P6B6D3

അധ്യായം 4

പ്രതലത്തിലെ ചലനം (MOTION IN A PLANE)

4.1 ആമുഖം
4.2 സദിശങ്ങളും അദിശങ്ങളും
4.3 രേഖീയസംഖ്യകളുമായുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം
4.4 സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും- ഗ്രാഫിക്കൽ രീതി
4.5 സദിശങ്ങളുടെ വിശ്ലേഷണം
4.6 സദിശസങ്കലനം
4.7 ഒരു പ്രതലത്തിലെ ചലനം
4.8 സമത്വരണത്തിലുള്ള ചലനം, ഒരു പ്രതലത്തിൽ
4.9 ദ്വിമാനങ്ങളിലെ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം
4.10 പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം
4.11 സമവർത്തുളചലനം

സംഗ്രഹം

ചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

അധിക പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

4.1 ആമുഖം

നേർരേഖയിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം വിവരിക്കാനാവശ്യമായ സ്ഥാനം, സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നീ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ മുൻപാഠത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കി. ഏകമാനചലനത്തിൽ രണ്ടു ദിശകൾ മാത്രമേ സാധ്യമാകൂ എന്നതിനാൽ ഭൗതിക അളവുകളുടെ ദിശാസംബന്ധിയായ കാര്യങ്ങൾ + ഉം – ഉം ചിഹ്നങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ കൈകാര്യം ചെയ്യാമെന്നും കണ്ടു. എന്നാൽ ദ്വിമാനത്തിലും (പ്രതലം) ത്രിമാനത്തിലും (സ്പേസ്) ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം വിവരിക്കാൻ, മേൽപ്പറഞ്ഞ ഭൗതിക അളവുകളെ സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിപാദിക്കണം. അതുകൊണ്ടുതന്നെ സദിശങ്ങളെപ്പറ്റി നന്നായി മനസ്സിലാക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. എന്താണൊരു സദിശം? എങ്ങനെ സദിശങ്ങളെ കൂട്ടുകയും കുറക്കുകയും ഗുണിക്കുകയും ചെയ്യാം? ഒരു രേഖീയസംഖ്യകൊണ്ട് ഒരു സദിശത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ഫലമെന്താകും? ഒരു പ്രതലത്തിൽ പ്രവേഗവും ത്വരണവും കൃത്യമായി നിർവചിക്കാനാവുംവിധം സദിശത്തെ ഈ പാഠത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കും. അതിനുശേഷം, ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രതലത്തിലുള്ള ചലനത്തെപ്പറ്റി ചർച്ച ചെയ്യും. ഒരു പ്രതലത്തിലെ ലഘുവായ ചലനമെന്ന നിലയിൽ സമത്വരണത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റെ ചലനവും പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനവും വിശദമായി നാം ചർച്ച ചെയ്യും. നിത്യജീവിതത്തിൽ പ്രത്യേക പ്രാധാന്യമുള്ളതും വളരെ പരിചിതവുമായ ചലനമാണ് വർത്തുളചലനം. സമവർത്തുളചലനത്തെപ്പറ്റിയും ഈ പാഠത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

ഈ പാഠഭാഗത്ത് നാം രൂപീകരിക്കുന്ന ചലനസമവാക്യങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ ത്രിമാന ഇടത്തിലേക്കും വ്യാപിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

4.2 സദിശങ്ങളും അദിശങ്ങളും (Scalars and Vectors)

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ, അളവുകളെ അദിശങ്ങൾ എന്നും സദിശങ്ങൾ എന്നും തരംതിരിക്കാവുന്നതാണ്. അടിസ്ഥാനപരമായി സദിശം ദിശയുമായി ബന്ധമുള്ളതും അദിശം ദിശയുമായി ബന്ധമില്ലാത്തതു

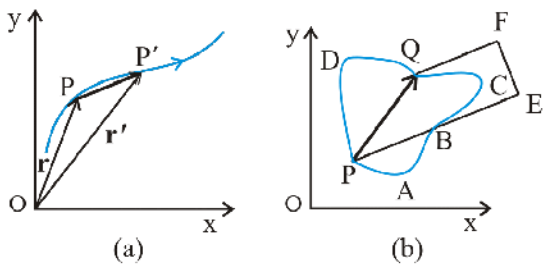
മാകുന്നു. അളവുമാത്രമുള്ള ഭൗതിക അളവിനെയാണ് അദിശം എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ഒരു അദിശത്തെ രേഖപ്പെടുത്താൻ അനുയോജ്യമായ യൂണിറ്റോടുകൂടിയ ഒരു സംഖ്യ മാത്രം മതിയാകും. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ ദൂരം, ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസ്, ഒരു വസ്തുവിന്റെ താപനില, ഒരു പ്രത്യേക സംഭവം നടന്ന സമയം തുടങ്ങിയവയെല്ലാം അദിശങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. സാധാരണ ബീജഗണിതത്തിലെ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അദിശങ്ങളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കാം. സാധാരണ സംഖ്യകളെപ്പോലെ അദിശങ്ങളെ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ഗുണിക്കുകയും ഹരിക്കുകയും ചെയ്യാം*. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും യഥാക്രമം 1.0 m ഉം 0.5m ഉം ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ ചുറ്റളവ് നാലു വശങ്ങളുടെയും നീളങ്ങളുടെ തുകയാണ്. 1.0m+0.5m+ 1.0m+ 0.5m= 3.0 m. ഓരോ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും അദിശ അളവുകളാകുന്നു. നമുക്ക് മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത ദിവസത്തെ കൂടിയതും കുറഞ്ഞതുമായ താപനില, യഥാക്രമം 35.6°C ഉം 24.2°C ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ, രണ്ടു താപനില കളുടെയും വ്യത്യാസം 11.4°Cആണ്. അതുപോലെ, വശങ്ങൾ 10 cm വീതമുള്ള കട്ടിയുള്ള ഒരു അലുമിനിയം ക്യൂബിന്റെ മാസ് 2.7 kg ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം (ഉള്ളളവ്) 10^{-3} m^3 (ഒരു അദിശം) ആയിരിക്കും. അതിന്റെ സാന്ദ്രത $2.7\text{x}10^3$ kg/m^3 (ഒരു അദിശം) ആകുന്നു.

അളവും ദിശയുമുള്ളതും സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണനിയമമോ തത്തുല്യമായ സാമാന്തരിക നിയമമോ അനുസരിക്കുന്നതുമായ ഏതൊരു ഭൗതിക അളവും സദിശമായിരിക്കും. അങ്ങനെ, ഒരു സദിശത്തെ രേഖപ്പെടുത്താൻ അതിന്റെ ദിശയും അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു സംഖ്യയും നൽകേണ്ടതുണ്ട്. സദിശങ്ങളാൽ പ്രതിപാദിക്കപ്പെടുന്ന ചില ഭൗതിക അളവുകളാണ് സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം, ബലം തുടങ്ങിയവ.

കട്ടികൂടിയ അക്ഷരങ്ങൾ (bold) ഉപയോഗിച്ചാണ് ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഒരു സദിശത്തെ രേഖപ്പെടുത്തുന്നത്. പ്രവേഗസദിശത്തെ **v** എന്ന ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്നതാണ്. കൈകൊണ്ട് എഴുതുമ്പോൾ കനത്തിൽ അക്ഷരങ്ങൾ എഴുതാൻ ബുദ്ധിമുട്ടായതുകൊണ്ട് അക്ഷരത്തിനു മുകളിൽ അമ്പടയാളം വരച്ചും സദിശം അടയാളപ്പെടുത്താറുണ്ട്. ഉദാഹരണം: **v**, അതായത്, **v** യും $\vec{v}$ യും പ്രവേഗസദിശത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സദിശത്തിന്റെ അളവിനെ അതിന്റെ കേവല മൂല്യം (absolute value) എന്നു വിളിക്കുന്നു. |v|= v എന്നാണ് ഇത് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. അങ്ങനെ, കനംകൂടിയ അക്ഷരങ്ങളാൽ സദിശവും ഉദാ: **A, a, p, q, r, ... x, y** കനം കുറഞ്ഞ അക്ഷരങ്ങളാൽ ഓരോന്നിന്റെയും പരിമാണവും. ഉദാ : A, a, p, q, r,... x, y രേഖപ്പെടുത്താം

4.2.1 സ്ഥാനസദിശങ്ങളും സ്ഥാനാന്തര സദിശങ്ങളും (Position and Displacement Vectors)

ഒരു പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം വിവരിക്കാൻ സൗകര്യപ്രദമായ ഒരു ബിന്ദുവിനെ അവലംബകകേന്ദ്രം O ആയി തിരഞ്ഞെടുക്കണം. t, t' എന്നീ സമയങ്ങളിലെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ യഥാക്രമം P ഉം P^1 ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. [ചിത്രം 4.1(a)]. ഒരു നേർരേഖയാൽ O, P എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ **OP** എന്നത്, t എന്ന സമയത്തുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം ആകുന്നു. ഈ രേഖയുടെ ശിരോഭാഗത്ത് ഒരു അമ്പടയാളം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. **r** എന്ന ചിഹ്നം **OP** യെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതായത്, **OP= r. P'** എന്ന ബിന്ദുവിനെ **OP'** എന്ന മറ്റൊരു സ്ഥാനസദിശം പ്രതിനിധീകരിക്കുമ്പോൾ, അതിനെ സൂചിപ്പിക്കാനായി **r'** എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു. r ന്റെ നീളം അതിന്റെ പരിമാണവും **O** യിൽനിന്നു ദൃശ്യമാകുന്ന P യുടെ ദിശ സദിശത്തിന്റെ ദിശയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വസ്തു P യിൽ നിന്ന് P' ലേക്കു നീങ്ങുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ, സദിശം **PP'** (വാൽഭാഗം **P** യിലും തലഭാഗം **P'** ലും) നെ, P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് (t സമയത്ത്) P' എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് (t' സമയത്ത്) ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസദിശം എന്നു വിളിക്കാം.



ചിത്രം *4.1* (a) സ്ഥാനസദിശവും സ്ഥാനാന്തരസദിശവും.
(b) സ്ഥാനാന്തരസദിശം **PQ** ഉം വ്യത്യസ്ത സഞ്ചാരപാതകളും.

* ഒരേ യൂണിറ്റുകളുള്ള അദിശ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള സങ്കലന-വ്യവകലനക്രിയകൾക്കു മാത്രമാണ് എന്തെങ്കിലും യുക്തിയുള്ളത്. എന്നാൽ, വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകളോടു കൂടിയ അദിശങ്ങളെ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ആവാം.

സ്ഥാനാന്തരസദിശം, വസ്തുവിന്റെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയാണ് എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. മാത്രമല്ല, ഇരു സ്ഥാനങ്ങൾക്കിടയിലും വസ്തു സഞ്ചരിച്ചപാതയെ അത് ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ചിത്രം 4.1(b) യിൽ, P,Q എന്നിവ യഥാക്രമം ആദ്യസ്ഥാനവും അവസാനസ്ഥാനവുമാകുന്നു. PABCQ, PDQ, PBEFQ എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യസ്ത പാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴും വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തര സദിശം **PQ** തന്നെയാണ്. അതുകൊണ്ട്, ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനാന്തരം, സ്ഥാനങ്ങൾക്കിടയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തിനു തുല്യമോ, അതിലും കുറവോ ആവാം. മുൻപാഠഭാഗത്തും, നേർരേഖയിലൂടെയുള്ള ചലനം ചർച്ച ചെയ്തപ്പോൾ, ഈ വസ്തുത ഊന്നിപ്പറഞ്ഞിരുന്നു.

4.2.2 സദിശങ്ങളുടെ തുല്യത (Equality of vectors)

രണ്ടു സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവ സമസദിശങ്ങൾ (equal vectors) ആകണമെങ്കിൽ, തീർച്ചയായും ഇരു സദിശങ്ങൾക്കും ഒരേ അളവും ദിശയുമായിരിക്കണം**

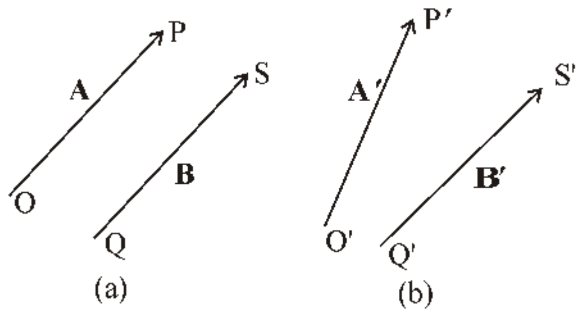
ചിത്രം 4.2(a) യിൽ **A, B** എന്നീ രണ്ടു തുല്യസദിശങ്ങൾ കാണാം. വളരെ എളുപ്പത്തിൽ നമുക്കവയുടെ തുല്യത പരിശോധിക്കാവുന്നതാണ്. സദിശം A യുടെ വാൽഭാഗം O യുമായി ചേർന്നുവരുന്ന രീതിയിൽ സദിശം B അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീക്കുന്നു. (O എന്ന ബിന്ദു Q മായി ചേർന്നുവരുന്നു). ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ അവയുടെ അഗ്രഭാഗങ്ങളായ S, P ഈ ബിന്ദുക്കളും ചേർന്നുവരുന്നതിനാൽ, ഇരുസദിശങ്ങളെയും സമസദിശങ്ങളെന്നു വിളിക്കാവുന്നതാണ്. സാമാന്യമായി, ഈ സമതയെ **A = B** എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ചിത്രം 4.2(b) യിൽ **A', B'** എന്നീ സദിശങ്ങൾക്ക് ഒരേ അളവാണ്. എങ്കിലും ഇരുസദിശങ്ങൾക്കും വ്യത്യസ്ത ദിശകളായതിനാൽ അവ സമസദിശങ്ങളാവുന്നില്ല. സദിശം **B'** അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീക്കി, Q' വിന്റെ വാൽഭാഗം, സദിശം **A'** ന്റെ വാൽഭാഗവുമായി ചേർത്തുവച്ചാലും, **B'** ന്റെ അഗ്രഭാഗം S' മായി A' ന്റെ അഗ്രം P' ഒരിക്കലും ചേർന്നുനിൽക്കുന്നില്ല.

4.3 രേഖീയസംഖ്യകളുമായുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം (Multiplication of vectors by real numbers)

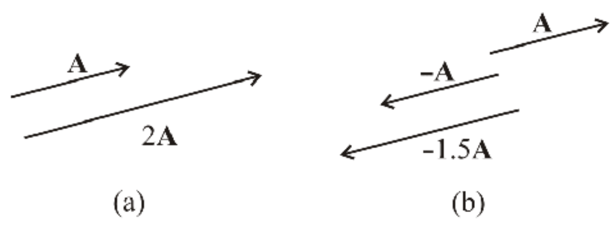
λ എന്ന ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യയുമായി സദിശം **A** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, അതിന്റെ പരിമാണം λ മടങ്ങുള്ളതും *A* യുടെ അതേ ദിശയിലുള്ളതുമായ ഒരു പുതിയ സദിശം നമുക്കു ലഭിക്കുന്നു.

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda\, |\mathbf{A}|,\ \lambda > 0 \text{ ആയാൽ}$$

ഉദാഹരണത്തിന്, ചിത്രം 4.3(a) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ സദിശം A യെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ, പരിണിതസദിശം **2A, A** യുടെതന്നെ ദിശയിലും |**A**| യുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് പരിമാണവുമുള്ളതുമായിരിക്കും.



ചിത്രം 4.2 (a) **A, B** എന്നീ സമസദിശങ്ങൾ (b) ഒരേ നീളമുള്ളതെങ്കിലും **A', B'** എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങൾ അസമസദിശങ്ങളാണ്.



ചിത്രം 4.3 (a) സദിശം **A** യും അതിനെ 2 എന്ന പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോഴുള്ള പരിണത സദിശവും. (b) സദിശം **A** യും അതിനെ -1, -1.5 എന്നീ നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോഴുള്ള പരിണത സദിശങ്ങളും

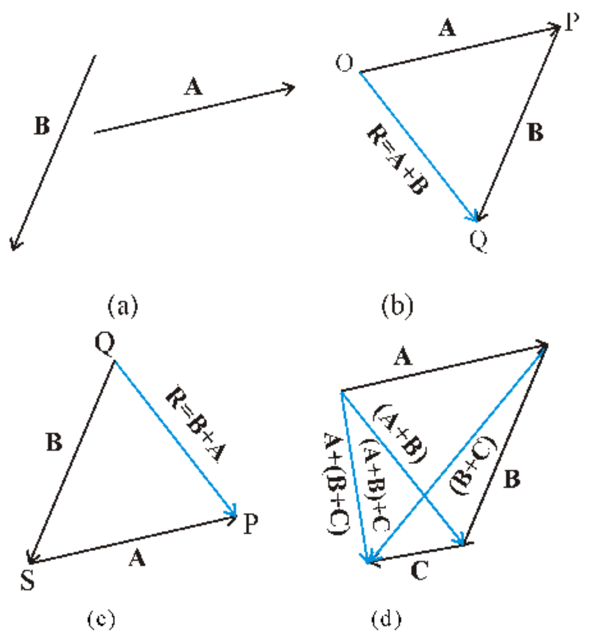
** നമ്മുടെ പഠനത്തിൽ സദിശങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളില്ല. അതുകൊണ്ട്ഒരു സദിശം അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീങ്ങുകയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ തനതുസ്വഭാവത്തിനു മാറ്റമുണ്ടാവുന്നില്ല. ഇത്തരം സദിശങ്ങളെ സ്വതന്ത്രസദിശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. എന്നിരുന്നാലും, ചില ഭൗതികപ്രയോഗങ്ങളിൽ സദിശത്തിന്റെ സ്ഥാനവും പ്രയോഗദിശയും പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നുണ്ട്. അത്തരം സദിശങ്ങളെ ലോക്കലൈസ്ഡ് സദിശങ്ങളെന്നു പറയാം.

