પ્રકરણ 4

ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત

4.1 વિહંગાવલોકન

ધન પૂર્ણાંક n ના સ્વરૂપમાં રચવામાં આવતાં ગાણિતિક વિધાનોને સાબિત કરવા માટે ગાણિતિક અનુમાન એ એક ઉપયોગી પ્રયુક્તિ છે.

4.1.1 ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત :

ધારો કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ સંબંધિત આપેલ વિધાન P(n) માટે,

(i) વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય હોય એટલે કે **P**(1) સત્ય હોય (અથવા કોઈ નિશ્ચિત પ્રાકૃતિક સંખ્યા માટે સત્ય હોય) અને

(ii) જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય (જ્યાં k કોઈ વિશિષ્ટ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે), તો વિધાન $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય હોય, એટલે કે P(k) ની સત્યાર્થતા પરથી P(k + 1) ની સત્યાર્થતા ફલિત થાય, તો P(n) એ તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સત્ય છે.

4.2 ઉદાહરણો :

ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 થી 5 માં આપેલાં વિધાનોને $n \in \mathbf{N}$ માટે, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી સાબિત કરો.

ઉદાહરણ 1 : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

ઉકેલ : આપેલ વિધાનને P(n) દ્વારા દર્શાવીએ એટલે કે, P(n) : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbf{N}$.

નોંધીશું કે, P(1) સત્ય છે, કારણ કે P(1) : $1 = 1^2$

ધારો કે કોઈક ધન પૂર્ણાંક k ($k \in \mathbf{N}$) માટે P(k) સત્ય છે, એટલે કે,

$$P(k) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

હવે આપણે $n = k + 1$ લેતાં P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું. હવે આપણી પાસે,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)$$

$$= k^2 + (2k + 1) \qquad \text{(શા માટે ?)}$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

આમ P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, તમામ $n \in \mathbf{N}$ માટે વિધાન P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 2 : $\sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, n \ge 2; n \in N$

ઉકેલ : આપેલ વિધાનને P(n) દ્વારા દર્શાવીએ તો,

$$P(n): \sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, n \ge 2; n \in N$$

આપણે જોઈશું કે, P(2): $\sum_{t=1}^{2-1} t(t+1) = \sum_{t=1}^{1} t(t+1) = 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{2 \cdot (2-1)(2+1)}{3}$

આથી, P(n), $n = 2$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે, P(n), $n = k \in$ **N** માટે સત્ય છે. $n \ge 2$

એટલે કે, $$P(k): \sum_{t=1}^{k-1} t(t+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}, k \ge 2$$

હવે, P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે.

આપણી પાસે, $$\sum_{t=1}^{(k+1-1)} t(t+1) = \sum_{t=1}^{k} t(t+1)$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} t(t+1) + k(k+1)$$

$$= \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1)$$

$$= k(k+1)\left[\frac{k-1+3}{3}\right]$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)-1))((k+1)+1)}{3}$$

આમ P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, વિધાન P(n), પ્રત્યેક $n \ge 2; n \in$ N માટે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \ge 2; n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વિધાનને P(n) દ્વારા દર્શાવીએ તો, P(n) : $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \ge 2; n \in N$

આપણે જોઈશું કે, P(2) સત્ય છે, કારણ કે $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \times 2}$

ધારો કે, P(n) એ કોઈક $k \in$ **N** માટે સત્ય છે, એટલે કે,

$$P(k): \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}, \qquad k \ge 2$$

હવે, P (k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. હવે, n = k + 1 લેતાં,

$$\text{ડા.બા.} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k^2+2k}{2k(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} \qquad \text{(P(k) પરથી)}$$

આમ, P(k) સત્ય હોય, ત્યારે P (k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \ge 2$; $n \in$ N માટે વિધાન P(n) સત્ય છે. $n \in$ N

ઉદાહરણ 4 : $2^{2n} - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : આપેલ વિધાનને P(n) દ્વારા દર્શાવીએ, તો P(n) : $2^{2n} - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

આપણે જોઈ શકીએ કે, P(1) સત્ય છે. કારણ કે, $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3\cdot1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે P(n) એ કોઈક $k \in$ N, માટે સત્ય છે એટલે કે P(k): $2^{2k} - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

