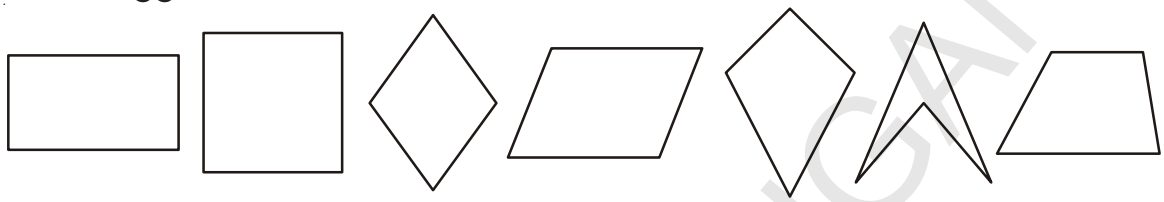
चतुर्भुज (QUADRILATERALS) 12

कक्षा **छठवीं** में हमने चतुर्भुज की परिभाषा पढ़ी थी इस अध्याय में हम चतुर्भुज के प्रकार के **बारे** में विस्तार से पढ़ेंगे

12.0 चतुर्भुज

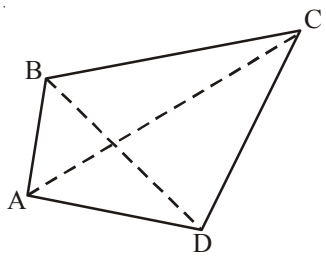


इन चित्रों में क्या समानताएँ हैं?

संकेत :- भुजाओं की संख्या, कोण, शीर्ष, '**बंद** संवृत आकृतियाँ' हैं या 'खुली आकृतियाँ'

चतुर्भुज एक संवृत (**बंद**) आकृति है जिसकी चार भुजाएँ चार कोण,चार शीर्ष होते हैं।

चतुर्भुज ABCD में



(i) चार भुजाँए $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ है।

(ii) A, B, C और D चार **शीर्ष** है।

(iii) ∠ABC, ∠BCD, ∠CDA और ∠DAC ये चार **कोण** है ।

(iv) चतुर्भुज में विपरीत शीर्षों को जोडने वाले रेख़ा खण्ड चतुर्भुज के **कर्ण** कहलाते है। $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ चतुर्भुज ABCD **कर्ण** है।

(v) चतुर्भुज के **संलग्न** शीर्षो वाली भुजाएँ चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ कहलाती है। चतुर्भुजABCD, $\overline{AB}$ में $\overline{BC}$ और B **आसन्न भुजाएँ** हैं।

(vi) *चतुर्भुज के दो कोण* जो *सामान्य* भुजा पर हैं **संलग्न कोण** कहलाते हैं।अर्थात ∠ABC और ∠BCD **संलग्न कोण** है। $\overline{BC}$ स भुजा।

हल करो।

1.अन्य आसन्न भुजाएँ और सामान्य शीर्ष ज्ञात करो।

2. अन्य आसन्न कोणो की जोडी एवं भुजाएँ ज्ञात करो।

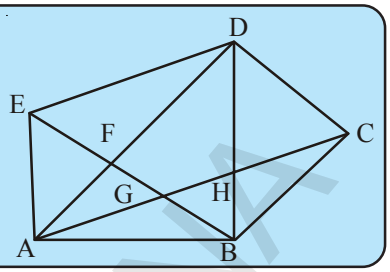
(vii) चतुर्भुज में $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ और $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ दो जोडी **सम्मुख भुजाएँ** कहलाती है। इनके शीर्ष समान नही होती है!

SCERT TELANGANA

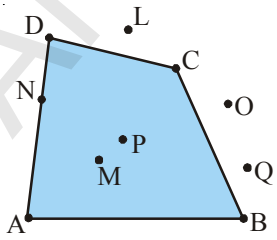
(viii) चतुर्भुज के दो कोण जिसकी एक समान भुजा न हो तो वे सम्मुख कोण कहलाते हैं। चतुर्भुज की दो जोड़ियाँ ∠BAD, ∠DCB और ∠ADC, ∠CBA चतुर्भुज के सम्मुख कोण हैं।

प्रयास करे

दिए गए चित्र में चतुर्भुज के कितने प्रकार है? उनके नाम बताइए।



12.1 चतुर्भुज के अन्तर्गत और बहिर्गत



चतुर्भुजABCD *के अंतर्गत कौनसे बिन्दु है?*

कौनसे बिन्दु चतुर्भुज के बहिर्गत है?

चतुर्भुज पर *कौनसे* बिंदु स्थित है?

बिन्दु P और M चतुर्भुज के अन्तर्गत है। बिन्दु L, O और Q चतुर्भुज के बहिर्गत है बिंदु N, A, B, C और D चतुर्भुज में स्थित है।

चतुर्भुज के अन्तर्गत अन्य मनचाहे बिन्दु अंकित कीजिए।

चतुर्भुज के बहिर्गत अन्य बिन्दु अंकित करो।

चतुर्भुज के बहिर्गत कितने बिन्दुओं की आपने कल्पना की है।

12.2 उत्तल और अवत्तल चतुर्भुज

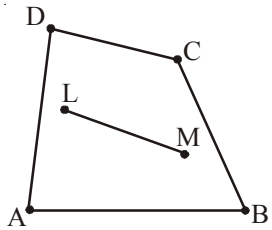
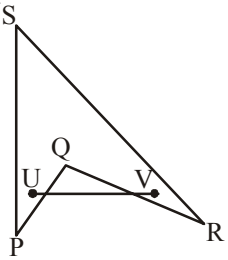


Figure1

चतुर्भुज ABCD *के मध्य मे* L और M *दो बिन्दुओं को चिन्हित करो उन्हे मिलाओ क्या मिलाई गई रेखा चतुर्भुज के* बहिर्गत *बिन्दुओ से मिलती है?*

आप चतुर्भुज ABCD के अन्तर्गत स्थित दो बिन्दुओ को जान सकते है। जो चतुर्भुज के रेखा खण्ड से जुडी है यह देखपाना असम्भव है। यही समान कार्य हम चतुर्भुज PQRS में करते है।