ഒരു നെഗറ്റീവ് സംഖ്യയായ λ യുമായി സദിശം A ഗുണിക്കുമ്പോൾ, A യുടെ വിപരീതദിശയും, അളവ് |**A**| യുടെ λ മടങ്ങുമായ $-\lambda$A എന്ന പുതിയ സദിശം ലഭിക്കുന്നു. നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകളായ –1, –1.5 എന്നിവയാൽ സദിശം **A** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ചിത്രം 4.3(b) യിൽ കാണുന്നതുപോലുള്ള പുതിയ സദിശങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

സദിശം **A** യുമായി ഗുണിക്കപ്പെട്ട λ എന്ന ഘടകം തനതായ ഡൈമെൻഷനുകളുള്ള ഒരു അദിശമാകാം. അപ്പോൾ, λ **A** എന്ന സദിശത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ, λ യുടെയും **A** യുടെയും ഡൈമെൻഷനുകളുടെ ഗുണന ഫലമായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു സ്ഥിരപ്രവേഗ സദിശത്തെ സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത് സ്ഥാനാന്തര സദിശമായിരിക്കും.

4.4 സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും –ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് (Addition & subtraction of vectors - graphical method)

ഭാഗം 4.2 ൽ പ്രസ്താവിച്ചതുപോലെ, സദിശ സങ്കലനത്തിലെ ത്രികോണനിയമമോ തത്തുല്യമായ സാമാന്തരികനിയമമോ അനുസരിക്കുന്നവയാണ് സദിശങ്ങൾ. ഗ്രാഫിക്കൽരീതി ഉപയോഗിച്ച് സങ്കലന രീതികൾ ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യാം. ചിത്ര 4.4 (a) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു പ്രതലത്തിൽ നിൽക്കുന്ന A, B എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. ഈ സദിശങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങളുടെ നീളം അവയുടെ അളവിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും. സദിശങ്ങളുടെ തുക **A+B** കണ്ടെത്താനായി, ചിത്രം 4.4(b) ൽ കാണുന്നതുപോലെ സദിശം **A** യുടെ ശിരോഭാഗത്ത് **B** യുടെ വാൽഭാഗം വരുന്ന രീതിയിൽ സദിശം **B** അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീക്കുക. ശേഷം, **A** യുടെ വാൽഭാഗം **B** യുടെ ശിരോഭാഗവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്നു. സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവയുടെ തുകയായ, സദിശം **R** നെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് രേഖ OQ ആണ്. ഈ സദിശ സങ്കലന രീതിയിൽ സദിശങ്ങളെ ശിരോഭാഗത്തു നിന്നു വാൽഭാഗത്തേക്കു വരുന്നരീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ ഈ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയെ 'ഹെഡ് ടു ടെയിൽ രീതി' എന്നു വിളിക്കാം. രണ്ടു സദിശങ്ങളും അവയുടെ പരിണതഫലവും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങളാകുന്നതിനാൽ ഈ സങ്കലന രീതിയെ സദിശസങ്കലനത്രികോണരീതി എന്നും പറയാറുണ്ട്.



ചിത്രം *4.4* (a) **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങൾ (b) **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കൽരീതിയിൽ കൂട്ടുന്നു. (c) **B, A** എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയിൽ കൂട്ടുന്നു. (d) സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ അസോസിയേറ്റീവ് നിയമത്തിന്റെ ചിത്രീകരണം.

ചിത്രം 4.4 (c) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, **B+A** എന്ന പരിണതഫലം **R** എന്ന അതേ സദിശംതന്നെയാണ് നൽകുന്നത്. സദിശസങ്കലനം കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവാണ്.

അതായത്, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (4.1)

ചിത്രം 4.4 (d) യിൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, സദിശസങ്കലനം അസോസിയേറ്റീവ് നിയമവും അനുസരിക്കുന്നു. സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവയുടെ തുക ആദ്യം കണ്ടെത്തുകയും അതുമായി സദിശം **C** കൂട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലവും **B** യും **C** യും ആദ്യം കൂട്ടുകയും ഈ തുകയെ സദിശം **A** യുമായി കൂട്ടുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഫലവും തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത്, $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (4.2)

തുല്യവും വിപരീതവുമായ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ കൂട്ടിയാലുള്ള ഫലം എന്താണ്? ചിത്രം 4.3 (b) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ **A, -A** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. അവയുടെ തുക **A** + (**-A**) ആകുന്നു. ഇരു സദിശങ്ങളുടെയും അളവുകൾ തുല്യവും എന്നാൽ ദിശ വിപരീതവുമായതിനാൽ പരിണതസദിശത്തിന്റെ പരി

മാണം പൂജ്യമാകുന്നു. അതിനെ **0** എന്നു സൂചിപ്പിക്കുകയും ശൂന്യസദിശം (null vector) അഥവാ പൂജ്യസദിശം (zero vector) എന്നു വിളിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

ഒരു ശൂന്യസദിശത്തിന്റെ അളവ് പൂജ്യമാകയാൽ, അതിന്റെ ദിശ വ്യക്തമാക്കാനാവില്ല.

] dPyh pantb nHcp k Zri wA ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഒരു ശൂന്യസദിശം ലഭിക്കും. ശൂന്യസദിശം **(0)** യുടെ പ്രധാന സ്വഭാവങ്ങൾ ഇവയാണ്.

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

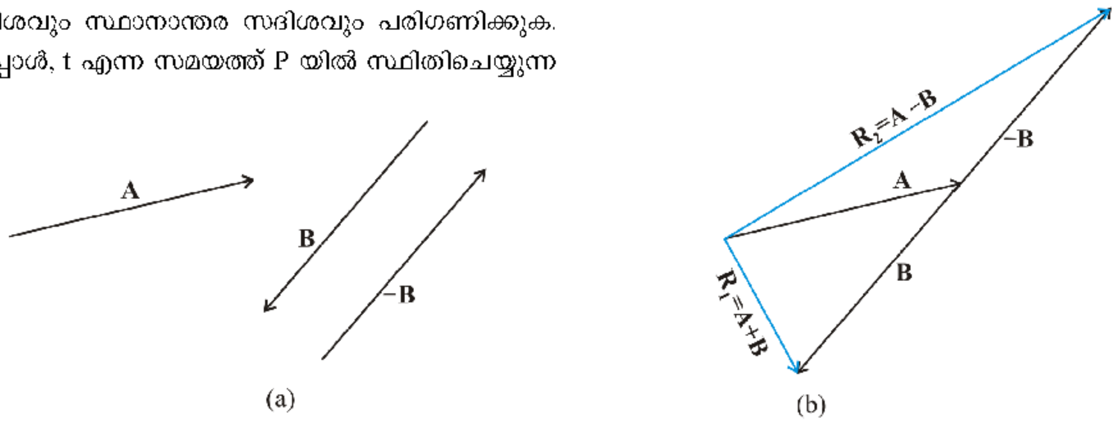
$$0\, \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

ശൂന്യസദിശത്തിന്റെ ഭൗതികമാനമെന്താണ്? ചിത്രം 4.1(a)ലേതുപോലെ ഒരു പ്രതലത്തിലെ സ്ഥാന സദിശവും സ്ഥാനാന്തര സദിശവും പരിഗണിക്കുക. ഇപ്പോൾ, t എന്ന സമയത്ത് P യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തു, P' ലേക്കും തിരികെ P യിലേക്കും സഞ്ചരിക്കുന്നതായി കരുതുക. ഇപ്പോൾ എന്താണതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം? ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾ ഒരുമിക്കുന്നതിനാൽ, വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം ഒരു ശൂന്യസദിശമാകും.

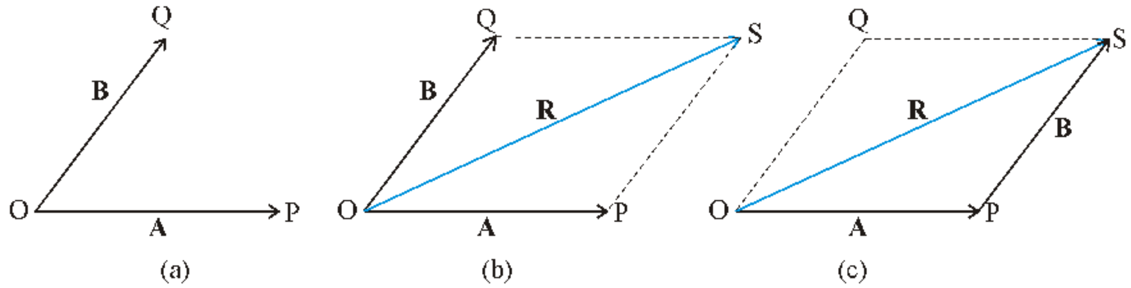
സദിശങ്ങളുടെ വ്യവകലനത്തെ സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ സഹായത്താൽ നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്. **A, B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, **A**, **–B** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ തുകയായി നമുക്ക് നിർവചിക്കാം.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

ചിത്രം 4.5 ൽ അതു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. സദിശം **A** യുമായി സദിശം **B** കൂട്ടുമ്പോൾ $\mathbf{R_2}$ =(**A-B**) ലഭിക്കുന്നു. സദിശം $\mathbf{R_1}$ =(**A+B**) കണ്ടെത്തുന്നവിധവും അതേ ചിത്രത്തിൽത്തന്നെ താരതമ്യത്തിനായി നൽകിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ തുക കണ്ടെത്താനായി സാമാന്തരികരീതിയും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. **A,B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളുണ്ടെന്നു കരുതുക. ഇരു സദിശങ്ങളെയും കൂട്ടാനായി, ചിത്രം 4.6(a) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഓരോന്നിന്റെയും വാൽഭാഗങ്ങൾ പൊതുവായ അവലംബക കേന്ദ്രത്തിലേക്കു കൊണ്ടുവരുന്നു. അതിനുശേഷം, **A** യുടെ ശിരോഭാഗത്തുനിന്നും **B** യ്ക്കു സമാന്തരമായും **B** യുടെ ശിരോഭാഗത്തുനിന്ന് **A** യ്ക്കു സമാന്തരമായും ഓരോ രേഖ നാം വരക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ സാമാന്തരികം OQSP പൂർത്തിയാക്കുന്നു. മുൻപു വരച്ച രണ്ടു രേഖകളുടെയും സംഗമബിന്ദുവിൽ നിന്നു കേന്ദ്രം O യിലേക്ക് ഒരു രേഖ വരക്കുന്നു. മൂലബിന്ദു O യിൽനിന്നാണ് പരിണതസദിശം **R** ആരംഭിക്കുന്നത്. മാത്രമല്ല, അതിന്റെ ദിശ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ (OS) ത്തിലൂടെയുമാകുന്നു. (ചിത്രം 4.6(b)). (ചിത്രം 4.6(c)) യിൽ **A** യുടെയും **B** യുടെയും തുക കണ്ടെത്താനായി ത്രികോണനിയമം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടു രീതികളുപയോഗിച്ചും ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഇരു മാർഗങ്ങളും തത്തുല്യമാണ്.

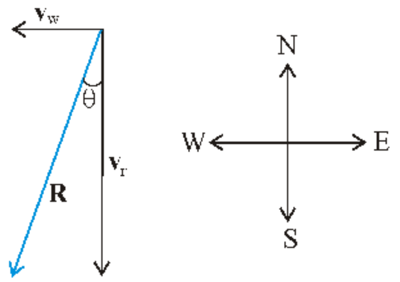


ചിത്രം *4.5* (a) **A, B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളും -**B** എന്ന സദിശവും (b) **A** യിൽ നിന്നു സദിശം **B** കുറക്കുമ്പോൾ $\mathbf{R_2}$ എന്ന സദിശം ലഭിക്കുന്നു. താരതമ്യത്തിനായി **A** യുടെയും **B** യുടെയും തുകയായ $\mathbf{R_1}$ ഉം ചിത്രത്തിൽ കാണാം.



ചിത്രം 4.6 (a) **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ വാൽഭാഗങ്ങൾ ഒരു പൊതുബിന്ദുവിലേക്കു കൊണ്ടുവരുമ്പോൾ (b) സാമാന്തരികനിയമം ഉപയോഗിച്ച് **(A+ B)** കണ്ടെത്തിയിരിക്കുന്നു. (c) സദിശസങ്കലനത്തിലെ സാമാന്തരിക രീതി ത്രികോണരീതിക്ക് തുല്യമാണ്

ഉദാഹരണം 4.1 : *ലംബമായി പെയ്യുന്ന മഴയുടെ വേഗം 35 ms^{-1} ആണ്. ഈ സമയത്ത് 12 ms^{-1} വേഗത്തിൽ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുദിശയിൽ കാറ്റു വീശാനാരംഭിക്കുന്നു. ബസ്സ്റ്റോപ്പിൽ കാത്തുനിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി മഴ നനയാതിരിക്കാൻ ഏതു ദിശയിലാണ് തന്റെ കുട പിടിക്കേണ്ടത്?*



ചിത്രം 4.7

ഉത്തരം: ചിത്രം 4.7 ൽ, ചോദ്യത്തിൽ പരാമർശിക്കുന്ന അതേ ദിശയിൽ, മഴയുടെയും കാറ്റിന്റെയും പ്രവേഗങ്ങളെ യഥാക്രമം $\mathbf{v_r}$ എന്നും $\mathbf{v_w}$ എന്നും രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ സദിശസങ്കലന നിയമത്തിന്റെ സഹായത്താൽ $\mathbf{v_r}$, $\mathbf{v_w}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ പരിണതഫലം **R** എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. **R** ന്റെ അളവ്

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \mathrm{m\ s^{-1}} = 37\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

R ഉം ലംബവുമായി സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണളവ് θ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\text{അഥവാ, } \tan\theta = \frac{V_w}{V_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19^\circ$$

അതുകൊണ്ട്, ലംബപ്രതലത്തിൽ ലംബവുമായി 19° കോണളവിൽ കിഴക്കുദിശയിലാണ് ആ കുട്ടി തന്റെ കുട പിടിക്കേണ്ടത്.

4.5 സദിശങ്ങളുടെ വിഘടനം (Resolution of vectors)

a, b എന്നിവ ഒരേ പ്രതലത്തിൽ വ്യത്യസ്ത ദിശകളിൽ സരിതിചെയ്യുന്ന രണ്ടു സദിശങ്ങളാണെന്നു കരുതുക. അതേ പ്രതലത്തിൽ തന്നെയുള്ള മറ്റൊരു സദിശമാണ് **A** (ചിത്രം 4.8) സദിശം **A**, രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സദിശങ്ങളുടെ തുകയായി രേഖപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. അതിൽ ഒന്ന്, ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാൽ **a** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സദിശവും അടുത്തത്, മറ്റൊരു രേഖീയ സംഖ്യയാൽ **b** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സദിശവുമാണ്. സദിശം **A** യുടെ വാൽഭാഗവും ശിരോഭാഗവും യഥാക്രമം O,P എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. സദിശം **a** യ്ക്കു സമാന്തരമായി O യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർരേഖ വരക്കുന്നു. അതുപോലെ, **b** ക്കു സമാന്തരമായി P യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന മറ്റൊരു നേർരേഖയും വരക്കുന്നു. ഇവ Q ൽ സന്ധിക്കുകയാണെങ്കിൽ ,

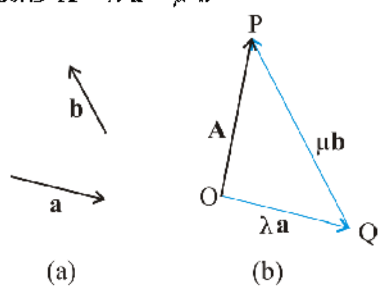
$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \tag{4.6}$$

പക്ഷേ, OQ എന്ന രേഖ a ക്കും QP എന്ന രേഖ **b** ക്കും സമാന്തരമാകയാൽ, നമുക്ക്

$$\mathbf{OQ} = \lambda\,\mathbf{a} \text{ എന്നും } \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \text{ എന്നുമെഴുതാം.} \tag{4.7}$$

ഇവിടെ λ, μ എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകൾ ആകുന്നു.

$$\text{അതുകൊണ്ട് } \mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b} \tag{4.8}$$



ചിത്രം 4.8 (a) **a, b** എന്നീ നോൺ-കൊലീനിയർ സദിശങ്ങൾ. (b) **a, b** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ദിശയിൽ **A** എന്ന സദിശത്തെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യുന്നു.

ഇവിടെ **a** യിലൂടെയും **b** യിലൂടെയും യഥാക്രമം λ **a**, μ **b** എന്നീ രണ്ടു ഘടകസദിശങ്ങളായി സദിശം **A** വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടതായി നമുക്കു പറയാം. ഈ മാർഗമുപയോഗിച്ച് ഏതൊരു സദിശത്തെയും രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സദിശങ്ങളുടെ ദിശകളിലൂടെയുള്ള ഘടക സദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. വിശ്ലേ ഷണം ചെയ്യപ്പെടുന്ന സദിശവും അതിന്റെ ഘടകസദി ശങ്ങളും ഒരേ പ്രതലത്തിലാവണം. എന്നാൽ ഒരു സദി ശത്തെ ഒരു സമകോണ ചതുരശ്രനിർദേശാങ്കവ്യവ സ്ഥയുടെ (Rectangular co-ordinate system) അക്ഷങ്ങളിലൂടെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യുന്നത് കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദമായിരിക്കും. ഇതിനായി, പരിമാണം ഒന്നായ (one) സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. നാമിപ്പോൾ ചർച്ചചെയ്യുന്നത് ഏകകസദിശങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്ന സദിശങ്ങളെയാണ്. പരിമാണം ഒന്ന് (one) ആയതും ഒരു നിശ്ചിത ദിശയുള്ളതുമായ സദിശങ്ങളെയാണ് ഏകസദിശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്. ഇവക്ക് ഡൈമെൻ ഷനോ യൂണിറ്റോ ഇല്ല. ദിശ വ്യക്തമാക്കാൻ മാത്രമാണ് ഏകസദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ചിത്രം 4.9(a) യിൽ കാണുന്നതുപോല സമകോണ ചതുരശ്ര അവലംബകത്തിൽ x,y,z അക്ഷങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഏകസദിശങ്ങൾ, യഥാക്രമം $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, എന്നിവയാണ്. ഇവ ഏകസദിശങ്ങൾ ആകയാൽ

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

ഈ ഏകസദിശങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായി നില കൊള്ളുന്നു. ഈ പാഠപുസ്തകത്തിൽ, മറ്റു സദിശ ങ്ങളിൽനിന്ന് ഏകസദിശങ്ങളെ തിരിച്ചറിയാനായി, കനംകൂടിയ അക്ഷരങ്ങൾക്കു മുകളിലായി ഒരു തൊപ്പി (^) ചിഹ്നം അച്ചടിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ പാഠഭാഗത്ത് നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത് ദ്വിമാന ചലനങ്ങളെപ്പറ്റിയായതിനാൽ, രണ്ട് ഏകസദിശങ്ങൾ മാത്രമാണ് നമുക്കാവശ്യം. $\hat{\mathbf{n}}$ എന്ന ഏകസദിശത്തെ λ എന്ന അദിശവുമായി ഗുണി ക്കുമ്പോൾ, ഗുണനഫലമായി നമുക്കു ലഭിക്കുന്നത് ഒരു സദിശമായിരിക്കും.

$$\lambda = \lambda\,\hat{\mathbf{n}}$$

സാമാന്യമായി സദിശം **A**, ഈ വിധത്തിൽ എഴുതാം.

$$\mathrm{A} = |\mathrm{A}|\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

ഇവിടെ $\hat{\mathbf{n}}$ സദിശം A യിലൂടെയുള്ള ഏകസദിശ മാകുന്നു.

