(2) = 12$, ..., $f(10) = 20$ વગેરે અને $f(-1) = 9$, $f(-2) = 8$, ..., $f(-10) = 0$ વગેરે.

માટે આ વિધેયનો આલેખનો આકૃતિ 2.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે.



આકૃતિ 2.16

નોંધ : $f(x) = mx + c$, $x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયને સુરેખ વિધેય કહે છે. અહીં, m અને c અચળ છે. ઉપરનું વિધેય એ સુરેખ વિધેયનું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 19 : જો R એ **Q** થી **Q** પરનો

R = $\{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ અને $a - b \in \mathbf{Z}\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે.

તો બતાવો કે,

(i) પ્રત્યેક $a \in \mathbf{Q}$ માટે, $(a, a) \in$ R

(ii) જો $(a, b) \in$ R તો $(b, a) \in$ R

(iii) જો $(a, b) \in$ R અને $(b, c) \in$ R તો $(a, c) \in$R

ઉકેલ : (i) અહીં, $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$. તેથી $(a, a) \in$ R.

(ii) જો $(a,b) \in$ R તો $a - b \in \mathbf{Z}$. તેથી, $b - a \in \mathbf{Z}$. તેથી, $(b, a) \in$ R

(iii) જો $(a, b) \in$ R અને $(b, c) \in$ R તો $a - b \in \mathbf{Z}$. $b - c \in \mathbf{Z}$. તેથી,

$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$. તેથી, $(a, c) \in$ R

ઉદાહરણ 20 : $f = \{(1,1), (2,3), (0, -1), (-1, -3)\}$ થાય તે રીતે **Z** પર વ્યાખ્યાયિત સુરેખ વિધેય હોય, તો $f(x)$ શોધો.

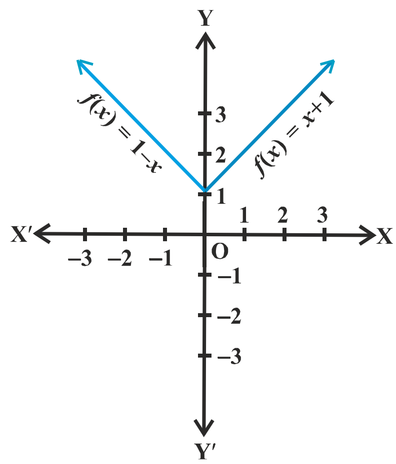
ઉકેલ : અહીં, f સુરેખ વિધેય હોવાથી $f(x) = mx + c$ લો. વળી, $(1, 1), (0, -1) \in f$,

$f(1) = m + c = 1$ અને $f(0) = c = -1$. આ પરથી $m = 2$ અને $f(x) = 2x - 1$.

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$ હોય, તો વિધેયનો પ્રદેશ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, અહીં વિધેય f એ $x = 4$ અને $x = 1$ સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યા પર વ્યાખ્યાયિત છે. આથી વિધેય f નો પ્રદેશ $\mathbf{R} - \{1, 4\}$.

ઉદાહરણ 22 : $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો આલેખ દોરો.



આકૃતિ 2.17

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 1 - x$, $x < 0$,

આથી, $f(-4) = 1 - (-4) = 5$;

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$,

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2$; વગેરે

વળી, $f(x) = x + 1, x > 0.$

આથી, $f(1) = 2, \quad f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$; વગેરે.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.17 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

1. સંબંધ f એ $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 3 \\ 3x, & 3 \le x \le 10 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે અને

સંબંધ g એ $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે, તો સાબિત કરો કે f એ વિધેય છે અને g વિધેય નથી.

2. જો $f(x) = x^2$, તો $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ શોધો.

3. વિધેય $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ નો પ્રદેશ શોધો.

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

5. $f(x) = |x - 1|$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

6. જો $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ એ **R** થી **R** નું વિધેય હોય, તો તે વિધેય f નો વિસ્તાર શોધો.

7. $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે, તો $f + g, f - g$ અને $\dfrac{f}{g}$ શોધો.

8. જો $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ એ **Z** થી **Z**, $f(x) = ax + b$, થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય, તો a અને b શોધો.

9. R એ **N** થી **N** નો સંબંધ છે. R = $\{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ અને $a = b^2\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત છે, તો શું નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે ?

(i) પ્રત્યેક $a \in \mathbf{N}$ માટે $(a, a) \in$ R

(ii) જો $(a, b) \in$ R, તો $(b, a) \in$ R

(iii) જો $(a, b) \in$ R, $(b, c) \in$ R તો $(a, c) \in$ R

પ્રત્યેક વિધાનમાં તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

10. A $=\{1,2,3,4\}$, B $= \{1,5,9,11,15,16\}$ અને $f= \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$, તો શું નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે ?

(i) f એ A થી B નો સંબંધ છે.

(ii) f એ A થી B પરનું વિધેય છે. પ્રત્યેક વિકલ્પમાં તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

11. f એ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ નો ઉપગણ છે. જો $f = \{(ab, a + b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે, તો શું f એ $\mathbf{Z}$ થી $\mathbf{Z}$ નું વિધેય છે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

12. A $= \{9,10,11,12,13\}$ અને f: A$\rightarrow$**N**, $f(n) = n$ નો મહત્તમ અવિભાજ્ય અવયવ છે. f નો વિસ્તાર મેળવો.

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે સંબંધ અને વિધેયનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિશેષતાઓ નીચે મુજબ છે :

- **ક્રમયુક્ત જોડ:** કોઈ ચોક્કસ ક્રમમાં બનાવેલ જોડને ક્રમયુક્ત જોડ કહે છે.
- **કાર્તેઝિય ગુણાકાર:** બે ગણ A અને B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર, A × B = $\{(a, b): a \in$ A, $b \in$ B$\}$

  વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

  અને $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- જો $(a, b) = (x, y)$, તો $a = x$ અને $b = y$.
- જો $n(\text{A}) = p$ અને $n(\text{B}) = q$, તો $n(\text{A} \times \text{B}) = pq$.
- $\text{A} \times \phi = \phi$
- સામાન્ય રીતે, $\text{A} \times \text{B} \neq \text{B} \times \text{A}$.
- **સંબંધ:** ગણ A અને B માટે A × B ના કોઈ ઉપગણને A થી B નો સંબંધ R કહે છે. આ A × B નો ઉપગણ ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે.
- જો $(x, y) \in$ R, તો ઘટક x નું સંબંધ R ને અંતર્ગતનું પ્રતિબિંબ બિંદુ y હોય છે.
- સંબંધ R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને સંબંધ R નો પ્રદેશ કહે છે.
- સંબંધ R ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને સંબંધ R નો વિસ્તાર કહે છે.
- વિધેયએ ગણ A થી ગણ B પરનો એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો સંબંધ છે. તેમાં ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક x ને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ y મળે છે. આને આપણે $y = f(x)$ માટે f : A$\rightarrow$B દ્વારા દર્શાવીશું.
- ગણ A ને વિધેય f નો પ્રદેશ અને ગણ B ને વિધેય f નો સહપ્રદેશ કહેવાય.
- વિધેય f ના પ્રતિબિંબના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે.
- કોઈ પણ વાસ્તવિક વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ કે તેનો ઉપગણ હોય છે.

◆ વિધેય પરની બૈજિક ક્રિયાઓ :

$f : X \to \mathbf{R}$ અને $g : X \to \mathbf{R}$, વિધેય હોય, તો

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in X$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in X$$

$(kf)(x) = k(f(x))$, $x \in X$, જ્યાં k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in X,\ g(x) \neq 0$$

Historical Note

The word FUNCTION first appears in a Latin manuscript "Methodus tangentium inversa, *seu de fuctionibus*" written by Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) in 1673; Leibnitz used the word in the non-analytical sense. He considered a function in terms of "mathematical job" – the "employee" being just a curve.

On July 5, 1698, Johan Bernoulli, in a letter to Leibnitz, for the first time deliberately assigned a specialised use of the term *function* in the analytical sense. At the end of that month, Leibnitz replied showing his approval.

Function is found in English in 1779 in Chambers' Cyclopaedia: "The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities".