એટલે કે, $2^{2k} - 1 = 3q$, જ્યાં $q \in \mathbf{N}$

હવે, P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. આથી, $n = k + 1$ લેતાં,

$$\begin{aligned} P(k+1) : 2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 &= 2^{2k}\cdot 2^2 - 1 \\ &= 2^{2k}\cdot 4 - 1 \\ &= 3\cdot 2^{2k} + (2^{2k} - 1) \\ &= 3\cdot 2^{2k} + 3q \\ &= 3\,(2^{2k} + q) = 3m, \text{ જ્યાં } m \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

આમ P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : $2n + 1 < 2^n$, $n \ge 3$; $n \in$ N સાબિત કરો.

ઉકેલ : આપેલ વિધાન P(n) છે એટલે કે, P(n) : $(2n + 1) < 2^n$, $n \ge 3$; $n \in$ N

આપણે જોઈશું કે, P(3) સત્ય છે, કારણ કે $2\cdot3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$

ધારો કે કોઈક k માટે, P(k) સત્ય છે એટલે કે $2k + 1 < 2^k$ અને $k \ge 3$

હવે, P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. આથી, આપણે $2(k + 1) + 1 < 2^{k+1}$ છે તેમ સાબિત કરવું પડે. આપણી પાસે, $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$

$$= 2k + 1 + 2 < 2^k + 2$$

$$< 2^k \cdot 2 = 2^{k+1} \text{ કારણ કે } k \ge 3$$

આમ, P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \ge 3$; $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 6 : શ્રેણી $a_1, a_2, a_3,...$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$a_1 = 2, a_n = 5\, a_{n-1}, n \geq 2; n \in$ N.

(i) શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદો લખો.

(ii) ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે શ્રેણીનાં તમામ પદો સૂત્ર $a_n = 2{\cdot}5^{n-1}$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉકેલ : (i) આપણી પાસે, $a_1 = 2$

$$a_2 = 5a_{2-1} = 5a_1 = 5{\cdot}2 = 10$$
$$a_3 = 5a_{3-1} = 5a_2 = 5{\cdot}10 = 50$$
$$a_4 = 5a_{4-1} = 5a_3 = 5{\cdot}50 = 250$$

(ii) ધારો કે, આપેલ વિધાન P(n) છે એટલે કે,

P(n) : $a_n = 2{\cdot}5^{\,n-1}$

આપણે જોઈ શકીએ કે, P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, કોઈક $k \in$ N માટે, P(k) સત્ય છે એટલે કે, P(k) : $a_k = 2{\cdot}5^{k-1}$.

હવે, P (k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. હવે આપણી પાસે,

$$\begin{aligned} P(k+1) : a_{k+1} &= 5{\cdot}a_k \\ &= 5 \cdot (2{\cdot}5^{k-1}) \\ &= 2{\cdot}5^{k} \\ &= 2{\cdot}5^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

આમ, P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, $\forall\, n \in$ N P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 7 : તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ c, a_1 અને a_2 માટે બીજગણિતના વિભાજનના નિયમ $c\,(a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2$ તથા ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી, જો $c, a_1, a_2, ..., a_n$ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો $c\,(a_1 + a_2 + ... + a_n) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n$, $\forall\, n \in$ N, $n \geq 2$, સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વિધાનને P(n) વડે દર્શાવીએ, તો,

P(n) : $c\,(a_1 + a_2 + ... + a_n) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n$, $n \geq 2$, $n \in$ **N** જ્યાં $c, a_1, a_2, ... a_n \in$ **R**.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, P(2) સત્ય છે કારણ કે, $c(a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2$ **(વિભાજનના નિયમ પરથી)**

ધારો કે કોઈક $k \geq 2$, $k \in$ **N** માટે P(k) સત્ય છે એટલે કે,

$$P(k) : c\,(a_1 + a_2 + ... + a_k) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_k$$

હવે, P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. આપણી પાસે,

$$\begin{aligned} P(k+1) : c\,(a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}) \\ &= c\,((a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1}) \\ &= c\,(a_1 + a_2 + ... + a_k) + ca_{k+1} \\ &= ca_1 + ca_2 + ... + ca_k + ca_{k+1} \end{aligned}$$

(વિભાજનના નિયમ પરથી)

આમ P (k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ **N**, $n \geq 2$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 8 : ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે,

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)\beta)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે P (n) : $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)\beta)$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)},\ n\in\mathrm{N}$$

આપણે જોઈશું કે, P (1) સત્ય છે, કારણ કે

$$\mathrm{P}(1):\sin\alpha=\frac{\sin(\alpha+0)\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$ સત્ય છે જ.