ഏകസദിശങ്ങളായ $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ എന്നിവയുടെ ദിശയിലുള്ള ഘടകസദിശങ്ങളായി സദിശം **A** യെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. ചിത്രം 4.9(b) യിൽ കാണുന്നതു പോലെ, x-y പ്രതലത്തിലുള്ള **A** എന്ന സദിശം പരിഗണിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതു പോലെ **A** യുടെ ശിരോഭാഗത്തുനിന്ന് അവലംബക അക്ഷ ങ്ങളിലേക്ക് ലംബരേഖകൾ വരക്കുന്നു. തൽഫലമായി നമുക്ക് $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ എന്നീ രണ്ട് പുതിയ സദിശങ്ങൾ ലഭി ക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ $\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} = \mathbf{A}$ ആകുന്നു. $\mathbf{A_1}$ ഏക സദിശം $\hat{\mathbf{i}}$ യ്ക്കും $\mathbf{A_2}$, ഏകസദിശം $\hat{\mathbf{j}}$ യ്ക്കും സമാന്ത രമാകയാൽ

$$\mathbf{A_1} = A_x\,\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{A_2} = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

ഇവിടെ A_x, A_y എന്നിവ രേഖീയ സംഖ്യകളാകുന്നു.

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.12)$$

ചിത്രം 4.9 (c) യിൽ ഇത് വ്യക്തമാക്കിയിരിക്കുന്നു. A_x, A_y എന്നീ ഭൗതിക അളവുകളെ സദിശം **A** യുടെ x, y ഘടകങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കാം. A_x ഒരു സദിശമല്ല, എന്നാൽ $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ ഒരു സദിശമാണ് എന്ന കാര്യം പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക. $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ ഉം അതുപോലെത്തന്നെ. ലഘുവായ ത്രികോണമിതി സമവാക്യങ്ങളുപയോഗിച്ച്, സദിശം **A** യുടെ അളവിന്റെയും x-അക്ഷവുമായി അതുണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് θ യുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ A_x, A_y എന്നിവയെ പ്രതിപാദിക്കാം.

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta \qquad (4.13)$$

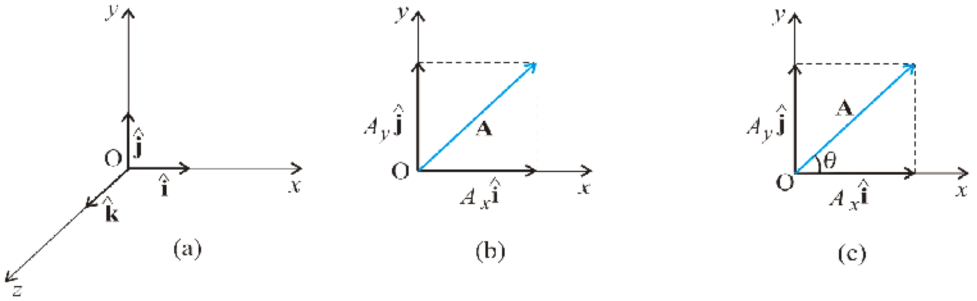
θ യുടെ മൂല്യത്തിനനുസരിച്ച് ഏതൊരു സദിശ ത്തിന്റെയും ഘടകസദിശം പോസിറ്റീവോ, നെഗറ്റീവോ പൂജ്യമോ ആകാമെന്ന് സമവാക്യം 4.13 ൽ നിന്നു വ്യക്ത മാണ്.

ഇപ്പോൾ സദിശം **A** ഒരു പ്രതലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തു വാൻ രണ്ടു മാർഗങ്ങളാണുള്ളത്.

(i) അതിന്റെ അളവ് **A** യും x അക്ഷവുമായി അതു ണ്ടാക്കുന്ന θ എന്ന കോണളവും ഉപയോഗിച്ച്.

(ii) **A** യുടെ ഘടകങ്ങളായ A_x, A_y എന്നിവ ഉപയോ ഗിച്ച്.

A യും θ യും നൽകിയിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ സമവാക്യം (4.13) ഉപയോഗിച്ച് A_x, A_y എന്നിവ ലഭ്യമാകുന്നതാണ്. അത് ഇപ്രകാരമാണ്



ചിത്രം 4.9 (a) x-,y-,z- അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ എന്നീ ഏകകസദിശങ്ങൾ (b) സദിശം A, x-, y-അക്ഷങ്ങളിൽ യഥാക്രമം A_x, A_y എന്നീ സദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. (c) A_x ഉം A_y ഉം യഥാക്രമം $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ എന്നീ ഏകകസദിശങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$
$$= A^2$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

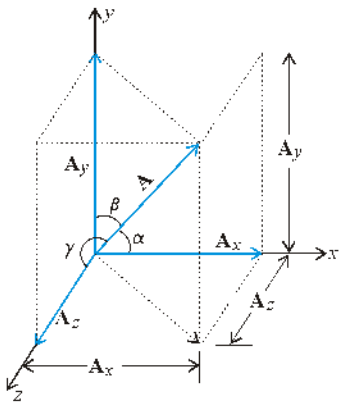
കൂടാതെ $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$.

അതായത് $\theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$ (4.15)

നാമിതുവരെ x-y പ്രതലത്തിലുള്ള ഒരു സദിശത്തെയാണ് പരിഗണിച്ചത്. ത്രിമാനത്തിൽ സദിശം x,y,z അക്ഷങ്ങളിലുള്ള മൂന്നു ഘടകസദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാൻ ഇതേ പ്രവർത്തനരീതി തന്നെയാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്. സദിശം **A** x,y,z അക്ഷങ്ങളുമായും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവുകൾ* യഥാക്രമം α, β, γ എന്നിവ ആണെങ്കിൽ (ചിത്രം 4.9(d)).

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \qquad (4.16a)$$

സാമാന്യമായി, നമുക്ക്, **A** ഇങ്ങനെ എഴുതാം:



ചിത്രം 4.9 (d) x,y,z അക്ഷങ്ങളിലുള്ള ഘടകസദിശ ങ്ങളായി സദിശം **A** വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.16b)$$

സദിശം **A** യുടെ അളവ്

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (4.16c)$$

സ്ഥാനസദിശം **r** നെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ അവതരിപ്പിക്കാം.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.17)$$

ഇവിടെ x, y, z എന്നിവ യഥാക്രമം സ്ഥാനസദിശം **r** ന്റെ x, y, z അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഘടകങ്ങൾ ആകുന്നു.

4.6 സദിശസങ്കലനം - അപഗ്രഥനരീതി (Vector addition - Analytical Method)

സദിശങ്ങളുടെയും അവയുടെ പരിണതഫലത്തിന്റെയും ഒരു നേർക്കാഴ്ച ലഭിക്കാൻ ഗ്രാഫിക്കൽ സങ്കലനരീതി വലിയതോതിൽ നമ്മെ സഹായിക്കുമെങ്കിലും ചില സമയങ്ങളിൽ ഇത് മടുപ്പുളവാക്കുന്നതും കൃത്യത കുറഞ്ഞതുമായ ഒരു മാർഗമായി അനുഭവപ്പെടാറുണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ തുക കാണാനായി, അവയുടെ അനുബന്ധഘടകങ്ങളെ പരസ്പരം യോജിപ്പിക്കുന്നത് താരതമ്യേന എളുപ്പമുള്ള മാർഗമാണ്. x, y പ്രതലത്തിലുള്ള **A, B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. അവയുടെ ഘടകങ്ങൾ യഥാക്രമം A_x, A_y, B_x, B_y ഉം ആകുന്നു.

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

R അവയുടെ തുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ, നമുക്ക് **R=A+B** എന്നെഴുതാം.

* α, β, γ എന്നിവ ത്രിമാന ഇടത്തിലുള്ള (space) കോണളവുകളാണ്. കോ- പ്ലാനാർ അല്ലാത്ത രേഖാ ജോടികൾക്കിടയിലെ കോണളവുകളാണിവ.

സദിശങ്ങൾ, കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവ് നിയമവും അസോസിയേറ്റീവ് നിയമവും അനുസരിക്കുന്നതിനാൽ സൗകര്യപ്രദമായ രീതിയിൽ സമവാക്യം

R = **A** + **B**

$$= \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right) \qquad (4.19a)$$

ക്രമീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

ആയതിനാൽ,

ഇവിടെ, $\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.19b)$

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ ആയതിനാൽ (4.20)

$$R_x = A_x + B_x, \; R_y = A_y + B_y \qquad (4.21)$$

അതായത് പരിണതസദിശം **R** ലെ ഓരോ ഘടകവും **A** യിലെയും **B** യിലെയും അനുബന്ധഘടക സദിശങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും. ത്രിമാന ഇടത്തിൽ,

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$B = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$R = A + B = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

ഇവിടെ, $R_x = A_x + B_x$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z \qquad (4.22)$$

എത്ര എണ്ണം സദിശങ്ങളുണ്ടെങ്കിലും അവയുടെ തുക, വ്യത്യാസം എന്നിവ കണ്ടെത്താനും ഈ മാർഗം പ്രയോജനപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, a,b,c എന്നീ സദിശങ്ങൾ

$$a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$b = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

$$c = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k} \qquad (4.23a)$$

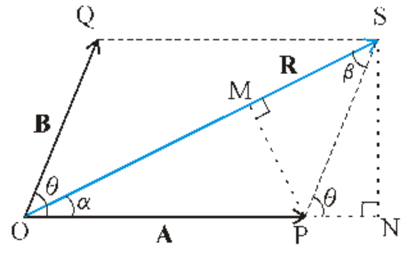
എന്നെഴുതാമെങ്കിൽ, സദിശം, **T** = **a** + **b** – **c** ഘടകങ്ങൾ താഴെപ്പറയുന്നവയാണ്.

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$

$$T_y = a_y + b_y - c_y \qquad (4.23b)$$

$$T_z = a_z + b_z - c_z .$$

▶ *ഉദാഹരണം 4.2: **A,B** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ പരിണതഫലത്തിന്റെ പരിമാണവും ദിശയും **A,B** ഇവയുടെ പരിമാണങ്ങളുടെയും അവക്കിടയിലുള്ള കോണളവുകളുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ എഴുതുക.*



ചിത്രം 4.10

ഉത്തരം : OP, OQ എന്നീ രശ്മികൾ θ എന്ന കോണളവിൽ നിൽക്കുന്ന **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങളാകുന്നു. (ചിത്രം (4.10)) സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരികരീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ, **OS** എന്ന സദിശം, പരിണതഫലം **R** നെ പ്രതിനിധീകരിക്കും.

R = A + B

OP ക്കു ലംബമായ രേഖയാണ് SN. അതുപോലെ OS നു ലംബമാണ് PM. ചിത്രത്തിന്റെ ജ്യാമിതിയിൽ നിന്ന്,

$OS^2 = ON^2 + SN^2$

പക്ഷേ, $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$SN = B\sin\theta$

$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

അഥവാ, $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (4.24a)$$

Δ OSN, ൽ $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$, കൂടാതെ,

Δ PSN, ൽ $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

അതുകൊണ്ട്, $R\sin\alpha = B\sin\theta$

അഥവാ, $\dfrac{R}{\sin\theta} = \dfrac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24b)$

സമാനമായി, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

അഥവാ, $\dfrac{A}{\sin\beta} = \dfrac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24c)$

സമവാക്യങ്ങൾ (4.24b) യും (4.24c) യും യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ,

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24d)$$

എന്നു ലഭിക്കും.

സമവാക്യം (4.24 d) ഉപയോഗിച്ച്,

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (4.24e)$$

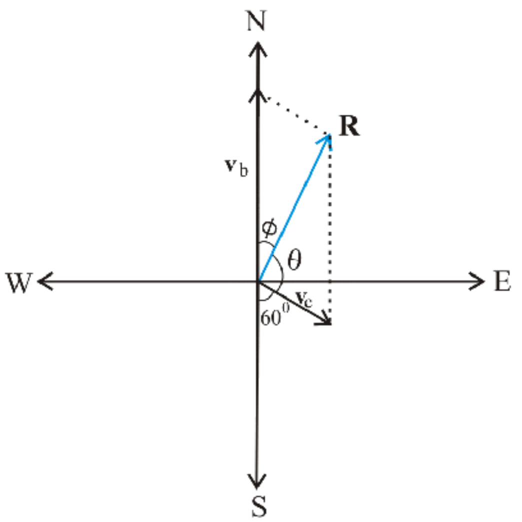
ഇവിടെ **R** ന്റെ മൂല്യം സമവാക്യം (4.24 a) യിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്നു.

അതായത്, $$\tan\alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (4.24f)$$

സമവാക്യം (4.24a) പരിണത സദിശത്തിന്റെ പരിമാണവും സമവാക്യങ്ങൾ (4.24c) യും (4.24f) ഉം അതിന്റെ ദിശയും നൽകുന്നു. സമവാക്യം (4.24a) യെ **കൊസൈൻ നിയമം** എന്നു വിളിക്കുമ്പോൾ സമവാക്യം (4.24d) **സൈൻ നിയമം** എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

▶ **ഉദാഹരണം 4.3:** ഒരു യന്ത്രവൽകൃതബോട്ട് 25 km/h എന്ന വേഗത്തിൽ വടക്കോട്ട് സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ജലപ്രവാഹം തെക്കുദിശക്ക് 60° കിഴക്കായി 10 km/h വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ബോട്ടിന്റെ പരിണിതപ്രവേഗം എത്രയെന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: ചോദ്യത്തിൽ നിർദേശിച്ചിരിക്കുന്ന അതേ ദിശകളിൽ ചിത്രം 4.11 ൽ സദിശം $\mathbf{v}_b$, യന്ത്രവൽകൃത ബോട്ടിന്റെ പ്രവേഗത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുമ്പോൾ, സദിശം $\mathbf{v}_c$ ജലപ്രവാഹത്തിന്റെ പ്രവേഗത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരിക രീതി ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദിശയിൽ പരിണിതപ്രവേഗം ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.11

കൊസൈൻനിയമം ഉപയോഗിച്ച് **R** ന്റെ അളവ് കണ്ടെത്താം.

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10\,(-1/2)} \cong 22 \text{ km/h}$$

ദിശ ലഭിക്കാനായി സൈൻനിയമം പ്രയോഗിക്കാം.

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \quad \text{or,} \quad \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^\circ}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$$\phi \cong 23.4^\circ$$

4.7 ഒരു പ്രതലത്തിലെ ചലനം (Motion in a plane)

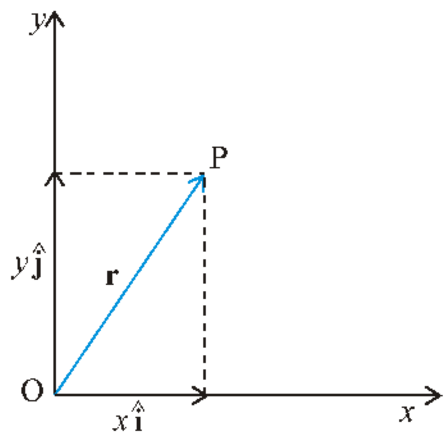
ഈ പാഠഭാഗത്തിൽ ദ്വിമാനതലത്തിലെ ചലനത്തെ സദിശങ്ങളുപയോഗിച്ച് എങ്ങനെ വിവരിക്കാമെന്നു നമുക്കു കാണാം.

4.7.1 സ്ഥാനസദിശവും സ്ഥാനാന്തരവും (Position Vector and Displacement)

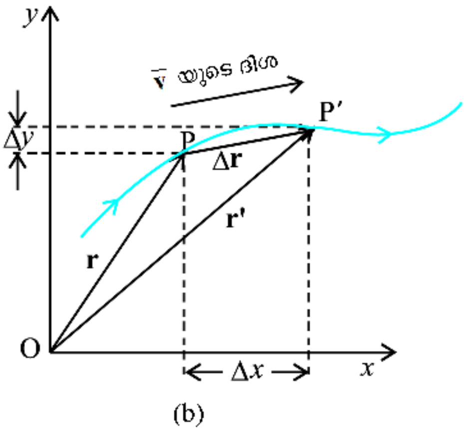
ഒരു x-y അവലംബകത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി (ചിത്രം 4.12) ഒരു പ്രതലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന **p** എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശം **r** ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\mathbf{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

ഇവിടെ സ്ഥാനസദിശം **r** ന്റെ x, y അക്ഷങ്ങളിലെ ഗുണാങ്കങ്ങളാണ് യഥാക്രമം x ഉം y ഉം അഥവാ വസ്തുവിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങളാണ് എന്നും പറയാവുന്നതാണ്.