પ્રકરણ 3

ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

❖*A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

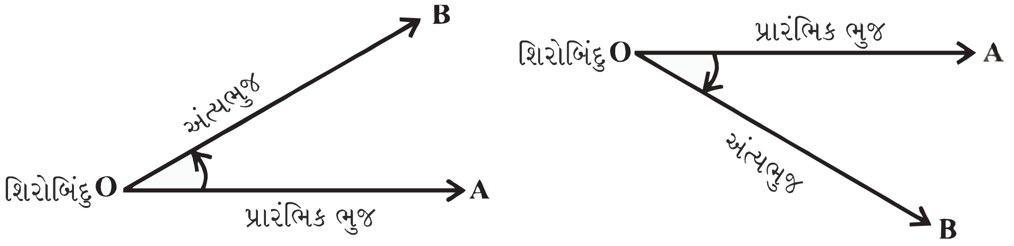
3.1 પ્રાસ્તાવિક

ત્રિકોણમિતિ(*Trigonometry*) શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દો '*trigon*' અને '*metron*'ના સમન્વયથી બનેલ છે અને તેનો અર્થ 'ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ' એવો થાય છે. મૂળભૂત રીતે આ વિષય ત્રિકોણને સાંકળતા ભૌમિતિક પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે વિકસ્યો હતો. તેનો અભ્યાસ સમુદ્રી કપ્તાનો દિશા જાણવા માટે, નવી જમીનના માપન માટે મોજણીદાર, ઈજનેરો અને અન્ય લોકો કરતાં હતા. હાલમાં, ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ ભૂકંપ વિજ્ઞાનમાં, ઈલેક્ટ્રિક સર્કિટની ડિઝાઈનમાં, અણુની સ્થિતિ જાણવા માટે, દરિયામાં આવતાં મોજાંની ઊંચાઈનું અનુમાન કરવા માટે, સંગીતના સૂરનું વિશ્લેષણ કરવા માટે જેવાં ઘણાં ક્ષેત્રોમાં અને અન્ય પ્રદેશોમાં થાય છે.

Arya Bhatt (476-550)

આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં લઘુકોણ માટે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તર સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કર્યો. વળી, આપણે ત્રિકોણમિતિય એકરૂપતા અને ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ ઊંચાઈ અને અંતરને લગતા પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે કરેલ છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ વ્યાપક સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયો તરીકે કરીશું અને તેના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું.

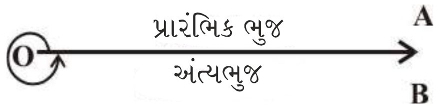
3.2 ખૂણા



(i) ધન ખૂણો આકૃતિ 3.1 **(ii)** ઋણ ખૂણો

આરંભબિંદુથી શરૂ થતા કિરણના પરિભ્રમણના માપને ખૂણાનું માપ કહેવાય. મૂળ કિરણને ખૂણાની *પ્રારંભિક બાજુ* કહેવાય અને પરિભ્રમણ થયા પછીની કિરણની અંતિમ સ્થિતિને ખૂણાની *અંત્યબાજુ* કહેવાય. જે બિંદુથી પરિભ્રમણ કરાય છે તેને ખૂણાનું *શિરોબિંદુ* કહેવાય. જો પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની વિરુધ્ધ દિશા હોય, તો ખૂણાનું માપ ધન કહેવાય અને જો પરિભ્રમણની દિશા એ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં હોય તો ખૂણાનું માપ ઋણ કહેવાય. (આકૃતિ **3.1**)

ખૂણાનું માપ એટલે પ્રારંભિક બાજુથી અંત્યબાજુ સુધી થયેલા પરિભ્રમણનું માપ. ખૂણાનું માપ મેળવવા માટે અલગ અલગ એકમો છે. ખૂણાની વ્યાખ્યા પરથી એકમનું સૂચન મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રારંભિક બાજુથી *એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ*.



આકૃતિ 3.2

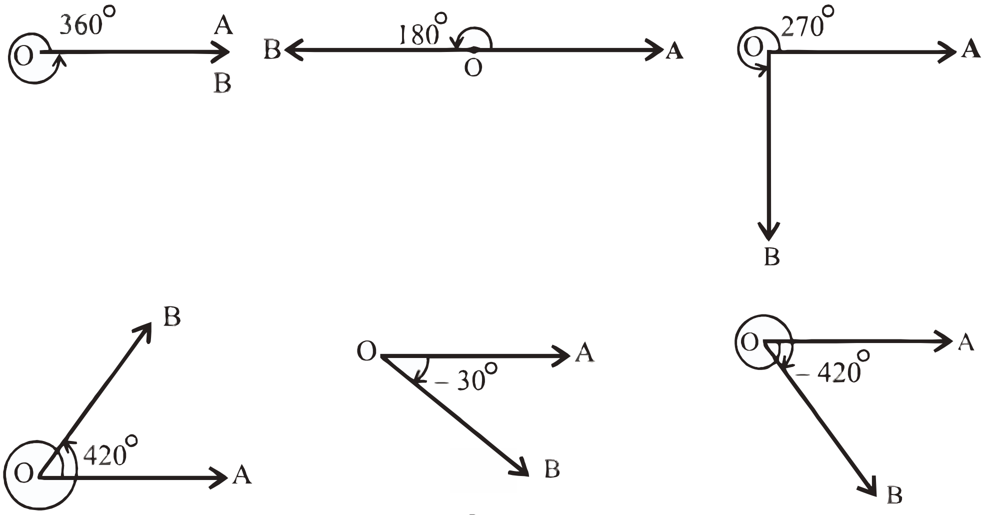
આ માપ મોટા ખૂણા માટે વધુ અનુકૂળ રહે. ઉદાહરણ તરીકે, ઝડપથી ફરતું પૈડું એક સેકન્ડમાં 15 પરિભ્રમણ કરે છે. ખૂણા માપવા માટે આપણે બીજા બે વ્યાપક રીતે વપરાતા એકમો વિચારીશું, જેમકે અંશ માપ અને રેડિયન માપ.

3.2.1 અંશ માપ

જો પ્રારંભિક બાજુથી અંત્યબાજુ સુધીનું પરિભ્રમણ એક પૂર્ણ પરિભ્રમણના $\left(\frac{1}{360}\right)$મા ભાગનું હોય, તો બનતા ખૂણાનું માપ 1 અંશ માપ કહેવાય તથા 1° એમ લખાય. એક અંશના 60 મા ભાગને એક મિનિટ કહેવાય અને તેને $1'$ લખાય અને એક મિનિટના 60 મા ભાગને એક સેકંડ કહેવાય અને તેને $1''$ લખાય.

તેથી, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$

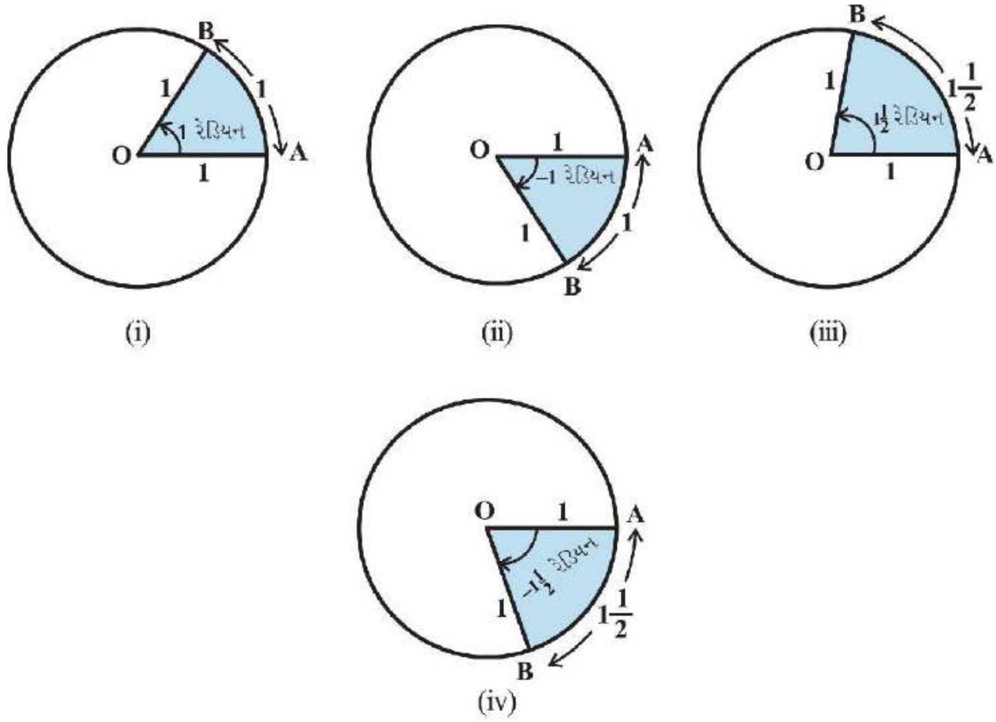
જેમનાં માપ 360°, 180°, 270°, 420°, -30°, -420° છે તેવા કેટલાક ખૂણા આકૃતિ 3.3 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.3

