

वृत्त

Ex 12.1

प्रश्न 1. खाली स्थान भरिए

1. वृत्त का केन्द्र वृत्त के में स्थित है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)
2. एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के में स्थित होता है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)
3. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त की होती है।
4. एक चाप होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों।
5. एक वृत्त जिस तल पर स्थित होता है, उसे भागों में विभाजित करता है।

हल:

1. अभ्यन्तर
2. बहिर्भाग
3. व्यास
4. अर्द्धवृत्त
5. तीन

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।

1. केन्द्र को वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।
2. एक वृत्त में समान लम्बाई के चाप जीवाएँ होती हैं।
3. यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।
4. वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दोगुनी हो, वृत्त का व्यास है।
5. वृत्त एक समतलीय आकृति है।
6. एक तल पर स्थित उन बिन्दुओं का समूह जो उसी तल के एक के स्थिर बिन्दु से अचर दूरी पर होते हैं, एक व्यास कहलाता है।
7. वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित होता है, त्रिज्या कहलाती है।

हल:

1. सत्य, क्योंकि परिधि से केन्द्र तक की दूरी त्रिज्या होती है।
2. असत्य, क्योंकि चाप व जीवा दो भिन्न-भिन्न सम्प्रत्यय हैं।
3. असत्य, क्योंकि तीन बराबर भागों में बाँटने पर सभी चाप समान होंगे।
4. सत्य, क्योंकि सबसे लम्बी जीवा व्यास होती है।

5. सत्य, क्योंकि यह द्विविमीय आकृति है।
6. असत्य-क्योंकि यह वृत्त की परिभाषा है न कि व्यास की।
7. असत्य, क्योंकि वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित हो, व्यास कहलाती है।

Ex 12.2

प्रश्न 1. निम्न में सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण सम्भव हो तो बताइए।

1. एक वृत्त की AB व CD क्रमशः 3 सेमी, एवं 4 सेमी. माप की जीवाएँ हैं जिनके द्वारा केन्द्र पर क्रमशः 70° एवं 50° के कोण निर्मित हैं।
2. एक वृत्त की जीवाएँ जिनकी लम्बाइयाँ 10 सेमी. और 8 सेमी. हैं, केन्द्र से क्रमशः 8 सेमी. और 5 सेमी. दूरियों पर स्थित हैं।
3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD में से प्रत्येक केन्द्र से 4 सेमी. दूरी पर हैं तब $AB = CD$ है।
4. O और O' केन्द्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त A और B दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तब $\angle AOB = \angle AO'B$ है।
5. तीन संरेख बिन्दुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
6. दो बिन्दुओं A और B से होकर 4 सेमी, त्रिज्या का वृत्त खींचा जा सकता है, यदि $AB = 8$ सेमी. है।

हल:

1. दिया गया कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि छोटी जीवा की अपेक्षा बड़ी जीवा केन्द्र पर बड़ा कोण अन्तरित करती है।
2. दिया गया कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि बड़ी जीवा केन्द्र से कम दूरी पर स्थित होती है।
3. यह कथन सत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि केन्द्र से दोनों जीवाओं की दूरियाँ बराबर हैं। अतः $AB = CD$ होगा।
4. यह कथन सत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ संगत केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।
5. यह कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेख तीसरे बिन्दु से होकर नहीं जा सकता।
6. यह कथन सत्य है क्योंकि AB व्यास है।

प्रश्न 2. यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी. है और इसकी एक जीवा की लम्बाई 10 सेमी. हो, तो इस जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $\triangle OPB$ में $OB = 13$ सेमी.

$AB = 10$ सेमी.

$OP \perp AB$ खींचा।

किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।

$$\therefore PB = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी.}$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से

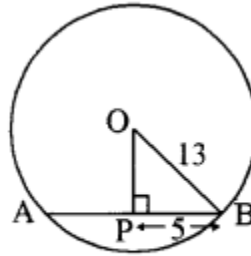
$$OP^2 = OB^2 - PB^2$$

$$\text{या } OP^2 = 13^2 - 5^2$$

$$\text{या } OP^2 = 169 - 25$$

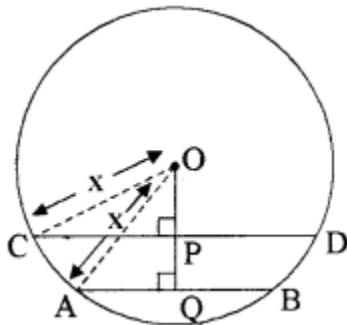
$$OP = \sqrt{144} = 12 \text{ सेमी.}$$

अतः जीवा की केन्द्र से दूरी = 12 सेमी.



प्रश्न 3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जिनकी लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी. और 12 सेमी. हैं, एक-दूसरे के समान्तर हैं तथा वे वृत्त के केन्द्र के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच 3 सेमी. की दूरी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है—



$$AB = 6 \text{ सेमी.}$$

$$CD = 12 \text{ सेमी.}$$

$$PQ = 3 \text{ सेमी.}$$

$$\text{माना वृत्त की त्रिज्या} = x \text{ सेमी.}$$

समकोण त्रिभुज CPO में

$$\text{माना } OP = y \text{ सेमी.}$$

$$CP = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी.}$$

$$(CO)^2 = (CP)^2 + (OP)^2$$

$$x^2 = (6)^2 + y^2$$

$$x^2 = 36 + y^2$$

.....(1)

समकोण त्रिभुज OQA में

$$\begin{aligned} OA &= x \\ OQ &= OP + PQ \\ &= (y + 3) \end{aligned}$$

और $AQ = \frac{6}{2} = 3$ सेमी.

अतः $(AO)^2 = (AQ)^2 + (OQ)^2$
 $(x)^2 = (3)^2 + (3 + y)^2$
 $x^2 = 9 + (3 + y)^2$ (2)

समी. (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$\Rightarrow 36 + y^2 = 9 + (3 + y)^2$$

$$\Rightarrow 36 + y^2 = 9 + 9 + 6y + y^2$$

$$\Rightarrow 36 = 18 + 6y$$

$$\Rightarrow 18 = 6y$$

$$\Rightarrow y = \frac{18}{6} = 3 \text{ सेमी.}$$

y का मान समी. (1) में रखने पर

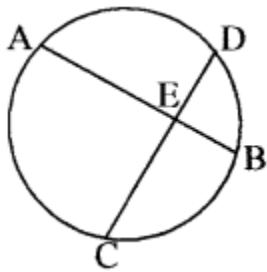
$$x^2 = 36 + (3)^2 = 36 + 9$$

$$x^2 = 45$$

$$x = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

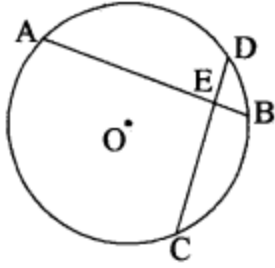
अतः वृत्त की त्रिज्या = $3\sqrt{5}$ सेमी. उत्तर

प्रश्न 4. आकृति में, दो समान जीवाएँ AB और CD एक-दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि चाप DA = चाप CB।



हल: दिया है-

वृत्त C (O, r) में जीवा AB = जीवा CD, परस्पर E पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है— $\widehat{DA} = \widehat{CB}$

उपपत्ति— $\therefore$ जीवा $AB =$ जीवा CD (दिया है)

$$\Rightarrow BA = CD$$

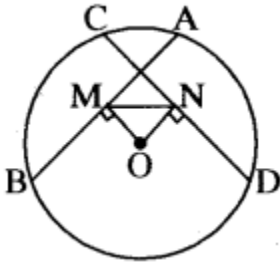
$$\therefore \text{लघुचाप } \widehat{BA} = \text{लघुचाप } \widehat{CD}$$

$$\text{लेकिन } \widehat{BD} = \widehat{BD} \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\therefore \widehat{BA} - \widehat{BD} = \widehat{CD} - \widehat{BD}$$

$$\Rightarrow \widehat{DA} = \widehat{CB} \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 5. आकृति में, AB और CD एक वृत्त MA की समान जीवाएँ हैं। वृत्त का केन्द्र O है। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle OMN = \angle ONM$



हल: दिया हुआ है-

AB और CD एक वृत्त की समान लम्बाई की दो जीवायें हैं। जिन पर क्रमशः OM और ON वृत्त के केन्द्र O से लम्ब हैं। MN लम्ब पादों को मिलाने वाला रेखाखण्ड है।

सिद्ध करना है-

$$\angle OMN = \angle ONM$$

उपपत्ति-

AB व CD वृत्त की समान जीवायें हैं।

$$\therefore OM = ON$$

(किसी वृत्त की समान लम्बाई की जीवाओं पर वृत्त के केन्द्र से उन पर लम्बों की लम्बाई बराबर होती है)

अब $\triangle OMN$ में

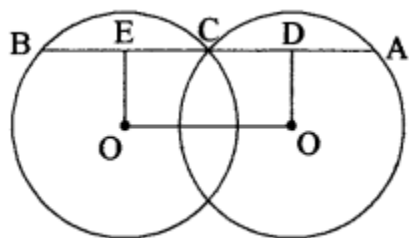
$$OM = ON$$

$\therefore OMN$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

पुनः समद्विबाहु त्रिभुज में समान लम्बाई की भुजाओं के कोण बराबर होते हैं।

$$\angle OMN = \angle ONM \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 6. आकृति में, O और O' दिए गए वृत्तों के केन्द्र हैं। $AB \parallel OO'$ है। सिद्ध कीजिए कि $AB = 2OO'$ ।



हल: उपपत्ति-

$AB \parallel OO'$, $OD \perp AB$, $O'E \perp AB$

$BE = EC$

$BC = 2EC$ (1)

इसी प्रकार से $OD \perp CA$

$\therefore CD = DA$

$\therefore CA = 2CD$

.....(2)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$BC + CA = 2EC + 2CD = 2(EC + CD)$$

$\Rightarrow AB = 2ED$

.....(3)

परन्तु रचनानुसार O'OED एक आयत है।

$\therefore ED = OO'$

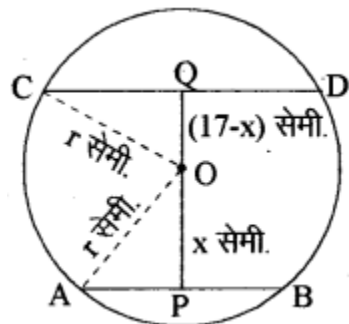
$\therefore AB = 2OO'$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 7. AB और CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि $AB = 10$ सेमी., $CD = 24$ सेमी. और $AB \parallel CD$ है। AB एवं CD के बीच की दूरी 17 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना O वृत्त का केन्द्र है। इसमें $AB = 10$, $CD = 24$ सेमी. वृत्त की दो जीवायें हैं। इनके बीच की दूरी 17 सेमी. है।

माना वृत्त की त्रिज्या = r सेमी.

और $OP = x$ सेमी.



$$AP = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी.}$$

$$CQ = \frac{24}{2} = 12 \text{ सेमी.}$$

समकोण त्रिभुज APO में

$$(AO)^2 = (AP)^2 + (OP)^2$$

$$(r)^2 = (5)^2 + (x)^2 \quad \dots(1)$$

समकोण त्रिभुज OQC में

$$(CO)^2 = (OQ)^2 + (CQ)^2$$

$$r^2 = (17 - x)^2 + (12)^2 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$(5)^2 + (x)^2 = (17 - x)^2 + (12)^2$$

$$\Rightarrow 25 + x^2 = 289 - 34x + x^2 + 144$$

$$\Rightarrow 25 = -34x + 433$$

$$\Rightarrow 34x = 408$$

$$\Rightarrow x = \frac{408}{34} = 12 \text{ सेमी.}$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$(r)^2 = (5)^2 + (x)^2$$

$$r^2 = (5)^2 + (12)^2$$

$$= 25 + 144 = 169$$

$$r = \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी.}$$

अतः वृत्त की त्रिज्या = 13 सेमी.

