

MATHEMATICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

*Candidates should attempt Question Nos. 1 and 5 which are compulsory, and any **three** of the remaining questions selecting at least **one** question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/notations carry their usual meanings, unless otherwise indicated.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section—A

1. Attempt any *five* of the following :

- (a) Find a Hermitian and a skew-Hermitian matrix each whose sum is the matrix

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & -1 \\ 1 & 2+3i & 2 \\ -i+1 & 4 & 5i \end{bmatrix}$$

12

- (b) Prove that the set V of the vectors (x_1, x_2, x_3, x_4) in $\mathbb{R}^4$ which satisfy the equations $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ and $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$, is a subspace of $\mathbb{R}^4$. What is the dimension of this subspace? Find one of its bases.

12

- (c) Suppose that f'' is continuous on $[1, 2]$ and that f has three zeroes in the interval $(1, 2)$. Show that f'' has at least one zero in the interval $(1, 2)$.

12

- (d) If f is the derivative of some function defined on $[a, b]$, prove that there exists a number $\eta \in [a, b]$, such that

$$\int_a^b f(t) dt = f(\eta)(b-a)$$

12

- (e) A line is drawn through a variable point on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ to meet two fixed lines $y = mx$, $z = c$ and $y = -mx$, $z = -c$. Find the locus of the line.

12

खण्ड—क

1. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच के उत्तर दीजिए :

- (क) एक हर्मिटी और एक विषम-हर्मिटी आव्यूह मालूम कीजिए, जिनका योग निम्नलिखित आव्यूह हो : 12

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & -1 \\ 1 & 2+3i & 2 \\ -i+1 & 4 & 5i \end{bmatrix}$$

- (ख) सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}^4$ में सदिशों (x_1, x_2, x_3, x_4) का ऐसा सेट V , जो समीकरणों $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ और $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ को संतुष्ट करता हो, $\mathbb{R}^4$ की एक उपसमष्टि है। इस उपसमष्टि का क्या आमाप है? इसका एक आधार ज्ञात कीजिए। 12

- (ग) मान लीजिए कि $[1, 2]$ पर f'' संतत है और अंतराल $(1, 2)$ में f के तीन शून्य हैं। दर्शाइए कि अंतराल $(1, 2)$ में f'' का कम-से-कम एक शून्य है। 12

- (घ) यदि $[a, b]$ पर परिभाषित किसी फलन का अवकलज f है, तो साबित कीजिए कि एक ऐसी संख्या $\eta \in [a, b]$ मौजूद है, ताकि

$$\int_a^b f(t) dt = f(\eta)(b-a) \quad \text{12}$$

- (ङ) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ पर एक परिवर्ती बिन्दु में से एक रेखा दो नियत रेखाओं $y = mx$, $z = c$ और $y = -mx$, $z = -c$ को मिलाने के लिए खींची जाती है। उस रेखा के बिन्दुपथ को ज्ञात कीजिए। 12

- (f) Find the equation of the sphere having its centre on the plane $4x - 5y - z = 3$, and passing through the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 3y + 4z + 8 = 0$$

$$3x + 4y - 5z + 3 = 0 \quad 12$$

2. (a) Let $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ and $\mathcal{B}' = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (-1, 1, 1)\}$ be the two ordered bases of $\mathbb{R}^3$. Then find a matrix representing the linear transformation $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ which transforms $\mathcal{B}$ into $\mathcal{B}'$. Use this matrix representation to find $T(\bar{x})$, where $\bar{x} = (2, 3, 1)$. 20
- (b) If $x = 3 \pm 0.01$ and $y = 4 \pm 0.01$, with approximately what accuracy can you calculate the polar coordinates r and θ of the point $P(x, y)$? Express your estimates as percentage changes of the values that r and θ have at the point $(3, 4)$. 20
- (c) Find a 2×2 real matrix A which is both orthogonal and skew-symmetric. Can there exist a 3×3 real matrix which is both orthogonal and skew-symmetric? Justify your answer. 20
3. (a) Let $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by
- $$L((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_3 + x_4 - x_1 - x_2, x_3 - x_2, x_4 - x_1)$$
- Then find the rank and nullity of L . Also, determine null space and range space of L . 20

(च) एक ऐसे गोलक का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र समतल $4x - 5y - z = 3$ पर हो और जो वृत्त