3.2.2 રેડિયન માપ

ખૂણાના માપ માટે જેને ***રેડિયન માપ*** (*radian measure*) કહેવાય છે તેવો બીજો એકમ પણ છે. આપણે એકમ વર્તુળ (1 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ)ના કેન્દ્ર આગળ 1 એકમ વૃત્તિય લંબાઈવાળા ચાપથી બનતા ખૂણાને 1 રેડિયન કહીશું. આકૃતિઓ 3.4 (i) થી (iv) માં OA એ પ્રારંભિક બાજુ છે અને OB અંત્યબાજુ છે. આ આકૃતિઓ 1 રેડિયન, -1 રેડિયન, $1\frac{1}{2}$ રેડિયન અને $-1\frac{1}{2}$ રેડિયન માપવાળા ખૂણા દર્શાવે છે.



આકૃતિ **3.4 (i) થી (iv)**

આપણે જાણીએ છીએ કે એક એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો પરિઘ 2π હોય છે. આમ, પ્રારંભિક બાજુથી એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ 2π રેડિયન માપનો ખૂણો બનાવે.

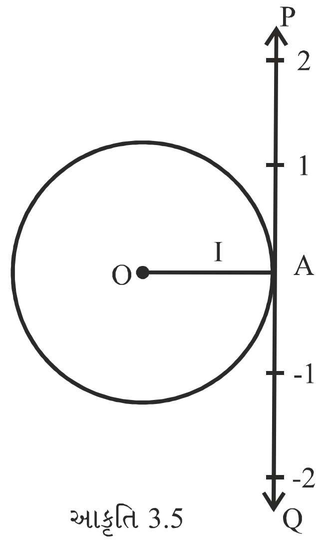
વ્યાપક રીતે, r એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં r લંબાઈના ચાપ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાનું માપ 1 રેડિયન છે. એ તો આપણે જાણીએ જ છીએ કે, સમાન લંબાઈના ચાપ દ્વારા બનતા ખૂણાનું માપ સમાન હોય. હવે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં r લંબાઈના ચાપ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાનું માપ 1 રેડિયન છે. આથી આ વર્તુળમાં l લંબાઈના ચાપ દ્વારા બનતા ખૂણાનું માપ $\frac{l}{r}$ રેડિયન થાય. તેથી, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં l લંબાઈનો ચાપ કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયનનો ખૂણો બનાવે તો,

$$\theta = \frac{l}{r} \quad \text{અથવા} \quad l = r\theta.$$

3.2.3 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને રેડિયન માપ વચ્ચેનો સંબંધ

O કેન્દ્ર ધરાવતું એકમ વર્તુળ લો. વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ A લો. ખૂણા માટે OA ને પ્રારંભિક બાજુ લો. વર્તુળના કોઈપણ ચાપની લંબાઈ ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું રેડિયન માપ આપશે. ધારો કે રેખા PAQ એ વર્તુળનો Aઆગળનો

સ્પર્શક છે. ધારો કે, બિંદુ A એ વાસ્તવિક સંખ્યા શૂન્ય બતાવે છે. AP ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને AQ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ દર્શાવે છે. (આકૃતિ 3.5) જો એક દોરડાથી રેખા AP ને ઘડિયાળના કાંટાની વિરુધ્ધ દિશામાં અને AQને ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં વર્તુળ પર વીંટાળવામાં આવે, તો પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાને અનુરૂપ રેડિયન માપ મળે અને તેનાથી ઊલટું પણ બને. આમ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને રેડિયન માપ એ બંનેને એકના એક જ લઈ શકાય.



આકૃતિ 3.5

3.2.4 અંશ માપ અને રેડિયન માપ વચ્ચેનો સંબંધ

વર્તુળ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાનું રેડિયન માપ 2π અને અંશ માપ $360°$ છે. આથી, કહી શકાય કે, 2π રેડિયન= $360°$ અથવા π રેડિયન = $180°$.

ઉપરના સંબંધનો ઉપયોગ કરી રેડિયન માપના ખૂણાને અંશ માપમાં અને અંશ માપને રેડિયન માપમાં દર્શાવી શકાય. π ની લગભગ કિંમત $\frac{22}{7}$ લેતાં,

$$1 \text{ રેડિયન} = \frac{180°}{\pi} = 57° \ 16' \text{ (લગભગ)}$$

$$\text{તથા } 1° = \frac{\pi}{180} \text{ રેડિયન} = 0.01746 \text{ રેડિયન (લગભગ)}$$

સામાન્ય રીતે વપરાતા કેટલાક ખૂણાના અંશ માપ અને રેડિયન માપ વચ્ચે સંબંધ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

અંશ	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
રેડિયન	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

રૂઢિગત સાંકેતો

આપણે રૂઢિગત રીતે સ્વીકારીશું કે ખૂણાઓને અંશ કે રેડિયનમાં મપાતા હોવાથી, જો $\theta°$ લખીએ, તો θ ખૂણાનું અંશ માપ અને જો ખૂણો β લખીએ, તો β ખૂણાનું રેડિયન માપ દર્શાવે છે. આપણે નોંધીએ કે જ્યારે ખૂણાને રેડિયન માપમાં લખાય, ત્યારે રેડિયન શબ્દ દર વખતે લખીશું નહિ.

આમ, $\pi = 180°$ અને $\frac{\pi}{4} = 45°$ લખીએ ત્યારે સમજીશું કે π અને $\frac{\pi}{4}$ રેડિયન માપ છે. આમ કહી શકાય કે,

$$\text{રેડિયન માપ} = \frac{\pi}{180} \times \text{અંશ માપ}$$

$$\text{અંશ માપ} = \frac{180°}{\pi} \times \text{રેડિયન માપ}$$

ઉદાહરણ 1 : $40° \ 20'$ નું રેડિયન માપમાં રૂપાંતર કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $180° = \pi$ રેડિયન

આથી, $40^\circ\ 20' = 40\frac{1}{3}^\circ$

$= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ રેડિયન

$= \frac{121\pi}{540}$ રેડિયન

આમ, $40^\circ\ 20' = \frac{121\pi}{540}$ રેડિયન

ઉદાહરણ 2 : 6 રેડિયનને અંશ માપમાં ફેરવો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે π રેડિયન $= 180^\circ$

આથી, 6 રેડિયન $= \frac{180}{\pi} \times 6$ અંશ

$= \frac{1080 \times 7}{22}$ અંશ

$= 343\frac{7}{11}$ અંશ

$= 343^\circ + \frac{7 \times 60}{11}$ મિનિટ $\qquad (1^\circ = 60')$

$= 343^\circ + 38' + \frac{2}{11}$ મિનિટ

$= 343^\circ + 38' + 10.9''$ $\qquad (1' = 60'')$

$= 343^\circ\ 38'\ 11''$ (લગભગ)

આમ, 6 રેડિયન $= 343^\circ\ 38'\ 11''$ (લગભગ)

ઉદાહરણ 3 : 37.4 સેમી ચાપની લંબાઈ ધરાવતા તથા કેન્દ્ર આગળ 60° માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો).

ઉકેલ: અહીં, $l = 37.4$ સેમી અને

$\theta = 60^\circ = \frac{60\pi}{180}$ રેડિયન $= \frac{\pi}{3}$

હવે, $r = \frac{l}{\theta}$ પરથી,

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22}$$

$= 35.7$ સેમી

ઉદાહરણ 4 : ઘડિયાળનો મિનિટકાંટો 1.5 સેમી લાંબો છે, તો 40 મિનિટમાં કાંટાએ કાપેલ અંતર શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ: ઘડિયાળનો મિનિટકાંટો, 60 મિનિટમાં એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરે છે.