(a)



(b)

ചിത്രം *4.12* (a) സ്ഥാനസദിശം **r**, **(b)** ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസദിശം $\Delta\mathbf{r}$ ഉം ശരാശരി പ്രവേഗം v യും

കട്ടികൂടിയ വക്രരേഖയാൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പാതയിലൂടെ ഒരു കണിക സഞ്ചരിക്കുന്നതായി കരുതുക. t എന്ന സമയത്ത് അത് P യിലും t′ സമയത്ത് അത് P′ ലും ആകുന്നു. (ചിത്രം 4.12(b)) അപ്പോൾ, കണികയുടെ സ്ഥാനാന്തരം

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

അത് P യിൽനിന്നു P′ ലേക്കു നയിക്കപ്പെടുന്ന സദിശമാണ്. സമവാക്യം (4.25) നെ ഘടകരൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$\Delta\mathbf{r} = \left(x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

ഇവിടെ, $\Delta x = x' - x,\ \Delta y = y' - y \qquad (4.26)$

പ്രവേഗം (Velocity)

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം $(\bar{\mathbf{v}})$ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും അനുബന്ധസമയ ഇടവേളയുടെയും അനുപാതമാണ്.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

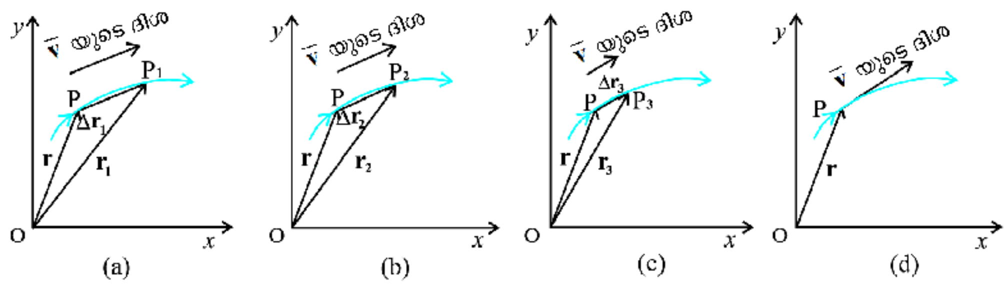
അഥവാ, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \bar{v}_y\,\hat{\mathbf{j}}$

$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, ആയതിനാൽ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശ $\Delta\mathbf{r}$ ന്റെ അതേ ദിശ തന്നെയായിരിക്കും. (ചിത്രം 4.12) സമയഇടവേള പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യമായിരിക്കും ആ നിമിഷത്തിലെ തൽക്ഷണപ്രവേഗം (Instantaneous Velocity).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

4.13(a) മുതൽ 4.13(d) വരെയുള്ള ചിത്രങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ ഈ ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയുടെ അർഥം എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്. ഈ ചിത്രങ്ങളിൽ, കട്ടികൂടിയ വക്രരേഖ വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. t സമയത്ത് വസ്തു P യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. P_1, P_2, P_3 എന്നിവ യഥാക്രമം Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ സമയ ഇടവേളകൾക്കു ശേഷമുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങളാകുന്നു.

Δr_1, Δr_2, Δr_3 എന്നിവ യഥാക്രമം Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ സമയ ഇടവേളകളിൽ വസ്തുവിനുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരങ്ങളാകുന്നു. Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ ചെറുതായിവരുന്ന ഇടവേളകളിലെ ഈ വസ്തുവിന്റെ ശരാശരിപ്രവേഗത്തിന്റെ $(\bar{v})$ ദിശ യഥാക്രമം 4.13 (a), (b), (c) എന്നീ ചിത്രങ്ങളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, $\Delta t \to 0$, ആകുമ്പോൾ $\Delta\mathbf{r} \to 0$ ആകുന്നതായി കാണാം. കൂടാതെ അത് പാതയുടെ തൊടുവരയിലൂടെയാണ് അനുഭവപ്പെടുന്നത്. (ചിത്രം 4.13(d)) അതുകൊണ്ട് ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലെയും പ്രവേഗദിശ ആ ബിന്ദുവിൽ നാം വരക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ദിശയിലായിരിക്കും. അതായത്, ആ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗദിശ അതിന്റെ ചലനത്തിന്റെ ദിശയിൽ തന്നെ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം *4.13* സമയ ഇടവേള Δt പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ ശരാശരിപ്രവേഗം **v** ആയി മാറുന്നു. $\bar{\mathbf{v}}$ യുടെ ദിശ, പാതയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലെയും തൊടുവരക്കു സമാന്തരമാണ്.

v ഘടകരൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

അഥവാ, $\mathbf{v} = \hat{\mathrm{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathrm{j}}\frac{dy}{dt} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}}$

ഇവിടെ $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$ (4.30a)

അതുകൊണ്ട്, x, y നിർദേശാങ്കങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ സമയത്തിന്റെ ഫലനമായി അറിയാമെങ്കിൽ മേൽപ്പറഞ്ഞ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് v_x ഉം v_y ഉം കണ്ടെത്താം.

അപ്പോൾ, **v** യുടെ അളവ്

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4.30b)$$

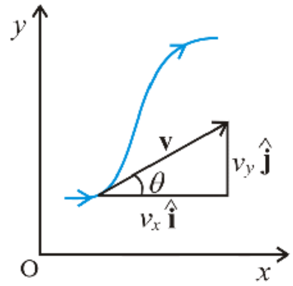
കൂടാതെ, **v** യുടെ ദിശ, θ എന്ന കോണളവിലൂടെ ലഭിക്കുന്നു.

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad (4.30c)$$

v എന്ന പ്രവേഗസദിശത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ v_x, v_y എന്നിവയും കോണളവ് θ യും ചിത്രം 4.14 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ത്വരണം (Acceleration)

x,y പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന് Δt എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ശരാശരി ത്വരണം ആ വസ്തുവിനുണ്ടായ പ്രവേഗമാറ്റത്തെ സമയ ഇടവേള കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഫലമാണ്.



ചിത്രം 4.14 പ്രവേഗസദിശം **v** യുടെ ഘടകസദിശങ്ങളായ v_x, v_y എന്നിവയും x അക്ഷവുമായുണ്ടാക്കുന്ന θ എന്ന കോണളവും. ഇവിടെ $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$ യും ആകുന്നു.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(v_x\hat{i} + v_y\hat{j})}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} \qquad (4.31a)$$

അഥവാ, $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$. (4.31b)

ഇവിടെ തൽക്ഷണ ത്വരണം എന്നത് സമയഇടവേള പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി ത്വരണത്തിന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യം (limiting value) ആകുന്നു.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (4.32a)$$

$\Delta v = \Delta v_x\hat{i} + \Delta v_y\hat{j}$, ആയതിനാൽ,

$$a = \hat{i}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{j}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

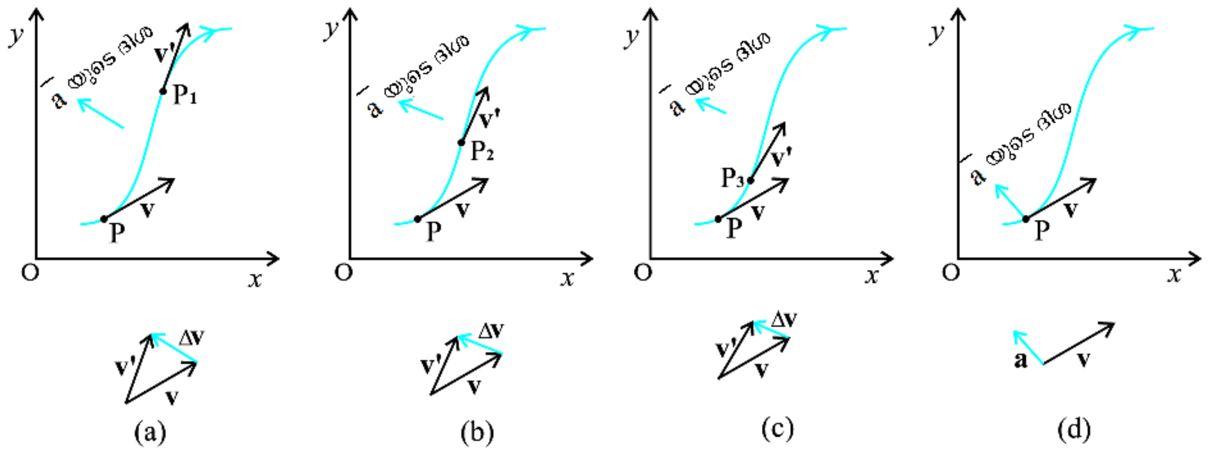
അഥവാ, $a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ (4.32b)

ഇവിടെ, $a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$ (4.32c)*

പ്രവേഗത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നതുപോലെ ഒരു ഗ്രാഫിൽ വസ്തുവിന്റെ ചലനപാത രേഖപ്പെടുത്തി, അതിന്റെ ത്വരണത്തെ നിർവചിക്കാനായുള്ള ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയെ ഗ്രാഫിക്കലായി മനസ്സിലാക്കാം. 4.15(a) മുതൽ 4.15(d) വരെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ ഇതു വ്യക്തമാക്കുന്നു. t സമയത്തെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം P ആണെങ്കിൽ P_1, P_2, P_3 ഇവ യഥാക്രമം Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ ഇടവേളകൾക്കു ശേഷമുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങളാകുന്നു ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$). P, P_1, P_2, P_3 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലെ പ്രവേഗസദിശങ്ങളും 4.15(a), (b),(c) എന്നീ ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നു വ്യക്തമാണ്. ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണനിയമം ഉപയോഗിച്ചാണ് Δ**v** കണ്ടെത്തുന്നത്.

* x, y എന്നിവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ a_x, a_y എന്നിവയെ ഇങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്താം:

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$



ചിത്രം *4.15* മൂന്നു വ്യത്യസ്ത സമയ ഇടവേളകളിലെ ശരാശരി ത്വരണം (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$). (d) സമയ പരിധി $\Delta t \rightarrow 0$ ആകുമ്പോൾ ശരാശരി ത്വരണം, തൽക്ഷണത്വരണമാകുന്നു.

നിർവചനമനുസരിച്ച്, Δ**v** യുടെ അതേ ദിശയിലായിരിക്കും ശരാശരി ത്വരണവും അനുഭവപ്പെടുന്നത്. Δt മാറുന്നതനുസരിച്ച് Δ**v** യുടെ ദിശയും മാറുന്നതായി കാണാം. തൽഫലമായി, ത്വരണത്തിന്റെ ദിശയും മാറുന്നു. അവസാനമായി ചിത്രം 4.15(d) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, $\Delta t \rightarrow 0$ എന്ന മൂല്യത്തിലേക്ക് ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ശരാശരി ത്വരണം, തൽക്ഷണത്വരണം (instantaneous acceleration) ആയി മാറുന്നു. മാത്രമല്ല, അതിനു ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന രീതിയിലുള്ള ദിശയും ഉണ്ടാകുന്നു.

ഏകമാനചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവുമെല്ലാം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരേ നേർരേഖയിലായിരിക്കുമെന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം (ഒരേ ദിശയിലോ അല്ലെങ്കിൽ വിപരീതദിശയിലോ) എന്നാൽ, ദ്വിമാനത്തിലോ ത്രിമാനത്തിലോ ഉള്ള വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിൽ പ്രവേഗവും ത്വരണവും തമ്മിൽ 0° യ്ക്കും 180° യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ഏതൊരു കോണളവും ആകാം.

▶ **ഉദാഹരണം 4.4:** ഒരു കണികയുടെ സ്ഥാനം, **r** എങ്കിൽ,

$$\mathbf{r} = 3.0t\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}}$$

ഇവിടെ t സെക്കന്റിലും **r** മീറ്ററിലുമാകുംവിധം, ഓരോ പദത്തിലെയും ഗുണകങ്ങൾ (coefficients) അനുയോജ്യമായ ഏകകങ്ങ ളിലാണ്. (a) **v** (t) യും **a**(t) യും കണ്ടെത്തുക. t=1.0 സെക്കന്റ് സമയത്തെ **v**(t) യുടെ അളവും ദിശയും കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം : $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3.0\,t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}\right)$

$$= 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = +4.0\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0 \text{ m s}^{-2}$ (y- ദിശയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നു).

At $t = 1.0$ s, $\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$

t=1.0 സെക്കന്റാകുമ്പോൾ,

$$v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$$ (x-അക്ഷവുമായി)

4.8 ഒരു പ്രതലത്തിലെ സമത്വരണത്തിലുള്ള ചലനം (Motion in a plane with constant acceleration)

ഒരു വസ്തു സമത്വരണത്തോടെ x-y പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്നതായി കരുതുക. ഒരു സമയ ഇടവേളയില ത്രയും വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി ത്വരണത്തിന് ഈ സ്ഥിരമൂല്യംതന്നെയായിരിക്കും. t=0 എന്ന സമയത്ത് hk Xph nsâ {] thKw $\mathbf{v}_0$ യും t സമയത്ത് അത് **v** യും ആകുന്നുവെങ്കിൽ, നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t}$$

അഥവാ, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ (4.33a)

ഘടകങ്ങളായി എഴുതുമ്പോൾ,

$$v_x = v_{ox} + a_x t$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t \quad (4.33b)$$

വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം **r**, സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നമുക്കിപ്പോൾ പരിശോധിക്കാം. ഏകമാനചലനത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച അതേ മാർഗം തന്നെ ഇവിടെയും പിന്തുടരാം. $\mathbf{r}_0$, **r** എന്നിവ യഥാക്രമം t=0, t=t എന്നീ സമയങ്ങളിലെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശങ്ങളാകുന്നു. ഈ സമയങ്ങളിലെ പ്രവേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം $\mathbf{v}_0$, **v** എന്നിവയുമാകുന്നു. അപ്പോൾ, t എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗം $(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})/2$ ആകുന്നു. ഈ ഇടവേളയെ ശരാശരി പ്രവേഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വസ്തുവിനുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരം ലഭിക്കും.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_0}{2}\right) t = \left(\frac{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t) + \mathbf{v}_0}{2}\right) t$$

$$= \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

അഥവാ, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ (4.34a)

മേൽസമവാക്യത്തിന്റെ (4.34a) ഡെറിവേറ്റീവ് (derivative), അതായത്, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ കാണുന്നതിലൂടെ, സമവാക്യം (4.33a) ലഭിക്കുന്നു. കൂടാതെ, t = 0 സമയത്ത് $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ആകുന്നുവെന്ന നിബന്ധനയും അത് പാലിക്കുന്നതായി കാണാം. ഘടകരൂപത്തിൽ സമവാക്യം (4.34a) ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$x = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (4.34b)$$

x- ദിശയും y- ദിശയും പരസ്പരം ആശ്രയിക്കുന്നില്ല എന്നതാണ് സമവാക്യം (4.34b) യുടെ വ്യാഖ്യാനം. **അതായത് ഒരു പ്രതലത്തിലെ അഥവാ ദ്വിമാനത്തിലെ ചലനത്തെ സമത്വരണത്തിലുള്ള ഏകകാലികവും വ്യത്യസ്തവും പരസ്പര ലംബങ്ങളുമായ രണ്ട് ഏകമാനചലനങ്ങളായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്.** ഈ പ്രധാനപ്പെട്ട ഫലം ദ്വിമാനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെ വിശകലനം ചെയ്യാൻ സഹായിക്കുന്നു. ത്രിമാനചലനത്തിലും സമാനഫലം നിലനിൽക്കുന്നതാണ്. ലംബദിശകളുടെ സ്വീകാര്യത പല ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങളിലും വളരെയേറെ പ്രയോജനപ്രദമാണ്. പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനത്തിൽ (സെക്ഷൻ 4.10) ഈ സൗകര്യം നാം കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കും.

▶ **ഉദാഹരണം 4.5 :** അവലംബകകേന്ദ്രത്തിലിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഒരു ബാഹ്യബലത്താൽ അതിൽ $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s² എന്ന ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുകയും തൽഫലമായി t=0 സമയത്ത് 5.0 $\hat{\mathbf{i}}$ m/s എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ x-y പ്രതലത്തിൽ അത് ചലനമാരംഭിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. (a) x-നിർദേശാങ്കം 84m ആകുന്ന നിമിഷത്തിൽ, y- നിർദേശാങ്കം എത്ര? (b) ഈ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ വേഗം എത്രയായിരിക്കും?

ഉത്തരം: വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}t + (1/2)(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

അതിനാൽ, $x(t) = 5.0t + 1.5t^2$

$$y(t) = +1.0t^2$$

ഇവിടെ $x(t)$ = 84 m, എന്നു നൽകിയിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ, t= ?

$$5.0\,t + 1.5\,t^2 = 84 \Rightarrow t = 6\ \text{s}$$

At t = 6 s ആകുമ്പോൾ, $y = 1.0\,(6)^2 = 36.0$ m

ഇപ്പോൾ പ്രവേഗം, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0\,t)\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,t\,\hat{\mathbf{j}}$

At $t = 6$ s ആകുമ്പോൾ $\mathbf{v} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$

വേഗം $= |\mathbf{v}| = \sqrt{23^2 + 12^2} \cong 26\ \text{m s}^{-1}$. ◀

4.9 ദ്വിമാനങ്ങളിലെ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം (Relative velocity in two dimensions)

'നേർരേഖാ ചലനം' എന്ന അധ്യായത്തിൽ 3.7 എന്ന ഭാഗത്ത് പരിചയപ്പെട്ട ആപേക്ഷികപ്രവേഗം എന്ന ആശയം ദ്വിമാനങ്ങളിലേക്കോ ത്രിമാനങ്ങളിലേക്കോ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. നിശ്ചലപ്രതലം പോലെയുള്ള ഒരു പൊതു അവലംബകത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി A, B എന്നീ വസ്തുക്കൾ യഥാക്രമം $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ എന്നീ വ്യത്യസ്ത പ്രവേഗങ്ങളിൽ സഞ്ചരിക്കു

ന്നതായി കരുതുക. അപ്പോൾ, B യെ അപേക്ഷിച്ച് A യുടെ പ്രവേഗം.

$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ (4.35a)

സമാനമായി A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ പ്രവേഗം

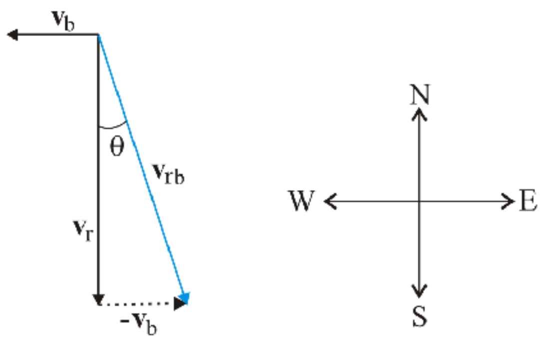
$\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$

അതിനാൽ, $\mathbf{v}_{AB} = -\mathbf{v}_{BA}$ (4.35b)

കൂടാതെ, $|\mathbf{v}_{AB}| = |\mathbf{v}_{BA}|$ (4.35c)

ഉദാഹരണം 4.6: $35 ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ ലംബമായി മഴ താഴേക്കു പതിക്കുന്നു. കിഴക്കു പടിഞ്ഞാറു ദിശയിൽ $12 ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ ഒരു സ്ത്രീ തന്റെ സൈക്കിളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. മഴയിൽ നിന്നു രക്ഷനേടാൻ ഏതു ദിശയിലാണ് തന്റെ കുട ചൂടേണ്ടത്?