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 3y + 4z + 8 = 0$$

$$3x + 4y - 5z + 3 = 0$$

में से गुजर रहा हो।

12

2. (क) लीजिए $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ और $\mathcal{B}' = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (-1, 1, 1)\}$ दो क्रमित आधार हैं $\mathbb{R}^3$ के। तब एक आव्यूह को मालूम कीजिए, जो एक ऐसे रैखिक रूपांतरण $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ का निरूपण करता हो जो $\mathcal{B}$ को $\mathcal{B}'$ में रूपांतरित कर दे। इस आव्यूह निरूपण का $T(\bar{x})$ को ज्ञात करने के लिए इस्तेमाल कीजिए, जहाँ $\bar{x} = (2, 3, 1)$ हो।

20

(ख) यदि $x = 3 \pm 0.01$ और $y = 4 \pm 0.01$ हो, तो आप बिन्दु $P(x, y)$ के ध्रुवीय निर्देशांकों r और θ का लगभग कितनी परिशुद्धता के साथ परिकलन कर सकते हैं? आप अपने प्राक्कलनों को उन मानों के प्रतिशतता परिवर्तनों के रूप में व्यक्त कीजिए, जो बिन्दु $(3, 4)$ पर r और θ के हों।

20

(ग) एक ऐसे 2×2 वास्तविक आव्यूह A को मालूम कीजिए, जो लाम्बिक और विषम-सममित दोनों हो। क्या कोई 3×3 वास्तविक आव्यूह भी हो सकता है, जो लाम्बिक और विषम-सममित दोनों हो? अपने उत्तर के पक्ष में दलीलें पेश कीजिए।

20

3. (क) लीजिए $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ एक ऐसा रैखिक रूपांतरण है, जो

$$L((x_1, x_2, x_3, x_4))$$

$$= (x_3 + x_4 - x_1 - x_2, x_3 - x_2, x_4 - x_1)$$

से परिभाषित हो। तब L की कोटि और शून्यता को मालूम कीजिए। साथ ही L की शून्य समष्टि और परिसर समष्टि का भी निर्धारण कीजिए।

20

(b) Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined as

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Is f continuous at $(0, 0)$? Compute partial derivatives of f at any point (x, y) , if exist.

20

(c) A space probe in the shape of the ellipsoid $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ enters the earth's atmosphere and its surface begins to heat. After one hour, the temperature at the point (x, y, z) on the probe surface is given by

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

Find the hottest point on the probe surface.

20

4. (a) Prove that the set V of all 3×3 real symmetric matrices forms a linear subspace of the space of all 3×3 real matrices. What is the dimension of this subspace? Find at least one of the bases for V .

20

(b) Evaluate

$$I = \iint_S x \, dy \, dz + dz \, dx + xz^2 \, dx \, dy$$

where S is the outer side of the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in the first octant.

20

(ख) लीजिए $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ निम्नलिखित के रूप में परिभाषित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

क्या $(0, 0)$ पर f संतत है? किसी बिन्दु (x, y) पर f के आंशिक अवकलजों का परिकलन कीजिए, यदि उनका अस्तित्व हों।

20

(ग) दीर्घवृत्तज $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ की आकृति का एक अंतरिक्ष अन्वेषण-यान पृथ्वी के वायुमंडल में प्रवेश करता है और उसका पृष्ठ गर्म होने लगता है। एक घंटे के बाद, अन्वेषण-यान के पृष्ठ पर बिन्दु (x, y, z) पर ताप

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

द्वारा दत्त है। अन्वेषण-यान के पृष्ठ पर सबसे ज्यादा गर्म बिन्दु ज्ञात कीजिए।

20

4. (क) सिद्ध कीजिए कि सभी 3×3 वास्तविक सममित आव्यूहों के सेट V , सभी 3×3 वास्तविक आव्यूहों के समष्टि का रैखिक उपसमष्टि बनाते हैं। इस उपसमष्टि का आमाप क्या है? V के लिए कम-से-कम एक आधार ज्ञात कीजिए।

20

(ख) $I = \iiint_S x \, dy \, dz + dz \, dx + xz^2 \, dx \, dy$ का मूल्यांकन

कीजिए, जहाँ S पहले अष्टांशक में गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के भाग का बाहरी पार्श्व हो।

20

- (c) Prove that the normals from the point (α, β, γ) to the paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ lie on the cone

$$\frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{y-\beta} + \frac{a^2 - b^2}{z-\gamma} = 0 \quad 20$$