प्रश्न 8. 10 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त में, दो समान्तर जीवाओं की लम्बाई क्रमशः 12 सेमी. एवं 16 सेमी. है। AB और CD के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए, यदि जीवाएँ

(क) केन्द्र के एक ही ओर हों,

(ख) केन्द्र के विपरीत ओर हों।

हल: (क) जब जीवायें केन्द्र के एक ही ओर स्थित होंदिया गया है—

$$B = 12 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore AQ = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी.}$$

$$CD = 16 \text{ सेमी.}$$

$$CP = \frac{16}{2} = 8 \text{ सेमी.}$$

$$\text{त्रिज्या } OC = OA = 10 \text{ सेमी.}$$

समकोण त्रिभुज AQO में

$$(AO)^2 = (AQ)^2 + (OQ)^2$$

$$(10)^2 = (6)^2 + (OQ)^2$$

$$100 = 36 + (OQ)^2$$

$$\Rightarrow (OQ)^2 = 64$$

$$\therefore OQ = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी.}$$

अब समकोण त्रिभुज OPC में

$$(OC)^2 = (CP)^2 + (OP)^2$$

$$(10)^2 = (8)^2 + (OP)^2$$

$$100 = 64 + (OP)^2$$

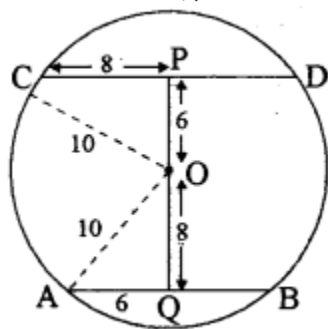
$$\Rightarrow (OP)^2 = 36$$

$$\therefore OP = \sqrt{36} = 6 \text{ सेमी.}$$

$$\text{चित्र से } PQ = OQ - OP$$

$$= 8 - 6 = 2 \text{ सेमी.}$$

(ख) जब जीवायें केन्द्र के विपरीत ओर हों जब जीवायें केन्द्र के विपरीत ओर स्थित होती हैं तब उन जीवाओं के केन्द्रों के बीच की दूरी होगी।



$$= OP + OQ$$

$$= 6 + 8 = 14 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 9. एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष वृत्त पर इस प्रकार स्थित है कि $AB = CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = BD$

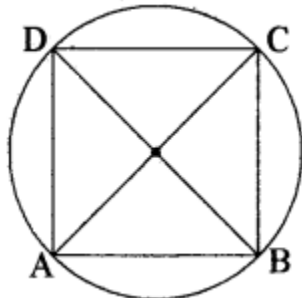
हल: दिया है-

चतुर्भुज ABCD के शीर्ष वृत्त पर इस प्रकार स्थित है कि . $AB = CD$

सिद्ध करना है-

$AC = BD$

उपपत्ति-



$\therefore AB = CD$ (दिया है)

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}$

(एक ही वृत्त में बराबर जीवा $\Leftrightarrow$ बराबर चाप)

दोनों पक्षों में $\widehat{DA}$ जोड़ने पर

$$\widehat{DA} + \widehat{AB} = \widehat{CD} + \widehat{DA}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CDA}$$

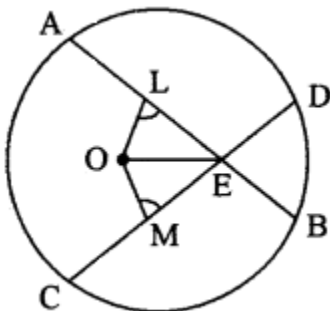
$$\Rightarrow DB = CA$$

$$\Rightarrow BD = AC$$

(एक ही वृत्त में बराबर चाप 4 बराबर जीवा) (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 10. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के क्रमित भाग क्रमशः दूसरी जीवा . के संगत भागों के बराबर होते हैं।

हल: दिया है-केन्द्र O वाले वृत्त में जीवा $AB =$ जीवा CD है। AB और CD एक-दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है-

$AE = CE$ तथा $BE = DE$

रचना-

OL ⊥ AB और OM ⊥ CD खींचा तथा OE को मिलाया।

उपपत्ति-

$$\therefore OL \perp AB$$

अतः $AL = LB = \frac{1}{2}AB$

इसी प्रकार $OM \perp CD$

अतः $CM = MD = \frac{1}{2}CD$

परन्तु $AB = CD$

अतः $AL = CM$

और $LB = MD$

.....(1)

तथा $OL = OM$

(समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं)

अतः समकोण $\triangle OLE$ और $\triangle OME$ में

कर्ण $OE =$ कर्ण OE (उभयनिष्ठ है।)

तथा $OL = OM$

$\therefore \triangle OLE \cong \triangle OME$

अतः $LE = ME$

$\therefore AL = CM$

जोड़ने पर-

$$LE + AL = ME + CM$$

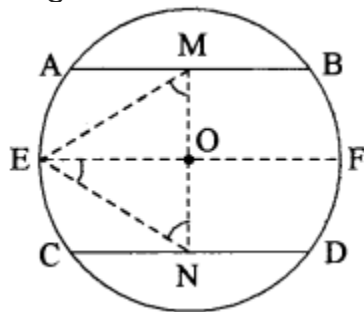
$$AE = CE$$

इसी प्रकार $BE = DE$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

हल: दिया है-

AB व CD एक वृत्त की दो जीवायें हैं। जिसका केन्द्र O पर है और M व N, AB व CD के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं।"



सिद्ध करना है-

रेखाखण्ड MN वृत्त के केन्द्र O में होकर गुजरता है।

रचना-

AB या CD के समान्तर वृत्त की त्रिज्या EO खींचो जो आगे बढ़ाने पर वृत्त पर F पर कटती है और M व N को O से मिलाओ।

उपपत्ति-

$\therefore MA \parallel OE$ और $\angle AMO = 1$ समकोण वृत्त के केन्द्र से जीवा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा जीवा के लम्बवत् होती है।

$\therefore \angle AMO + \angle EOM = 2$ समकोण

जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तब एक तरफ के आन्तरिक कोणों का योग = 2 समकोण होता है।

$\therefore \angle EOM = 1$ समकोण

इसी प्रकार $\angle EON = 1$ समकोण

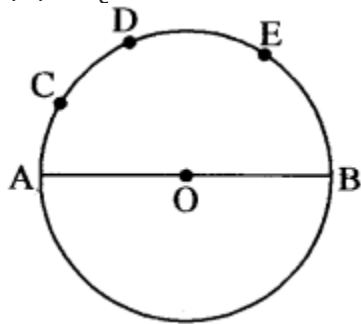
$\therefore \angle MON$ एक रेखीय कोण है।

अतः MN एक सरल रेखा है जो वृत्त के केन्द्र से गुजरती है और दोनों जीवा के लम्बवत् है।

Ex 12.3

प्रश्न 1. प्रत्येक के लिए सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।

- (i) किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं पर अन्तरित कोण बराबर होते हैं।
- (ii) आकृति में, AB एक वृत्त का व्यास, है और C वृत्त पर कोई बिन्दु है। तब $AC^2 + BC^2 = AB^2$ है।
- (iii) आकृति में, यदि $\angle ADE = 120^\circ$ है तो $\angle EAB = 30^\circ$ है।
- (iv) आकृति में, $\angle CAD = \angle CED$ है।



हल: (i) यह कथन असत्य है क्योंकि हम यह जानते हैं कि किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं पर अन्तरित कोण तभी बराबर होते हैं जब दोनों बिन्दु एक ही वृत्त खण्ड (दीर्घ या लघु) में स्थित हों।

(ii) यह कथन सत्य है क्योंकि अर्द्धवृत्त में बना कोण $\angle C$ समकोण है। अर्थात् $\angle C = 90^\circ$

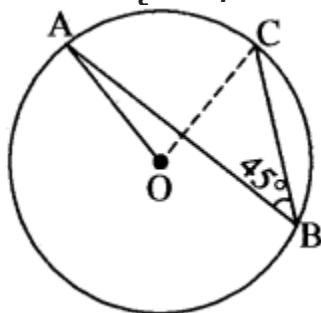
$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

(iii) यह कथन सत्य है क्योंकि आकृति में AD, DE, DB और EB को मिलाने के बाद $\angle BDE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ । यहाँ $\angle BDE$ एवं $\angle EAB$ एक ही चापखण्ड पर बने कोण हैं अतः $\angle BDE = \angle EAB = 30^\circ$

(iv) यह कथन सत्य है क्योंकि AC, CD, AD, DE व CE को मिलाने पर $\angle CAD$ एवं $\angle CED$ एक ही चापखण्ड में बनने वाले कोण हैं अतः

$$\angle CAD = \angle CED.$$

प्रश्न 2. आकृति में, $\angle ABC = 45^\circ$ है तो सिद्ध कीजिए $OA \perp OC$ है।

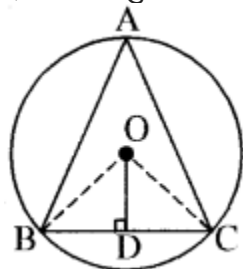


हल: प्रश्नानुसार $\angle ABC = 45^\circ$ अर्थात् वृत्त के चाप AC से वृत्त की परिधि पर बनने वाला कोण $\angle ABC = 45^\circ$ है।

हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण को दोगुना होता है अर्थात् चित्रानुसार A व C से केन्द्र O पर बना कोण $= 45^\circ \times 2 = 90^\circ$ का होगा। इससे सिद्ध होता है कि $OA \perp OC$.

प्रश्न 3. O त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है तथा D आधार BC का मध्यबिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOD = \angle A$ है।

हल: चित्रानुसार OB तथा OC को मिलाया।



अब $\triangle OBD$ और $\triangle OCD$ से।

$OB = OC$ (वृत्त की समान त्रिज्याएँ)

$\angle ODB = \angle ODC$ (प्रत्येक कोण समकोण)

$OD = OD$ (समान भुजा)।

$$\therefore \triangle OBD = \triangle OCD$$

$$\Rightarrow \angle BOD = \angle COD$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BOD = 2\angle COD$$

यहाँ चाप BC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle BOC$ है तथा इसी चाप BC द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बना कोण $\angle BAC = \angle A$ है।

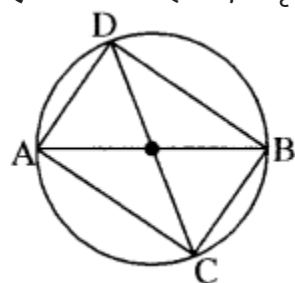
$$\therefore \angle BOC = 2\angle A$$

$$\Rightarrow 2\angle BOD = 2\angle A (\because \angle BOC = 2\angle BOD)$$

$$\Rightarrow \angle BOD = \angle A \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 4. एक उभयनिष्ठ कर्ण AB पर दो समकोण त्रिभुज ACB और ADB इस प्रकार खींचे गये हैं कि वे विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = \angle BDC$ है।

हल: सबसे पहले एक वृत्त खींचा जिसका व्यास AB है।



$$\therefore \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$$

अतः AB व्यास वाला वृत्त बिन्दु D व C से गुजरेगा।

अतः बिन्दु A, D, B व C चक्रीय बिन्दु हैं।

स्पष्ट है $\angle BAC$ तथा $\angle BDC$ एक ही वृत्त खण्ड के कोण हैं जो बिन्दु A, B, C तथा D से होकर जाता है।

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

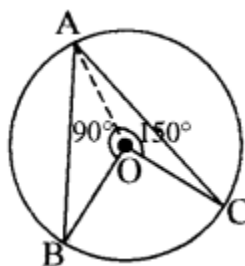
प्रश्न 5. एक वृत्त की दो जीवाँ AB और AC उसके केन्द्र पर क्रमशः 90° और 150° के कोण अन्तरित करती हैं। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए, यदि AB और AC केन्द्र के विपरीत ओर स्थित हैं।

हल:

$$\therefore \angle BOA = 90^\circ$$

$$\text{तथा } \angle AOC = 150^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle BOC &= 360^\circ - (\angle BOA + \angle AOC) \\ &= 360^\circ - (90^\circ + 150^\circ) \\ &= 360^\circ - 240^\circ \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$



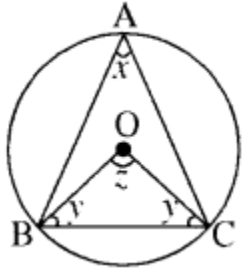
चाप BC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण उसकी शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है। ... $\angle BOC = 2\angle BAC$

अतः कोण BAC का मान 60° है।

प्रश्न 6. एक त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र O है। सिद्ध कीजिए कि $\angle OBC + \angle BAC = 90^\circ$ है।

हल: माना कि $\angle BOC = z$ और

$$\angle BAC = x$$



$\therefore$ OB व OC वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = y$$

$$\text{अतः } z = 2x$$

चूँकि केन्द्र पर अन्तरित कोण उसकी शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है।

$$\triangle OBC \text{ में, } \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$$

$$y + y + z = 180^\circ$$

$$z + 2y = 180^\circ$$

$$2x + 2y = 180^\circ$$

$$x + y = 90^\circ$$

$$\angle BAC + \angle OBC = 90^\circ \text{ इतिसिद्धम्।}$$

प्रश्न 7. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखण्ड में किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।

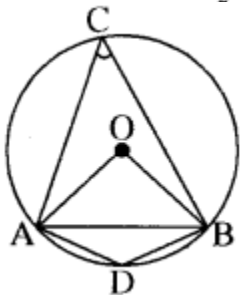
हल: माना कि AB एक जीवा है जो त्रिज्या OA या OB के बराबर है।

$$\therefore OA = OB = AB$$

$\Rightarrow \triangle AOB$ एक समबाहु त्रिभुज है।

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$



चूँकि केन्द्र पर अन्तरित कोण उसकी शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है।

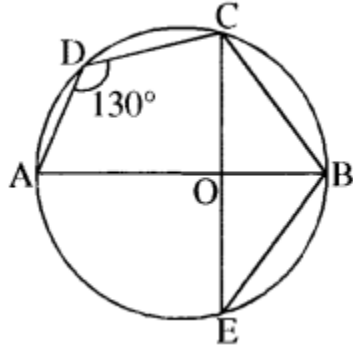
अब चाप ACB, केन्द्र O पर कोण बनाता है।

$$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \times 300^\circ = 150^\circ$$

अतः जीवा AB द्वारा शीर्ष वृत्तखण्ड में किसी बिन्दु (D) पर अन्तरित कोण का मान
 $= 150^\circ$