चतुर्भुज PQRS *के अन्तर्गत* UV *दो बिन्दु चिन्हित करो* और उन्हें जोड़ो। *क्या उन्हे चतुर्भुज के बहिर्गत गुजरती हुई रेखा द्वारा जोडा जा सकते? क्या हम ऐसी अन्य रेखाओं का निर्माण कर सकते है? क्या हम ऐसे दो बिन्दुओ को जोडने वाली रेखा खण्ड का निर्माण कर सकते है जो चतुर्भुज के अन्तर्गत है?* **क्या** *यह संभव है?*



हम कह सकते है

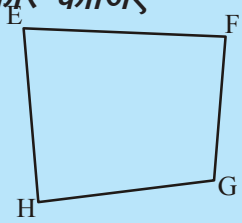
चतुर्भुज ABCD एक उत्तल चतुर्भुज है, जिसके अन्तर्गत खींचे जाने वाले रेखा खण्ड चतुर्भुज के उत्तल मे ही स्थित है।

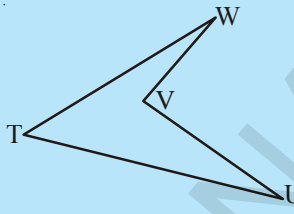
SCERT TELANGANA

चतुर्भुज PQRS को **अवत्तल** चतुर्भुज है जिसके उत्तल में खीची जाने वाली सभी रेखाएँ अन्तर्गत हो यह आवश्यक नही है।

इस प्रकार कीजिए

1.





(i) क्या EFGH चतुर्भुज उत्तल चर्तुभुज है?

(ii) क्या TUVW चतुर्भुज एक **अवत्तल** चतुर्भुज है?

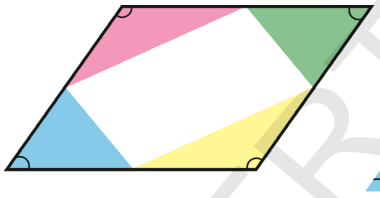
(iii) चतुर्भुज EFGH. के दोन कर्ण / क्या वे एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है?

(iv) चतुर्भुज TUVW. के दोनों कर्ण उतारिए क्या वे दोनो एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है? हम पाते है कि उत्तल चतुर्भुज के दोनों कर्ण एक दूसरे को चतुर्भुज के अन्तर्गत ही प्रतिच्छेत करते है।

12.3 समानान्तर चतुर्भुज के कोण-योग गुण।

क्रिया 1

एक अट्टे का टुकडा लो। उस पर समानान्तर चतुर्भुज *ABCD* उतार कर काटो । चित्र



चित्र 1

चित्र 2

1 के अनुसार उसके चार भाग करो। उन्हे पुनः चित्र 2 के अनुसार जमाओ।

जिससे सारे कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एक ही बिंदु पर जुड़े।

क्या $\angle 1, \angle 2, \angle 3,$ और $\angle 4$ का योग के समान हैं?

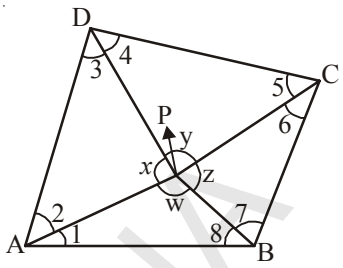
चतुर्भुज के चारों कोणो का योग 360°. होता है।

सूचना : $\angle 1, \angle 2, \angle 3,$ आदि को हम इस ढंग से भी सूचित कर सकते है जैसे $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3,$ आदि।]

हम कुछ अन्य विधियो द्वारा भी हल कर सकते हैं।

SCERT TELANGANA

1. चतुर्भुज ABCD के अंतर्गत P - बिंदु स्थित है। चित्र मे दिखाए अनुसार को शीर्ष A, B, C और D. से जोड़ो।



चित्र में ΔPAD में

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180° - x$ ..... (1)

इसी प्रकार ΔPDC, $m\angle 4 + m\angle 5 = 180° - y$ ..... (2)

ΔPCB में $m\angle 6 + m\angle 7 = 180° - z$ और ..... (3)

ΔPBA, में $m\angle 8 + m\angle 1 = 180° - w$. ..... (4)

के सभी कोणो का योग

(1), (2), (3) और (4) को जोड़ने पर प्राप्त योग

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8$

$= 180° - x + 180° - y + 180° - z + 180° - w$

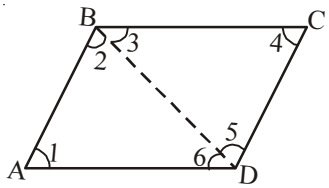
$= 720° - (x + y + z + w)$

$(x + y + z + w = 360°$; एक बिंदु पर कोणो के योग के अनुसार)

$= 720° - 360°$ $= 360°$

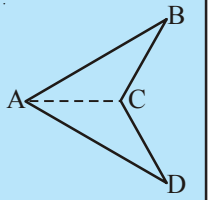
इस प्रकार चतुर्भुज के सभी कोणो का योग $360°$ होता है

2. चतुर्भुज ABCD. बनाओ'। उसे कर्ण द्वारा दो त्रिभुजो में विभक्त करो। हम 1, 2, 3, 4, 5 और 6. कोण पाते है हम कोण योग गुण के नियम द्वारा हम सरलता से प्राप्त कर सकते है कि ∠A, ∠B, ∠C और ∠D का योग $360°$. है।



इस प्रकार प्रयास कीजिए।

यदि चतुर्भुज उत्तल चतुर्भुज **नहीं है** तो क्या होगा चतुर्भुज को मोडकर दो त्रिभुजो में ब्दलकर उनके अंतर्गत कोणो का योग ज्ञात करो । अ**वत्त**ल चतुर्भुज के आन्तरिक कोणो का योग क्या होगा?



उदा **1** :एक चतुर्भुज के तीन कोण $55°$, $65°$ और $105°$. है। तो चौथा कोण क्या होगा?

हल : चतुर्भुज के चारो कोणो का योग $360°$.

दिए गए तीन कोणो का योग $= 55° + 65° + 105° = 225°$

इसिलिए चौथा कोण $= 360° - 225° = 135°$

SCERT TELANGANA

उदा **2 :** एक चतुर्भुज के दो कोण $80°$ और $120°$. है । शेष अन्य दो कोण समान है। तो प्रत्येक कोण का माप क्या होगा?