Section—B

5. Attempt any *five* of the following :

- (a) A body is describing an ellipse of eccentricity e under the action of a central force directed towards a focus and when at the nearer apse, the centre of force is transferred to the other focus. Find the eccentricity of the new orbit in terms of the eccentricity of the original orbit. 12

- (b) Find the Wronskian of the set of functions

$$\{3x^3, |3x^3|\}$$

on the interval $[-1, 1]$ and determine whether the set is linearly dependent on $[-1, 1]$. 12

- (c) A uniform rod AB is movable about a hinge at A and rests with one end in contact with a smooth vertical wall. If the rod is inclined at an angle of 30° with the horizontal, find the reaction at the hinge in magnitude and direction. 12

(ग) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (α, β, γ) से परवलयज
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ पर अभिलम्ब, शंकु

$$\frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{y-\beta} + \frac{a^2-b^2}{z-\gamma} = 0$$

पर स्थित होते हैं।

20

खण्ड—ख

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच के उत्तर दीजिए :

(क) कोई पिंड किसी नाभि की ओर दिशित एक केन्द्रीय बल की क्रिया के अधीन उत्केन्द्रता e का एक दीर्घवृत्त बना रहा है और जब वह पास की स्तब्धिका पर होता है, तब बल का केन्द्र अन्य नाभि पर स्थानांतरित हो जाता है। नई कक्षा की उत्केन्द्रता को मूल कक्षा की उत्केन्द्रता के रूप में ज्ञात कीजिए।

12

(ख) अंतराल $[-1, 1]$ पर फलनों के सेट $\{3x^3, |3x^3|\}$ का रैस्कीय ज्ञात कीजिए और निर्धारण कीजिए कि क्या सेट, $[-1, 1]$ पर रैखिकतः निर्भर है अथवा नहीं है।

12

(ग) एक एकसमान छड़ AB , बिन्दु A पर हिंज के इर्दगिर्द गतिशील है और उसका एक सिरा एक चिकने ऊर्ध्वाधर दीवार के सम्पर्क में टिका हुआ है। यदि छड़ क्षितिज के साथ 30° के कोण पर अभिनत हो, तो हिंज पर प्रतिक्रिया को परिमाण और दिशा में ज्ञात कीजिए।

12

- (d) A shot fired with a velocity V at an elevation α strikes a point P in a horizontal plane through the point of projection. If the point P is receding from the gun with velocity v , show that the elevation must be changed to θ , where

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha + \frac{2v}{V} \sin \theta \quad 12$$

- (e) Show that

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

$$\text{where } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad 12$$

- (f) Find the directional derivative of—

(i) $4xz^3 - 3x^2y^2z^2$ at $(2, -1, 2)$ along z -axis;

(ii) $x^2yz + 4xz^2$ at $(1, -2, 1)$ in the direction of $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$. 6+6

6. (a) Find the differential equation of the family of circles in the xy -plane passing through $(-1, 1)$ and $(1, 1)$. 20

- (b) Find the inverse Laplace transform of

$$F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s+5}\right) \quad 20$$

- (c) Solve : 20

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x-y)}{3xy^2 - x^2y - 4y^3}, \quad y(0) = 1$$

- (घ) वेग V के साथ और उन्नतांश α पर दागी गई गोली, प्रक्षेपण बिन्दु के बीच से गुजरती हुई क्षैतिज समतल में बिन्दु P पर वार करती है। यदि बिन्दु P बन्दूक से वेग v के साथ दूर होता जा रहा हो, तो दर्शाइए कि उन्नतांश को θ में परिवर्तित करना आवश्यक होगा, जहाँ

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha + \frac{2v}{V} \sin \theta \quad 12$$

- (ङ) दर्शाइए कि

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

$$\text{जहाँ } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad 12$$

- (च) निम्नलिखित के दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए : 6+6

(i) z -अक्ष के साथ-साथ $(2, -1, 2)$ पर $4xz^3 - 3x^2y^2z^2$ का

(ii) $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिशा में $(1, -2, 1)$ पर $x^2yz + 4xz^2$ का

6. (क) $(-1, 1)$ और $(1, 1)$ में से गुजरते हुए xy -समतल में वृत्त-कुल के अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए। 20

(ख) $F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s+5}\right)$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए। 20

- (ग) हल कीजिए : 20

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x-y)}{3xy^2 - x^2y - 4y^3}, \quad y(0) = 1$$