આથી, 40 મિનિટમાં, મિનિટકાંટો $\frac{2}{3}$ પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરશે.

$\therefore \theta = \frac{2}{3} \times 360°$ અથવા $\frac{4\pi}{3}$ રેડિયન

આથી, કપાયેલ અંતર

$l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3}$ સેમી

$= 2\pi$ સેમી

$= 2 \times 3.14$ સેમી

$= 6.28$ સેમી

ઉદાહરણ 5 : બે વર્તુળમાં સમાન લંબાઈનાં ચાપ તેમનાં કેન્દ્રો આગળ અનુક્રમે $65°$ અને $110°$ના ખૂણા બનાવે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે r_1 અને r_2 છે.

આપેલ છે કે,

$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36}$ રેડિયન

$\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$ રેડિયન

ધારો કે ચાપની લંબાઈ l છે.

આથી, $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ પરથી,

$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2$

$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$

આથી, $r_1 : r_2 = 22 : 13$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. નીચેના અંશ માપને સંગત રેડિયન માપ શોધો :

(i) $25°$ (ii) $-47° 30'$ (iii) $240°$ (iv) $520°$

2. નીચેના રેડિયન માપને સંગત અંશ માપ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. એક ચક્ર એક મિનિટમાં 360° પરિભ્રમણ કરે છે, તો તે એક સેકન્ડમાં કેટલા રેડિયન માપ જેટલું ફરશે ?

4. 100 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ 22 સેમી હોય, તો તેણે કેન્દ્ર આગળ બનાવેલ ખૂણાનું અંશ માપ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

5. 40 સેમી વ્યાસવાળા વર્તુળમાં જીવાની લંબાઈ 20 સેમી છે. જીવાને સંગત લઘુચાપનું માપ શોધો.

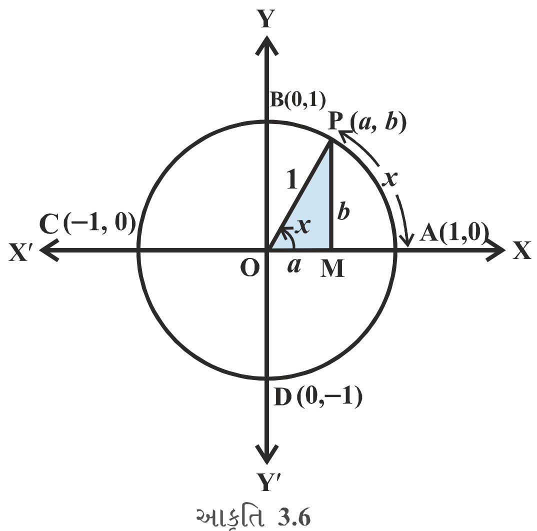
6. જો બે વર્તુળોમાં સમાન લંબાઈનાં ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° અને 75° ના ખૂણા આંતરે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

7. જો 75 સેમી લંબાઈવાળા લોલકનું અંત્યબિંદુ (i) 10 સેમી (ii) 15 સેમી (iii) 21 સેમીનાં ચાપ બનાવે, તો તેણે કેન્દ્ર આગળ બનાવેલ ખૂણાનાં રેડિયન માપ શોધો.

3.3 ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

આગળના ધોરણમાં, આપણે કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણોના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તરો તરીકે કર્યો. હવે આપણે રેડિયન માપના કોઈપણ ખૂણા માટે આ વ્યાખ્યાને વિસ્તૃત કરીશું અને ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો અભ્યાસ કરીશું.

યામ-સમતલમાં ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળું એકમ વર્તુળ લો. જેથી ખૂણો AOP = x રેડિયન અર્થાત્ ચાપ AP ની લંબાઈ = x થાય તે રીતે વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ P(a, b) લો. (આકૃતિ 3.6.)



આકૃતિ 3.6

આપણે $cos\ x = a$ અને $sin\ x = b$ વ્યાખ્યાયિત કરીશું. Δ OMP કાટકોણ ત્રિકોણ હોવાથી, $OM^2 + MP^2 = OP^2$ અથવા $a^2 + b^2 = 1$.

આમ, એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુ માટે $a^2 + b^2 = 1$ અથવા $cos^2\ x + sin^2\ x = 1$.

નોંધ : $cos^2 x = (cos\ x)^2$, $sin^2 x = (sin x)^2$

એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ બનતો ખૂણો 2π રેડિયન હોવાથી, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, અને $\angle AOC = \pi$ અને $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$. આ $\frac{\pi}{2}$ ના પૂર્ણાંક ગુણિત માપવાળા ખૂણાઓને *પાદકોણ* કહેવાય.

A, B, C, D ના યામ અનુક્રમે (1, 0), (0, 1), (-1, 0) અને (0, -1) છે. આથી પાદકોણ માટે,

$$cos\ 0 = 1 \qquad sin\ 0 = 0$$

$$cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad sin\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$cos\ \pi = -1 \qquad sin\ \pi = 0$$

$$cos\ \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad sin\ \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$cos\ 2\pi = 1 \qquad sin\ 2\pi = 0$$

હવે, જો P બિંદુથી એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરીએ, તો આપણે પાછા એ જ બિંદુ P પર પહોંચીએ. આમ, આપણે જોઈ શકીએ કે, જો x, 2π ના પૂર્ણાંક ગુણાંકમાં વધે કે ઘટે તો, *sine* કે *cosine* વિધેયોનાં મૂલ્યો બદલાતાં નથી. આથી,

$$\sin (2n\pi + x) = \sin x, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos (2n\pi + x) = \cos x, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

વળી, જો $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ વગેરે તો $\sin x = 0$, એટલે કે x એ π નો ગુણિત હોય.

અને જ્યારે x એ $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણિત હોય એટલે કે $x, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$ હોય ત્યારે $\cos x$ શૂન્ય બને. આમ,

જ્યારે $\sin x = 0$ ત્યારે $x = n\pi$ અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે, $n \in \mathbf{Z}$

જ્યારે $\cos x = 0$ ત્યારે $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે, $n \in \mathbf{Z}$

હવે, આપણે બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયો *sine* અને *cosine* વિધેયોના સંદર્ભમાં વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq n\pi, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq n\pi, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

આપણે સાબિત કર્યું છે કે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

આથી, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (કેમ ?)

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ (કેમ ?)

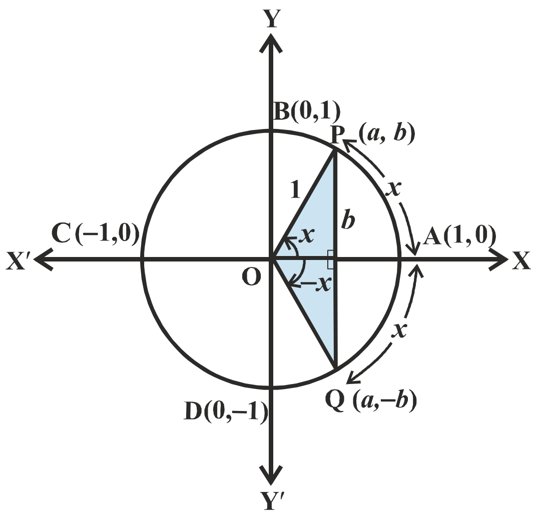
અગાઉના ધોરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરનાં મૂલ્યોની 0°, 30°, 45°, 60° અને 90° માટે ચર્ચા કરેલ છે. ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની કિંમત પણ અગાઉ શીખેલ ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર જેટલી થાય. આથી, આપણને નીચે આપેલ કોષ્ટક મળે:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત	0	અવ્યાખ્યાયિત	0

cosec x, sec x અને *cot x* નાં મૂલ્યો અનુક્રમે *sin x, cos x* અને *tan x* નાં મૂલ્યોના વ્યસ્ત છે.

3.3.1 ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં ચિહ્નો :

ધારો કે $\angle AOP = x$ થાય તે રીતે P (a, b) એ ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા એકમ વર્તુળ પરનું કોઈ એક બિંદુ છે. જો $\angle AOQ = -x$, તો બિંદુ Q ના યામ $(a, -b)$ થાય. (આકૃતિ 3.7.)