ഉത്തരം: ചിത്രം 4.16 ൽ $\mathbf{v}_r$ മഴയുടെ പ്രവേഗവും $\mathbf{v}_b$ അയാൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന സൈക്കിളിന്റെ പ്രവേഗവും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു പ്രവേഗങ്ങളും നിശ്ചല പ്രതലത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതാണ്. അയാൾ സൈക്കിളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനാൽ, അയാൾക്ക് അനുഭവപ്പെടുന്ന മഴയുടെ പ്രവേഗം എന്നത് സഞ്ചരിക്കുന്ന സൈക്കിളിന്റെ പ്രവേഗത്തിന് ആപേക്ഷികമാണ്. അതിനാൽ, $v_{rb} = v_r - v_b$



ചിത്രം 4.16

ഈ ആപേക്ഷികപ്രവേഗ സദിശം ചിത്രം 4.16 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. അത് ലംബവുമായി θ എന്ന കോൺ സൃഷ്ടിക്കുന്നുണ്ട്. അതായത്,

$$\tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

അഥവാ, $\theta \cong 19^0$

അതിനാൽ, ലംബവുമായി 19° കോണളവുണ്ടാക്കുന്ന വിധം പടിഞ്ഞാറുവശത്തേക്കു തിരിച്ചായിരിക്കണം അയാൾ കുട പിടിക്കേണ്ടത്.

ഉദാഹരണം 4.1 ഉം ഇതുമായുള്ള വ്യത്യാസം ശ്രദ്ധയോടെ മനസ്സിലാക്കുക. ഉദാഹരണം 4.1 ൽ കുട്ടി അനുഭവിക്കുന്നത് രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ പരിണതഫലമാണ് (സദിശങ്ങളുടെ തുക) എങ്കിൽ, ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ സൈക്കിളിനെ ആധാരമാക്കി ചലിക്കുന്ന (പെയ്യുന്ന) മഴയുടെ പ്രവേഗമാണ് അനുഭവിക്കുന്നത്. (ഇരുപ്രവേഗങ്ങളുടെയും സദിശ വ്യത്യാസം)

4.10 പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം (Projectile Motion)

വിവിധ ഭാഗങ്ങളിലായി നാം മനസ്സിലാക്കിയ ആശയങ്ങളുടെ പ്രയോഗമെന്ന നിലക്ക് നമുക്കൊരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ ചലനം പരിഗണിക്കാം. എറിയുകയോ വിക്ഷേപിക്കുകയോ ചെയ്തശേഷം ഒരു വസ്തു അതിന്റെ പറക്കൽ എന്ന അവസ്ഥയിലാണെങ്കിൽ, അതിനെ **പ്രൊജക്ടൈൽ** എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഫുട്ബോൾ, ക്രിക്കറ്റ്ബോൾ, ബേസ്ബോൾ എന്നിവയെല്ലാം പ്രൊജക്ടൈലുകൾ ആവാം. രണ്ടു വ്യത്യസ്തവും ഏകകാലികവുമായ ചലനഘടകങ്ങളുടെ ഫലമായി പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനത്തെ കരുതാവുന്നതാണ്.

ഇതിൽ തിരശ്ചീനതലത്തിലുള്ള ഘടകത്തിന് ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നില്ല. ലംബമായ ദിശയിലെ ഘടകത്തിന് ഗുരുത്വാകർഷണംമൂലമുള്ള സമത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നു. 'ഡയലോഗ് ഓൺ ദ ഗ്രേറ്റ് വേൾഡ് സിസ്റ്റംസ്' (1632) എന്ന പുസ്തകത്തിലൂടെ ഗലീലിയോ ആണ് ആദ്യമായി തിരശ്ചീനവും ലംബവുമായ ഘടകങ്ങൾക്കിടയിലെ ആശ്രിതത്വമില്ലായ്മ പ്രസ്താവിച്ചത്.

നമ്മുടെ ചർച്ചയിൽ പ്രൊജക്ടൈൽചലനത്തിൽ കാര്യമായ ഒരു പ്രഭാവം ചെലുത്താൻ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധത്തിനാകുമെന്ന് കണക്കാക്കുന്നില്ല. ചിത്രം 4.17 ൽ കാണുന്നതുപോലെ, $\mathbf{v}_0$ എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ x അക്ഷവുമായി θ_o എന്ന കോണളവു സൃഷ്ടിക്കുന്നതായി കരുതുക.

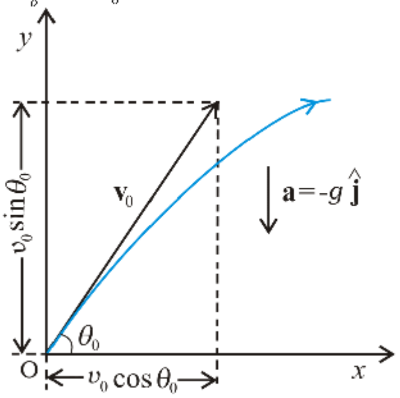
വിക്ഷേപത്തിനുശേഷം വസ്തുവിലനുഭവപ്പെടുന്ന ത്വരണം ഗുരുത്വാകർണം മൂലമുള്ളതാണ്. മാത്രമല്ല, അത് ലംബമായി താഴേക്കാണനുഭവപ്പെടുന്നതും.

$$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

അഥവാ, a_x 0, $a_y = -g$ (4.36)

പ്രാരംഭപ്രവേഗത്തിന്റെ (v_o) ഘടകങ്ങൾ താഴെപ്പറയുന്നവയാണ്.

$$v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$



ചിത്രം *4.17* v_o എന്ന ആദ്യ പ്രവേഗത്തിലും θ_o എന്ന കോണളവിലും വിക്ഷേപിതമായ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം.

$$v_{oy} = v_o \sin \theta_o \qquad (4.37)$$

ചിത്രം 4.17 ൽ കാണുന്നതുപോലെ വസ്തുവിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനം അവലംബകത്തിന്റെ കേന്ദ്രമായി എടുത്താൽ,

$x_o = 0,\ y_o = 0$

അപ്പോൾ സമവാക്യം (4.34b) ഇങ്ങനെ മാറുന്നു.

$$x = v_{ox} t = (v_o \cos \theta_o)\, t$$

$$y = (v_o \sin \theta_o)\, t - (\tfrac{1}{2}) g\, t^2 \qquad (4.38)$$

t സമയത്തുള്ള പ്രവേഗത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ സമവാക്യം (4.33b) ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$

$$v_y = v_o \sin \theta_o - g\, t \qquad (4.39)$$

സമവാക്യം (4.38) ന്റെ സഹായത്താൽ ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ t സമയത്തുള്ള x, y നിർദേശാങ്കങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. ഇവ പ്രധാനമായും പ്രാരംഭവേഗം v_0, വിക്ഷേപണ കോൺ θ_o എന്നിവയെ ആശ്രയിക്കുന്നു. പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം അപഗ്രഥിക്കാനായി x, y എന്നീ പരസ്പരലംബങ്ങളായ ദിശകൾ സ്വീകരിക്കുന്നത് ഈ പ്രക്രിയയെ കൂടുതൽ ലളിതമാക്കുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ.

പ്രവേഗത്തിന്റെ ഒരു x ഘടകം, സ്ഥിരമായി തുടരുമ്പോൾ y ഘടകം, നിർബാധപതനത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റേതുപോലെ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. ചിത്രം 4.18 ൽ ഇത്തരം ചില നിമിഷങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കലായി അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

പരമാവധി ഉയരത്തിൽ, $v_y = 0$ ആകുന്നുവെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക. അതിനാൽ,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 0$$

ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പാതയുടെ സമവാക്യം (Equation of path of a projectile)

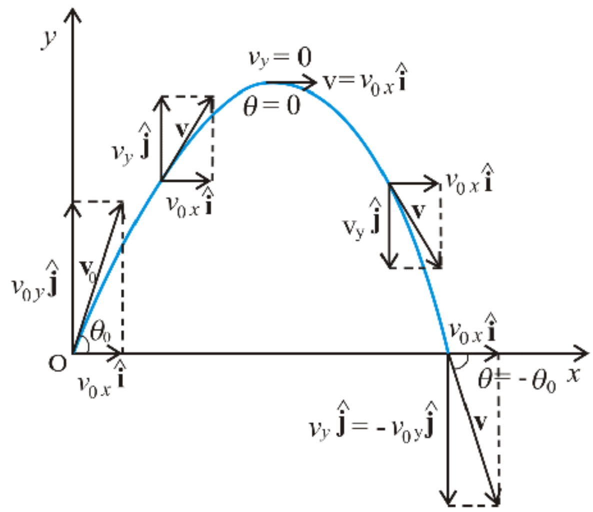
പ്രൊജക്ടൈൽ പിന്തുടരുന്ന പാതയുടെ സ്വഭാവമെന്താണ്?

ഇതു കാണാനായി സമവാക്യം (4.38) ൽ നൽകിയ x ന്റെയും y യുടെയും സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നു സമയം ഒഴിവാക്കിയാൽ മതിയാകും. അങ്ങനെ ചെയ്താൽ,

$$y = (\tan \theta_o)\, x - \frac{g}{2\,(v_o \cos \theta_o)^2}\, x^2 \qquad (4.40)$$

എന്നു ലഭിക്കും.

ഇവിടെ g, θ_o, v_o എന്നീ അളവുകൾക്ക് സ്ഥിരമൂല്യമായതിനാൽ സമവാക്യം (4.40) y $a\,x - b\,x^2$, എന്ന രൂപത്തിലാണ്. ഇവിടെ a, b എന്നിവ സ്ഥിര സംഖ്യകളാകുന്നു. ഇത് ഒരു പരാബൊളയുടെ സമവാക്യമാണ്. അതായത്, പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പാത ഒരു പരാബൊള ആകുന്നു. (ചിത്രം 4.18)



ചിത്രം *4.18* പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ സഞ്ചാരപാത ഒരു പരാബൊളയാണ്.

പരമാവധി ഉയരത്തിലെത്താനുള്ള സമയം (Time of Maximum Height)

ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ അതിന്റെ കൂടിയ ഉയരത്തിലെത്താനെടുക്കുന്ന സമയമെത്ര? ഈ സമയത്തെ t_m എന്ന് രേഖപ്പെടുത്താം. ഏറ്റവും ഉയരത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ v_y=0 ആയതിനാൽ സമവാക്യം 4.39 ൽ നിന്നും,

$$v_y = v_o \sin\theta_o \quad g\, t_m = 0$$

അഥവാ, $t_m \quad v_o \sin\theta_o /g$ (4.41a)

പ്രൊജക്ടൈൽ അതിന്റെ ചലനത്തിനെടുത്ത ആകെ സമയം, T_f ലഭിക്കാനായി സമവാക്യം 4.38 ൽ $y = 0$ എന്നു നൽകുക. അപ്പോൾ

$T_f = 2\ (v_o \sin\theta_o)/g$ (4.41b)

ഇവിടെ T_f എന്നത് പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പറക്കൽ സമയം (Time of flight) ആകുന്നു. പരാബൊളിക് പാതയുടെ സമമിതിയാൽ $T_f = 2\, t_m$ എന്നു കാണാൻ കഴിയും.

ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരമാവധി ഉയരം (Maximum Height of a Projectile)

ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ എത്തിച്ചേരുന്ന പരമാവധി ഉയരം h_m കണ്ടെത്താനായി സമവാക്യം 4.38 ൽ $t \quad t_m$ പകരമായി നൽകിയാൽ മതിയാകും.

$$y = h_m = \left(v_0 \sin\theta_0\right)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

അഥവാ, $h_m = \dfrac{\left(v_0 \sin\theta_0\right)^2}{2g}$ (4.42)

പ്രൊജക്ടൈൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന തിരശ്ചീന പരിധി (Horizontal Range of a Projectile)

പ്രാരംഭസ്ഥാനത്തുനിന്ന് $(x \quad y \quad 0)$ വിക്ഷേപിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ വിക്ഷേപണഗതിയിൽ, വീണ്ടും y=0 എന്ന സ്ഥാനത്ത് എത്തുന്നതു വരെയുള്ള തിരശ്ചീനദൂരത്തെ, പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ തിരശ്ചീന പരിധി (Horizontal range of a projectile) എന്നു വിളിക്കാം. T_f സമയംകൊണ്ട് പ്രൊജക്ടൈൽ സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരത്തെയാണ് തിരശ്ചീന പരിധിയെന്നു വിളിക്കുന്നത്. അതിനാൽ പരിധി R,

$$R = (v_o \cos\theta_o)\ (T_f)$$
$$=(v_o \cos\theta_o)\ \ (2\, v_o \sin\theta_o)/g$$

അഥവാ, $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$ (4.43 a)

ഈ സമവാക്യം കാണിക്കുന്നത്, ഒരു നിശ്ചിത പ്രാരംഭപ്രവേഗത്തിൽ (v_o) വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിൽ $\sin 2\theta_0$ ഏറ്റവും വലുതാകുമ്പോൾ R പരമാവധി മൂല്യം നേടുന്നു. അതായത്, θ= 45° ആകുമ്പോൾ. R ന് പരമാവധി മൂല്യം ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരമാവധി തിരശ്ചീന പരിധി ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$R_m = \frac{v_0^2}{g}$$

> **ഉദാഹരണം 4.7:** ഗലീലിയോയുടെ 'റ്റു ന്യൂ സയൻസസ്' എന്ന പുസ്തകത്തിലെ "45° യേക്കാൾ തുല്യ അളവിൽ കൂടിയതോ കുറഞ്ഞതോ ആയ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ചരിവുകളിൽ എന്നറിയപ്പെടുന്ന പ്രൊജക്ടൈലുകളുടെ പരിധി തുല്യമായിരിക്കും" എന്ന പ്രസ്താവന സത്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം : θ_o എന്ന കോണളവിൽ, v_o എന്ന പ്രാരംഭ പ്രവേഗത്തോടുകൂടി വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരിധി,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

ആകുന്നു.

$(45° + \alpha)$, $(45° - \alpha)$ എന്നീ കോണളവുകൾക്ക് $2\theta_o$ എന്നത് യഥാക്രമം $(90° + 2\alpha)$ യും $(90° - 2\alpha)$ യുമാകുന്നു. $\sin(90° + 2\alpha)$, $\sin(90° - 2\alpha)$ എന്നിവയുടെ വിലകൾ തുല്യമാണ്. രണ്ടിന്റെയും വില $\cos 2\alpha$. ആണ്. അതിനാൽ, 45° യേക്കാൾ തുല്യ അളവിൽ കൂടിയതും കുറഞ്ഞതുമായ α ചരിവുകളിൽ എറിയപ്പെടുന്ന പ്രൊജക്ടൈലുകളുടെ പരിധി എപ്പോഴും ഒന്നു തന്നെയായിരിക്കും.

> **ഉദാഹരണം 4.8:** ഒരു പർവതാരോഹകൻ, ഗ്രൗണ്ടിൽനിന്നു 490 മീ. ഉയരമുള്ള ഒരു പാറയുടെ അഗ്രഭാഗത്തായി നിൽക്കുന്നു. അയാൾ തിരശ്ചീനദിശയിൽ 15 ms^{-1} വേഗത്തിൽ ഒരു കല്ല് എന്നറിയുന്നു. വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിച്ചാൽ, കല്ല് നിലത്തെത്താനാവശ്യമായ സമയമെത്ര? കല്ല് നിലത്തു വന്നിടിക്കുന്ന വേഗം എത്ര? (g=9.8 m s^{-2} എന്നെടുക്കുക).

ഉത്തരം: പാറയുടെ അഗ്രം x-, y- അക്ഷങ്ങളുടെ കേന്ദ്രമായി (origin) തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. മാത്രമല്ല, കല്ല് എറിയുന്ന നിമിഷം t=0 എന്നും പരിഗണിക്കുന്നു. പ്രാരംഭപ്രവേഗദിശയിൽ x- അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവും അതിനു ലംബമായി മുകളിലേക്ക് y- അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയും സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ചലനത്തിന്റെ x, y ഘടകങ്ങൾ സ്വതന്ത്രമായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. ചലനസമവാക്യങ്ങൾ ഇവയാണ്.

$$x(t) \quad x_o + v_{ox} t$$

$$y(t) = y_o + v_{oy} t + (1/2) a_y t^2$$

ഇവിടെ, $x_o \quad y_o = 0$, $v_{oy} = 0$, $a_y \quad -g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$,

$v_{ox} = 15 \text{ m s}^{-1}$.

$x(t) = -490$m ആകുമ്പോൾ കല്ല് നിലത്തു വന്നിടിക്കുന്നു

$$-490 \text{ m} = -(1/2)(9.8) t^2.$$

ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്, $t=10$s എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

$x_o=y_o= 0$, $v_{oy}=0$, $ay = -g = -9.8 \text{ ms}^{-2}$, $v_{ox} = 15 \text{ ms}^{-1}$.

$$y(t) = -490 \text{ m}$$

$$t=10 \text{ cm}$$

പ്രവേഗത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $v_x \quad v_{ox}$ യുമാകുന്നു.

$v_y \quad v_{oy} - g t$

അതുകൊണ്ട് കല്ല് നിലത്തിടിക്കുമ്പോൾ :

$$v_{ox} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_{oy} = 0 - 9.8 \times 10 = -98 \text{ m s}^{-1}$$

അതിനാൽ, കല്ലിന്റെ വേഗം

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99 \text{ m s}^{-1}$$

ഉദാഹരണം 4.9: തിരശ്ചീനദിശക്കു മുകളിലായി 30° കോണളവിൽ 28 ms⁻¹ വേഗത്തിൽ ഒരു ക്രിക്കറ്റ് പന്ത് എറിയപ്പെടുന്നു. താഴെപ്പറയുന്നവ കണ്ടെത്തുക. (a) ആ ക്രിക്കറ്റ് പന്ത് എത്തിച്ചേരുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ഉയരം (b) അതേ നിരപ്പിലേക്ക് തിരിച്ചെത്താനാശ്യമായ സമയം (c) എറിയുന്ന ആളിൽ നിന്നു പന്തു വീഴുന്നിടത്തേക്കുള്ള ദൂരം.