ધારો કે, કોઈક $k\in\mathrm{N}$ માટે, P(n) સત્ય છે એટલે કે,

P (k) : $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+(k-1)\beta)$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

હવે, P (k + 1) સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. આથી, n = k + 1 માટે

P (k + 1), : $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+(k-1)\beta)+\sin(\alpha+k\beta)$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}+\sin(\alpha+k\beta)$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\frac{k\beta}{2}+\sin(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+k\beta-\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\alpha+k\beta-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+k\beta+\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta + \beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\,(k+1)\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

આમ, P (k) સત્ય હોય ત્યારે P (k + 1) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $\forall\, n \in \mathrm{N}$, P($n$) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 9 : તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી,

$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : આપેલ વિધાનને P(n) દ્વારા દર્શાવીએ, તો

P(n) : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1;\ \forall\, n \in \mathrm{N}$.

P (1) સત્ય છે કારણ કે, $P(1) = 1 \times 1! = 1 = 2-1 = 2!-1$

ધારો કે, કોઈક $k \in \mathrm{N}$ માટે, P(n) સત્ય છે એટલે કે,

P(k) : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + k \times k! = (k + 1)! - 1$

હવે, P (k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે. $n = k + 1$ લેતાં

ડા.બા. : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + k \times k! + (k + 1) \times (k + 1)!$

$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)! \times (k + 1)$

$= (k + 1 + 1)\ (k + 1)! - 1$

$= (k + 2)\ (k + 1)! - 1$

$= (k + 2)! - 1$

આમ, P (k) સત્ય હોય ત્યારે P (k + 1) સત્ય છે. આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in \mathrm{N}$ માટે, P (n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી બતાવો કે, આપેલ શ્રેણીનાં n પદોના સરવાળા

$1^2 + 2 \times 2^2 + 3^2 + 2 \times 4^2 + 5^2 + 2 \times 6^2 + ...$ ને S_n દ્વારા દર્શાવાય, તો

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)^2}{2}, & n \text{ યુગ્મ} \\ \dfrac{n^2(n+1)}{2}, & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$$

ઉકેલ : અહીં $P(n)$: $S_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)^2}{2}, & n \text{ યુગ્મ} \\ \dfrac{n^2(n+1)}{2}, & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

વળી, નોંધીએ કે, શ્રેણીનું કોઈ પણ પદ T_n એ $T_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ અયુગ્મ} \\ 2n^2, & n \text{ યુગ્મ} \end{cases}$ છે.

આપણે જોઈ શકીએ કે, $P(1)$ સત્ય છે કારણ કે, $P(1) : S_1 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1^2 \cdot (1+1)}{2}$

ધારો કે કોઈક $k \in N$ માટે $P(k)$ સત્ય છે એટલે કે,

વિકલ્પ 1 k અયુગ્મ છે, તેથી $(k+1)$ યુગ્મ છે. હવે, $n = k + 1$ લેતાં,

$P(k+1) : S_{k+1} = 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + k^2 + 2 \times (k+1)^2$

$$= \frac{k^2(k+1)}{2} + 2 \times (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{2}[k^2 + 4(k+1)] \qquad \left(k \text{ અયુગ્મ હોય, તો } 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + k^2 = k^2\frac{(k+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2}[k^2 + 4k + 4]$$

$$= \frac{k+1}{2}(k+2)^2 = (k+1)\frac{[(k+1)+1]^2}{2}$$

આથી, k અયુગ્મ હોય તે કિસ્સામાં, જ્યારે $P(k)$ સત્ય હોય ત્યારે $P(k + 1)$ પણ સત્ય છે.