7. (a) One end of a light elastic string of natural length l and modulus of elasticity $2mg$ is attached to a fixed point O and the other end to a particle of mass m . The particle initially held at rest at O is let fall. Find the greatest extension of the string during the motion and show that the particle will reach O again after a time

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2) \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad 20$$

- (b) A particle is projected with velocity V from the cusp of a smooth inverted cycloid down the arc. Show that the time of reaching the vertex is

$$2\sqrt{\frac{a}{g}} \cot^{-1} \left(\frac{V}{2\sqrt{ag}} \right)$$

where a is the radius of the generating circle. 10

- (c) On a rigid body, the forces $10(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ N, $5(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ N and $6(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ N are acting at points with position vectors $\hat{i} - \hat{j}$, $2\hat{i} + 5\hat{k}$ and $4\hat{i} - \hat{k}$ respectively. Reduce this system to a single force $\vec{R}$ acting at the point $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ together with a couple $\vec{G}$ whose axis passes through this point. Does the point $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ lie on the central axis? 15

7. (क) प्रकृत लम्बाई l और प्रत्यास्थता गुणांक $2mg$ वाली एक हल्की प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा नियत बिन्दु O पर जुड़ा हुआ है और दूसरा सिरा द्रव्यमान m के एक कण के साथ जुड़ा है। शुरु में O पर विरामावस्था में रखे हुए कण को गिरने दिया जाता है। गति के दौरान डोरी का अधिकतम विस्तार ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि कण, समय

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2) \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

के बाद, फिर से O पर पहुँच जाएगा।

20

- (ख) एक मसृण प्रतिलोमित चक्रज के कस्प से एक कण को वेग V के साथ चाप के नीचे की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। दर्शाइए कि शीर्ष तक पहुँचने का समय

$$2\sqrt{\frac{a}{g}} \cot^{-1} \left(\frac{V}{2\sqrt{ag}} \right)$$

होगा, जहाँ a जनक वृत्त की त्रिज्या है।

10

- (ग) एक दृढ़ पिंड पर उन बिन्दुओं पर बल $10(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ N, $5(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ N और $6(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ N कार्य कर रहे हैं, जिनकी स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} - \hat{j}$, $2\hat{i} + 5\hat{k}$ और $4\hat{i} - \hat{k}$ हैं। इस निकाय को ऐसे एकल बल $\vec{R}$ पर समानयन कीजिए, जो बिन्दु $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ पर युग्म $\vec{G}$ के साथ कार्य कर रहा हो, जिसका अक्ष इस बिन्दु के बीच से गुजरता हो। क्या बिन्दु $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ केन्द्रीय अक्ष पर अवस्थित है?

15

- (d) Find the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius a so as to be in contact with three-fourth of the circumference of the pulley.

15

8. (a) Find the work done in moving the particle once round the ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 0$ under the field of force given by

$$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$

20

- (b) Using divergence theorem, evaluate

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

where $\vec{A} = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

20

- (c) Find the value of

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

taken over the upper portion of the surface $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ and the bounding curve lies in the plane $z = 0$, when

$$\vec{F} = (y^2 + z^2 - x^2)\hat{i} + (z^2 + x^2 - y^2)\hat{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\hat{k}$$

20

- (घ) एक ऐसे सिराहीन चेन की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो त्रिज्या a की एक वृत्तीय धिरनी पर इस प्रकार लटकी होगी कि वह धिरनी की परिधि के तीन-चौथाई के सम्पर्क में हो। 15

8. (क) $\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$
द्वारा प्रदत्त बल-क्षेत्र के अधीन दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 0$ के चारों ओर कण के एक बार घूमने में किए गए कार्य को मालूम कीजिए। 20

- (ख) अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ का मान निकालिए, जहाँ $\vec{A} = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ हो और S गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का पृष्ठ हो। 20

- (ग) पृष्ठ $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ के ऊपरी भाग पर लिए गए और सीमक वक्र के समतल $z = 0$ में स्थित होने पर $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ का मान ज्ञात कीजिए, जब
 $\vec{F} = (y^2 + z^2 - x^2)\hat{i} + (z^2 + x^2 - y^2)\hat{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\hat{k}$ 20

★ ★ ★

गणित

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेगा।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अन्त में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीक/संकेत प्रचलित अर्थों में प्रयुक्त हैं, अन्यथा निर्दिष्ट हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.