ഉത്തരം : (a) പ്രൊജക്റ്റൈലിന്റെ പരമാവധി ഉയരം,

$$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_o)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30°)^2}{2\ (9.8)} \text{ m}$$

$$= \frac{14 \times 14}{2 \times 9.8} = 10.0 \text{ m}$$

(b) ഒരേ നിരപ്പിലേക്കു തിരിച്ചെത്താനാവശ്യമായ സമയം.

$$T_f = (2\ v_o \sin\theta_o)/g = (2 \times 28 \times \sin 30°)/9.8$$

$$= 28/9.8 \text{ s} = 2.9 \text{ s}$$

(c) എറിയുന്ന ആളിൽ നിന്ന്, അതേ നിരപ്പിൽ പന്തു തിരികെ വീഴുന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരം

$$R = \frac{(v_o^2 \sin 2\theta_o)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60°}{9.8} = 69 \text{ m}$$

വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിക്കുന്നു. ഈ അനുമാനം യഥാർഥത്തിൽ അർഥമാക്കുന്നതെന്ത്?

പ്രൊജക്റ്റൈൽ ചലനമെന്ന പാഠഭാഗം പരിഗണിച്ചപ്പോൾ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പ്രൊജക്റ്റൈലിൽ കാര്യമായ പ്രഭാവമൊന്നും സൃഷ്ടിക്കുന്നില്ല എന്നു പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നു. ആ പ്രസ്താവന യഥാർത്ഥത്തിൽ എന്താണ് അർഥമാക്കുന്നതെന്ന് നിങ്ങൾ തീർച്ചയായും മനസ്സിലാക്കണം. ഘർഷണം, വിസ്കസ്ബലം, വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം എന്നിവയെല്ലാം നശീകരണാത്മകങ്ങളായ ബലങ്ങളാണ്. ചലനത്തെ തടസ്സപ്പെടുന്ന ഈ വിധത്തിലുള്ള ഏതൊരു ബലത്തിന്റെ സാന്നിധ്യത്തിലും വസ്തുവിന് അതിന്റെ പ്രാരംഭ ഊർജവും അതിന്റെ ഫലമായി ആക്കവും നഷ്ടപ്പെടുന്നു. അങ്ങനെ, ഒരു പരാബൊളിക് പാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന പ്രൊജക്റ്റൈൽ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധത്താൽ, അതിന്റെ യഥാർഥപാതയിൽ നിന്നു വ്യതിചലിക്കും. തറയിൽനിന്ന് വിക്ഷേപിക്കുമ്പോഴുണ്ടായിരുന്ന അതേ പ്രവേഗത്തിൽ അത് തിരികെ, തറയിൽ പതിക്കുന്നില്ല. വായുവിന്റെ അസാന്നിധ്യത്തിൽ പ്രവേഗത്തിന്റെ x ഘടകം സ്ഥിരമായി തുടരുകയും y ഘടകത്തിനു മാത്രം തുടർച്ചയായി മാറ്റം സംഭവിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. എങ്കിലും, വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം ഈ രണ്ടു ഘടകങ്ങളെയും ബാധിക്കുന്നു. സമവാക്യം (4.43) ൽ കൂടി നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന പരിധിയെക്കാൾ കുറഞ്ഞ പരിധിയാണ് യഥാർഥത്തിൽ ലഭിക്കുന്നത്. പ്രൊജക്റ്റൈൽ എത്തുന്ന പരമാവധി ഉയരവും സമവാക്യം (4.42) ൽ നാം വിഭാവനം ചെയ്തതിലും കുറവായിരിക്കും. പറക്കൽ സമയത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റമെന്തായിരിക്കുമെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് മുൻകൂട്ടി കാണാനാകുമോ?

വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം കുറക്കാനായി നാം ചെയ്യുന്ന ഏതൊരു പരീക്ഷണവും കുറഞ്ഞ മർദ്ദത്തിലോ ശൂന്യതയിലോ നടത്തേണ്ടിവരും. ഇത് എപ്പോഴും പ്രായോഗികമല്ല.

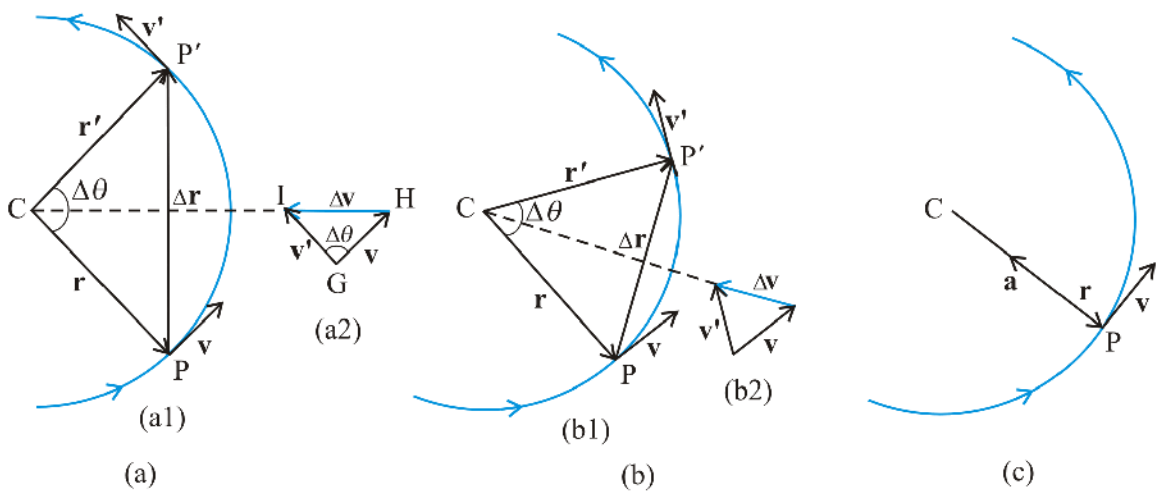
വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് നാം കണക്കാക്കുന്ന പരിധി, ഉയരം എന്നീ അളവുകൾക്ക് അതു പരിഗണിക്കാതെയുള്ള അളവുകളുമായി വളരെ കുറഞ്ഞ വ്യത്യാസമാണുള്ളത്. 'വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിക്കുന്നു' എന്നു പറയുന്നതിന്റെ യഥാർഥ പൊരുൾ അതാണ്. വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പരിഗണിച്ചുകൊണ്ടുള്ള ഗണിതക്രിയകൾ, അതു പരിഗണിക്കാതെയുള്ള ഗണിതക്രിയകളേക്കാൾ പ്രയാസമേറിയതാണ്.

4.11 സമവർത്തുളചലനം (Uniform circular motion)

ഒരു വസ്തു, സ്ഥിരവേഗത്തിൽ വർത്തുളപാതയിൽ ചലിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ വസ്തുവിന്റെ ചലനം **സമവർത്തുളചലനം** ആകുന്നു. സമം എന്ന വാക്ക് പരാമർശിക്കുന്നത് ചലനത്തിലുടനീളം സമമായ (സ്ഥിരമായി) വേഗം എന്നാണ്. ചിത്രം 4.19 ൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു വസ്തു R ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ സമവേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്നതായി കരുതുക. വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗദിശ അനുനിമിഷം മാറുന്നതിനാൽ, അതിൽ ഒരു ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നു. ഈ ത്വരണത്തിന്റെ അളവും ദിശയും നമുക്കു കണ്ടെത്താം.

ചിത്രം 4.19 യിൽ കാണുന്നതുപോലെ വസ്തു P,P' എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലായിരിക്കുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം യഥാക്രമം **r** ഉം **r'** ഉം പ്രവേഗം **v** ഉം **v'** ഉം ആകട്ടെ. നിർവചനപ്രകാരം ഒരു ബിന്ദുവിലെ പ്രവേഗം അനുഭവപ്പെടുന്നത് ചലനദിശയിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ നാം വരക്കുന്ന തൊടുവരയിലൂടെയാണ്. പ്രവേഗ സദിശങ്ങൾ **v** ഉം **v'** ഉം ചിത്രം 4.19(a1) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ത്രികോണ-സദിശസങ്കലനത്തിലൂടെ നമുക്ക് ലഭിച്ച Δ**v** യും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. (ചിത്രം 4.19 (a) പാത വർത്തുളമായതുകൊണ്ട് **v**, സ്ഥാനസദിശം **r** നു ലംബമാകുന്നു. ഇതുപോലെ **v'** എന്നത് **r'** നും ലംബമാകുന്നു. വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ശരാശരി ത്വരണം Δ**v** യിലൂടെയായതിനാൽ $\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ ശരാശരിത്വരണം $\bar{\mathbf{a}}$ Δr നു ലംബമായിരിക്കും. r, r' എന്നീ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവിനെ രണ്ടായി ഭാഗിക്കുന്ന രേഖയിൽ Δ**v** വക്കുകയാണെങ്കിൽ, അത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് നയിക്കപ്പെടുന്നതായി കാണാവുന്നതാണ്. ചെറിയ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള ഇതേ അളവുകൾ ചിത്രം 4.19 (b) യിൽ കാണാം. Δ**v** യും അതുകൊണ്ടുതന്നെ $\bar{\mathbf{a}}$ ഉം വീണ്ടും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ദിശയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നു. ചിത്രം 4.19 (c) യിൽ $\Delta t \rightarrow 0$ ആയതിനാൽ ശരാശരിത്വരണം തൽക്ഷണത്വരണമായി മാറുന്നു. അതും കേന്ദ്രത്തിന്റെ ദിശയിലായിരിക്കും കാണപ്പെടുക.* അങ്ങനെ, സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തു



ചിത്രം 4.19 സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവും സമയ ഇടവേള Δ*t* (a) യിൽനിന്നു (c) യിലെത്തുന്നതു വരെ കുറയുന്നു. (c) യിൽ Δ*t* പൂജ്യമാണ് പാതയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും ത്വരണത്തിന്റെ ദിശ വൃത്തപാതയുടെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും.

വിന്റെ ത്വരണം, എപ്പോഴും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കാണെ നുഭവപ്പെടുകയെന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. ഇനി ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം എത്രയാണെന്നു കണ്ടെത്താം. നിർവചനപ്രകാരം, a യുടെ പരിമാണം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ **r** നും **r'** നും ഇടയിലെ കോണളവ് $\Delta\theta$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. പ്രവേഗസദിശങ്ങൾ **v** ഉം **v'** ഉം എപ്പോഴും സ്ഥാനസദിശങ്ങൾക്ക് ലംബങ്ങളായതിനാൽ, അവയ്ക്കിടയിലെ കോണളവും $\Delta\theta$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ, സ്ഥാനസദിശങ്ങളാൽ രൂപപ്പെട്ട CPP' എന്ന ത്രികോണവും പ്രവേഗസദിശങ്ങൾ v, v', Δv എന്നിവയാൽ നിർമ്മിതമായ GHI എന്ന ത്രികോണവും സമാനമാണ് (ചിത്രം 4.19a) അതുകൊണ്ട്, പാദദൂരത്തിന്റെയും പാർശ്വദൂരത്തിന്റെയും അനുപാതം ഇരു ത്രികോണങ്ങളിലും തുല്യമായിരിക്കും. അതായത്,

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

അഥവാ, $$|\Delta \mathbf{v}| = v\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

അതുകൊണ്ട്,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v|\Delta \mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

Δt ചെറുതായാൽ $\Delta\theta$ യും ചെറുതാകുന്നു. തൽഫലമായി ചാപം PP' നെ ഏകദേശം |Δr| ആയി കണക്കാക്കാം.

$$|\Delta \mathbf{r}| \cong v\Delta t$$

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \cong v$$

അഥവാ, $$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = v$$

അതുകൊണ്ട് അഭികേന്ദ്രത്വരണം a_c എന്നത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$a_c = \left(\frac{v}{R}\right)v = v^2/R \qquad (4.44)$$

അങ്ങനെ, R ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ v വേഗത്തിൽ കറങ്ങുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം v^2/R അളവുള്ളതും എപ്പോഴും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് അനുഭവപ്പെടുന്നതുമായിരിക്കും. ഈ ത്വരണത്തെ അഭികേന്ദ്രത്വരണം (Centripetal acceleration) വിളിക്കാനുള്ള കാരണവും ഇതു തന്നെയാണ് (ഈ പദം നിർദേശിച്ചത് ന്യൂട്ടൺ ആണ്).

അഭികേന്ദ്രത്വരണത്തിന്റെ സമഗ്രമായ ഒരു വിശകലനം ആദ്യമായി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയത് 1673-ൽ ഡച്ച് ശാസ്ത്രകാരനായ ക്രിസ്റ്റ്യൻ ഹൈഗൻസ് (1629-1695) ആണ്. എങ്കിലും ന്യൂട്ടണ് ഈ കാര്യങ്ങളെക്കുറിച്ചെല്ലാം കുറച്ചു വർഷങ്ങൾ മുമ്പു തന്നെ അറിവുണ്ടായിരുന്നു. 'അഭികേന്ദ്ര' (centripetal) എന്ന പദം ഗ്രീക്ക് ഭാഷയിലെ 'കേന്ദ്രം തേടുന്നത്' (centre-seeking) എന്ന അർഥമുള്ള പദത്തിൽ നിന്നാണ് ഉണ്ടായത്. v ഉം R ഉം സ്ഥിരസംഖ്യകളായതുകൊണ്ട് അഭികേന്ദ്രത്വരണത്തിന്റെ മൂല്യം സ്ഥിരമായിരിക്കും. എങ്കിലും, കേന്ദ്രത്തിലേക്കനുഭവപ്പെടുന്ന രീതിയിൽ തന്നെ അനുനിമിഷം അതിന്റെ ദിശ മാറിക്കൊണ്ടേയിരിക്കും. അതിനാൽ, അഭികേന്ദ്രത്വരണം, ഒരു സ്ഥിരസദിശം ആകുന്നില്ല.

സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവും വിവരിക്കാൻ നമുക്ക് മറ്റൊരു മാർഗം കൂടിയുണ്ട്. വസ്തു Δt സമയംകൊണ്ട് P യിൽ നിന്നു P' ലേക്ക് ചലിക്കുന്നതിനാൽ Δt (= $t' - t$). സമയം കൊണ്ട് ചിത്രം 4.19 ൽ കാണുന്നതുപോലെ CP എന്ന രേഖ $\Delta\theta$ കോണളവിൽ തിരിയുന്നു. $\Delta\theta$ യെ കോണീയ സ്ഥാനാന്തരം എന്നു വിളിക്കുന്നു. എങ്കിൽ കോണീയ വേഗത ω (ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം ഒമേഗ) നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം: കോണീയ സ്ഥാനാന്തര മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെയാണ് കോണീയ വേഗം, ω (angular speed) എന്നു പറയുന്നത്.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.45)$$

* $\Delta t \to 0$, ആകുമ്പോൾ സ്ഥാനാന്തരസദിശം Δr, സ്ഥാനസദിശം r നു ലംബമാകുന്നു. ഈ ചെറിയ പരിധിയിൽ $\Delta \mathbf{v} \to 0$ ആവുകയും തത്ഫലമായി v യ്ക്ക് ലംബമാവുകയും ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട്, വൃത്തപരിധിയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും ത്വരണത്തിന്റെ ദിശ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും.

Δt സമയംകൊണ്ട് വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം Δs ആണെങ്കിൽ; അതായത്, PP' എന്നത് Δs ആണല്ലോ.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

പക്ഷേ, $\Delta s = R\,\Delta\theta$.

$$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\,\omega$$

അതുകൊണ്ട് $v = R\,\omega$ (4.46)

കോണീയവേഗത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ അഭികേന്ദ്ര ത്വരണത്തെ നമുക്ക് രേഖപ്പെടുത്താം.

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$ അതുകൊണ്ട്

$a_c = \omega^2 R$ എന്നെഴുതാം. (4.47)

ഒരു പരിക്രമണം പൂർത്തിയാക്കാൻ വസ്തുവിനാവശ്യമായ സമയത്തെ അതിന്റെ പരിവൃത്തി (time period, T) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സെക്കന്റിൽ നടത്തിയ പരിക്രമണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ അതിന്റെ ആവൃത്തി ν (=1/T) എന്നും പറയുന്നു. ഈ സമയ ഇടവേളയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $= 2\pi R$ ആണ്. അതുകൊണ്ട്

$v = 2\pi R/T = 2\pi R\,\nu$ (4.48)

ആവൃത്തിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\omega = 2\pi\nu$$
$$v = 2\pi R\,\nu$$
$$a_c = 4\pi^2 \nu^2 R \quad (4.49)$$

▶ ***ഉദാഹരണം 4.10:*** ഒരു വണ്ട്, 12 cm ആരമുള്ള, വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ചാലിലകപ്പെടുന്നു. അത് ആ ചാലിലൂടെ തുടർച്ചയായി നീങ്ങുകയും 100 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് 7 പരിക്രമണങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. (a) വണ്ടിന്റെ ചലനത്തിന്റെ കോണീയപ്രവേഗവും രേഖീയ പ്രവേഗവും എത്ര? (b) ത്വരണം ഒരു സ്ഥിര സദിശമാണോ? എന്താണതിന്റെ പരിമാണം?

ഉത്തരം: ഇത് സമവർത്തുളചലനത്തിനൊരു ഉദാഹരണമാണ്. ഇവിടെ R = 12 cm ആണ്. വണ്ടിന്റെ കോണീയ വേഗം ω, ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

രേഖീയവേഗം $v = \omega R = 0.44\ s^{-1} \times 12\ cm = 5.3\ cm\ s^{-1}$

പ്രവേഗം **v** യുടെ ദിശ വൃത്തത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലെയും തൊടുവരയിലൂടെ ആയിരിക്കും. ത്വരണം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കാണ് അനുഭവപ്പെടുന്നത്. ദിശ തുടർച്ചയായി മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനാൽ, ഇവിടെ ത്വരണം ഒരു സ്ഥിരസദിശമല്ല. എന്നാലും ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം സ്ഥിരമാണ്.

$$a = \omega^2 R = (0.44\ s^{-1})^2\ (12\ cm)$$
$$= 2.3\ cm\ s^{-2}$$

◀

സംഗ്രഹം

1. അദിശങ്ങളായ ഭൗതികഅളവുകൾക്കു പരിമാണം മാത്രമാണുള്ളത്. ദൂരം, വേഗം, മാസ്, താപനില എന്നിവയെല്ലാം അദിശ അളവുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്

2. സദിശങ്ങളായ ഭൗതിക അളവുകൾക്ക് പരിമാണവും ദിശയുമുണ്ട്. സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. സദിശബീജഗണിതത്തിലെ പ്രത്യേക നിയമങ്ങൾ അനുസരിക്കുന്നവയാണിവ.