हल : चतुर्भुज के चार कोणो का योग $360°$ है।

दिए गए दो कोणो का योग $= 80° + 120° = 200°$

इसलिए शेष दो कोणों का योग $= 360° - 200° = 160°$

शेष दो कोण समान है।

इसलिए प्रत्येक कोण $= 160° \div 2 = 80°$

उदा **3 :** एक चर्तुभुज कोण $x°$, $(x - 10)°$, $(x + 30)°$ और $2x°$. है। कोण ज्ञात करो ।

हल : यहाँ चारो कोणों का योग $= 360°$

इसलिए, $x + (x - 10) + (x + 30) + 2x = 360°$

हल $5x + 20 = 360°$

$x = 68°$

अर्थात चार कोण हैं- $= 68°$; $(68–10)°$; $(68+30)°$; $(2\times68)°$

$= 68°, 58°, 98°$ और $136°$.

उदा **4 :** एक चतुर्भुज के कोणो का अनुपात $3 : 4 : 5 : 6$. है, कोण ज्ञात करे।

हल : चतुर्भुज के चार कोणो का योग $= 360°$ है।

कोणो का अनुताप $3 : 4 : 5 : 6$

इसलिए कोण है $3x$, $4x$, $5x$ और $6x$.

$$3x + 4x + 5x + 6x = 360$$

$$18x = 360$$

$$x = \frac{360}{18} = 20$$

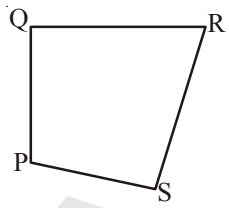
यहाँ कोण है $= 3 \times 20; 4 \times 20; 5 \times 20; 6 \times 20$

$= 60°, 80°, 100°$ और $120°$

SCERT TELANGANA

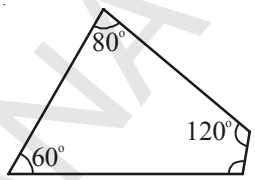
अभ्यास - 1

1. चतुर्भुज PQRS में



(i) भुजाएँ, कोण, शीर्ष एवं कोणों के नाम लिखो।

(ii) आसन्न भुजाएँ, आसन्न कोण, सम्मुख भुजाएँ और सम्मुख कोणो के नाम लिखो।



2. एक चतुर्भुज के तीन कोण 60°, 80° और 120°. है तो चौथा कोण ज्ञात करो।

3. चतुर्भुज के कोणो का अनुताप 2: 3 : 4 : 6. हे तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात करो

4. एक चतुर्भुज उतारिए, जिसके चारो कोण समान हों। प्रत्येक कोण ज्ञात करो।

5. एक चतुर्भुज के कोण $x°$, $(x + 10)°$, $(x + 20)°$, $(x + 30)°$. है। **कोणों का** ज्ञात करो।

6. एक चतुर्भुज के कोणो का अनुपात 1 : 2 : 3 : 6. नही होगा क्यो? कारण **बताओ**।

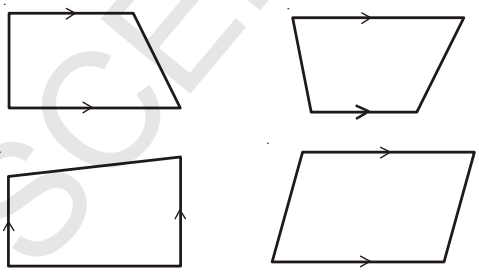
संकेत :- ऐसे चतुर्भुज की रफ आकृति **बनाने** का प्रयास करो।

12.4 चतुर्भुज के प्रकार

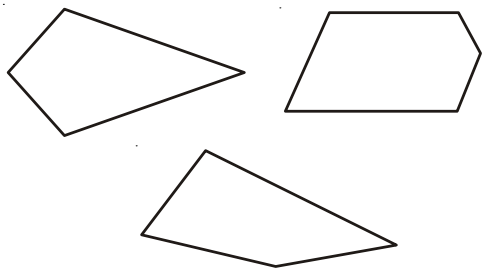
भुजाओ और कोणो के आधार पर भिन्न भिन्न चतुर्भुज के अलग अलग नाम है।

12.4.1 समलम्ब चतुर्भुज

समलम्ब चतुर्भुज की एक जोडी समानान्तर रेखाएँ होती है।



ये समलम्ब चतुर्भुज है



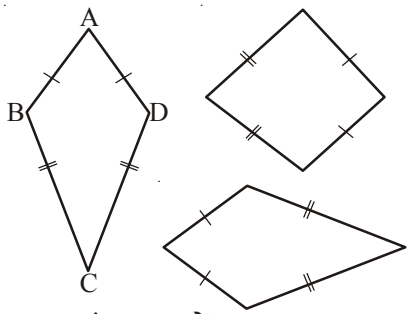
ये समलम्ब चतुर्भुज नही है।

सूचना :- तीर का निशान समानान्तर रेखाओ को सूचित करता है।
दूसरी ओर के चतुर्भुज समानान्तर क्यो नही है?

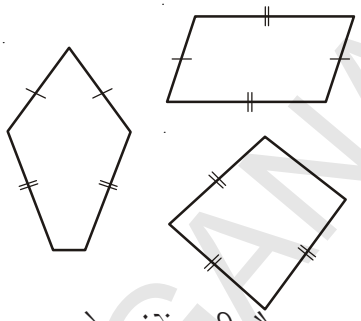
SCERT TELANGANA

12.4.2 पतंग (Kite)

चतुर्भुज में दो आसन्न भुजाएँ समान होती है उसे पतंग कहते है। प्रत्येक चित्र में समान चिन्हित की गई भुजाओं की लम्बाई समान है। उदाः के लिए AB = AD और BC = CD.



ये पतंगें हैं



ये पतंगें नही है

द्वितीय समूह की आकृतियाँ पतंग क्यो नही है?

ध्यान दो।

(i) पतंग की चार भुजाएँ है (यह एक उत्तल चतुर्भुज है।)

(ii) इसमे दो जोडी सम्मुख भुजाएँ आपस में समान होती है !

प्रयोग **2**

एक मोटा कागज लो । उसे मध्य से मोडो। चित्र में दिखाए अनुसार अलग लम्बाई वाली दो रेखाँए खीचों। दूसरे चित्र में दिखाए अनुसार उन रेखाओ पर से कागज को काट कर खोल दो हमें पतंग का आकार प्राप्त होगा ।

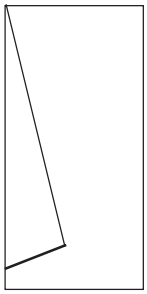


Figure1

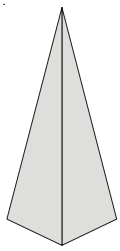


Figure2

क्या पतंग की रेखाएँ **सममिति** है ?