प्रश्न 8. आकृति में, $\angle ADC = 130^\circ$ और जीवा BC = जीवा BE है। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए।



हल:

$$\angle ADC = 130^\circ$$

जीवा BC = जीवा BE

चूँकि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

$$\angle B + 130^\circ = 180^\circ$$

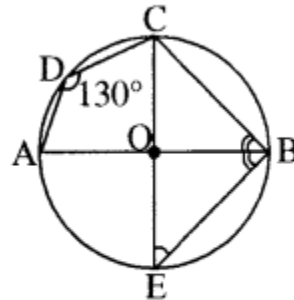
$$\angle B = 50^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle CBO = 50^\circ$$

$$\angle CBE = \angle CBO + \angle OBE$$

$$= 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$$

$$\{\because \triangle BCO \cong \triangle BOE \text{ (भुजा-भुजा-भुजा से)}\}$$



प्रश्न 9. आकृति में, $\angle ACB = 40^\circ$ है। $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त के किसी केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त की शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है।

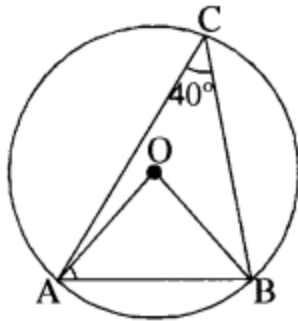
दिया है $\angle ACB = 40^\circ$

$$\angle AOB = 2 \times \angle ACB$$

$$= 2 \times 40^\circ$$

$$= 80^\circ$$

माना कि $\angle OAB = \angle OBA = x^\circ$



ΔOAB में,

$$\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ$$

$$80^\circ + x + x = 180^\circ$$

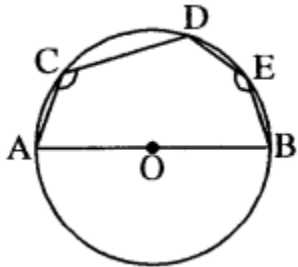
$$2x = 100^\circ$$

$$x = 50^\circ$$

$\therefore$

$$\angle OAB = \angle OBA = 50^\circ$$

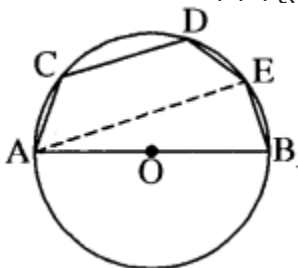
प्रश्न 10. आकृति में, AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर स्थित कोई तीन बिन्दु हैं। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि ACDE एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\angle ACD + \angle AED = 180^\circ \dots (1)$$

$$\angle AEB = 90^\circ \dots (2) \text{ (चूँकि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।)}$$



समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle ACD + \angle AED + \angle AEB = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

Ex 12.4

प्रश्न 1. एक चक्रीय चतुर्भुज का एक कोण दिया गया है। सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए।

- (i) 70°
- (ii) 135°
- (iii) $112\frac{1}{2}^\circ$
- (iv) $\frac{3}{5}$ समकोण
- (v) 165°

हल: (i) हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग = 180° होता है।

इसलिये दूसरा सम्मुख कोण = $180^\circ - 70^\circ$
= 110° उत्तर

(ii) दूसरा सम्मुख कोण = $180^\circ - 135^\circ$
= 45°

(iii) दूसरा सम्मुख कोण = $180^\circ - 112\frac{1}{2}^\circ$
= $67\frac{1}{2}^\circ = 67.5^\circ$

(iv) एक कोण का मान = $\frac{3}{5}$ समकोण
= $\frac{3}{5} \times 90 = 3 \times 18$
= 54°

इसलिये दूसरा सम्मुख कोण = $180^\circ - 54^\circ$
= 126°

(v) दूसरा सम्मुख कोण = $180^\circ - 165^\circ$
= 15°

प्रश्न 2. चक्रीय चतुर्भुज का सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए यदि उसमें से एक कोण

- (i) दूसरे का $= \frac{2}{7}x$ हो
- (ii) दूसरे का $= \frac{11}{4}x$ हो।

हल: (i) माना एक कोण = x है

$$\therefore \text{दूसरा कोण} = \frac{2}{7}x$$

$$\text{प्रश्नानुसार} \quad x + \frac{2}{7}x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{9}{7}x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{180^\circ \times 7}{9} = 20 \times 7 = 140^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{अतः दूसरा कोण} &= \frac{2}{7} \times x = \frac{2}{7} \times 140^\circ \\ &= 40^\circ \end{aligned}$$

अतः चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण 140° , 40° होंगे।

हल: (ii) माना एक कोण = x है।

$$\text{दूसरा कोण} = \frac{11}{4}x$$

प्रश्नानुसार $x + \frac{11}{4}x = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{15}{4}x = 180^\circ$$

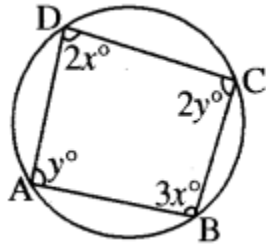
$$\Rightarrow x = \frac{180 \times 4}{15} \\ = 12 \times 4 = 48^\circ$$

इसका दूसरा सम्मुख कोण = $180^\circ - 48^\circ$

$$= 132^\circ$$

अतः चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण $48^\circ, 132^\circ$

प्रश्न 3. आकृति में, चक्रीय चतुर्भुज ABCD के चारों कोण ज्ञात कीजिए।



हल: चूँकि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$$

और $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$$\therefore 2x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5x^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x^\circ = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

इसी प्रकार से

$$y^\circ + 2y^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3y^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y^\circ = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

चित्र से

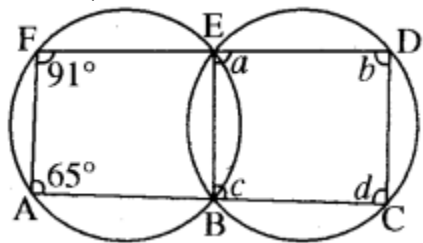
$$\angle A = y^\circ = 60^\circ$$

$$\angle B = 3x^\circ = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

$$\angle C = 2y^\circ = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle D = 2x^\circ = 2 \times 36^\circ = 72^\circ$$

प्रश्न 4. आकृति में, कुछ कोणों को a, b, c और d से चिह्नित किया गया है। इन कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



हल: दिये गये चित्र में ABEF एक चक्रीय चतुर्भुज है। इस कारण से

$$\angle BAF + \angle BEF = 180^\circ$$

लेकिन $\angle BEF + \angle BED = 180^\circ$

$$\therefore \angle BAF + \angle BEF = \angle BEF + \angle BED$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BED$$

$$\Rightarrow \boxed{65^\circ = a} \quad \text{उत्तर}$$

चित्र से $\angle a + \angle d = 180^\circ$

$$65^\circ + \angle d = 180^\circ$$

$$\therefore \angle d = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होते हैं।

इसी प्रकार से $\angle AFE = \angle CBE$

$$91^\circ = \angle C$$

$$\therefore \angle c = 91^\circ \quad \text{उत्तर}$$

हम जानते हैं- $\angle c + \angle b = 180^\circ$

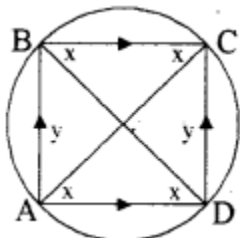
$$\therefore \angle b = 180^\circ - \angle c$$

$$= 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ$$

प्रश्न 5. यदि चक्रीय चतुर्भुज ABCD में, $AD \parallel BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle D$

हल: दिया हुआ है-

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें $AD \parallel BC$



सिद्ध करना है-

$$\angle A = \angle D$$

रचना-

A व B को क्रमशः C व D से मिलाओ।

उपपत्ति-

यदि $\angle BCA = x$, तब $\angle BDA = x$

एक ही खण्ड के कोण हैं। आगे

$BC \parallel AD$

$\therefore \angle CAD = \angle BCA = x$ एकान्तर कोण है।

या $\angle CAD = \angle BDA$ (1)

$\angle CAB = \angle BDC$ (2)

एक ही खण्ड के कोण हैं। समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

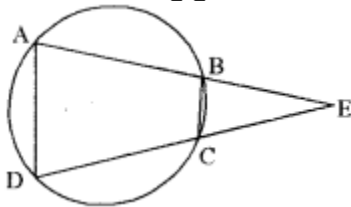
$\angle CAD + \angle CAB = \angle BDA + \angle BDC$

अर्थात् $\angle A = \angle D$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। AB और DC बढ़ाये जाने पर E पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि AEBC और AEBA समरूप हैं।

हल; दिया है-

एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD। भुजाएं AB और DC बढ़ाने पर E पर मिलती हैं।



सिद्ध करना है— $\triangle EBC \sim \triangle EDA$

उपपत्ति— ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

अतः $\angle A = \angle BCE$ (1)

(बहिष्कोण अन्तःसम्मुख कोण के समान होता है)

तथा $\angle D = \angle CBE$ (2)

$\triangle EBC$ और $\triangle EDA$ में

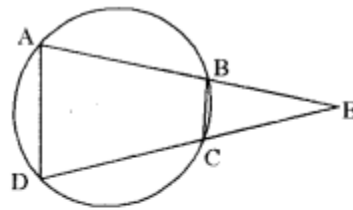
$\angle BCE = \angle A$ [बहिष्कोण अन्तःसम्मुख कोण

तथा $\angle CBE = \angle D$ के समान होता है]

$\angle AEO = \angle BEC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \triangle EBC \sim \triangle EDA$ (कोण-कोण समरूपता)

(इतिसिद्धम्)



प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बनाया चतुर्भुज भी चक्रीय चतुर्भुज होता है।

हल: दिया है-

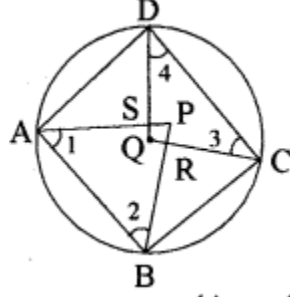
एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के कोणों के समद्विभाजक AP, BP, CQ व DQ एक चतुर्भुज PRQS एक चक्रीय बनाते हैं।

सिद्ध करना है-

PRQS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति-

∵ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।



$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\text{या } \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle C = 90^\circ$$

$$\text{या } \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ \quad \dots(1)$$

इसी प्रकार

$$\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ \quad \dots(2)$$

APB में

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle P = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle P = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 \quad \dots(3)$$

इसी प्रकार

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle Q = 180^\circ$$

$$\angle Q = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4 \quad \dots(4)$$

समीकरण (3) तथा (4) को जोड़ने पर

$$\angle P + \angle Q = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4)$$

लेकिन समी. (1) तथा (2) से

$$\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\text{तथा } \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$$

अतः मान रखने पर

$$= 360 - 90 - 90 = 180^\circ$$

∴ चतुर्भुज PRQS के सम्मुख कोण संपूरक हैं।

∴ PRQS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

Additional Questions

विविध प्रश्नमाला 12

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 20 तक)

प्रश्न 1. 10 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी. दूर स्थित जीवा की लम्बाई

- (क) 16 सेमी.
- (ख) 8 सेमी.
- (ग) 4 सेमी.
- (घ) 5 सेमी.

उत्तर: (क) 16 सेमी.

प्रश्न 2. 13 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त में 24 सेमी. लम्बी जीवा खींची गई है। जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी है

- (क) 12 सेमी.
- (ख) 5 सेमी.
- (ग) 6.5 सेमी.
- (घ) 12 सेमी.

उत्तर: (ख) 5 सेमी.

प्रश्न 3. लघुचाप का डिग्री माप होता है

- (क) 180° से कम
- (ख) 180° से अधिक
- (ग) 360°
- (घ) 270°

उत्तर: (क) 180° से कम

प्रश्न 4. दीर्घचाप का डिग्री माप होता है

- (क) 180° से कम
- (ख) 180° से अधिक
- (ग) 360°
- (घ) 90°

उत्तर: (ख) 180° से अधिक

प्रश्न 5. एक वृत्त में केन्द्र से समान दूरी पर स्थित जीवाएँ एक-दूसरे की होती हैं

- (क) दुगुनी
- (ख) तिगुनी
- (ग) आधी
- (घ) बराबर

उत्तर: (घ) बराबर

प्रश्न 6. एक वृत्त के किसी चाप का डिग्रीमाप 180° है, वह चाप है

- (क) दीर्घ चाप
- (ख) लघु चाप
- (ग) वृत्त
- (घ) अर्द्धवृत्त

उत्तर: (घ) अर्द्धवृत्त

प्रश्न 7. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है

- (क) एक
- (ख) दो।
- (ग) शून्य
- (घ) अनन्त

उत्तर: (क) एक

प्रश्न 8. यदि किसी वृत्त में चाप $AB =$ चाप BA हों, तो चाप है।

- (क) दीर्घ चाप
- (ख) लघु चाप
- (ग) अर्द्ध वृत्त
- (घ) वृत्त

उत्तर: (ग) अर्द्ध वृत्त

प्रश्न 9. यदि वृत्त का व्यास दो जीवाओं में से प्रत्येक को समद्विभाजित करे तो जीवाएँ होंगी

- (क) समान्तर
- (ख) लम्बवत्
- (ग) प्रतिच्छेदी
- (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर: (क) समान्तर

प्रश्न 10. यदि सर्वांगसम वृत्तों में दो चाप बराबर हों, तो उनकी संगत जीवाएँ होंगी

- (क) समान्तर
- (ख) समान
- (ग) लम्बवत्
- (घ) प्रतिच्छेदी

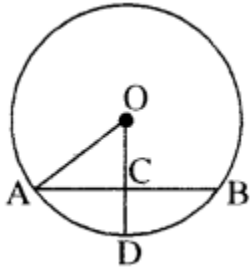
उत्तर: (ख) समान

प्रश्न 11. किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है। यदि $AD = 34$ सेमी., $AB = 30$ सेमी. हैं, तो वृत्त के केन्द्र से AB की दूरी है

- (क) 17 सेमी.
- (ख) 15 सेमी.
- (ग) 4 सेमी.
- (घ) 8 सेमी.