વિકલ્પ 2 ધારો કે k યુગ્મ છે, તેથી $(k + 1)$ અયુગ્મ છે.

હવે, $P(k+1) : 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + 2 \cdot k^2 + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)^2}{2} + (k+1)^2 \qquad \left(k \text{ યુગ્મ હોય, તો } 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + 2k^2 = k\frac{(k+1)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)}{2} = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)}{2}$$

આથી, k યુગ્મ હોય તેવા કિસ્સામાં, જ્યારે P (k) સત્ય હોય ત્યારે P (k + 1) પણ સત્ય હોય. આથી, કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે, જ્યારે P (k) સત્ય હોય ત્યારે P (k + 1) પણ સત્ય છે.

આથી, તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે P (n) સત્ય છે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 11 અને 12 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

ઉદાહરણ 11 : ધારો કે P(n) : "$2^n < (1 \times 2 \times 3 \times ... \times n)$" હોય, તો P ($n$) સત્ય બને તે માટે, નાનામાં નાનો ધન પૂર્ણાંક .... હોય.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : P (1) : $2 < 1$ અસત્ય છે

P (2) : $2^2 < 1 \times 2$ અસત્ય છે.

P (3) : $2^3 < 1 \times 2 \times 3$ અસત્ય છે.

પરંતુ P (4) : $2^4 < 1 \times 2 \times 3 \times 4$ સત્ય છે.

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

ઉદાહરણ 12 : એક વિદ્યાર્થીને ગાણિતિક અનુમાન દ્વારા વિધાન P (n) સત્ય છે તેમ સાબિત કરવાનું કહેવામાં આવ્યું. તેણે તમામ $k>5$, $k \in$ N માટે, જ્યારે P (k) સત્ય હોય ત્યારે P (k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કર્યું. વળી, P (5) પણ સત્ય છે. આને આધારે તે, વિધાન P (n) .... માટે સત્ય છે તેમ નક્કી કરી શક્યો.

(A) તમામ $n \in \mathbf{N}$ (B) તમામ $n > 5$

(C) તમામ $n \geq 5$ (D) તમામ $n < 5$

ઉકેલ : P(5) સત્ય છે અને જ્યારે વિધાન $k \geq$ **5** માટે સત્ય બને તે રીતે P (k) સત્ય છે ત્યારે P(k + 1) પણ સત્ય છે. સાચો વિકલ્પ (C) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 13 અને 14 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 13 : જો P (n) : "$2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ એ λ **> 5** વડે વિભાજ્ય છે. $n \in \mathbf{N}$" સત્ય હોય, તો λ ની કિંમત .... હોઈ શકે.

ઉકેલ : હવે, $n = 1$ માટે

$2 \cdot 4^{2+1} + 3^{3+1} = 2 \cdot 4^3 + 3^4 = 2 \cdot 64 + 81 = 128 + 81 = 209$,

$n = 2$ માટે, $2 \cdot 4^5 + 3^7 = 8 \cdot 256 + 2187 = 2048 + 2187 = 4235$

નોંધીશું કે, 209 અને 4235 નો ગુ.સા.અ. 11 છે.

આથી, $2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ બંને 11 વડે વિભાજ્ય છે. આથી, λ ની કિંમત 11 છે. જુઓ કે 209 = 1419

ઉદાહરણ 14 : જો P (n) : "$49^n + 16^n + k$ એ 64 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in \mathbf{N}$" સત્ય હોય, તો k ની ન્યૂનતમ ઋણ પૂર્ણાંક કિંમત .... હોય.

ઉકેલ : $n = 1$ માટે, P(1) : 65 + k એ 64 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, k ની ન્યૂનતમ કિંમત – 1 હોય તો, 65 – 1 = 64 મળે જે 64 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ 15 : (ગાણિતિક અનુમાન દ્વારા) વિધાન P(n): $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ માટે, નીચે આપેલ સાબિતી સત્ય છે કે અસત્ય તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી, $n = 1$ માટે, P(n) સત્ય છે.