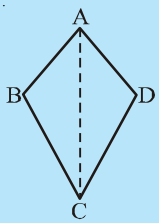
पतंग के दोनो कर्णो को मोडिए । समकोण में काटने के लिए **गुनिये** (Set squares) का **उपयोग** करे!

क्या पतंग के कर्ण समान है ? जांच करो।

(कागज को मोडकर या मापकर **देखिये**) क्या वे कर्ण एक दुसरे को प्रतिच्छेदित करते है?

प्रयास करो

सिद्ध करो की पतंग ABCD में ΔABC और ΔADC सर्व समान है।

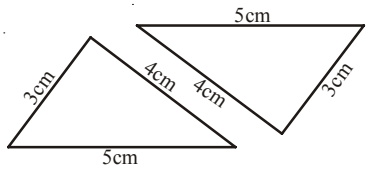


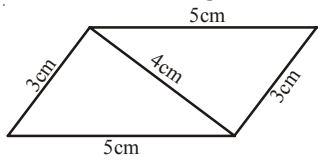
SCERT TELANGANA

12.4.3 समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

प्रायोगिक कार्य 3

एक ही जैसे दो त्रिभुज के टुकडे लो। जिनकी भुजाएँ 3 से.मी, 4 से.मी, 5 से.मी हो उन्हे निम्न चित्रानुसार जमाओ।



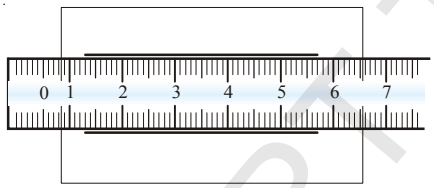


हम समानान्तर चतुर्भुज पाते है। क्या इनकी भुजाएँ समानान्तर है? क्या ये समानान्तर भुजाएँ समान है? आप **इन** त्रिभुजो की सहायता से अन्य दो समानान्तर चतुर्भुज बना सकते है। उन्हे ज्ञात करो।

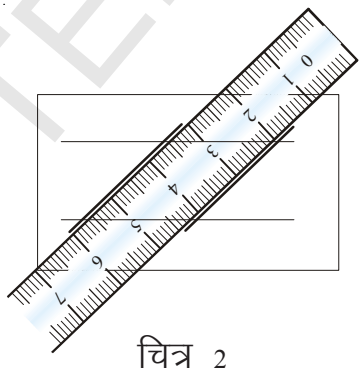
समानान्तर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी दो जोडी सम्मुख भुजाएँ समानान्तर होती है

प्रायोगिक कार्य 4

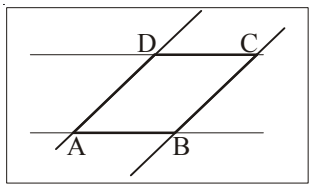
चित्र 1 में दिखाए अनुसार कागज पर स्केल की सहायता से दो रेखाएँ खींचो।



चित्र 1



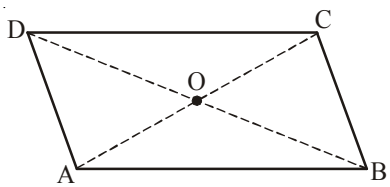
चित्र 2

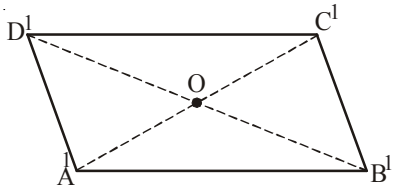


चित्र 3

फिर उस पटरी को चित्र 2 के अनुसार उन रेखाओ पर तिरछा रखकर दो और रेखाएँ खींचो जो दो जोडी समानान्तर रेखाओं से मिलकर समानान्तर चतुर्भुज बनाती है।

12.4.3(a) समानान्तर चतुर्भुज के नियम (गुण) समानान्तर चतुर्भुज की भुजाएँ दो एक ही आकार के समानन्तर चतुर्भुज लो उन्हें ABCD और $A^1B^1C^1D^1$ कहो।





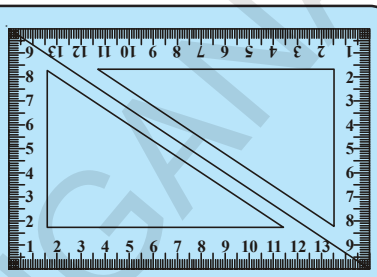
SCERT TELANGANA

और $\overline{AB}$ यहाँ नाम के अतिरिक्त $\overline{A'B'}$ समान है । ऐसे ही दूसरी आसन्न भुजाएँ भी समान होगी क्या $\overline{A'B'}$ और $\overline{DC}$. क्या वे मिलते हैं। क्या उनकी लंबाई $\overline{A'B'}$ और $\overline{DC}$ समान है।

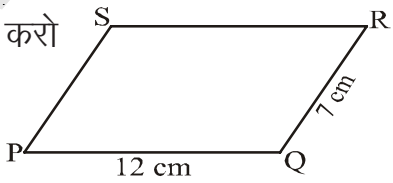
ऐसे ही $\overline{AD}$ और $\overline{B'C'}$ की लम्बाई जाँचो। आपने क्या **देखा**?
आपने **देखा** कि दोनो ही विधि का परिणाम समान है। यहाँ समानान्तर चतुर्भुज भुजाओ की लम्बई समान होती है।

प्रयास करो

$30° - 60° - 90°$ कोण वाले दो **गुनिये** लो उन्हे चित्र मे दर्शाए अनुसार जमाओ क्या वे तुम्हे उपर्युक्त गुणो की जाँच करने मे सहायक होंगे। क्या हम कह सकते हैं कि सभी आयात समानान्तर चतुर्भुज होते है।



उदा **5 :** समानान्तर चतुर्भुज PQRS की परिमिति ज्ञात करो



हल : समानान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओ की लम्बाई समान होती है।