उत्तर: (घ) 8 सेमी.

प्रश्न 12. आकृति में, यदि $OA = 5$ सेमी., $AB = 8$ सेमी. तथा OD जीवा AB पर लम्ब है, तो CD बराबर है



- (क) 2 सेमी.
- (ख) 3 सेमी.
- (ग) 4 सेमी.
- (घ) 5 सेमी.

उत्तर: (क) 2 सेमी.

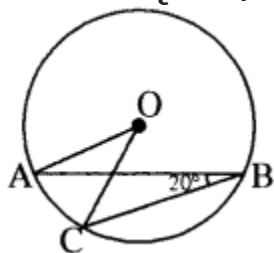
प्रश्न 13. यदि $AB = 12$ सेमी., $BC = 16$ सेमी. और AB रेखाखण्ड BC पर लम्ब है, तो A , B और C से होकर जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है

- (क) 6 सेमी.
- (ख) 8 सेमी.

- (ग) 10 सेमी.
(घ) 12 सेमी.

उत्तर: (ग) 10 सेमी.

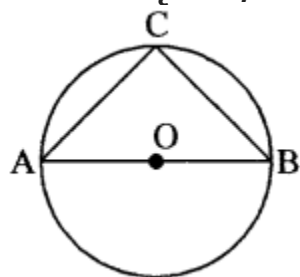
प्रश्न 14. आकृति में, यदि $\angle ABC = 20^\circ$ है, तो $\angle AOC$ बराबर है



- (क) 20°
(ख) 40°
(ग) 60°
(घ) 10°

उत्तर: (ख) 40°

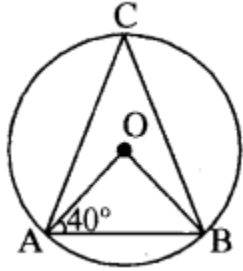
प्रश्न 15. आकृति में, यदि AOB वृत्त का एक व्यास तथा $AB = BC$ है, तो $\angle CAB$ बराबर है



- (क) 30°
(ख) 60°
(ग) 90°
(घ) 45°

उत्तर: (घ) 45°

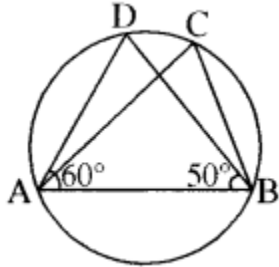
प्रश्न 16. आकृति में, यदि $\angle OAB = 40^\circ$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है



- (क) 50°
- (ख) 40°
- (ग) 60°
- (घ) 70°

उत्तर: (क) 50°

प्रश्न 17. आकृति में, यदि $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है



- (क) 60°
- (ख) 50°
- (ग) 70°
- (घ) 80°

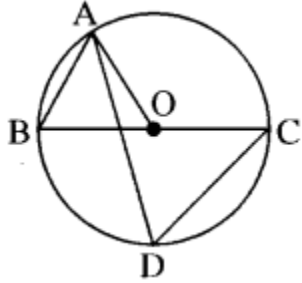
उत्तर: (ग) 70°

प्रश्न 18. चतुर्भुज की एक भुजा AB उसके परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा $\angle ADC = 140^\circ$ है। तब, $\angle BAC$ बराबर है

- (क) 80°
- (ख) 50°
- (ग) 40°
- (घ) 30°

उत्तर: (ख) 50°

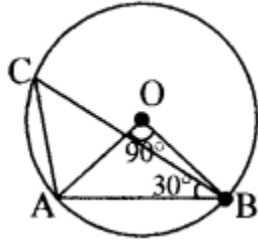
प्रश्न 19. आकृति में, BC वृत्त का व्यास है तथा $\angle BAO = 60^\circ$ है। तब, $\angle ADC$ बराबर



- (क) 30°
- (ख) 45°
- (ग) 60°
- (घ) 120°

उत्तर: (ग) 60°

प्रश्न 20. आकृति में, $\angle AOB = 90^\circ$ और $\angle ABC = 30^\circ$ है। तब, $\angle CAO$ बराबर है



- (क) 30°
- (ख) 45°
- (ग) 90°
- (घ) 60°

उत्तर: (घ) 60°

प्रश्न 21. यदि एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दो भाग दूसरी जीवा के दोनों भागों के पृथक्पृथक् बराबर होते हैं।

हल: दिया है-

AB व CD दो बराबर जीवाएँ, जो कि P बिन्दु पर काटती हैं। सिद्ध करना है-

$$AP = CP$$

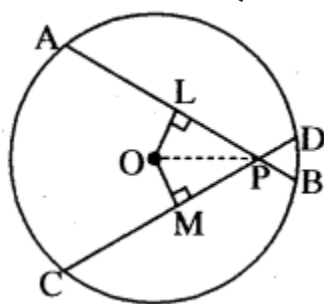
$$BP = DP$$

रचना-

OP को जोड़ते हैं एवं

$$OL \perp AB$$

OM $\perp$ CD खींचते हैं।



उपपत्ति-

$\therefore OL \perp AB$ और $OM \perp CD$

$\therefore L$ एवं M , AB व CD के मध्य बिन्दु हैं।

समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं।

अतः $OL = OM$

$\triangle OPL$ एवं $\triangle OMP$ में-

$$OL = OM$$

$$\angle OLP = \angle OMP (90^\circ)$$

$$OP = OP$$

$\therefore$

$$\triangle OLP \cong \triangle OMP \text{ (समकोण-विकर्ण-भुजा नियम से)}$$

$\Rightarrow$

$$LP = MP \text{ एवं } \angle OPL = \angle OPM$$

अब

$$AB = CD$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$$

$\Rightarrow$

$$AL = CM$$

$\Rightarrow$

$$AL + LP = CM + LP$$

$\Rightarrow$

$$AL + LP = CM + MP \quad (\because LP = MP)$$

$\Rightarrow$

$$AP = CP$$

पुनः

$$AB - BP = CD - PD$$

$$BP = DP \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 22. यदि P , Q और R क्रमशः एक त्रिभुज की BC , CA और AB भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लम्ब है, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P , Q , R और D चक्रीय हैं।

हल: दिया है- P , Q , R क्रमशः BC , CA एवं AB भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लम्बे हैं।

सिद्ध करना है-

P , Q , R एवं D चक्रीय है।

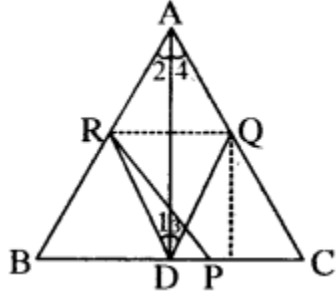
रचना-

RD , QD , PR एवं PQ को जोड़।

उपपत्ति-

RP , R व P को जोड़ती है, जो कि AB व BC को मध्य बिन्दु है

$\therefore RP \parallel AC$ (मध्य बिन्दु प्रमेय)। इसी प्रकार, $PQ \parallel AB$
 $\therefore ARPQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।
 $\therefore \angle RAQ = \angle RPQ$ (1) (विपरीत कोण)



$\triangle ABD$ एक समकोण त्रिभुज है एवं DR एक माधिका है।

$$\therefore \left. \begin{array}{l} RA = DR \\ \angle 1 = \angle 2 \end{array} \right\} \text{.....(2)}$$

$$\text{इसी प्रकार, } \angle 3 = \angle 4 \text{(3)}$$

समीकरण (2) व (3) को जोड़ने पर,

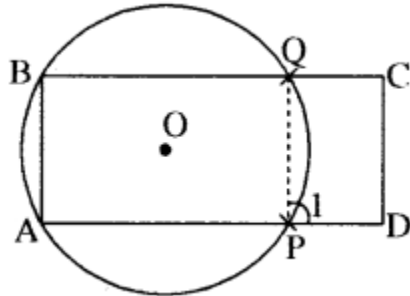
$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$$

$$\angle RDQ = \angle RAQ = \angle RPQ$$

$\therefore P, Q, R$ एवं D चक्रीय है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 23. $\triangle BCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। A और B से होकर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि वह AD को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय हैं।

हल: $\triangle BCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। वृत्त खींचा जो AD को P एवं BC को BP Q पर काटता है।



PQ को जोड़ते हैं।

$\triangle PQB$ एक चक्रीय चतुर्भुज की A भुजा AP को D तक बढ़ाया।

$\therefore$ बहिष्कोण $\angle 1 =$ आन्तरिक कोण $\angle B$

$\therefore BA \parallel CD$ एवं BC उसको काटता है।

$$\angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle 1 + \angle C = 180^\circ \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$\therefore PDCQ$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

अतः P, Q, C एवं D चक्रीय है।

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लम्ब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं, तो उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हल: दिया है-

$\triangle ABC$ के आधार BC का लम्ब समद्विभाजक XY है। ABDC, $\triangle ABC$ का परिवृत्त है। लम्ब समद्विभाजक XY परिवृत्त को D पर काटता है। XY, BC को M पर काटता है।

सिद्ध करना है-

$\angle A$ को समद्विभाजक भी बिन्दु D से होकर जाता है।

रचना-

DB तथा DC को मिलाया।

उपपत्ति-

$\because$ XY, BC को लम्ब समद्विभाजक है और यह परिवृत्त को बिन्दु D पर काटता है।

$\therefore$ बिन्दु D, परिवृत्त पर भी है और XY पर भी।

समकोण $\triangle BDM$ और $\triangle CDM$ में

$BM = CM$ (XY, BC का लम्ब समद्विभाजक है)

$MD = MD$ (उभयनिष्ठ भुजा है)

$\angle BMD = \angle CMD$ ($\because XY \perp BC$)

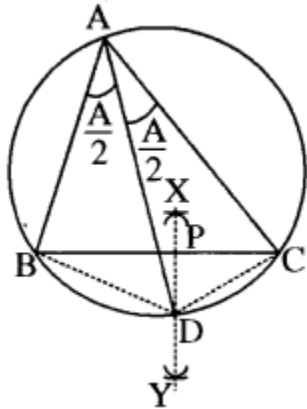
भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता के गुणधर्म से,

$\triangle BDM = \triangle CDM$

$BD = CD$

$\therefore$ बिन्दु D, परिवृत्त पर भी स्थित है।

$\therefore$ परिवृत्त में, जीवा BD = जीवा CD



$\therefore$ चाप BD = चाप CD (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ) किसी वृत्त की समान जीवाएँ समान चाप काटती हैं।

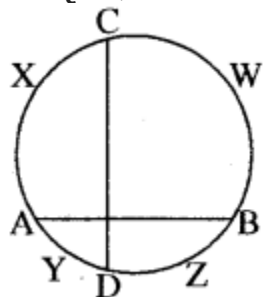
$\therefore$ चाप BD द्वारा बिन्दु A पर अन्तरित कोण = चाप CD द्वारा बिन्दु A पर अन्तरित कोण

$\angle BAD = \angle CAD$

$\therefore$ AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है।

अतः $\angle A$ का समद्विभाजक AD भी बिन्दु D से होकर जाता है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 25. यदि किसी वृत्त $\angle BWCX$ की दो जीवाएँ AB और CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति देखिए), तो सिद्ध कीजिए कि चाप $CXA +$ चाप $D\angle B =$ चाप $AYD +$ चाप $BWC =$ एक अर्धवृत्त है।



हल: दिया है-

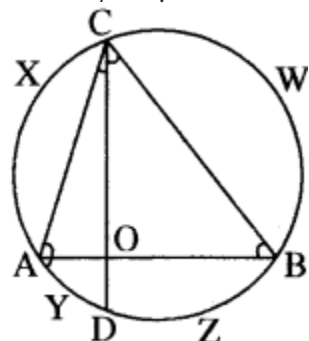
किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है-

चाप $CXA +$ चाप $D\angle B$
 $=$ चाप $AYD +$ चाप BWC
 $=$ एक अर्धवृत्त

रचना-

A को C , D एवं C को B से। मिलाते हैं।



उपपत्ति-

दो जीवाएँ AB व CD समकोण पर बिन्दु O पर काटती हैं। $\triangle AOD$ में-

$$\angle DAO + \angle ODA + \angle AOD = 180^\circ$$

$$\angle DAO + \angle ODA + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle DAO + \angle ODA = 90^\circ$$