આકૃતિ 3.7

આથી, $\cos(-x) = \cos x$

અને $\sin(-x) = -\sin x$

એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુ P (a, b) માટે, $-1 \le a \le 1$ અને $-1 \le b \le 1$. આથી, આપણને પ્રત્યેક x માટે $-1 \le \cos x \le 1$ અને $-1 \le \sin x \le 1$ મળે. અગાઉના ધોરણમાં આપણે શીખ્યાં હતાં કે પ્રથમ ચરણમાં $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ a અને b બંને ધન હોય, બીજા ચરણમાં $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ a ઋણ અને b ધન હોય, ત્રીજા ચરણમાં $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ a અને b બંને ઋણ હોય અને ચોથા ચરણમાં $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ a ધન અને b ઋણ હોય. આથી, $(0 < x < \pi)$ માટે $\sin x$ ધન અને $\pi < x < 2\pi$ માટે તે ઋણ હોય. આ જ રીતે, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે $\cos x$ ધન, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ માટે ઋણ અને $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ માટે ધન હોય. આ જ રીતે, બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં ચિહ્નો ભિન્ન ચરણ માટે શોધી શકાય. તે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

	I	II	III	IV
sin x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tan x	+	–	+	–
cosec x	+	+	–	–
sec x	+	–	–	+
cot x	+	–	+	–

3.3.2 ત્રિકોણમિતિય વિધેયોના પ્રદેશ અને વિસ્તાર

sine અને *cosine* વિધેયોની વ્યાખ્યા પરથી કહી શકાય કે તે પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. વળી, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે જોઈ શકાય કે, $-1 \leq \sin x \leq 1$ અને $-1 \leq \cos x \leq 1$.

આથી, $y = \sin x$ અને $y = \cos x$નો પ્રદેશ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ અર્થાત્ $-1 \leq y \leq 1$ છે.

વળી, $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$, હોવાથી $y = \text{cosec}\, x$ નો પ્રદેશ $\{ x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$ અને વિસ્તાર $\{ y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ અથવા $y \leq -1 \}$. આ જ રીતે, $y = \sec x$ નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર $\{ y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ અથવા $y \leq -1 \}$ છે. $y = \tan x$ નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. $y = \cot x$ નો પ્રદેશ $\{ x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$ અને વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. (ખરેખર આ તમામ 'વિસ્તાર' એ વિસ્તાર સાબિત નથી થયા પરતુ તે આપેલ 'વિસ્તાર'ના ઉપગણ સાબિત થયા છે.)

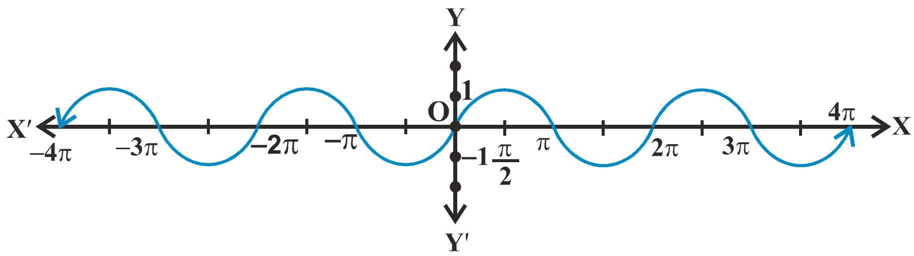
વળી, આપણે જોઈ શકીએ કે, પ્રથમ ચરણમાં જેમ x, 0 થી $\frac{\pi}{2}$ માં વધે તેમ $\sin x$, 0 થી 1 માં વધે, બીજા ચરણમાં જેમ x, $\frac{\pi}{2}$ થી π માં વધે તેમ $\sin x$, 1 થી 0 માં ઘટે. ત્રીજા ચરણમાં જેમ x, π થી $\frac{3\pi}{2}$ માં વધે, તેમ $\sin x$, 0 થી -1 માં ઘટે અને છેલ્લે, ચોથા ચરણમાં જેમ x, $\frac{3\pi}{2}$ થી 2π માં વધે તેમ $\sin x$, -1 થી 0 માં વધે છે. આ જ રીતે, આપણે બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયો માટે પણ ચર્ચા કરી શકીએ. અલબત્ત, આપણે પાસે નીચેનું કોષ્ટક છે :

	પ્રથમ ચરણ	દ્વિતીય ચરણ	તૃતીય ચરણ	ચતુર્થ ચરણ
sin	0 થી 1 વધે છે.	1 થી 0 ઘટે છે.	0 થી -1 ઘટે છે.	-1 થી 0 વધે છે.
cos	1 થી 0 ઘટે છે.	0 થી -1 ઘટે છે.	-1 થી 0 વધે છે.	0 થી 1 વધે છે.
tan	0 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી 0 વધે છે.	0 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી 0 વધે છે.
cot	∞ થી 0 ઘટે છે.	0 થી $-\infty$ ઘટે છે.	∞ થી 0 ઘટે છે.	0 થી $-\infty$ ઘટે છે.
sec	1 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી -1 વધે છે.	-1 થી $-\infty$ ઘટે છે.	∞ થી 1 ઘટે છે.
cosec	∞ થી 1 ઘટે છે.	1 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી -1 વધે છે.	-1 થી $-\infty$ ઘટે છે.

નોંધ : ઉપરના કોષ્ટકમાં $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે $\tan x$, 0 થી ∞ (અનંત) સુધી વધે છે. અર્થાત્ જેમ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે

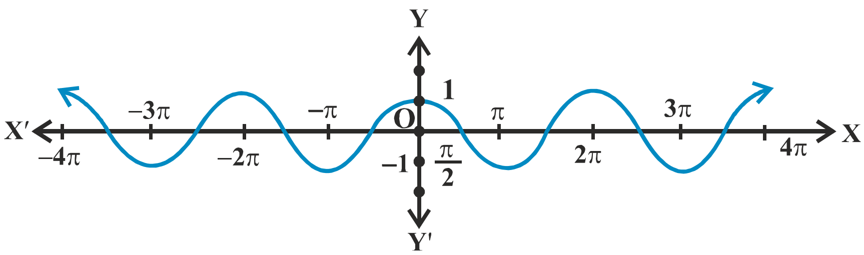
x વધે છે તેમ $\tan x$ નું મૂલ્ય વધે છે અને જેમ x, $\frac{\pi}{2}$ ને અનુલક્ષે તેમ $\tan x$ નું મૂલ્ય કોઈક મોટી સ્વૈર સંખ્યા બને. આ જ રીતે, કહી શકાય કે $\operatorname{cosec} x$ નું મૂલ્ય ચોથા ચરણમાં -1 થી $-\infty$ (ઋણ અનંત) સુધી ઘટે છે. અર્થાત્ $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ માટે $\operatorname{cosec} x$ નું મૂલ્ય ઘટે છે અને જેમ x, 2π ને અનુલક્ષે તેમ $\operatorname{cosec} x$ નું મૂલ્ય મોટી સ્વૈર ઋણ સંખ્યા બને. સંકેત ∞ અને $-\infty$ એ માત્ર વિધેય અને ચલની ચોક્કસ પ્રકારની વર્તણુંક દર્શાવે છે.

આપણે જોઈ ગયાં કે $\sin x$ અને $\cos x$ ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય છે. આથી, $\operatorname{cosec} x$ અને $\sec x$ વિધેયોની કિંમતોનું પણ પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય.