प्रश्न के अनुसार, PQ= SR = 12 से.मी और QR = PS = 7 से.मी

इस रीति से परिमिति = PQ + QR + RS + SP

= 12 से.मी + 7 से.मी + 12 से.मी + 7 से.मी = 38 से.मी

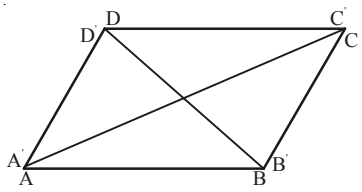
समानान्तर चतुर्भुज के कोण

प्रायोगिक कार्य 6

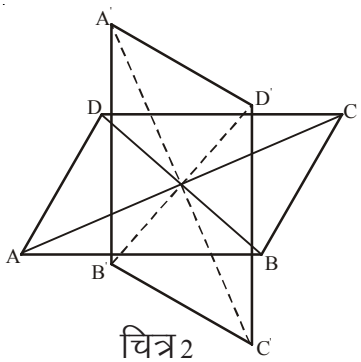
मान लो ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है एक पारदर्शी कागज पर उसे उतारो और A'B'C'D'. नाम दो। A'B'C'D' को ABCD पर लिखो। चित्र 1 के अनुसार - - - - पर जमाओ। जहाँ
कर्ण एक दुसरे से मिलते है। वहाँ पर पिन लगाओ अब पारदर्शी कागज चित्र 2 के अनुसार 90^0 पर घुमाइए। उस समानान्तर चतुर्भुज को भी समान दिशा 90^0 पर घुमाओ। आप चित्र 3 के अनुसार उस समानान्तर चतुर्भुज को पाओगे। आप देखते है कि A बराबर स्थित है C पर, इसी प्रकार B स्थित है D पर।

SCERT TELANGANA

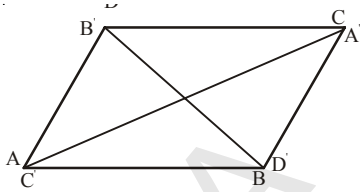
यह दर्शाता है कि और के कोणों के बारे में इसी तरह और कोणों की भी जाँच करो आपके उत्तर को लिखिए।



चित्र 1



चित्र 2



चित्र 3

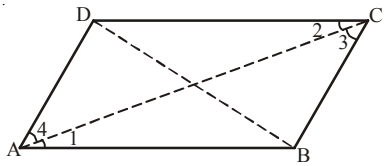
चित्र 3 के अनुसार D होगा B पर **अपनी जानकारी लिखिये।**

प्रयोग करो।

उपयुक्त आधार पर 30° – 60° – 90° माप के दो चतुर्भुज लो। क्या ये आकृति उपर्युक्त नियमो की जाँच में सहायक सिद्ध होगी।

आप तर्कानुसार इस उपाय को उचित **कह** सकते है।

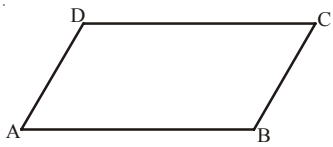
यदि चतुर्भुज ABCD के कर्ण $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ हो तो आप पाओगे $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोणो के गुण।)



ΔABC और ΔCDA सर्वसमान है। $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कोण भुजा कोण स्वयं तथ्यानुसार).

इसलिए, $m\angle B = m\ \angle D$ (c.p.c.t.).

इसी प्रकार , $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, इसिलिए, $m\ \angle A = m\ \angle C$. (c.p.c.t.).



यहाँ समानान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणो का माप समान होता है।

हम समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण की ओर अपना ध्यान देंगे।

चतुर्भुज ABCD में $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ के और $\overline{DA}$ तिर्यक रेखा है।

इसलिए , $\angle A$ और $\angle B$ तिर्यक रेखा के एक ही दिशा के दो आंतरिक कोण होंगे। वे संपूरक कोण होंगे।

क्या $\angle A$ **और** $\angle B$ भी पूरक कोण है आप **क्या** कह सकते है? क्यों?

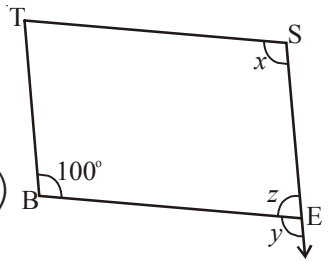
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ और $\overline{BA}$ एक तिर्यक रेखा जो $\angle A$ और $\angle D$ आंतरिक कोण है।

इन्हें करिए

उपरोक्त चित्र में किन्हीं और दो पूरक कोणों की जोड़ियाँ पहचानिए।

SCERT TELANGANA

उदा **6 :** चतुर्भुज BEST में x, y, z का मूल्य ज्ञात करो।



हल : ∠S का सम्मुख कोण ∠B है

इसलिए , $x = 100°$ (सम्मुख कोण समान है)

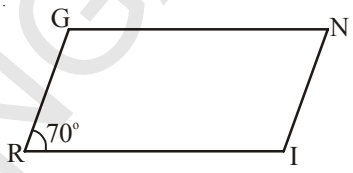
$y = 100°$ (संगत कोण)

$z = 80°$ (हम कह सकते है $\angle y, \angle z$ समानान्तर कोणो का युग्म है। समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण पूरक कोण होंगे।

पूर्व में दिए गए उदाहरण के आधार पर समान परिणाम प्राप्त करते है।

उदा **7 :** चतुर्भुज RING में $m\angle R = 70°$ हो तो अन्य कोण ज्ञात करो।

हल : $m\angle R = 70°$ दिया गया है।



तो $m\angle N = 70°$

समानान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण है।

पहले ∠R और ∠I पूरक कोण है

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

और $m\angle G = 110°$ since ∠G and ∠I (समानांतर चतुर्भुज के कोण हैं।)

अर्थात $m\angle R = m\angle N = 70°$ और $m\angle I = m\angle G = 110°$

प्रयास करो -

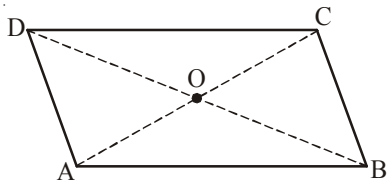
उपयुक्त आधार पर $m\angle I$ और $m\angle G$ दूसरी विधि से

(चतुर्भुज का कोण योग नियम)