चाप $\widehat{DZB}$ एवं चाप $\widehat{CXA}$ द्वारा क्रमशः $\angle DAO$ एवं $\angle ODA$ बनाते हैं।

$$\therefore \text{चाप } \widehat{DZB} + \text{चाप } \widehat{CXA} = 90^\circ \dots\dots(1)$$

अब $\triangle BOD$ में-

$$\angle BDO + \angle OBD + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\angle BDO + \angle OBD + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle BDO + \angle OBD = 90^\circ$$

पुनः चाप $\widehat{BWA}$ एवं चाप $\widehat{AYD}$ द्वारा क्रमशः $\angle BDO$ एवं $\angle OBD$ बनाते हैं।

$$\therefore \text{चाप } \widehat{AYD} + \text{चाप } \widehat{BWA} = 90^\circ \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\text{चाप } \widehat{DZB} + \text{चाप } \widehat{CXB} = \text{चाप } \widehat{BWC} + \text{चाप } \widehat{AYD} = 90^\circ$$

हम जानते हैं कि किसी वृत्त का चाप, किसी बिन्दु पर समकोण बनाता है जो कि एक अर्द्धवृत्त के वृत्तखण्ड में वैकल्पिक होता है।

$$\text{अतः चाप } \widehat{CXA} + \text{चाप } \widehat{DZB} = \text{चाप } \widehat{AYD} + \text{चाप } \widehat{BWC} = \text{अर्द्धवृत्त}$$

प्रश्न 26. यदि ABC किसी वृत्त के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघु चाप BC पर स्थित कोई बिन्दु है, जो B या C के सम्पाती नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि PA कोण BPC का समद्विभाजक है।

हल: दिया है-

ABC किसी वृत्त के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघुचाप BC पर स्थित कोई बिन्दु है जो B या C के सम्पाती नहीं है।

सिद्ध करना है-

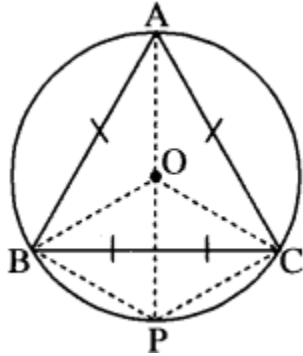
PA, कोण BPC का समद्विभाजक है। A

उपपत्ति-

वृत्त की समान जीवाएँ, वृत्त के केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।

$$\therefore \text{जीवा AB} = \text{जीवा AC}$$

$$\angle AOB = \angle AOC \dots\dots(1)$$



एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।

$$\therefore \angle APC = \frac{1}{2} \angle AOC \dots\dots(2)$$

$$\text{एवं } \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOC \dots\dots(3)$$

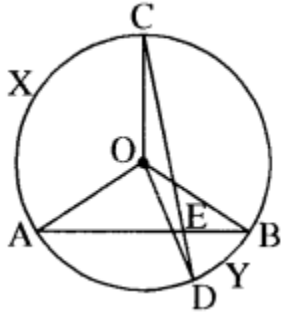
समीकरण (2) तथा (3) को बराबर करने पर

$$\therefore \angle APC = \angle APB.$$

अतः PA, कोण BPC को समद्विभाजक है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 27. आकृति में, AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEC = \frac{1}{2} (\text{चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण} + \text{चाप DYB द्वारा केन्द्र पर$

अन्तरित कोण) है।



हल: दिया है-

AB एवं CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है-

$\angle AEC = \frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण + चाप DYC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण)

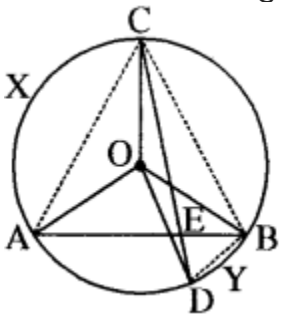
रचना-

AC, BC एवं BD को मिलाते हैं।

उपपत्ति-

AB एवं CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं। जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं।

हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।



चाप CXA, केन्द्र पर $\angle AOC$ एवं शेष भाग पर $\angle ABC$ अन्तरित करता है।

$$\angle AOC = 2\angle ABC \dots\dots(1)$$

$$\text{इसी प्रकार, } \angle BOD = 2\angle BCD \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle AOC + \angle BOD = 2(\angle ABC + \angle BCD) \dots\dots\dots(3)$$

त्रिभुज का बहिर्ण, आन्तरिक विपरीत कोणों के योग के बराबर होता है। इसलिए त्रिभुज CEB में,

$$\angle AEC = \angle ABC + \angle BCD \dots\dots(4)$$

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle AOC + \angle BOD = 2\angle AEC$$

$$= \angle AEC = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOD)$$

$$\text{अतः } \angle AEC = \frac{1}{2} (\text{चाप CXA द्वारा केन्द्र पर आन्तरिक कोण} + \text{चाप DYC द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण})$$

प्रश्न 28. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQ इस वृत्त का व्यास है।

हल: दिया है-

एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है-

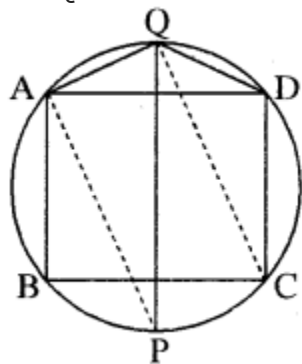
PQ वृत्त का व्यास है।

रचना-

AP, QC, QD एवं AQ को। मिलाते हैं।

उपपत्ति-

PQ वृत्त का व्यास होने के लिए हमें सिद्ध करना होगा



$$\angle PAQ = 90^\circ$$

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle C = 90^\circ$$

$$\angle PAD + \angle QCD = 90^\circ \dots\dots\dots(1)$$

लेकिन कोण QCD और कोण QAD, जीवा QD के वृत्त के समान वृत्तखण्ड के कोण हैं।

$$\therefore \angle QCD = \angle QAD \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\angle PAD + \angle QAD = 90^\circ$$

$$\angle PAQ = 90^\circ$$

$\angle PAQ$, एक अर्द्धवृत्त में स्थित है।

अतः PQ इस वृत्त का व्यास है।

प्रश्न 29. एक वृत्त की त्रिज्या 2 cm. है। 2 cm. लम्बाई वाली जीवा द्वारा यह वृत्त दो वृत्त-खण्डों में विभाजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त-खण्ड के किसी बिन्दु पर बना कोण 45° है।

हल: दिया है:

वृत्त की त्रिज्या = 2 सेमी. तथा 2 सेमी. वाली जीवा द्वारा इस वृत्त को दो वृत्त खण्डों में विभाजित किया जाता

है।

सिद्ध करना है-

2 सेमी. वाली जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त-खण्ड के किसी बिन्दु पर ना कोण 45° है।

अर्थात् $\angle BAC = 45^\circ$

रचना—OB और OC को मिलाया।

उपपत्ति—जीवा BC = 2 सेमी.

$$\Rightarrow BC^2 = 2^2 = 4 = 2 + 2$$

$$= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$$

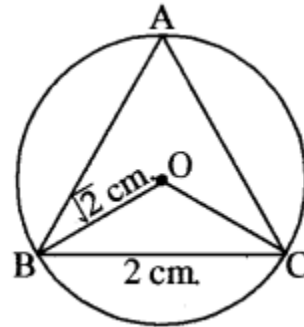
$$\Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2$$

ΔBOC में,

$$BC^2 = OB^2 + OC^2$$

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$ (पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा)

अब चाप BC वृत्त के केन्द्र O पर $\angle BOC$ तथा शेष भाग पर $\angle BAC$ अन्तरित करता है।



प्रश्न 30. AB और AC त्रिज्या r वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि $AB = 2AC$ है। यदि p और q क्रमशः केन्द्र से AB और AC की दूरियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4q^2 = p^2 + 3r^2$ है।

हल: दिया है-

AB और AC त्रिज्या r वाले वृत्त की जीवाएँ हैं ताकि $AB = 2AC$.

सिद्ध करना है— $4q^2 = p^2 + 3r^2$

उपपत्ति— AB = 2AC (दिया है)

OL $\perp$ AB

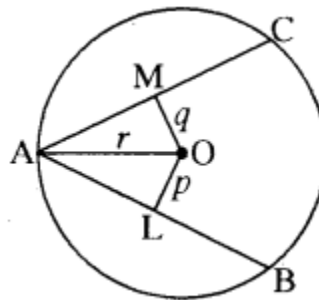
OM $\perp$ AC

OL = p और OM = q

वृत्त के केन्द्र से डाला गया लम्ब, जीवा को

तक करता है।

समकोण ΔAOL में,



$$r^2 = AL^2 + p^2$$

$$AL^2 = r^2 - p^2$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = r^2 - p^2 \Rightarrow \frac{1}{4}AB^2 = r^2 - p^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4(r^2 - p^2)$$

$$\Rightarrow (2AC)^2 = 4(r^2 - p^2) \quad (\because AB = 2AC)$$

$$\Rightarrow 4AC^2 = 4(r^2 - p^2) \quad \dots\dots(1)$$

$$\Rightarrow AC^2 = r^2 - p^2$$

पुनः ΔAOM में,

$$r^2 = AM^2 + q^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = r^2 - q^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = r^2 - q^2 \quad (\because AM = AC = \frac{1}{2}AC)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}AC^2 = r^2 - q^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4(r^2 - q^2) \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को बराबर करने पर

$$r^2 - p^2 = 4(r^2 - q^2)$$

$$\Rightarrow r^2 - p^2 = 4r^2 - 4q^2$$

$$\Rightarrow 4q^2 = 4r^2 - r^2 + p^2$$

$$\Rightarrow 4q^2 = 3r^2 + p^2$$

या $4q^2 = p^2 + 3r^2$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 31. आकृति में, O वृत्त का केन्द्र है। और $\angle BCO = 30^\circ$ है। r और y ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\angle BCO = 30^\circ$$

समकोण त्रिभुज OCP में,

$$\angle POC = 180^\circ - (\angle OPC + \angle PCO)$$

$$\Rightarrow \angle POC = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

$$\angle AOD = 90^\circ \quad (\text{दिया है})$$

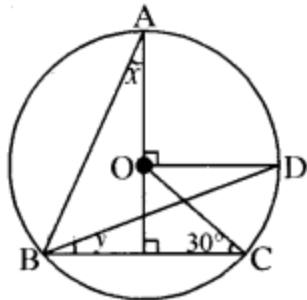
$$\therefore \angle AOD + \angle DOP = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOP = 180^\circ - \angle AOD$$

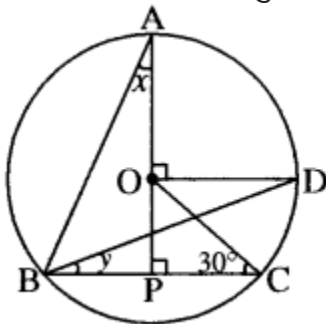
$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

अतः $\angle COD = 90^\circ - \angle POC$

$$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र में पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।



$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ$$

$$\text{तथा } \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

अब $\triangle ABP$ में,

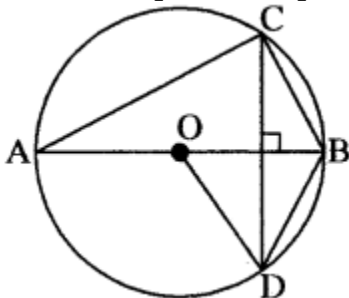
$$x + (45^\circ + y) + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x + 45^\circ + 15^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

अतः $x = 30^\circ$ तथा $y = 15^\circ$.

प्रश्न 32. आकृति में, O वृत्त का केन्द्र है। $BD = OD$ और $CD \perp AB$ है। $\angle CAB$ ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है-

$$BD = OD$$

$CD \perp AB$

ज्ञात करना है-

$\angle CAB$. $\triangle AODB$ में,

$BD = OD$ (दिया है)

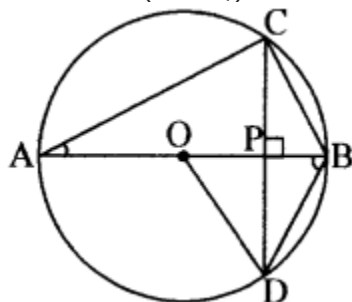
$\angle DOB = \angle DBO$ (त्रिभुज के समान भुजाओं के विपरीत कोण समान होते हैं।)

$\triangle ODP$ एवं $\triangle BDP$ में,

$\angle DOP = \angle DBP$ ($\because 2\angle DOB = \angle DBO$)

$\angle DPO = \angle DPB$ (प्रत्येक 90°)

$OD = BD$ (दिया है)।



$\therefore \triangle ODP = \triangle BDP$ (AAS नियम से)

$\Rightarrow \angle ODP = \angle BDP$ (1) (CPCT)

पुनः $OD = OB$ (समान वृत्त की त्रिज्याएँ)

लेकिन $OD = BD$

$\Rightarrow OB = OD = BD$, $\therefore \triangle OBD$ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore \angle ODB = 60^\circ =$

$\Rightarrow \angle BDP = \frac{1}{2}\angle ODB$ [समीकरण (1) से]

$\Rightarrow \angle BDP = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

या $\angle CDB = 30^\circ$

वृत्त के समान वृत्तखण्ड में कोण समान होते हैं अतः

$\angle CAB = \angle CDB = 30^\circ$.