3. λ എന്ന രേഖീയസംഖ്യകൊണ്ട് സദിശം **A** യെ ഗുണിച്ചാൽ ഫലം പുതിയൊരു സദിശമായിരിക്കും. അതിന്റെ പരിമാണം സദിശം **A** യുടെ അളവിന്റെ λ മടങ്ങായിരിക്കും. λ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകുന്നതിനനുസരിച്ച് പുതിയ സദിശത്തിന്റെ ദിശ **A** യുടെ ദിശക്ക് സമാനമോ വിപരീതമോ ആകാം.

4. **A, B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കലായി സങ്കലനം ചെയ്യാനായി ഹെഡ്ടു ടെയ്ൽ രീതിയോ സാമാന്തരികരീതിയോ ഉപയോഗിക്കാം.

5. സദിശസങ്കലനം കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവാണ്:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

അത് അസോസിയേറ്റീവ് നിയമവും അനുസരിക്കുന്നു:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C} - \mathbf{A} - (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

6. അളവു പൂജ്യമായുള്ള ഒരു സദിശമാണ് ശൂന്യസദിശം അഥവാ പൂജ്യസദിശം. അതിന്റെ അളവു പൂജ്യമായതിനാൽ, ദിശ പ്രത്യേകം പറയേണ്ടതില്ല. അതിന്റെ സ്വഭാവങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} - \mathbf{A}$$

$$\lambda\mathbf{0} - \mathbf{0}$$

$$0\,\mathbf{A} - \mathbf{0}$$

7. **A** യിൽനിന്നു സദിശം **B** യുടെ വ്യത്യാസം **A** യുടെയും സദിശം **–B** യുടെയും തുകയായാണ് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{A} \quad (-\mathbf{B})$$

8. ഒരു സദിശം A, ഒരേ പ്രതലത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന **a, b** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളിലൂടെ ഘടകസദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്:

$$\mathbf{A} = \lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b}$$

ഇവിടെ λ, μ എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളാകുന്നു.

9. സദിശം **A** യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഏകകസദിശത്തിന്റെ പരിമാണം ഒന്നും (one) ദിശ **A** യിലൂടെയുമാണ്

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

ഒരു കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയിൽ അളവ് ഒന്നായതും (one) x, y, z ദിശകളിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നതുമായ ഏകകസദിശങ്ങളാണ്, $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നിവ.

10. സദിശം $\mathrm{A} = \mathrm{A_x}\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{A_y}\hat{\mathrm{j}}$ എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ A_x, A_y എന്നിവ x, y ദിശകളിലെ ഘടകങ്ങളാകുന്നു. x- അക്ഷവുമായി സദിശം **A,** θ എന്ന കോണളവു

സൃഷ്ടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$.

11. വിശകലന രീതിയിൽ (Analytical method) സദിശങ്ങളെ സൗകര്യപ്രദമായി കൂട്ടാൻ സാധിക്കും. x, y പ്രതലത്തിലെ രണ്ടു സദിശങ്ങളായ **A** യുടെയും **B** യുടെയും തുക **R** ആകുന്നുവെങ്കിൽ:

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, ഇവിടെ, $R_x = A_x + B_x$ ഉം $R_y = A_y + B_y$

12. x, y പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ ആകുന്നുവെങ്കിൽ r ൽ നിന്നു പുതിയ സ്ഥാനം **r'** ലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\Delta\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$
$$= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}$$
$$- \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}$$

13. ഒരു വസ്തുവിന് Δt സമയത്തിൽ $\Delta\mathbf{r}$ സ്ഥാനാന്തരം സംഭവിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, അതിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം v ഇങ്ങനെ എഴുതാം: $\mathbf{v} - \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$. t എന്ന സമയത്ത് ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യം ആകുന്നു. (ഇവിടെ $\Delta t \to 0$ ആണ്)

$\mathbf{v} - \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ ഏകകസദിശ സങ്കേതമുപയോഗിച്ച്:

$v = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ ഇവിടെ, $v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}, v_z = \dfrac{dz}{dt}$

വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം ഒരു നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വക്രരേഖയിൽ നാം വരക്കുന്ന തൊടുവരയിലൂടെയാകും **v** അനുഭവപ്പെടുന്നത്.

14. Δt സമയംകൊണ്ട് വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം **v** യിൽനിന്നു **v'** ലേക്ക് മാറുന്നുവെങ്കിൽ, അതിന്റെ ശരാശരി ത്വരണം ഇങ്ങനെ എഴുതാം. $\mathrm{a} = \dfrac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{\Delta t} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ t എന്ന ഏതൊരു സമയത്തുള്ള വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം $\bar{\mathbf{a}}$ d $\Delta t \to 0$ ആകുമ്പോഴുള്ള $\bar{\mathbf{a}}$ ന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യമാണ്.

$$\mathrm{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

ഘടകരൂപത്തിൽ : $\mathrm{a} - \mathrm{a}_x\hat{i} + \mathrm{a}_y\hat{j} + \mathrm{a}_z\hat{k}$

ഇവിടെ, $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$

15. സമത്വരണത്തിൽ, $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ ഉള്ള ഒരു വസ്തു ഒരു പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്നു. t=0 എന്ന സമയത്ത് അതിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r}_o$ ആകുന്നുവെങ്കിൽ മറ്റേതൊരു സമയത്തും വസ്തു താഴെപ്പറയുന്ന ബിന്ദുവിലാവാം.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

കൂടാതെ അതിന്റെ പ്രവേഗം :

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_o \quad \mathbf{a}\,t$$

ഇവിടെ $\mathbf{v}_o$ എന്നത് t = 0 സമയത്തെ പ്രവേഗമാകുന്നു.

ഘടകരൂപത്തിൽ,

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_o + v_{oy}\,t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t$$

ലംബദിശകളിലൂടെയുള്ള വ്യത്യസ്തവും ഏകകാലികവുമായ രണ്ട് ഏകമാനചലനങ്ങളുടെ തുകയായി ഒരു പ്രതലത്തിലെ ചലനത്തെ വിശേഷിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

16. വിക്ഷേപണത്തിനുശേഷം പറക്കുന്ന വസ്തുവിനെ പ്രൊജക്ടൈൽ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു വസ്തു v_o എന്ന പ്രാരംഭപ്രവേഗത്തിൽ, x- അക്ഷവുമായി θ_o എന്ന കോണളവിൽ എറിയപ്പെടുന്നുവെന്നും ആരംഭസ്ഥാനം നിർദേശാങ്കകേന്ദ്ര വുമായി ചേർന്നുനിൽക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. അപ്പോൾ t സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനവും പ്രവേഗവും ഇങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്താം:

$$x - (v_o \cos \theta_o)\ t$$

$$y - (v_o \sin \theta_o)\ t - (1/2)\ g\ t^2$$

$$v_x - v_{ox} - v_o \cos \theta_o$$

$$v_y - v_o \sin \theta_o - g\ t$$

പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പാത പരാബൊളിക് ആകുന്നു. അത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.:

$$y = \left(\tan\theta_0\right)x \quad \frac{gx^2}{2\left(v_o \cos\theta_o\right)^2}$$

ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ ആർജിക്കുന്ന പരമാവധി ഉയരം,:

$$h_m = \frac{\left(v_o \sin\theta_o\right)^2}{2g}$$

ഈ ഉയരത്തിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം ആകുന്നു:

$$t_m = \frac{v_o \sin\theta_o}{g}$$

പ്രാരംഭസ്ഥാനത്തുനിന്നു വിക്ഷേപിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ, വിക്ഷേപണഗതിയിൽ വീണ്ടും y=0 എന്ന സ്ഥാനത്ത് എത്തുന്നതു വരെയുള്ള തിരശ്ചീനദൂരത്തെ, പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ തിരശ്ചീന പരിധി (Horizontal range of a projectile) എന്നു വിളിക്കാം. പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരിധി R,

$$R = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\theta_o$$

17. ഒരു വസ്തു സ്ഥിരവേഗത്തിൽ വർത്തുളപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ സമവർത്തുളചലനമെന്നു വിളിക്കാം. ത്വരണത്തിന്റെ അളവ് $a_c = v^2/R$ ആകുന്നു. അഭികേന്ദ്രത്വരണം a_c യുടെ ദിശ എപ്പോഴും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ആയിരിക്കും. കോണീയ അകലത്തിന്റെ മാറ്റനിരക്കിനെ കോണീയ വേഗത, ω എന്നു വിളിക്കുന്നു. അതിന്റെ പ്രവേഗം v യുമായുള്ള ബന്ധം $v - \omega R$ ആണ്.

വസ്തുവിലെ ത്വരണം $a_c - \omega^2 R$ ആകുന്നു.

വർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണപരിവൃത്തി T യും ν അതിന്റെ ആവൃത്തിയും ആയാൽ $\omega - 2\pi\nu$, $v - 2\pi\nu R$, $a_c - 4\pi^2\nu^2 R$.

ഭൗതിക അളവ്	പ്രതീകം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	കുറിപ്പ്
സ്ഥാനസദിശം	**r**	[L]	m	സദിശം. ഏതൊരു പ്രതീകമുപയോഗിച്ചും രേഖപ്പെടുത്താം.
സ്ഥാനാന്തരം	**Δr**	[L]	m	സദിശം. ഏതൊരു പ്രതീകമുപയോഗിച്ചും രേഖപ്പെടുത്താം.
പ്രവേഗം				
(a) ശരാശരി	$\bar{v}$	$[LT^{-1}]$	$m\,s^{-1}$	$\frac{\Delta r}{\Delta t}$ സദിശം
(b) തൽക്ഷണം	v			$\frac{dr}{dt}$ സദിശം
ത്വരണം				
(a) ശരാശരി	$\bar{a}$	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ സദിശം
(b) തൽക്ഷണം	**a**			$\frac{dv}{dt}$ സദിശം
പ്രൊജക്റ്റൈൽ ചലനം				
(a) പരമാവധി ഉയരത്തിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം	t_m	[T]	s	$t_m = \frac{v_o \sin\theta_o}{g}$
(b) പരമാവധി ഉയരം	h_m	[L]	m	$h_m = \frac{(v_o \sin\theta_o)^2}{2g}$
(c) തിരശ്ചീനപരിധി	R	[L]	m	$R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{g}$
വർത്തുളചലനം				
(a) കോണീയവേഗം	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{r}$
(b) അഭികേന്ദ്ര ത്വരണം	a_c	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	$= \frac{v^2}{r}$

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച പാതയുടെ നീളം പൊതുവിൽ അതിനുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ അളവിനു തുല്യമായിരിക്കില്ല. സ്ഥാനാന്തരം ആദ്യ - അവസാന സ്ഥാനങ്ങളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. സഞ്ചരിച്ച ദൂരം യഥാർഥ പാതയെയും ആശ്രയിക്കുന്നു. ചലനവേളയിൽ വസ്തുവിന്റെ ദിശക്കു മാറ്റമുണ്ടാകുന്നില്ല എങ്കിൽ മാത്രമേ, മേൽപ്പറഞ്ഞ രണ്ടു അളവുകളും തുല്യമാവുകയുള്ളൂ. മറ്റെല്ലാ അവസരങ്ങളിലും സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ അളവിലും കൂടിയ അളവായിരിക്കും സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തിന്.
2. ഒന്നാമത്തെ സൂചകമനുസരിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത സമയ ഇടവേളയിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തേക്കാൾ കൂടുതലോ തുല്യമോ ആവാം. ദൂരം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ അളവിനു തുല്യമാകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് ഈ ഭൗതിക അളവുകൾ തുല്യമാകുന്നത്.
3. സദിശസമവാക്യങ്ങൾ (4.33 a) യും (4.34 b) യും ഏതെങ്കിലും പ്രത്യേകം അക്ഷങ്ങൾക്ക് മാത്രമുള്ളവയല്ല. ഏതു രണ്ടു സ്വതന്ത്ര അക്ഷങ്ങളിലും നിങ്ങൾക്ക് അവയെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.
4. സമത്വരണത്തിനായുള്ള ചലനസമവാക്യങ്ങൾ സമവർത്തുളചലനത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാനാവില്ല. കാരണം, ഈ ചലനത്തിൽ ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം സ്ഥിരവും, ദിശ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതുമാണ്.
5. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ എന്നീ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത പ്രവേഗങ്ങൾക്ക് വിധേയമാകുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിണതപ്രവേഗം $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2$ ആകുന്നു. പരിണതപ്രവേഗം ആപേക്ഷികപ്രവേഗത്തിൽ നിന്നു വ്യത്യസ്തമാണെന്ന വസ്തുത പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. അതായത്, രണ്ടാമത്തെ വസ്തുവിനെ അപേക്ഷിച്ച് ഒന്നാമത്തേതിന്റെ പ്രവേഗം $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ആണ് ഇവിടെ $\mathbf{v}_1$ ഉം, $\mathbf{v}_2$ ഉം പൊതുവായ അവലംബകത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പ്രവേഗങ്ങളാണ്.
6. വർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനവേഗം സ്ഥിരമാകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് അതിന്റെ പരിണതത്വരണം കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് അനുഭവപ്പെടുക.
7. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയുടെ ആകൃതി നിശ്ചയിക്കപ്പെടുന്നത് ത്വരണത്തെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചല്ല, ചലനത്തിന്റെ പ്രാരംഭ അവസ്ഥകളെക്കൂടി ആശ്രയിച്ചാണ് (പ്രാരംഭപ്രവേഗവും പ്രാരംഭസ്ഥാനവും). ഉദാഹരണത്തിന്, തുല്യമായ ഗുരുത്വാകർഷണത്വരണത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത, അതിന്റെ പ്രാരംഭ അവസ്ഥകൾക്കനുസരിച്ച് ഒരു നേർരേഖയോ പരാബൊളയോ ആകാം.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

4.1 താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ഭൗതികഅളവും സദിശമോ അദിശമോ എന്നു പ്രസ്താവിക്കുക.

ഉള്ളളവ്, മാസ്, വേഗം, ത്വരണം, സാന്ദ്രത, മോളുകളുടെ എണ്ണം, പ്രവേഗം, കോണീയ ആവൃത്തി, സ്ഥാനാന്തരം, കോണീയപ്രവേഗം.

4.2 തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽനിന്നും അദിശ അളവുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

ബലം, കോണീയ ആക്കം, പ്രവൃത്തി, വൈദ്യുതകറന്റ്, രേഖീയ ആക്കം, വൈദ്യുതമണ്ഡലം, ശരാശരി പ്രവേഗം, കാന്തികമൊമന്റ്, ആപേക്ഷികപ്രവേഗം.

4.3 താഴെ നൽകിയ പട്ടികയിലുൾപ്പെട്ട ഒരേയൊരു സദിശ അളവു കണ്ടെത്തുക.

താപനില, മർദം, ആക്കം, സമയം, പവർ, ആകെ ദൂരം, ഊർജം, ഗുരുത്വപൊട്ടൻഷ്യൽ, കോയഫിഷ്യന്റ് ഓഫ് ഫ്രിക്ഷൻ, ചാർജ്

4.4 സദിശ, അദിശ ഭൗതിക അളവുകൾ ഉൾപ്പെട്ട, താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബീജഗണിതക്രിയകൾ അർഥപൂർണമാണോ എന്നു കാരണസഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.

(a) രണ്ട് അദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം, (b) ഒരേ ഡൈമൻഷനുള്ള ഒരു അദിശവും സദിശവുമായുള്ള സങ്കലനം

(c) ഏതൊരു സദിശവും ഏതൊരു അദിശവുമായുള്ള ഗുണനം (d) രണ്ട് അദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം (e) രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം (f) ഏതൊരു സദിശവും അതിന്റെ തന്നെ ഘടകസദിശവുമായുള്ള സങ്കലനം

4.5 താഴെ കൊടുത്ത ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിച്ച് അവ തെറ്റോ ശരിയോ എന്ന് കാരണ സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.

(a) ഒരു സദിശത്തിന്റെ അളവ് അഥവാ വലുപ്പം എപ്പോഴും ഒരു അദിശമായിരിക്കും.

(b) ഒരു സദിശത്തിന്റെ ഓരോ ഘടകവും എപ്പോഴും ഒരു അദിശമായിരിക്കും.

(c) ഒരു കണികയുടെ സ്ഥാനാന്തരസദിശത്തിന്റെ അളവ് എപ്പോഴും അതു സഞ്ചരിച്ച പാതയുടെ ദൂരത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

(d) ഒരു കണികയുടെ ശരാശരി വേഗം (സഞ്ചാരപാതയുടെ ആകെ നീളത്തെ പാത പൂർത്തിയാക്കാനെടുക്കുന്ന സമയം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക) എന്നത്, അതേ സമയ ഇടവേളയിലുള്ള അതിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ അളവിന് തുല്യമോ അതിലേറെയോ ആകാം.

(e) ഒരു പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യാത്ത മൂന്നു സദിശങ്ങൾ പരസ്പരം കൂട്ടിയാൽ ഒരിക്കലും ഒരു ശൂന്യ സദിശം ലഭിക്കുന്നില്ല.

4.6 താഴെ കൊടുത്ത സദിശ അസമത്വങ്ങൾ ജ്യാമിതീയമായോ അല്ലാതെയോ തെളിയിക്കുക.

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

(b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

(d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||$

ഓരോന്നിലെയും സമചിഹ്നം എപ്പോഴാണ് പ്രയോഗത്തിൽ വരുന്നത്?