12.4.3 (b) समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण

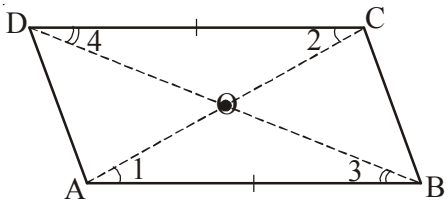
क्रिया 7

एक ABCD नामांकित चतुर्भुज की आकृति का टुकडा लो । उसके कर्ण $\overline{AC}$ और $\overline{DB}$ डाक दूसरे से O पर मिलते है।



$\overline{AC}$ को मोडकर C और A. का मध्य बिन्दु ज्ञात करो। क्या वह मध्य बिन्दु O के समान है।

$\overline{DB}$ को मोडकर O और D पर B.का मध्य बिन्दु ज्ञात करो क्या वह मध्य बिन्दु 0 के समान है।



क्या कर्ण $\overline{DB}$ और AC मध्य बिन्दु 0 पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है। अपने मित्रो से इस

SCERT TELANGANA

विषय पर चर्चा करे। यही क्रिया पुनः दोहराकर DB का मध्य बिन्दु कहाँ पर स्थित होगा ज्ञात करो।

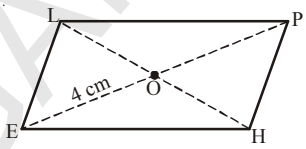
समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (कोण भुजा कोण) **क्या** स्वयं तथ्य के अनुसार जाँच करना कठिन होगा। तथ्य के अनुसार जाँच करना कठिन नही होगा।

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (कोण भुजा कोण) का

इससे प्राप्त होगा AO = CO और BO = DO

उदा **8 :** HELP एक समानान्तर चतुर्भुज है जिसमें OE = 4 जहाँ O कर्णो का प्रतिच्छेदित बिन्दु है क्या HL कर्ण से 5 cm से.मी अधिक होगा।

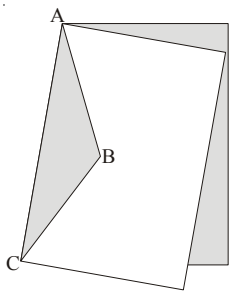


हल : यदि OE = 4 से.मी तब OP भी 4 से.मी होगा क्यो?
इसिलिए PE = 8 से.मी (क्यों)
PE कर्ण HL से 5 से.मी अधिक है।
इसिलिए, HL = 8 + 5 = 13 से.मी

यहाँ , $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ से.मी

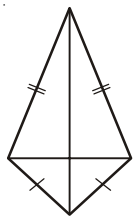
12.4.4 समचतुर्भुज (Rhombus)

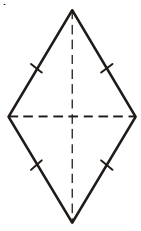
इसके पूर्व हमने पतंग के आकार का कागज काटा था। जब हम ABC काट कर निकालते है तो हमें पतंग की आकृति मिलेगी। यहाँ AB और BC की लम्बई भिन्न भिन्न है। यदि AB = BC, खीचा जाए तो सम चतुर्भुजाकार बनने वाली पतंग समचतुर्भुज कहलाती है।
समचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती है। इसके कर्ण एक **दूसरे को** समद्विभाजित करते है।



समचतुर्भुज

समचतुर्भुज के सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज में भी है।
पतंग में भी यही गुण विद्यमान है। इन सभी की सूची बनाओ।
पुनः अवलोकन करके अपनी सूची की जाँच करो।


पतंग


समचतुर्भुज

SCERT TELANGANA

समचतुर्भुज के कर्ण एक दुसरे को लम्ब समद्विभाजित करते है।

क्रिया **8**

एक समचतुर्भुज की आकृति का कागज लो। उसे मोड कर उसकी जाँच करो कि उसके कर्ण एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है। ये कर्ण समकोण पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है तो वर्ग के किनारे से प्रयोग कर इसकी जांच कर सकते है। तार्किक नियमानुसार गुणो को सिद्ध कर सकते है।

अब इस नियम की जाँच तर्क (logic) चरण द्वारा करेंगे।

ABCD एक समचतुर्भुज है और समानान्तर चतुर्भुज भी है।

इसलिए OA = OC **और** OB = OD.

हम देख कर जानेंगे कि $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$.

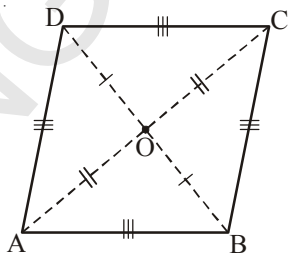
यह ..... (भुजा, भुजा,भुजा) स्वयं **तथ्य** पर आधारित है।

$\Delta AOD \cong \Delta COD$

इसिलिए , $m\angle AOD = m\angle COD$

जैसे कि $\angle AOD$ और $\angle COD$ कोणो का युग्म है।

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90°$$



निष्कर्ष यह है कि समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते है।

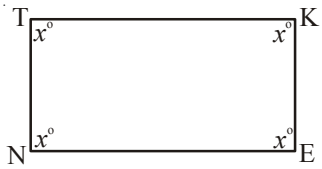
12.4.5 आयत (Rectangle)

आयत वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसके कोण समान है। इसकी परिभाषा क्या है? अपने मित्रो से चर्चा करो। यदि आयत के सभी कोण समान है तो उनका माप क्या होगा।

मान लो आयत का प्रत्येक कोण $x°$. है।

$4x° = 360°$ क्यो ?

इसिलिए , $x° = 90°$



आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है। इसिलिए आयत एक समानान्तर चतुर्भुज है। जिसके प्रायः कोणो का माप समकोण होता है।

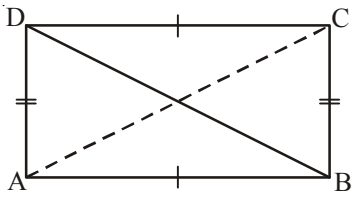
समानान्तर चतुर्भुज होने के कारण आयत की सम्मुख भुजाएँ आपस में समान होती है। और इसके कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

एक समानान्तर चतुर्भुज में कर्णो की लम्बाई अलग अलग होती है। पर आश्चर्य यह है कि आयत के कर्णो की लम्बई समान होती है। (यह एक विशेषता है)

सिद्ध करने के लिए यह आसान है।

SCERT TELANGANA

आयत ABCD is a rectangle,



$\Delta ABC \cong \Delta ABD$

क्यों कि $AB = AB$ (एकाकी है)

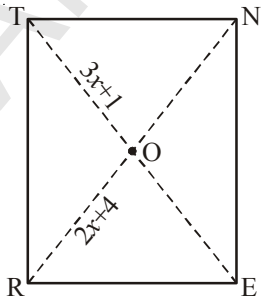
$BC = AD$ (क्यो?)