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$$

વળી, કોઈ $k \geq 1$ માટે, ધારો કે $k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

હવે, આપણે સાબિત કરીએ કે, $(k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

ઉકેલ : અસત્ય

કારણ કે, પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ પર નિર્ધારિત સોપાનમાં તાર્કિક ઉત્કલ્પના અને શું સાબિત કરવું છે તે બંને અસત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. પ્રત્યેક $n \geq 4$ માટે, વિધાન P(n) સત્ય હોય પરંતુ P(1), P(2) અને P(3) અસત્ય હોય તેવું એક ઉદાહરણ આપો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.
2. પ્રત્યેક $n \in$ N માટે, વિધાન P(n) સત્ય હોય તેવું એક ઉદાહરણ આપો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

નીચે આપેલાં ક્રમાંક 3 થી 16 વાળા પ્રત્યેક વિધાનને ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત દ્વારા સાબિત કરો.

3. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $4^n - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.
4. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $2^{3n} - 1$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.
5. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $n^3 - 7n + 3$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.
6. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $3^{2n} - 1$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.
7. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $7^n - 2^n$ એ 5 વડે વિભાજ્ય છે.
8. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $x^n - y^n$ એ $x - y$ વડે વિભાજ્ય છે, જ્યાં x અને y પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે તથા $x \neq y$.
9. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n \geq 2$ માટે, $n^3 - n$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.
10. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $n(n^2 + 5)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.
11. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n \geq 5$ માટે, $n^2 < 2^n$.
12. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $2n < (n+2)!$
13. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n \geq 2$ માટે, $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
14. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$.
15. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
16. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

નીચેના પ્રશ્નો માટે, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરો :

17. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $k \geq 2$ માટે, કોઈ એક શ્રેણી $a_1, a_2, a_3 \ldots$ વ્યાખ્યાયિત છે, જ્યાં $a_1 = 3$ અને $a_k = 7a_{k-1}$ છે, પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે સાબિત કરો કે, $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$.
18. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે, ધારો કે $b_0 = 5$ અને $b_k = 4 + b_{k-1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત શ્રેણી $b_0, b_1, b_2 \ldots$ હોય, તો પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત દ્વારા $b_n = 5 + 4n$ સાબિત કરો.

19. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $k \geq 2$ માટે, ધારો કે $d_1 = 2$ અને $d_k = \frac{d_{k-1}}{k}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત શ્રેણી $d_1, d_2, d_3, \ldots$ હોય, તો સાબિત કરો કે $d_n = \frac{2}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

20. સાબિત કરો : $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots + \cos(\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}; \ \forall n \in \mathbf{N}$$

21. સાબિત કરો : $\cos\theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \ldots \cos 2^{n-1}\theta = \frac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin\theta}$, $\forall n \in \mathbf{N}$

22. સાબિત કરો : $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$

23. $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે તેમ સાબિત કરો.

24. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n > 1$ માટે, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ સાબિત કરો.

25. સાબિત કરો : n ભિન્ન ઘટકોને સમાવતા ગણના ઉપગણોની સંખ્યા 2^n છે. $\forall n \in \mathbf{N}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

પરિણામી વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 26 થી 29 વાળા વિધાનોના જવાબ આપો. :

26. જો $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + k$ એ 9 વડે વિભાજ્ય છે તેમ $\forall n \in \mathbf{N}$ સત્ય હોય, તો આ ગુણધર્મવાળી ન્યૂનતમ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા k .... હોય.

(A) 5 (B) 3 (C) 7 (D) 1

27. $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ એ .... વડે વિભાજ્ય છે, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(A) 19 (B) 17 (C) 23 (D) 25

28. જો $x^n - 1$ એ $x - k$ વડે વિભાજ્ય હોય, તો k ની ન્યૂનતમ ધન પૂર્ણાંક કિંમત .... હોય.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

29. જો $P(n) : 2n < n!$, $n \in \mathbf{N}$, હોય તો $P(n)$ એ તમામ $n \geq$ .... માટે સત્ય હોય.

નીચેનું વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા ઉત્તરનું સમર્થન કરો :

30. $P(n)$ એ કોઈ પ્રાકૃતિક ચલનું વિધાન હોય અને કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે, જો $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ હોય, તો $P(n)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ સત્ય છે.