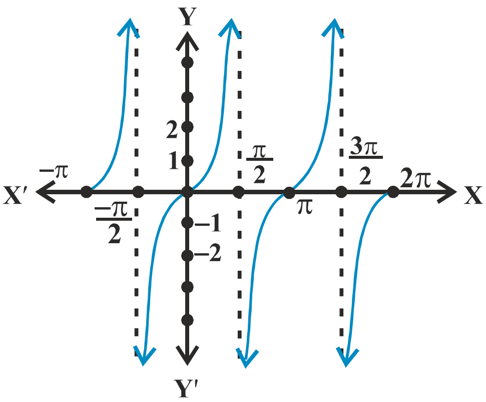
$y = \sin x$

આકૃતિ 3.8



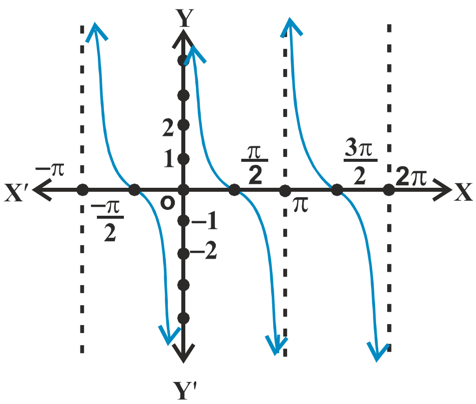
$y = \cos x$

આકૃતિ 3.9



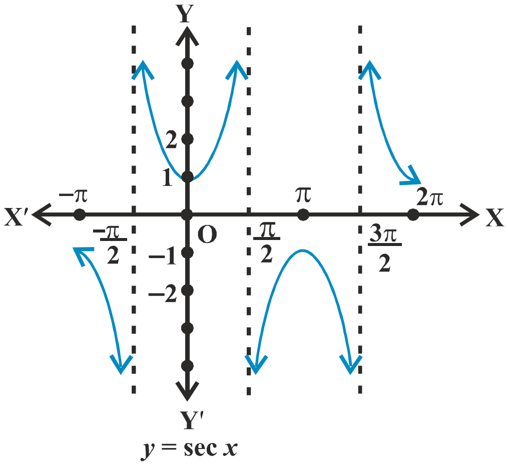
$y = \tan x$

આકૃતિ 3.10

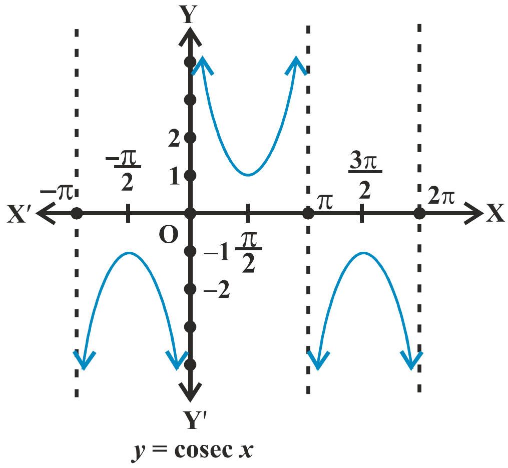


$y = \cot x$

આકૃતિ 3.11



આકૃતિ 3.12



આકૃતિ 3.13

હવે, પછીના વિભાગમાં આપણે જોઈશું કે $tan\,(\pi + x) = tan\,x$. આથી, $tan\,x$ માટે કિંમતોનું પુનરાવર્તન π લંબાઈના અંતરાલમાં થશે અને $cot\,x$ એ $tan\,x$નું વ્યસ્ત હોવાથી તેની કિંમતોનું પુનરાર્વતન પણ π લંબાઈના અંતરાલમાં થશે. આટલા જ્ઞાન અને ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની વર્તણૂક પરથી આપણે આ વિધેયોના આલેખ દોરી શકીએ. આ વિધેયોના આલેખ ઉપર આપેલ છે.

ઉદાહરણ 6 : જો x ત્રીજા ચરણમાં હોય અને $cos\,x = \frac{-3}{5}$, તો બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $cos\,x = \frac{-3}{5}$. આથી $sec\,x = \frac{-5}{3}$

હવે, $sin^2 x + cos^2 x = 1,$

અર્થાત્, $sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$\therefore \quad sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

આથી, $sin\,x = \pm \frac{4}{5}$

પરંતુ x ત્રીજા ચરણમાં છે. ત્યાં $sin\,x$ નું મૂલ્ય ઋણ હોય.

$\therefore \quad sin\,x = -\frac{4}{5}$ અને તે પરથી, $cosec\,x = -\frac{5}{4}$

$tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} = \frac{4}{3}$ અને $cot\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x} = \frac{3}{4}$.

ઉદાહરણ 7 : જો $cot\,x = \frac{-5}{12}$, x બીજા ચરણમાં હોય, તો બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $cot\,x = \frac{-5}{12}$ હોવાથી, $tan\,x = -\frac{12}{5}$

હવે, $sec^2 x = 1 + tan^2 x$

$$= 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

આથી, $sec\ x = \pm \frac{13}{5}$

પરંતુ x બીજા ચરણમાં છે. ત્યાં $sec\ x$ નું મૂલ્ય ઋણ હોય.

$\therefore\ sec\ x = -\frac{13}{5}$ અને તે પરથી, $cos\ x = -\frac{5}{13}$

વળી, $sin\ x = tan\ x \cdot cos\ x = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$

અને $cosec\ x = \frac{1}{sin\ x} = \frac{13}{12}$

ઉદાહરણ 8 : $sin\ \frac{31\pi}{3}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ: આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\ x$ ની કિંમતનું પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલ પછી થાય છે. આથી,

$$sin\ \frac{31\pi}{3} = sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= sin\ \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ઉદાહરણ 9 : $cos\ (-1710°)$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $cos\ x$ ની કિંમતનું પુનરાવર્તન 2π અથવા 360° લંબાઈના અંતરાલ પછી થાય છે. આથી,

$$\cos(-1710°) = \cos(-1710° + 5 \times 360°)$$

$$= \cos(-1710° + 1800°) = \cos(90°) = 0$$

સ્વાધ્યાય 3.2

પ્રશ્ન 1 થી 5 માં અન્ય પાંચ ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

1. $cos\ x = -\frac{1}{2}$, x ત્રીજા ચરણમાં છે.

2. $sin\ x = \frac{3}{5}$, x બીજા ચરણમાં છે.

3. $cot\ x = \frac{3}{4}$, x ત્રીજા ચરણમાં છે.

4. $sec\ x = \frac{13}{5}$, x ચોથા ચરણમાં છે.

5. $tan\ x = -\frac{5}{12}$, x બીજા ચરણમાં છે.

પ્રશ્ન 6 થી 10 માં ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

6. $\sin 765°$

7. $\text{cosec}\ (-1410°)$

8. $\tan \frac{19\pi}{3}$

9. $\sin \left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

10. $\cot \left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

3.4 બે ખૂણાના સરવાળા અને બાદબાકી સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

આ વિભાગમાં આપણે બે અંક(ખૂણા)ના સરવાળા કે બાદબાકી સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં સ્વરૂપો અને તેમના સંબંધી અભિવ્યક્તિઓ મેળવીશું. આ પ્રકારના પાયાનાં પરિણામોને ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમ કહેવાય. આપણે જોયું કે,

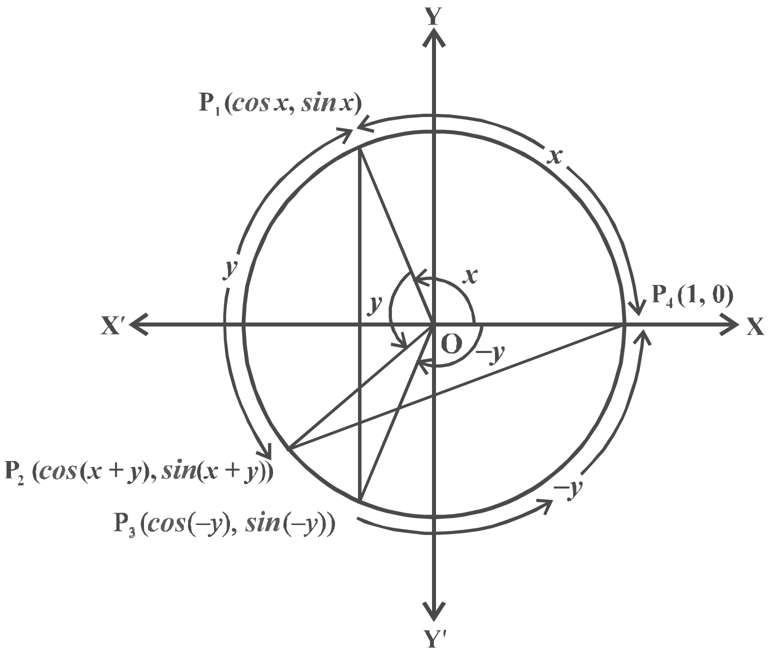
1. $\sin (-x) = -\sin x$

2. $\cos (-x) = \cos x$

આપણે હવે કેટલાંક વધુ પરિણામો સાબિત કરીએ.