$m\angle A = m\angle B = 90°$ (क्यो?)

यह 1 SAS (भुजा कोण भुजा) स्वयं तथ्यानुसार $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ के और $AC = BD$ (c.p.c.t.)

यहाँ आयत के कर्णो की लम्बई समान होती है।

उदा **9 :** RENTएक आयत है। जिसके कर्ण एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते है। यदि x, हो तो $= 2x + 4$ और $OT = 3x + 1$. का मान ज्ञात करो।



हल **:** OT कर्ण TE का आधा **है और** RN का आधा OR है ।

यहाँ कर्ण एक दुसरे के समान है (**क्यों?**)

इसिलिए **उनका आधा** भी समान होता है।

इसिलिए $3x + 1 = 2x + 4$

या $x = 3$

12.4.6 वर्ग (Square)

वर्ग वह आयत है जिसकी आसन्न भुजाएँ समान होती है। अर्थ यह है कि वर्ग में भी आयत के सभी गुण विद्यमान है साथ ही एक अतिरिक्त गुण यह है कि उसकी चारो भुजाओं की लम्बई समान होती है। आयत के समान ही वर्ग के कर्णो की लम्बई भी समान होती है।

आयत में **कर्ण** एक दुसरे को लम्ब समद्विभाजित करने की आवश्यकता नही होती है। (जाँच करो) यह वर्ग के लिए सत्य नही है।

आइए सिद्ध करते है-

BELT एक वर्ग है इसिलिए $BE = EL = LT = TB$

मान लो ΔBOE और ΔLOE तथ्यानुसार

OB=OL (क्यो)

OE **सामान्य** (common) है।

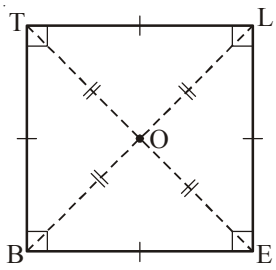
यहाँ SSS (भुजा, भुजा, भुजा) स्वंय तथ्य के अनुसार $\Delta BOE \cong LOE$

इसलिए $\angle BOE = \angle LOE$

SCERT TELANGANA

किन्तु $\angle BOE + \angle LOE = 180^o$ (क्यो)

$$\angle BOE = \angle LOE = \frac{180}{2} = 90^o$$



यहाँ वर्ग के कर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते है।

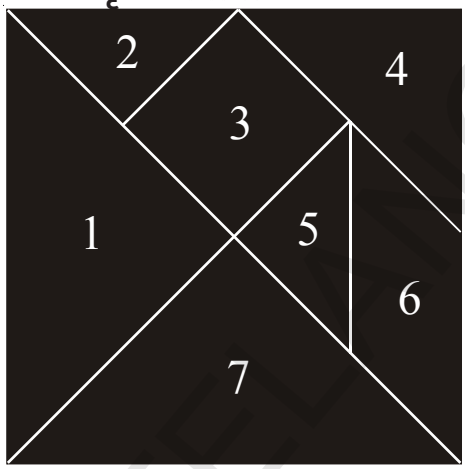
वर्गो के कर्णो में

(i) कर्ण एक दुसरे को प्रतिच्छेदित करते है। (वर्ग एक समानान्तर चतुर्भुज है)

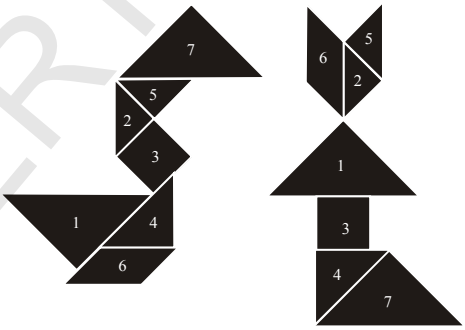
(ii) समान लम्बाई वाले है (वर्ग एक आयत होने के कारण)

(iii) और एक दुसरे पर लंब है।

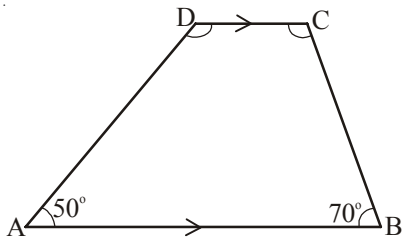
12.5 टैन्ग्राम की सहायता से आकृति बनानाः



इसमे समलम्ब चतुर्भुज, समानान्तर चतुर्भुज, आयत और वर्ग सभी आकार के टुकडो का प्रयोग करो। इन टुकडो का प्रयोग करते हुए कई प्रकार की आकृतियाँ ब्ना सकते है आपको दो उदाहरण दिए गए है।



उदा **10 :** ABCDएक समलम्ब चतुर्भुज में $\overline{AB}$ समानांतर है $\overline{CD}$. If $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Find $\angle C$ और $\angle D$.



हल : जैसा कि $\overline{AB}$ समानान्तर है $\overline{CD}$

SCERT TELANGANA

$\angle A + \angle D = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही दिशा के अंतः कोण है)

इसलिए $\angle D = 180° - 50° = 130°$

इसी प्रकार, $\angle B + \angle C = 180°$

इसिलिए $\angle C = 180° - 70° = 110°$

उदा**11 :** एक समानान्तर चतुर्भुज में दो आसन्न कोणों का अनुपात 3:2 है तो उस चतुर्भुज के कोण ज्ञात करो।

हल **:** समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण पूरक कोण होते है।

उनका योग $= 180°$

आसन्न कोणों का अनुपात $= 3:2$

इसलिए प्रत्येक कोण $180 \times \frac{3}{5} = 108^{o}$ और।

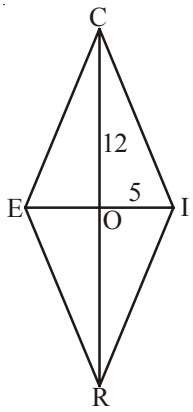
$180 \times \frac{2}{5} = 72^{o}$

उदा **12 :** RICE एक समचतुर्भुज है OE और OR. ज्ञान करो

हल **:** समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

जैस $OE = OI$ और $OR = OC$

इसलिए, $OE = 5$ और $OR = 12$



अभ्यास - 2

1. सत्य असत्य लिखो।

(i) सभी आयत वर्ग होते है। ( )