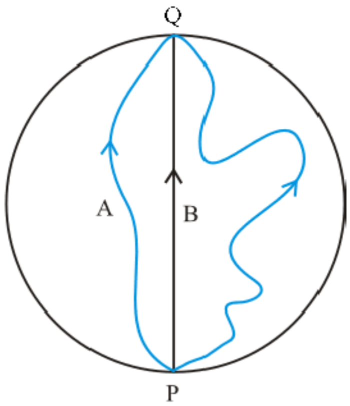
4.7 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ശരിയായ പ്രസ്താവനകൾ?

(a) **a, b, c, d** എന്നിവ നാലും നിർബന്ധമായും ശൂന്യസദിശങ്ങളാവും.

(b) **(a + c)** യുടെ അളവ് **(b + d)** യുടെ അളവിനു തുല്യമായിരിക്കും.

(c) സദിശം **a** യുടെ അളവ് ഒരിക്കലും **b, c, d** എന്നിവയുടെ തുകയുടെ പരിമാണത്തിലും കൂടുതലാകാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

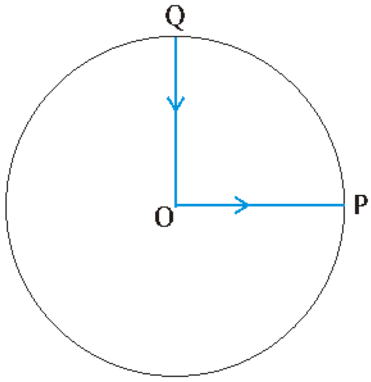
(d) സദിശം **a** യും **d** യും കൊ-ലീനിയർ അല്ലെങ്കിൽ സദിശം **(b + c)** തീർച്ചയായും **a** യുടെയും **d** യുടെയും പ്രതലത്തിലായിരിക്കും. എന്നാൽ അവ കൊ-ലീനിയർ ആയാൽ **(b+c)** സദിശങ്ങൾ **a** യും **d** യും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രേഖയിലാകും അനുഭവപ്പെടുക.



ചിത്രം. 4.20

4.8 ചിത്രം 4.20 ൽ കാണുന്നതുപോലെ 200 m ആരമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു ഹിമപ്രതലത്തിലൂടെ മൂന്ന് കുട്ടികൾ സ്കേറ്റിങ് നടത്തുന്നു. മൂവരും വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുള്ള **P** എന്ന ബിന്ദുവിലാരംഭിച്ച് വ്യത്യസ്ത പാതകളിൽ സഞ്ചരിച്ച് **P** യുടെ വ്യാസത്തിന്റെ എതിർബിന്ദുവായ **Q** ൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. ഓരോ കുട്ടിയുടെയും സ്ഥാനാന്തരസദിശത്തിന്റെ പരിമാണമെത്ര? ഏതു കുട്ടിക്കാണ് ഇത് യഥാർഥ സഞ്ചാരപാതയുടെ അതേ നീളമാകുന്നത്?

4.9 ചിത്രം 4.21 ൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു സൈക്ലിസ്റ്റ് ഒരു കി.മീ. ആരമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു പാർക്കിന്റെ കേന്ദ്രം O എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നാരംഭിച്ച്, പരിധിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിലെത്തുന്നു. അവിടെനിന്നു വൃത്തപരിധിയിലൂടെ നീങ്ങുന്ന അയാൾ QO എന്ന പാതയിലൂടെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ തിരികെ എത്തിച്ചേരുന്നു. യാത്രയ്ക്കെടുത്ത ആകെ സമയം 10 മിനിറ്റ് ആണെങ്കിൽ, സൈക്ലിസ്റ്റിന്റെ (a) പരിണതസ്ഥാനാന്തരം, (b) ശരാശരി പ്രവേഗം, (c) ശരാശരി വേഗം എന്നിവ എത്രയെന്നു കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം. 4.21

4.10 ഒരു തുറന്ന മൈതാനത്തിൽ, ഒരു മോട്ടോർ വാഹനസഞ്ചാരി ഓരോ 500 മീറ്ററിലും തന്റെ ഇടത്തേക്കു 60° കോണളവിൽ തിരിയുന്ന പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത വളവിൽനിന്ന് ആരംഭിച്ചശേഷം യഥാക്രമം മൂന്നാമത്തെയും ആറാമത്തെയും എട്ടാമത്തെയും വളവുകളിലെത്തുമ്പോഴുള്ള അയാളുടെ സ്ഥാനാന്തരം എത്രയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക. ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും അയാൾ സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരവും അയാൾക്കുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരവും താരതമ്യം ചെയ്യുക.

4.11 പട്ടണത്തിൽ പുതുതായി എത്തിച്ചേർന്ന ഒരു യാത്രികൻ, തന്റെ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നു നേർപാതയിൽ, 10 കി.മീ. അകലെയുള്ള ഹോട്ടലിലേക്ക് പോകാനാഗ്രഹിക്കുന്നു. എന്നാൽ വിശ്വസ്തനല്ലാത്ത ഒരു കാർഡ്രൈവർ, അയാളെ 23 കി.മീ. ദൈർഘ്യമുള്ള ഒരു വക്രപാതയിലൂടെ കൊണ്ടുപോവുകയും 28 മിനിറ്റുകൊണ്ട് ഹോട്ടലിലെത്തിക്കുകയും ചെയ്തു. (a) ടാക്സിയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്ര? (b) അതിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ അളവെത്ര? ഇവ രണ്ടും തുല്യമാണോ?

4.12 30 ms^{-1} വേഗത്തിൽ മഴ ലംബമായി വീഴുന്നു. ഒരാൾ സൈക്കിളിൽ വടക്കുനിന്നു തെക്കോട്ട് 10ms^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഏതു ദിശയിലാണ് അയാൾ തന്റെ കുട പിടിക്കേണ്ടത്?

4.13 നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ ഒരാൾക്ക് 4 km/h വേഗത്തിൽ നീന്താൻ കഴിയും. എന്നാൽ 1.0km വീതിയുള്ളതും 3.0km/h വേഗത്തിൽ ഒഴുകുന്നതുമായ ഒരു നദിക്കു കുറുകെ ലംബമായി നീന്തുകയാണെങ്കിൽ എത്ര സമയമെടുത്തായിരിക്കും അയാൾ നദിയുടെ മറുകരയിലെത്തുക? മറുകരയിലെത്തിമ്പോൾ നദിയുടെ തീരത്ത് എത്ര അകലത്തിലാണ് അയാൾ നീന്തിക്കയറുമ്പോൾ എത്ര ദൂരം അയാൾ പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തു നിന്നും ഒഴുക്കിന്റെ ദിശയിൽ സഞ്ചരിച്ചിട്ടുണ്ടാകും.

4.14 ഒരു തുറമുഖത്ത്, 72 km/h വേഗത്തിൽ കാറ്റു വീശിയടിക്കുന്നു. അവിടെ നങ്കൂരമിട്ട ഒരു നൗകയുടെ പായ്മരത്തിലുറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന കൊടി, വടക്കു-കിഴക്കു ദിശയിൽ പാറിപ്പറക്കുന്നു. നൗക വടക്കുദിശയിൽ 51 km/h വേഗത്തിൽ ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുകയാണെങ്കിൽ, പായ്മരത്തിലെ കൊടിയുടെ ദിശ എന്തായിരിക്കും?

4.15 നീളമുള്ള ഒരു ഹാളിന്റെ മുകൾത്തട്ടിന്റെ ഉയരം 25 m ആകുന്നു. 40ms^{-1} വേഗത്തിൽ എറിയപ്പെടുന്ന ഒരു പന്തിന് ഹാളിന്റെ മുകൾത്തട്ടിലിടിക്കാതെ, സഞ്ചരിക്കാനാവുന്ന പരമാവധി തിരശ്ചീന ദൂരം എത്ര?

4.16 ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരന് ഒരു പന്തിനെ തിരശ്ചീനദിശയിൽ എറിയാൻ സാധിക്കുന്ന പരമാവധി ദൂരം 100m ആണ്. നിലത്തുനിന്നു പരമാവധി എത്ര ഉയരത്തിലാണ് അയാൾക്ക് അതേ പന്തിനെ എറിയാൻ സാധിക്കുക?

4.17 നീളമുള്ള ഒരു നൂലിന്റെ അഗ്രത്തു ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന കല്ല്, ഒരു സ്ഥിരവേഗത്തിൽ തിരശ്ചീനതലത്തിൽ, വർത്തുളപാതയിൽ ചുഴറ്റുന്നു. കല്ല് 25 സെക്കന്റിൽ 14 പരിക്രമണങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുന്നുവെങ്കിൽ, കല്ലിനുണ്ടാകുന്ന ത്വരണത്തിന്റെ അളവും ദിശയും എന്തെന്ന് വ്യക്തമാക്കുക.

4.18 ഒരു വിമാനം,900 km/h എന്ന സ്ഥിരവേഗത്തിൽ, തിരശ്ചീനതലത്തിൽ 1 km ആരത്തിൽ വട്ടമിട്ടു പറക്കുന്നു. അതിന്റെ അഭികേന്ദ്രത്വരണത്തെ, ഭൂഗുരുത്വാകർഷണ ത്വരണവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

4.19 താഴെ കൊടുത്ത ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശ്രദ്ധയോടെ വായിക്കുകയും കാരണസഹിതം അവ തെറ്റോ ശരിയോ എന്നു പറയുകയും ചെയ്യുക.

(a) വർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിണതത്വരണം എപ്പോഴും ആരത്തിലൂടെ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും അനുഭവപ്പെടുക.

(b) ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിലെ പ്രവേഗസദിശം എപ്പോഴും വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയിലെ ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയിലൂടെയായിരിക്കും.

(c) സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പൂർണപരിക്രമണത്തിന്റെ ശരാശരിത്വരണ സദിശം എപ്പോഴും ശൂന്യസദിശമായിരിക്കും.

4.20 ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം $\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}}$ m എന്നു രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ t സെക്കന്റിലും r മീറ്ററിലുമാകുന്ന വിധം ഗുണാങ്കങ്ങൾക്ക് (coefficients) യോജ്യമായ യൂണിറ്റുകളും നൽകിയിരിക്കുന്നു.

(a) വസ്തുവിന്റെ **v, a** എന്നിവ കണ്ടെത്തുക. (b) t=2.0 സെക്കന്റിൽ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെ അളവും ദിശയും എന്ത്?

4.21 ഒരു വസ്തു, $10.0\ \hat{j}$ m/s എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ t = 0 s എന്ന സമയത്ത് നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിന്റെ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നു. വസ്തു $\left(8.0\hat{i}\ \ 2.0\hat{j}\right)$ m s^{-2} എന്ന സ്ഥിരത്വരണത്തോടെ x, y പ്രതലത്തിലാണ് ചലിക്കുന്നതെങ്കിൽ,(a) വസ്തുവിന്റെ x നിർദേശാങ്കം 16m ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്? ആ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ y നിർദേശാങ്കം എന്തായിരിക്കും? (b) ആ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ വേഗം എന്തായിരിക്കും?

4.22 $\hat{\mathbf{i}}$ ഉം $\hat{\mathbf{j}}$ ഉം യഥാക്രമം x,y അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഏകകസദിശങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ, $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ അളവും ദിശയും എന്തായിരിക്കും? **A**− $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ യഥാക്രമം $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$, $(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$ എന്നീ സദിശങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഘടകസദിശങ്ങൾ ഏതൊക്കെയായിരിക്കും? (നിങ്ങൾക്ക് ഗ്രാഫിക്കൽ രീതി ഉപയോഗിക്കാം).

4.23 സ്പേസിലെ നിയമനിബന്ധിതമല്ലാത്ത ഏതു ചലനത്തിലും താഴെ നൽകിയിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതു സമീകരണമാണ് ശരിയായുള്ളത്?

(a) $\mathbf{v}_{average} - (1/2)\ (\mathbf{v}\ (t_1) + \mathbf{v}\ (t_2))$

(b) $\mathbf{v}_{\ average} - [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\ ]\ /(t_2 - t_1)$

(c) $\mathbf{v}\ (t) - \mathbf{v}\ (0) + \mathbf{a}\ t$

(d) $\mathbf{r}\ (t) - \mathbf{r}\ (0) - \mathbf{v}\ (0)\ t - (1/2)\ \mathbf{a}\ t^2$

(e) $\mathbf{a}_{\ average} - [\ \mathbf{v}\ (t_2) - \mathbf{v}\ (t_1\ )]\ /(\ t_2 - t_1)$

(ഇവിടെ ശരാശരി എന്നതുകൊണ്ടർഥമാക്കുന്നത് t_1 മുതൽ t_2 വരെയുള്ള സമയത്ത് ആ ഭൗതികഅളവിന്റെ ശരാശരി മൂല്യമെന്നാണ്).

4.24 താഴെ നൽകിയ ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിക്കുകയും അവയോരോന്നും ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തി അതിന്റെ കാരണങ്ങൾ ഉദാഹരണസഹിതം സമർഥിക്കുകയും ചെയ്യുക.

ഒരു അദിശ ഭൗതികഅളവ് എന്നത്

(a) ഒരു പ്രക്രിയയിൽ പൂർണമായും സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു.

(b) ഒരിക്കലും നെഗറ്റീവ് മൂല്യം സ്വീകരിക്കുന്നില്ല.

(c) ഡൈമെൻഷൻ രഹിതം (dimensionless) ആയിരിക്കും.

(d) സ്പെയ്സിൽ വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ മൂല്യം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നില്ല.

(e) വ്യത്യസ്ത അക്ഷങ്ങളിൽ നിലകൊള്ളുന്ന നിരീക്ഷകർക്ക് അതിന്റെ മൂല്യം സമാനമായി അനുഭവപ്പെടും.

4.25 നിലത്തുനിന്നു 3400 m ഉയരത്തിലായി ഒരു വിമാനം തിരശ്ചീനമായി പറന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. 10.0 സെക്കന്റിനു ശേഷം നിലത്തുള്ള നിരീക്ഷണകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ വിമാനം സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണളവ് 30^o ആകുന്നുവെങ്കിൽ വിമാനത്തിന്റെ വേഗം എന്താണ്?

അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

4.26 ഒരു സദിശത്തിന് അളവും ദിശയുമുണ്ട്. സ്പേസിൽ അതിന് ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനം നിർവചിക്കാനാകുമോ? സമയത്തിനനുസരിച്ച് സദിശത്തിന് മാറ്റമുണ്ടാകുമോ? സ്പേസിൽ വ്യത്യസ്തസ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള **a, b** എന്നീ രണ്ട് തുല്യസദിശങ്ങൾ ചെലുത്തുന്ന ഭൗതികപ്രഭാവങ്ങൾ സമാനമായിരിക്കുമോ? ഉദാഹരണസഹിതം നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സമർഥിക്കുക.

4.27 ഒരു സദിശത്തിന് അളവും ദിശയുമുണ്ട്. എന്നാൽ അളവും ദിശയുള്ള എല്ലാറ്റിനെയും സദിശമായി കണക്കാക്കാനാവുമോ? ചാക്രികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ അക്ഷം ഏതു ദിശയിലാണ് എന്നതും ചാക്രിക ചലനത്തിന്റെ കോണളവും ആ ചലനത്തെ വ്യക്തമാക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. അതിനാൽ ചാക്രീയ ചലനം ഒരു സദിശമാകുന്നുണ്ടോ?

4.28 താഴെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളുമായി സദിശത്തെ ബന്ധപ്പെടുത്താമോ?

(a) ഒരു വലയരൂപത്തിൽ വളച്ചുവച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു വയറിന്റെ നീളം

(b) ഒരു പ്രതലം

(c) ഒരു ഗോളം

നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം വിശദമാക്കുക.

4.29 തിരശ്ചീനതലവുമായി 30^o കോണളവിൽ ഒരു തോക്കിൽ നിന്നു പുറത്തേക്കു പോകുന്ന വെടിയുണ്ട 3.0 km അകലെയായി പതിക്കുന്നു. അതിന്റെ വിക്ഷേപണ കോണളവ് ക്രമീകരിക്കുന്നതുവഴി വെടിയുണ്ടയെ 5.0 km അകലെയുള്ള ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്തിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിക്കുകയും വെടിയുണ്ടയുടെ വിക്ഷേപണപ്രവേഗം സ്ഥിരമാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുക.

4.30 ഒരു യുദ്ധവിമാനം 720km/h വേഗത്തിൽ, തിരശ്ചീന ദിശയിൽ 1.5 km ഉയരത്തിൽ പറന്നുകൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു വിമാന വേധ പീരങ്കി/വിമാന വേധ തോക്കിന്റെ (anti-aircraft gun) നേർമുകളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു. $600 ms^{-1}$ എന്ന വേഗത്തിൽ പുറത്തേക്കുപോകുന്ന വെടിയുണ്ട കൃത്യമായി യുദ്ധ വിമാനത്തിൽ ഇടിക്കണമെങ്കിൽ തോക്കിന്റെ കുഴൽ ലംബവുമായി ഏതു കോണളവിൽ വയ്ക്കണം? വെടിയേൽക്കാതിരിക്കാൻ ഏതു കുറഞ്ഞ ഉയരത്തിലാണ് പൈലറ്റ് വിമാനത്തെ നിലനിർത്തേണ്ടത്? ($g=10\ ms^{-2}$ എന്നെടുക്കാം.)

4.31 ഒരു സൈക്ലിസ്റ്റ് തന്റെ സൈക്കിൾ 27 km/h വേഗത്തിൽ ഓടിക്കുന്നു. റോഡിൽ 80 m ആരമുള്ള വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു വളവിലെത്തിയപ്പോൾ അയാൾ ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിച്ച് $0.50\ ms^{-1}$ എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറക്കുന്നു. വളവിൽ ആ സൈക്ലിസ്റ്റിന്റെ പരിണതത്വരണത്തിന്റെ (net acceleration) പരിമാണവും ദിശയും എന്തായിരിക്കും?

4.32 (a) ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പ്രവേഗവും x അക്ഷവുമായി സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണളവും സമയത്തിന്റെ ഫലനമായി $\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{ox}}\right)$ എന്നെഴുതാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(b) അവലംബകകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു വിക്ഷേപണം ചെയ്യപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ വിക്ഷേപണ കോണളവ്.

$$\theta_0 \quad \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ചിഹ്നങ്ങൾക്ക് അവയുടെ സാധാരണ അർഥം തന്നെയാണുള്ളത്.)