3. $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર હોય તેવું એકમ વર્તુળ લો. ધારો કે ખૂણો $P_4OP_1 = x$ અને ખૂણો $P_1OP_2 = y$ છે. આથી, ખૂણો $P_4OP_2 = x + y$ છે. અને ખૂણો $P_4OP_3 = -y$ છે. આથી, P_1, P_2, P_3 અને P_4 ના યામ P_1 $(\cos x, \sin x)$, P_2 $(\cos (x + y), \sin (x + y))$, P_3 $(\cos (-y), \sin (-y))$ અને P_4 $(1, 0)$ થાય. (આકૃતિ 3.14)



આકૃતિ **3.14**

ત્રિકોણ P_1OP_3 અને P_2OP_4 નો વિચાર કરો, તે એકરૂપ છે. (કેમ ?)

આથી, P_1P_3 અને P_2P_4 સમાન બને.

અંતર સૂત્ર પરથી, $P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$

$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$

$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$

$= 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$ (કેમ ?)

વળી, $P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$

$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$

$= 2 - 2\cos(x+y)$

હવે, $P_1P_3 = P_2P_4$ હોવાથી,

$P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

આથી, $2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$

$\therefore \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\boldsymbol{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$

નિત્યસમ 3 માં y ને બદલે $-y$ લેતાં,

$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$

$\therefore \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$

5. $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}$

નિત્યસમ 4 માં, x ને બદલે $\frac{\pi}{2}$ અને y ને બદલે x લેતાં,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

$$= \sin x$$

6. $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$

નિત્યસમ 5 પરથી,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos x$$

7. $\boldsymbol{\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

8. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

નિત્યસમ 7 માં y ને બદલે $-y$ મૂકતાં, આપણને આ પરિણામ મળે.

9. નિત્યસમ 3, 4, 7 અને 8 માં x અને y ની અનુકૂળ કિંમતો મૂકતાં, આપણને નીચેનાં પરિણામો મળે :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

$\sin x$ અને $\cos x$ નાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ અને $\operatorname{cosec} x$ માટે પણ આ જ પ્રકારનાં પરિણામો મેળવી શકાય.

10. જો x, y અને $(x+y)$ માંથી કોઈપણ $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ના હોય, તો

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

x, y અને $(x+y)$ માંથી કોઈપણ $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ન હોવાથી $\cos x$, $\cos y$ અને $\cos(x+y)$ શૂન્યેતર હશે.

હવે, $$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

અંશ તથા છેદને $\cos x \cos y$ વડે ભાગતાં,

$$\tan(x+y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

11. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

નિત્યસમ 10 માં y ના બદલે $-y$ લેતાં,

$$\tan(x-y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$ મળે.

12. **જો x, y અને $(x + y)$ માંથી કોઈપણ π ના ગુણિત ના હોય, તો**

$$cot\,(x + y) = \frac{cot\,x\,cot\,y - 1}{cot\,y + cot\,x}$$

x, y અને $(x + y)$ માંથી કોઈપણ π ના ગુણિત ના હોવાથી, $sin\,x$ $sin\,y$ અને $sin\,(x + y)$ શૂન્યેતર છે.

હવે, $cot\,(x + y) = \dfrac{cos\,(x + y)}{sin\,(x + y)} = \dfrac{cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y}{sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y}$

અંશ તથા છેદને $sin\,x\,sin\,y$ વડે ભાગતાં,

$$cot\,(x + y) = \frac{cot\,x\,cot\,y - 1}{cot\,y + cot\,x}$$

13. **x, y અને $(x - y)$ માંથી કોઈપણ π ના ગુણિત ના હોય, તો**

$$cot\,(x - y) = \frac{cot\,x\,cot\,y + 1}{cot\,y - cot\,x}$$

નિત્યસમ 12 માં y બદલે $-y$ લેતાં, આપણને આ પરિણામ મળે.

14. $cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x = 2\,cos^2 x - 1 = 1 - 2\,sin^2 x = \dfrac{1 - tan^2 x}{1 + tan^2 x}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$cos\,(x + y) = cos\,x\;cos\,y - sin\,x\,sin\,y$$

y ને બદલે x મૂકતાં,

$$cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x$$

$$= cos^2 x - (1 - cos^2 x)$$

$$= 2\,cos^2 x - 1$$

અને,

$$cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x$$

$$= 1 - sin^2 x - sin^2 x$$

$$= 1 - 2\,sin^2 x.$$

તથા, $cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x = \dfrac{cos^2 x - sin^2 x}{cos^2 x + sin^2 x}$ મળે.

અંશ તથા છેદને $cos^2 x$ વડે ભાગતાં,

આપણને, $cos\,2x = \dfrac{1 - tan^2 x}{1 + tan^2 x}$ મળે.

15. $sin\,2x = 2\,sin\,x\,cos\,x = \dfrac{2\,tan\,x}{1 + tan^2 x}$ મળે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$sin\,(x + y) = sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y$$

y ને બદલે x લેતાં આપણને, $sin\ 2x = 2\ sin\ x\ cos\ x$ મળે.

વળી, $$sin\ 2x = \frac{2 sin\,x\, cos\,x}{cos^2 x + sin^2 x}$$

અંશ તથા છેદને $cos^2 x$ વડે ભાગતાં,

$$sin\ 2x = \frac{2 tan\,x}{1 + tan^2 x}$$

16. $\boldsymbol{tan\ 2x = \dfrac{2 tan\ x}{1 - tan^2 x}}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$tan\ (x + y) = \frac{tan\,x + tan\,y}{1 - tan\,x\,tan\,y}$$

y ને બદલે x મૂકતાં, $tan\,2x = \dfrac{2\ tan\,x}{1 - tan^2 x}$ મળે.

17. $\boldsymbol{sin\ 3x = 3\ sin\ x - 4\ sin^3 x}$

અહીં, $sin\ 3x = sin\ (2x + x)$

$= sin\ 2x\ cos\ x + cos\ 2x\ sin\ x$

$= 2\ sin\ x\ cos\ x\ cos\ x + (1 - 2\ sin^2 x)\ sin\ x$

$= 2\ sin\ x\ (1 - sin^2 x) + sin\ x - 2\ sin^3 x$

$= 2\ sin\ x - 2\ sin^3 x + sin\ x - 2\ sin^3 x$

$= 3\ sin\ x - 4\ sin^3 x$

18. $\boldsymbol{cos\ 3x = 4\ cos^3 x - 3\ cos\ x}$

અહીં, $cos\ 3x = cos\ (2x + x)$

$= cos\ 2x\ \ cos\ x - sin\ 2x\ sin\ x$

$= (2\ cos^2 x - 1)\ cos\ x - 2\ sin\ x\ cos\ x\ sin\ x$

$= (2\ cos^2 x - 1)\ cos\ x - 2\ cos\ x\ (1 - cos^2 x)$

$= 2\ cos^3 x - cos\ x - 2\ cos\ x + 2\ cos^3 x$

$= 4\ cos^3 x - 3\ cos\ x.$

19. $\boldsymbol{tan\,3x = \dfrac{3\,tan\,x - tan^3 x}{1 - 3 tan^2 x}}$.

અહીં, $tan\ 3x = tan\ (2x + x)$

$$= \frac{tan\ 2x + tan\ x}{1 - tan\ 2x\ tan\ x}$$

$$= \frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan x \cdot \tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

20. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ ... (1)

અને $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ ... (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$ ... (3)

અને $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$ ... (4) મળે.

વળી, $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ ... (5)

અને $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ ... (6)

(5) અને (6) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ ... (7)

અને $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$ ... (8) મળે.