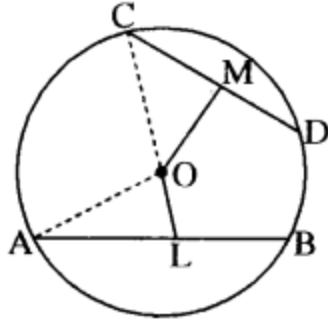
प्रश्न 33. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है, जो उस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास पर लम्ब होती है।

हल: माना AB व CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं।

$OL \perp AB$, $OM \perp CD$.

ताकि $OL < OM$.

OA व OC को मिलाया।



वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाले गये लम्ब , इसको समद्विभाजित करता है।

$$\therefore AL = \frac{1}{2} AB \text{ तथा } CM = \frac{1}{2} CD.$$

$\triangle OAL$ तथा $\triangle OCM$ में

$$OA^2 = OL^2 + AL^2 \text{ तथा } OC^2 = OM^2 + CM^2$$

$$AL^2 = OA^2 - OL^2 \quad \dots\dots(1)$$

$$CM^2 = OC^2 - OM^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$OL < OM$$

या $OL^2 < OM^2$

$$OA^2 - OL^2 > OA^2 - OM^2$$

$$OA^2 - OL^2 > OC^2 - OM^2 \quad (\because OA^2 = OC^2)$$

$$AL^2 > CM^2 \quad [\text{समीकरण (1) व (2) से}]$$

$$AL > CM$$

$$2AL > 2CM$$

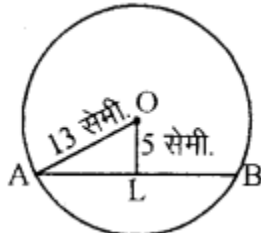
$$\therefore AB > CD.$$

अतः वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है, जो उस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास पर लम्ब होती है। (इतिसिद्धम्)

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. वृत्त C (O, 13) की एक जीवा की केन्द्र से दूरी 5 सेमी. है, जीवा की लम्बाई है 15 सेमी.



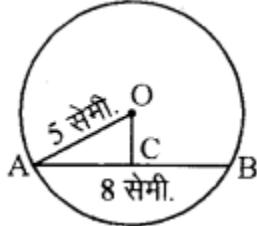
(क) 24 सेमी.

(ख) 20 सेमी.

- (ग) 16 सेमी.
(घ) 12 सेमी.

उत्तर: (क) 24 सेमी.

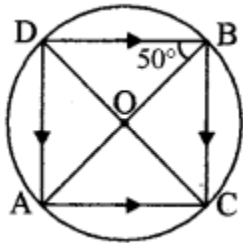
प्रश्न 2. वृत्त $C(O, 5)$ की जीवा $AB = 8$ सेमी. है, जीवा AB की O से दूरी है



- (क) 5 सेमी.
(ख) 4 सेमी.
(ग) 3 सेमी.
(घ) 1 सेमी.

उत्तर: (ग) 3 सेमी.

प्रश्न 3. AB और CD वृत्त $C(O, r)$ के व्यास हैं। 8 सेमी. जहां $AC \parallel DB$ और $DA \parallel BC$ यदि $\angle OBD = 50^\circ$ हो तो $\angle AOC$ का मान।



- (क) 50°
(ख) 60°
(ग) 70°
(घ) 80°

उत्तर: (घ) 80°

प्रश्न 4. यदि किसी वृत्त में $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BA})$ है तो वह चाप है

- (क) दीर्घ चाप
(ख) लघु चाप
(ग) अर्ध वृत्त
(घ) वृत्त

उत्तर: (ग) अर्ध वृत्त

प्रश्न 5. वृत्त $C(0, 3)$ तथा $C(0, 3)$ में जीवा $AB =$ जीवा CD है। यदि $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BA})$ हो तो का मान है

- (क) 70°
- (ख) 140°
- (ग) 210°
- (घ) 290°

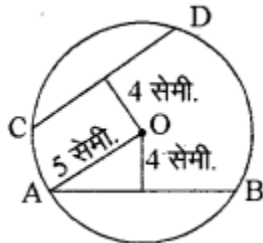
उत्तर: (घ) 290°

प्रश्न 6. वृत्त में 24 सेमी. लम्बाई की एक जीवा केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर है। वृत्त का व्यास होगा

- (क) 20 सेमी.
- (ख) 13 सेमी.
- (ग) 26 सेमी.
- (घ) 50 सेमी.

उत्तर: (ग) 26 सेमी.

प्रश्न 7. दी गई आकृति में AB तथा CD दो जीवाएँ वृत्त के केन्द्र O से 4 सेमी. की दूरी पर हैं। यदि $OA = 5$ सेमी. है, तो जीवा CD की लम्बाई है



- (क) 3 सेमी.
- (ख) 4 सेमी.
- (ग) 5 सेमी.
- (घ) 6 सेमी.

उत्तर: (घ) 6 सेमी.

प्रश्न 8. बराबर वृत्तों में बराबर चापों द्वारा केन्द्रों पर अन्तरित कोण होते हैं

- (क) बराबर
- (ख) आधा

- (ग) दुगुना
(घ) चौगुना

उत्तर: (क) बराबर

प्रश्न 9. एक ही वृत्त में बराबर जीवाओं द्वारा काटे गए चाप होते हैं

- (क) आधा
(ख) बराबर
(ग) दुगुना
(घ) तिगुना

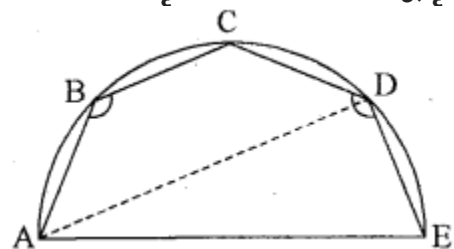
उत्तर: (ख) बराबर

प्रश्न 10. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बराबर व समान्तर हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. तथा जीवा की लम्बाई 6 सेमी. है तो दोनों जीवाओं के मध्य की दूरी होगी

- (क) 5 सेमी.
(ख) 6 सेमी.
(ग) 8 सेमी.
(घ) 10 सेमी.

उत्तर: (ग) 8 सेमी.

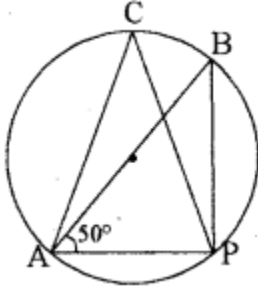
प्रश्न 11. आकृति में ABCDE अर्द्धवृत्त में। बना पंचभुज है, तो $\angle ABC + \angle CDE$ का मान है



- (क) 180°
(ख) 216°
(ग) 270°
(घ) 240°

उत्तर: (ग) 270°

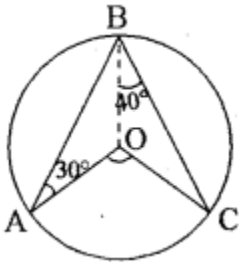
प्रश्न 12. दी गई आकृति में, AB वृत्त का व्यास है तथा $\angle PAB = 50^\circ$ हो तो $\angle PCA$ का मान है



- (क) 40°
- (ख) 90°
- (ग) 50°
- (घ) 60°

उत्तर: (क) 40°

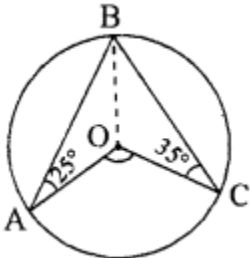
प्रश्न 13. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle OAB = 30^\circ$ तथा $\angle OBC = 40^\circ$ हो तो $\angle AOC$ का मान है



- (क) 70°
- (ख) 130°
- (ग) 140°
- (घ) 150°

उत्तर: (ग) 140°

प्रश्न 14. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle OAB = 25^\circ$ तथा $\angle OCB = 35^\circ$ हैं, तो $\angle AOC$ का माप है

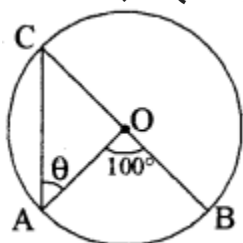


- (क) 50°

- (ख) 70°
- (ग) 100°
- (घ) 120°

उत्तर: (घ) 120°

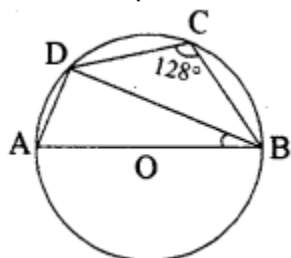
प्रश्न 15. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle AOB = 100^\circ$ है, तो कोण 8 का मान है



- (क) 40°
- (ख) 50°
- (ग) 60°
- (घ) 90°

उत्तर: (ख) 50°

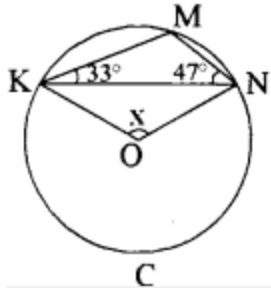
प्रश्न 16. दिये गये चित्र में, AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle BCD = 128^\circ$ हो, तो $\angle ABD$ का मान है



- (क) 26°
- (ख) 38°
- (ग) 52°
- (घ) 64°

उत्तर: (ख) 38°

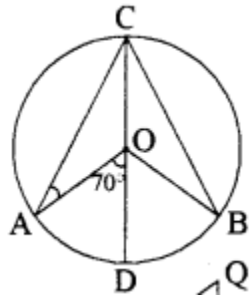
प्रश्न 17. दिये गये चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle MKN = 33^\circ$ एवं $\angle MNK = 47^\circ$ है तो x का मान है



- (क) 80°
 (ख) 100°
 (ग) 160°
 (घ) 200°

उत्तर: (ग) 160°

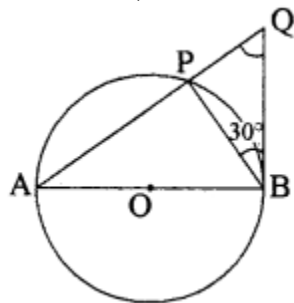
प्रश्न 18. दिये गये चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle AOD = 70^\circ$ हो, तो $\angle OAC$ है



- (क) 20°
 (ख) 35°
 (ग) 55°
 (घ) 70°

उत्तर: (ख) 35°

प्रश्न 19. दिये गये चित्र में, AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle PBQ = 30^\circ$ है, तो $\angle PQB$ का मान है

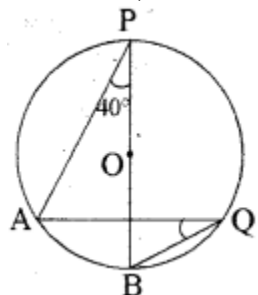


- (क) 30°
 (ख) 40°

- (ग) 50°
(घ) 60°

उत्तर: (घ) 60°

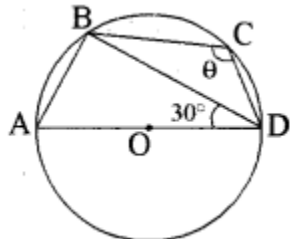
प्रश्न 20. दिये गये चित्र में, 'O' वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle APB = 40^\circ$ है, तो $\angle AQB$ का मान है



- (क) 60°
(ख) 50°
(ग) 40°
(घ) 30°

उत्तर: (ग) 40°

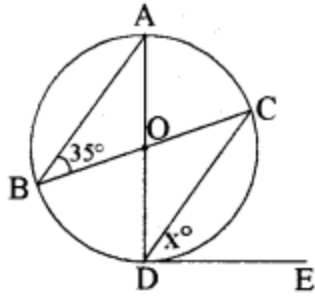
प्रश्न 21. दिये गये चित्र में, AD वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ADB = 30^\circ$ है तथा $\angle BCD = \theta$ तो θ का मान है



- (क) 150°
(ख) 130°
(ग) 120°
(घ) 90°

उत्तर: (ग) 120°

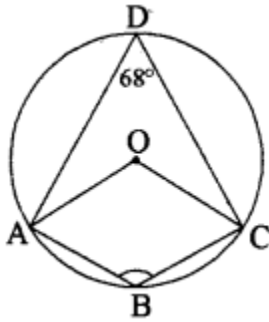
प्रश्न 22. दिये गये चित्र में $\angle ABO = 35^\circ$, $\angle CDE = x^\circ$ तथा DE वृत्त की स्पर्श रेखा है। x का मान होगा



- (क) 35°
 (ख) 55°
 (ग) 70°
 (घ) 90°

उत्तर: (ख) 55°

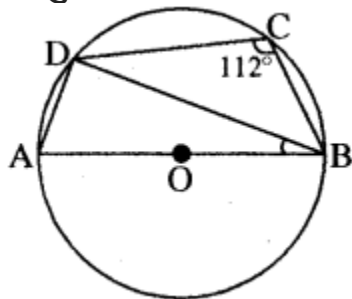
प्रश्न 23. चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle ADNC = 68^\circ$ हो तो $\angle ABC$ का मान



- (क) 68°
 (ख) 44°
 (ग) 112°
 (घ) 90°

उत्तर: (ग) 112°

प्रश्न 24. चित्र में, O केन्द्र वाले एक वृत्त में AB व्यास तथा BD एक जीवा है। जीवा BD वृत्त के किसी बिन्दु C पर 112° कोण अन्तरित करती है, तो $\angle ABD$ का मान है

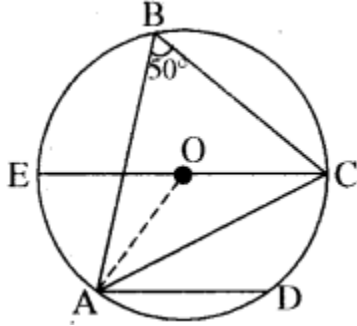


- (क) 56°

- (ख) 68°
 (ग) 22°
 (घ) 34°

उत्तर: (ग) 22°

प्रश्न 25. चित्र में व्यास EC जीवा AD के समान्तर एवं $\angle ABC = 50^\circ$ हो, तो $\angle CAD$ का मान



- (क) 50°
 (ख) 40°
 (ग) 130°
 (घ) 25°

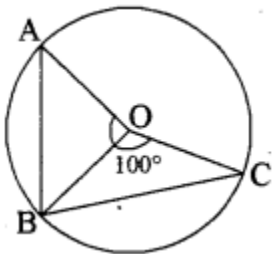
उत्तर: (ख) 40°

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी. है। इस वृत्त में दो समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं से गुजरने वाली जीवा की लम्बाई लिखिये ।।

हल: समान्तर जीवाओं का मध्य बिन्दु केन्द्र से जाता है। अतः वृत्त का व्यास इसकी जीवा होगी।
 जीवा की लम्बाई = $2 \times$ त्रिज्या = $2 \times 4 = 8$ सेमी.