(ii) सभी समचतुर्भुज, समानान्तर चतुर्भुज होते है। ( )

(iii) सभी वर्ग समचतुर्भुज एवं आयत होते है। ( )

(iv) सभी वर्ग समानान्तर चतुर्भुज होते है। ( )

(v) सभी पतंग समचतुर्भुज होते है। ( )

(vi) सभी समचतुर्भुज, पतंग होते है। ( )

(vii) सभी समानान्तर चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज होते है। ( )

(viii) सभी वर्ग, समलम्ब चतुर्भुज होते है। ( )

2. वर्ग क्या है समझाइए।

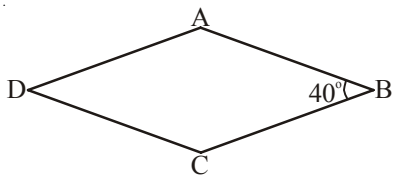
(i) चतुर्भुज (ii) समानान्तर चतुर्भुज

(iii) समचतुर्भुज (iv) आयत।

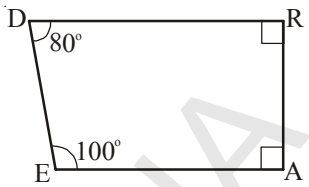
SCERT TELANGANA

3. समचतुर्भुज ABCDमें $\angle CBA = 40°$.

हो तो अन्य कोण ज्ञात करो।

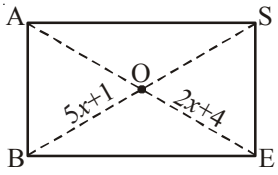


4. समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण $x°$ और $(2x + 30)°$. हो तो उसके अन्य कोण ज्ञात करो।



5. DEAR समलम्ब चतुर्भुज **है।** उसकी कौन-सी दो भुजाएँ समानान्तर है।

6. BASEएक आयत है उसके कर्ण एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते है, यदि x, $OB = 5x+1$ और $OE = 2x + 4$ **हो तो** x का मान ज्ञात करो?



7. ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है यदि $\angle A = 70°$ और **तो क्या** $\angle C = 65°$? **होगा?** कारण बताओ।

8. समानान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न भुजाओ का अनुपात 5:3 है उसकी परिमिति 48 से.मी है तो भुजाओ की लम्बाई ज्ञात करो?

9. चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे पर लंब हो तो वह चतुर्भुज हमेशा सम चतुर्भुज होगा। चित्र द्वारा सिद्ध करो।

10. ABCDसमलम्ब चतुर्भुज में $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. है। यदि $\angle A = \angle B = 30°$, **है तो** अन्य दो कोणो का माप क्या होगा?

11. रिक्त स्थान भरो।:-

(i) समानान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ समान हो तो वह _____ है।

(ii) समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण 90^0 का है और दो आसन्न भुजाएँ समान हो तो वह _____ है।

(iii) समलम्ब चतुर्भुज ABCDमे $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. है यदि $\angle D = x°$ तो $\angle A$ = _____.

(iv) समानान्तर चतुर्भुज के प्रत्येक कर्ण _____ त्रिभुजो में विभाजित करते है।

(v) ABCDसमानान्तर चतुर्भुज में कर्ण $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ एक दूसरे को o पर प्रतिच्छेदित करते है यदि AO = 5cm हो तो AC = _____cm होगा।

(vi) ABCD,समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को o पर प्रतिच्छेदित करते है तो $\angle AOB$ = _____ डिग्री होगा।

SCERT TELANGANA

(vii) ABCD समानान्तर चतुर्भुज है तो $\angle A - \angle C =$ _____ डिग्री।

(viii) ABCDएक आयत है जिसका कर्ण AC = 10cm हो तो कर्ण BD = _____cm. होगा।

(ix) ABCD एक वर्ग है जिसका कर्ण $\overline{AC}$ है तो $\angle BAC =$ _____ डिग्री होगा।

पृष्ठावलोकन

1. चार रेखा खण्डो **की** ब्न्द (संवृत्त) आकृति चतुर्भुज कहलाती है।
2. एक समतल को प्रत्येक चतुर्भुज तीन भागों मे **विभाजित** करता है।
   1) अन्तर्गत 2) बहिर्गत 3) चतुर्भुज
3. प्रत्येक चतुर्भुज एक जोडी कर्ण होती है।
4. यदि चतुर्भुज के कर्ण चतुर्भुज के अन्तर्गत हो तो वह **अवत्तल** चतुर्भुज कहलाता है।
5. चतुर्भुज के आन्तरिक कोणो का योग 360° डिग्री होता है।
6. चतुर्भुज के गुण

चतुर्भुज	गुण
समानान्तर चतुर्भुजः- वह चतुर्भुज है **जि**सकी सम्मुख भुजाओ की जोडी समानान्तर होती है।	(1) सम्मुख भुजाएँ समान होती है (2) सम्मुख कोण समान होते है (3) कर्ण एक दुसरे **को** सम द्विभाजित करते है
समचतुर्भुज :- वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाआ की लम्बई समान होती है।	(1) सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज के होते है। (2) कर्ण एक दूसरे पर लम्ब होते है
आयत :- वह समानान्तर चतुर्भुज है। जिसके सभी कोण समकोण होते है।	(1) सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज के होते है (2) इसका प्रत्येक कोण समकोण होता है (3) कर्ण समान होते है।
वर्ग :- आयत की तरह इसकी भुजाएँ समान होती है।	सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज सम चतुर्भुज और आयत के है।
पतंग :- वह चतुर्भुज है जिसकी दो जोडी आसन्न भुजाएँ आपस मे समान होती है।	(1) कर्ण एक दूसरे पर लम्ब होते है (2) कर्णो की लंबाई समान नही होती है (3) कर्ण एक दूसरे **को** समद्विभाजित करते है।
समलम्ब चतुर्भुज :- वह चतुर्भुज है जिसमे एक जोडी भुजाएँ समानान्तर होती है।	1) एक जोडी सम्मुख भुजाएँ समानान्तर होती है।

SCERT TELANGANA