ધારો કે, $x+y=\theta$ અને $x-y=\phi$. આથી,

$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ અને $y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

x અને y નાં મૂલ્યો (3), (4), (7) અને (8) માં મૂકતાં,

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

વળી, θ અને ϕ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોવાથી, આપણે θ ના બદલે x અને ϕ ના બદલે y મૂકી શકીએ. આથી,

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

નોંધ : 20 માં આપેલ નિત્યસમોના ભાગ સ્વરૂપે, આપણે નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરી શકીએ :

21. **(i)** $\mathbf{2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)}$

(ii) $\mathbf{-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)}$

(iii) $\mathbf{2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)}$

(iv) $\mathbf{2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)}$.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે,

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$$

ઉકેલ : અહીં,

$$\text{ડા. બા.} = 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \times 2 - 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times 1$$

$$= 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4 \times \frac{1}{2} = 1 = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 11 : $\sin 15°$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$$= \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

ઉદાહરણ 12 : $tan\ \frac{13\pi}{12}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $tan\ \frac{13\pi}{12} = tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)$

$$= tan\ \frac{\pi}{12}$$

$$= tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{tan\frac{\pi}{4} - tan\frac{\pi}{6}}{1 + tan\frac{\pi}{4}tan\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે,

$$\frac{sin(x+y)}{sin(x-y)} = \frac{tan\,x + tan\,y}{tan\,x - tan\,y}.$$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $= \frac{sin(x+y)}{sin(x-y)} = \frac{sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y}{sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y}$

અંશ તથા છેદને $cos\ x\ cos\ y$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{sin(x+y)}{sin(x-y)} = \frac{tan\,x + tan\,y}{tan\,x - tan\,y}.$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે,

$$tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x$$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $3x = 2x + x$

આથી, $tan\ 3x = tan\ (2x + x)$

$$\therefore\ tan\,3x = \frac{tan\,2x + tan\,x}{1 - tan\,2x\,tan\,x}$$

$$\therefore\ tan\ 3x - tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 2x + tan\ x$$

$$\therefore\ tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x = tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x$$

$$\therefore\ tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x.$$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$$

ઉકેલ : નિત્યસમ 20(i)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{ડા. બા.} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે, $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$

ઉકેલ : નિત્યસમ 20 (i) અને 20 (iv) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{ડા. બા.} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો કે, $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

ઉકેલ : અહીં, $\text{ડા. બા.} = \dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}$

$$= \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{-2\sin 3x\sin 2x}$$

$$= -\frac{\sin 3x(\cos 2x-1)}{\sin 3x\sin 2x}$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \tan x = \text{જ. બા.}$$

સ્વાધ્યાય 3.3

સાબિત કરો કે : (પ્રશ્ન 1 થી 4)

1. $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

3. $\cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6} + 3\tan^2 \frac{\pi}{6} = 6$

4. $2\sin^2 \frac{3\pi}{4} + 2\cos^2 \frac{\pi}{4} + 2\sec^2 \frac{\pi}{3} = 10$

5. કિંમત શોધો :

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

સાબિત કરો કે :

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \sin(x + y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$

10. $\sin(n + 1)x \sin(n + 2)x + \cos(n + 1)x \cos(n + 2)x = \cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

13. $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

14. $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

3.5 ત્રિકોણમિતિય સમીકરણો

ત્રિકોણમિતિય વિધેયોને સાંકળતી સમતાને *ત્રિકોણમિતિય સમીકરણ* કહેવાય. આ વિભાગમાં આવા સમીકરણના ઉકેલ શોધીશું. આપણે શીખી ગયાં છીએ કે, $\sin x$ અને $\cos x$ ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય છે અને $\tan x$ ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય છે. જો ત્રિકોણમિતિય સમીકરણનો ઉકેલ $0 \le x < 2\pi$ માં હોય તો તેને *મુખ્ય ઉકેલ (principal solution)* કહેવાય છે. ત્રિકોણમિતિય સમીકરણોના તમામ ઉકેલને સમાવતી પૂર્ણાંક n વાળી અભિવ્યક્તિને *ત્રિકોણમિતિય સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ* કહેવાય. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણને '**Z**' વડે દર્શાવીશું.

ત્રિકોણમિતિય સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા નીચેનાં ઉદાહરણો મદદરૂપ થશે :

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ના મુખ્ય ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

આથી, મુખ્ય ઉકેલ, $x = \dfrac{\pi}{3}$ અને $\dfrac{2\pi}{3}$ છે.

ઉદાહરણ 19 : સમીકરણ $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ના મુખ્ય ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. આથી, $\tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

અને, $\tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

આમ, $tan\frac{5\pi}{6} = tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

આથી, મુખ્ય ઉકેલ, $\frac{5\pi}{6}$ અને $\frac{11\pi}{6}$ છે.

હવે આપણે ત્રિકોણમિતિય સમીકરણોના વ્યાપક ઉકેલ શોધીશું.

આપણે આગળ જોઈ ગયા કે,

જો $sin x = 0$, તો $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ અને જો $cos x = 0$, તો $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ મળે છે.

હવે આપણે નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરીશું :

પ્રમેય 1 કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે,

$sin x = sin y$ તો $n \in \mathbf{Z}$ માટે $x = n\pi + (-1)^n y$.

સાબિતી : જો, $sin x = sin y$, તો

$sin x - sin y = 0$ અથવા $2cos\frac{x+y}{2} sin\frac{x-y}{2} = 0$

આથી, $cos\frac{x+y}{2} = 0$ અથવા $sin\frac{x-y}{2} = 0$

માટે, $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{x-y}{2} = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\pi - y$ અથવા $x = 2n\pi + y$, $n \in \mathbf{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ અથવા $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, $n \in \mathbf{Z}$.

આ બંને પરિણામો સંયુક્ત રીતે એકત્રિત કરતાં,

$n \in \mathbf{Z}$ માટે $x = n\pi + (-1)^n y$ તરીકે લખી શકાય.

પ્રમેય 2 : કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે, જો $cos x = cos y$ તો $x = 2n\pi \pm y$, $n \in \mathbf{Z}$.

સાબિતી : જો $cos x = cos y$, તો $cos x - cos y = 0$,

$\therefore -2 sin\frac{x+y}{2} sin\frac{x-y}{2} = 0$

આમ, $sin\frac{x+y}{2} = 0$ અથવા $sin\frac{x-y}{2} = 0$

માટે $\frac{x+y}{2} = n\pi$ અથવા $\frac{x-y}{2} = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$

$x = 2n\pi - y$ અથવા $x = 2n\pi + y$, $n \in \mathbf{Z}$

આમ, $x = 2n\pi \pm y$, $n \in \mathbf{Z}$

પ્રમેય 3 : સાબિત કરો કે જો x અને y, $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ના હોય, તો

$tan\ x = tan\ y$ હોય, તો $x = n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$

સાબિતી : જો $tan\ x = tan\ y$ હોય, તો $tan\ x - tan\ y = 0$

અથવા $$\frac{sin\ x\ cos\ y - cos\ x\ sin\ y}{cos\ x\ cos\ y} = 0$$

$\therefore\ sin\ (x - y) = 0$ (કેમ ?)

$\therefore\ x - y = n\pi$, અર્થાત્ $x = n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$.

ઉદાહરણ 20 : $sin\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $sin\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\ sin\frac{\pi}{3} = sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{4\pi}{3}$

આથી, $sin\ x = sin\frac{4\pi}{3}$ પરથી,

$$x = n\pi + (-1)^n\frac{4\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

> **નોંધ** $sin\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ માટે $\frac{4\pi}{3}$ એ x ની એક કિંમત છે. $sin\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ થાય તેવી બીજી કોઈક કિંમત પણ લઈ શકાય. આથી, મળતા ઉકેલ એક જ હશે પરંતુ દેખીતી રીતે ભિન્ન લાગી શકે.

ઉદાહરણ 21 : $cos\ x = \frac{1}{2}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $cos\ x = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

ઉદાહરણ 22 : $tan\ 2x = -cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $tan\ 2x = -\ cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

અથવા $tan\ 2x = tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

$$\therefore\ 2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$x = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

ઉદાહરણ 23 : $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

અથવા $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

અર્થાત્ $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

$\therefore \quad \sin 4x = 0$ અથવા $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sin 4x = 0$ અથવા $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad 4x = n\pi$ અથવા $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

$\therefore \quad x = \frac{n\pi}{4}$ અથવા $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$.

ઉદાહરણ 24 : $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

$\therefore \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

એટલે કે $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

આમ, $\sin x = -\frac{1}{2}$ અથવા $\sin x = 2$

પરંતુ, $\sin x = 2$ શક્ય નથી. (કેમ ?)

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}.$$

આથી, ઉકેલ $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$.

સ્વાધ્યાય 3.4

આપેલ સમીકરણના મુખ્ય અને વ્યાપક ઉકેલ શોધો : (પ્રશ્ન 1 થી 4)

1. $\tan x = \sqrt{3}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\operatorname{cosec} x = -2$

આપેલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલ શોધો :

5. $\cos 4x = \cos 2x$

6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

7. $\sin 2x + \cos x = 0$

8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$