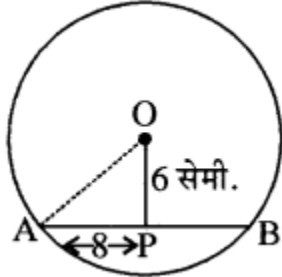
प्रश्न 2. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। तथा जीवाएँ $AB = BC$ हैं। यदि $\angle BOC = 100^\circ$ है, तो $\angle AOB$ का मान लिखिए।



उत्तर: $\angle AOB = 100^\circ$

प्रश्न 3. यदि 16 सेमी. लम्बाई की एक जीवा वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी. की दूरी पर है, तो उस वृत्त के व्यास की लम्बाई लिखिए।

हल:



$$\begin{aligned}(AO)^2 &= (8)^2 + (6)^2 \\ &= 64 + 36 \\ &= 100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AO &= \sqrt{100} \\ &= 10 \text{ सेमी.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{व्यास} &= 2 \times AO = 2 \times 10 \\ &= 20 \text{ सेमी. उत्तर}\end{aligned}$$

प्रश्न 4. वृत्त C (0, 5) तथा C (0', 5) में जीवा AB = जीवा CD है। यदि $m(\overline{AB}) = 60^\circ$ है, तो $m(\overline{CD})$ का मान लिखिए।

हल: $m(\overline{CD}) = 60^\circ$

प्रश्न 5. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD हैं जो परस्पर समान्तर और बराबर हैं। यदि प्रत्येक की लम्बाई 8 सेमी. हो और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. हो तो उनके बीच की दूरी लिखो।

हल: केन्द्र से AB की दूरी $= \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ सेमी. अतः दोनों के मध्य की दूरी $= 3 \times 2 = 6$ सेमी.

प्रश्न 6. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. और वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर लम्ब की लम्बाई 4 सेमी. है तो जीवा की लम्बाई ज्ञात करो।

हल: $2\sqrt{5^2 - 4^2} = 2 \times 3 = 6$ सेमी.

प्रश्न 7. एक वृत्त की जीवा 7 सेमी. है और केन्द्र से जीवा की दूरी 1.2 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल: त्रिज्या

$$= \sqrt{(3.5)^2 + (1.2)^2}$$
$$= \sqrt{12.25 + 1.44} = \sqrt{13.69} = 3.7 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 8. एक वृत्त 5 सेमी. त्रिज्या का है, इसकी सबसे बड़ी जीवा की लम्बाई बताइए।

उत्तर: वृत्त की सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।

अतः व्यास की लम्बाई = $2 \times 5 = 10$ सेमी.

प्रश्न 9. यदि 16 सेमी. लम्बाई की एक जीवा वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी. की दूरी पर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या लिखिए।

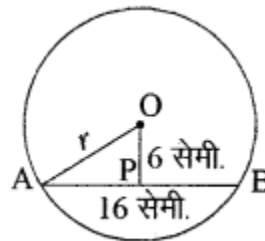
हल:

$$\Delta AOP \text{ में } AO = \sqrt{AP^2 + OP^2}$$

$$r = \sqrt{8^2 + 6^2}$$

$$r = \sqrt{64 + 36}$$

$$r = 10 \text{ सेमी.}$$

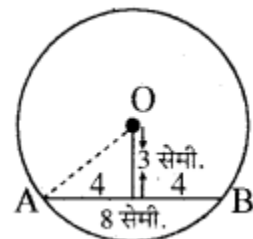


प्रश्न 10. 8 सेमी. लम्बाई की एक जीवा वृत्त के केन्द्र से 3 सेमी. की दूरी पर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या लिखिए।

हल: वृत्त की त्रिज्या OA = ?

$$(OA)^2 = (AC)^2 + (OC)^2$$
$$= (4)^2 + (3)^2$$
$$= 16 + 9 = 25$$

$$\therefore OA = \sqrt{25} = 5 \text{ सेमी.}$$



अतः वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी.

प्रश्न 11. वृत्त में किन्हीं दो त्रिज्याओं और उनके अन्तिम बिन्दुओं से बनने वाले चाप से घिरे क्षेत्र का नाम लिखिए।

हल: त्रिज्यखण्ड।

प्रश्न 12. दी गई आकृति में, AOB वृत्त का व्यास है तथा $\angle ROS = 42^\circ$ है, तो $\angle RTS$ की माप ज्ञात कीजिये।

हल:

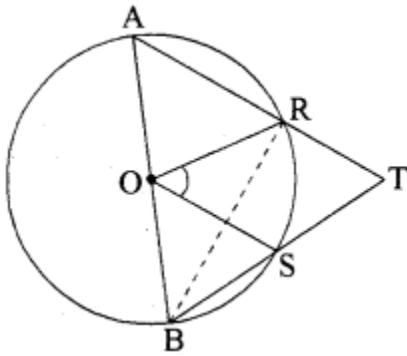
$$\angle RBT = \frac{1}{2} \angle ROS$$

$$\angle RBT = \frac{1}{2} \times 42 = 21^\circ$$

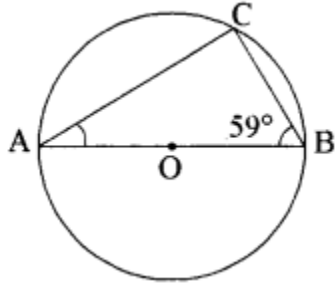
$\triangle RBT$ में $\angle RBT = 21^\circ$

$$\angle BRT = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } \angle RTS &= 180^\circ - (90 + 21) \\ &= 69^\circ \end{aligned}$$



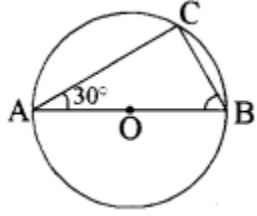
प्रश्न 13. दी गई आकृति में AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ABC = 59^\circ$ है तो $\angle BAC$ का मान लिखिए।



हल: $\angle BAC = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$

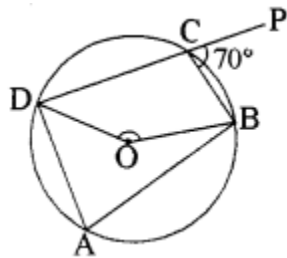
क्योंकि $\angle ACB = 90^\circ$ है।

प्रश्न 14. दी गई आकृति में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle BAC = 30^\circ$ है, तो $\angle ABC$ का मान लिखिए।



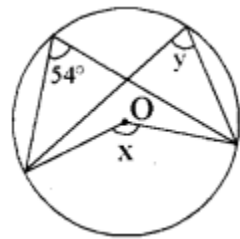
हल: $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$
 $= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ)$
 $= 60^\circ$

प्रश्न 15. दिये गये चित्र में 'O' वृत्त का केन्द्र है। $\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। $\angle PCB = 70^\circ$ है, तो $\angle BOD$ का मान लिखिये।



हल: $\angle BAD = \angle BCP = 70^\circ$
तथा $\angle BOD = 2 \angle BAD$
 $= 2 \times 70 = 140^\circ$

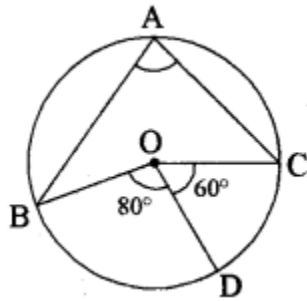
प्रश्न 16. दिये गये चित्र में $\angle x$ व $\angle y$ का मान ज्ञात करो।



हल:
 $\angle x = 2 \times 54 = 108$
तथा $\angle x = \angle y$ अतः
 $y = \frac{108}{2} = 54^\circ$

प्रश्न 17. चित्र में चाप BD और चाप CD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 80° और 60° है, तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

हल:



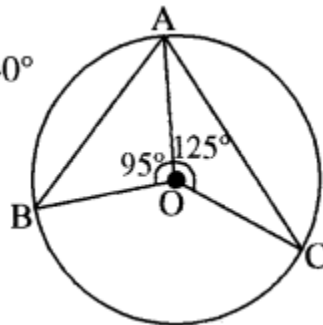
$$\begin{aligned}\angle BOC &= \angle BOD + \angle DOC \\ &= 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{1}{2} \angle BOC \\ &= \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ\end{aligned}$$

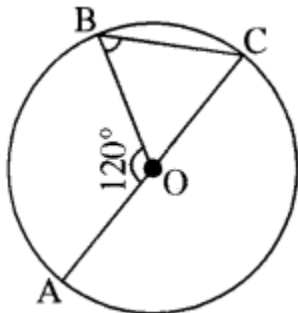
प्रश्न 18. चित्र में O केन्द्र वाले एक वृत्त में चाप BC द्वारा केन्द्र O पर $\angle BOC$ तथा शेष परिधि के किसी बिन्दु A पर $\angle BAC$ अन्तरित होता है। यदि $\angle AOB = 95^\circ$ तथा $\angle AOC = 125^\circ$ तो $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned}125^\circ + 95^\circ &= 220^\circ \\ \therefore \angle BOC &= 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ \\ \angle BAC &= \frac{1}{2} \angle BOC \\ &= \frac{1}{2} \times 140^\circ \\ &= 70^\circ \text{ उत्तर}\end{aligned}$$

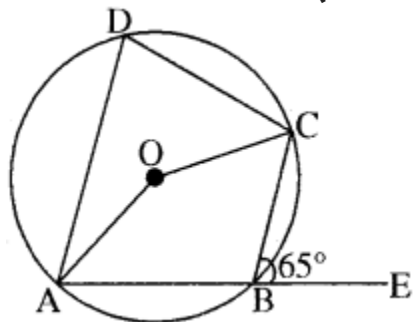


प्रश्न 19. चित्र में चाप AB द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर अन्तरित कोण 120° है तथा AC वृत्त का व्यास है, तो $\angle OBC$ का मान लिखिए।



हल: $\angle COB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 $OC = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।
 $\therefore \angle C = \angle B$ अतः $\angle OBC = 60^\circ$

प्रश्न 20. चित्र में O केन्द्र वाले एक ही वृत्त में $\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि बहिष्कोण $\angle CBE = 65^\circ$ तो $\angle AOC$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल:
 $\angle CBE = \angle ADC$
 $\therefore \angle ADC = 65^\circ$
 $\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$
 $= 2 \times 65^\circ = 130^\circ$

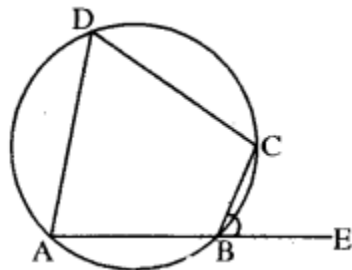
प्रश्न 21. एक वृत्त के उस चाप का नाप लिखिए जो वृत्त के शेष भाग पर समकोण बनाता है।

हल: एक वृत्त का वह चाप जो वृत्त के शेष भाग पर समकोण अन्तरित करता है, एक अर्द्धवृत्त होता है।

प्रश्न 22. r त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 180° कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई लिखिए।

हल: πr

प्रश्न 23. चित्र में यदि $\angle ADC = 80^\circ$ हो, तो $\angle CBE$ का मान लिखिए।



हल: अन्तरित बहिष्कोण अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।

$$\therefore \angle CBE = 80^\circ$$

प्रश्न 24. वृत्त में केन्द्र से समान दूरी पर स्थित जीवाओं का अनुपात लिखिये। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: हम जानते हैं कि "किसी वृत्त की जीवायें केन्द्र से बराबर दूरी पर हो तो वे परस्पर बराबर होती हैं।"
अतः जीवाओं का अनुपात 1 : 1 होगा।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. आकृति में, वृत्त का केन्द्र O एवं त्रिज्या 5 सेमी. है। यदि $OP \perp AB$, $OQ \perp CD$, $AB \parallel CD$, $AB = 8$ सेमी. और $CD = 6$ सेमी. हो, तो PQ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है कि $OP \perp AB$ एवं $OQ \perp CD$

अतः $AP = PB = \frac{1}{2} AB = 4$ सेमी.

$$CQ = QD = \frac{1}{2} CD = 3 \text{ सेमी.}$$

और $OA = OC = 5$ सेमी. (त्रिज्या)

ΔOPA में, बौधायन प्रमेय से,

$$OP^2 = OA^2 - AP^2$$

या $OP^2 = 5^2 - 4^2$
 $= 25 - 16 = 9$

$$\therefore OP = 3 \text{ सेमी.}$$

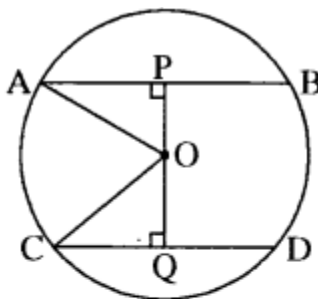
इसी प्रकार ΔOQC में,

$$OQ^2 = OC^2 - CQ^2$$

$$OQ^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\therefore OQ = 4 \text{ सेमी.}$$

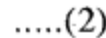
अर्थात् $PQ = OP + OQ = 3 + 4 = 7$ सेमी.



प्रश्न 2. 10 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त में, दो जीवाएँ $AB = AC = 12$ सेमी. हों, तो जीवा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

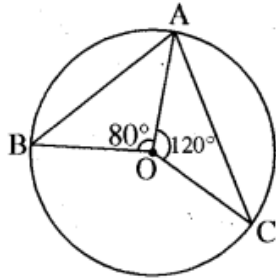
हल: आकृति में, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD है, अतः AD जीवा BC का लम्ब-समद्विभाजक है।

अतः जीवा $BC = 2CD = 2 \times 9.6 = 19.2$ सेमी.



प्रश्न 4. आकृति में, चाप AB और चाप AC द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित कोण क्रमशः 80° और 120° हैं। $\angle BAC$ और $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

हल:



$$\angle BOC = 360^\circ - (120^\circ + 80^\circ)$$

अतः $\angle BOC = 160^\circ$

एवं $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 160^\circ$

अतः $\angle BAC = 80^\circ$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज की एक समान भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, त्रिभुज की असमान भुजा को समद्विभाजित करता है।

हल: दिया है—

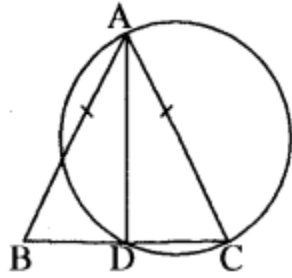
आकृति में, एक समद्विबाहु $\triangle ABC$ जिसमें $AB = AC$ और व्यास AC पर खींचा गया वृत्त BC को D पर काटता है।

सिद्ध करना है—

$$BD = DC$$

उपपत्ति—

AC को व्यास मानकर वृत्त खींचा गया और $\angle ADC$ अर्द्धवृत्त का कोण है,



अतः $\angle ADC = 90^\circ$

अब, $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में,

$AB = AC$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADB = \angle ADC$ (समकोण) .

$\triangle ABD = \triangle ACD$ (RHS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $BD = CD$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त खण्ड का कोण न्यूनकोण होता है।

हल: दिया है-

आकृति में एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, दीर्घवृत्तखण्ड ACB है।

सिद्ध करना है-

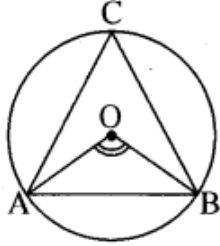
$$\angle ACB < 90^\circ$$

रचना-

OA, OB एवं AB को मिलाया।

उपपत्ति-

चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle AOB$ और शेष भाग पर अन्तरिक कोण $\angle ACB$ है, अतः



$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB \quad \dots\dots(1)$$

परन्तु $\angle AOB < 180^\circ$ ($\triangle AOB$ का एक कोण)

$$\therefore \frac{1}{2} \angle AOB < \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

$$\text{अर्थात् } \frac{1}{2} \angle AOB < 90^\circ \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$\angle ACB < 90^\circ \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 7. AOC वृत्त का एक व्यास है तथा चाप AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है। $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि चाप

AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है, इसलिए,

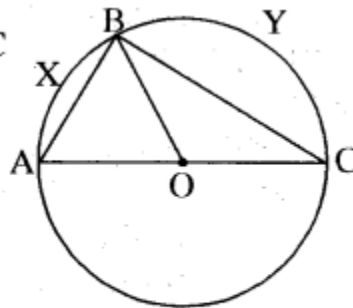
$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle BOC$$

साथ ही, $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$

$$\text{अतः, } \frac{1}{2} \angle BOC + \angle BOC = 180^\circ$$

$$\frac{3}{2} \angle BOC = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{या } \angle BOC &= \frac{2}{3} \times 180^\circ \\ &= 120^\circ \text{ उत्तर} \end{aligned}$$



प्रश्न 8. आकृति में, r का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\angle DAC = \angle DBC = 30^\circ$ (एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण)(i) $\triangle DBC$ में।

$$\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC = 180^\circ$$

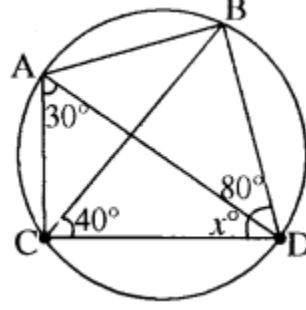
$$\text{या } 30^\circ + 40^\circ + (x + 80^\circ) = 180^\circ$$

(आकृति एवं (i) से)

$$\text{या } x + 80 = 180 - 70$$

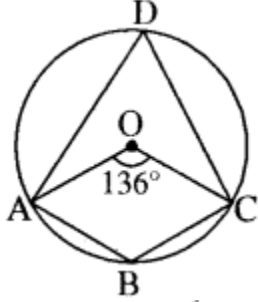
$$\text{या } x = 110 - 80$$

$$\text{या } x = 30^\circ \text{ उत्तर}$$



प्रश्न 9. आकृति में, $\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle AOC = 136^\circ$ हो, तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

हल: चाप ABC द्वारा केन्द्र O और शेष भाग पर अन्तरित कोण क्रमशः $\angle AOC$ और $\angle ADC$ हैं।



$$\text{अतः } \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 136^\circ$$

$$\text{या } \angle ADC = 68^\circ$$

$\therefore \triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है

अतः सम्मुख कोणों का योग 180° होगा।

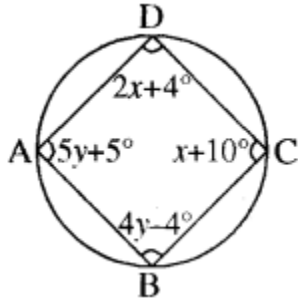
$$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ$$

$$\angle ABC = 112^\circ$$

प्रश्न 10. आकृति में, $\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। x और y ज्ञात कीजिए।

हल: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।



$$(2x + 4^\circ) + (4^\circ - 4^\circ) = 180^\circ$$

$$\text{या } 2x^\circ + 4y^\circ = 180^\circ$$

$$\text{या } x^\circ + 2y^\circ = 90^\circ \quad \dots(1)$$

$$\text{इसी प्रकार } (x^\circ + 10^\circ) + (5y^\circ + 5^\circ) = 180^\circ$$

$$\text{या } x^\circ + 5y^\circ = 165^\circ \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर

$$x^\circ + 2y^\circ = 90^\circ \quad \dots(1)$$

$$x^\circ + 5y^\circ = 165^\circ \quad \dots(2)$$

$$\text{घटाने पर } \quad \quad \quad -3y^\circ = -75^\circ$$

$$\therefore y^\circ = 25^\circ$$

y का मान समी. (1) में रखने पर

$$x^\circ + 2 \times 25^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ + 50^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$x^\circ = 40^\circ, y^\circ = 25^\circ$$

अतः $x^\circ = 40^\circ$ और $y^\circ = 25^\circ$ उत्तर

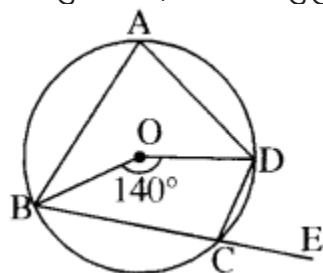
प्रश्न 11. आकृति में, वृत्त का केन्द्र O है और चाप BCD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 140° है। $\angle BAD$ और $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।

हल: चाप BCD द्वारा केन्द्र एवं शेष भाग पर अन्तरित कोण क्रमशः $\angle BOD$ एवं $\angle BAD$ हैं।

$$\text{अतः } \angle BAD = \frac{1}{2} \times \angle BOD = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$$

$$\text{या } \angle BAD = 70^\circ$$

परन्तु $\angle DCE$, चक्रीय चतुर्भुज $\triangle BCD$ का बहिष्कोण है जो इसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होगा।



$$\angle DCE = \angle BAD$$

$$\angle DCE = 70^\circ$$

प्रश्न 12. एक चक्रीय चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का युग्म समान है। सिद्ध कीजिये कि उसके विकर्ण भी समान होंगे।

हल: दिया है-

$\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें $AD = BC$ ।

सिद्ध करना है— $AC = BD$

उपपत्ति— $\angle DAO = \angle CBO$

$\angle ADO = \angle BCO$

(एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।)

$AD = BC$ दिया है।

$\triangle ADO \cong \triangle BCO$

$\therefore$

$OD = OC$

$AD = BC$ दिया है।

$\triangle ADO = \triangle BCO$

$OD = OC$ (1)

$OB = OA$ (2)

समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$OD + OB = OC + OA$

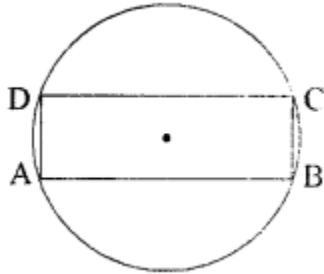
$BD = AC$ इतिसिद्धम्



.....(1)

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए चक्रीय समान्तर चतुर्भुज सदैव एक आयत होता है।

हल: माना $\triangle BCD$ एक चक्रीय समान्तर DA चतुर्भुज है। समान्तर चतुर्भुज $\triangle BCD$ को आयत सिद्ध करने के लिए हम यह सिद्ध करेंगे कि इसका AF एक कोण समकोण है।



$\therefore \triangle BCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \angle B = \angle D$ (1)

($\because$ समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

पुनः $\therefore ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \angle B + \angle D = 180^\circ$ (2)

समीकरण (1) तथा (2) से

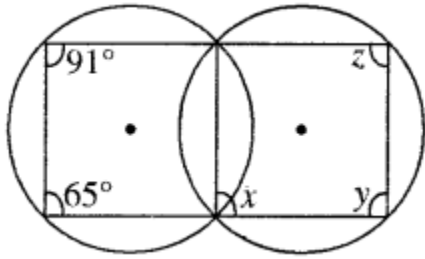
$\angle B + \angle B = 180^\circ$ या $2\angle B = 180^\circ$

$\angle B = 90^\circ$ समी.

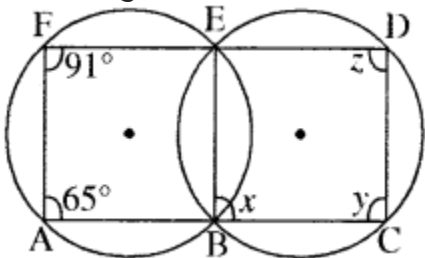
(1) से $2\angle D = 180^\circ$

अतः $ABCD$ एक आयत है। (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 14. दी गई आकृति में कुछ कोणों को r , y और z से चिह्नित किया गया है। इन कोणों के मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)



हल: दिये गये चित्र में $\triangle BEF$ एक चक्रीय चतुर्भुज है हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होते हैं इस कारण से



$$\angle BAF = \angle BED = 65^\circ$$

$$\text{चित्र से } \angle E + \angle C = 180^\circ$$

$\therefore$ BEDC एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें आमने – सामने के कोणों का योग 180° होता है।

$$\Rightarrow 65^\circ + y = 180^\circ$$

$$\therefore y = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \text{ उत्तर}$$

इसी प्रकार

$$\angle AFE = \angle CBE$$

$$\Rightarrow 91^\circ = x$$

$$\therefore x = 91^\circ \text{ उत्तर}$$

हम जानते हैं

$$x + z = 180^\circ$$

चक्रीय चतुर्भुज के कारण

$$z = 180^\circ - x$$

$$z = 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ \text{ उत्तर}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. आकृति में, चाप $AB =$ चाप CD है, सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ है।

हल: दिया है-

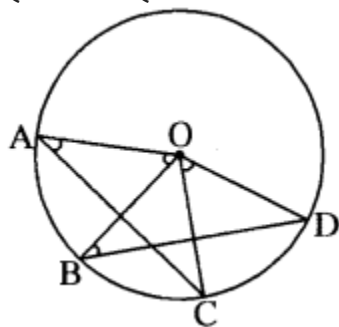
चाप $AB =$ चाप CD है,

सिद्ध करना है-

$$\angle A = \angle B$$

उपपत्ति-

हम जानते हैं कि समान चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान होते हैं।



$$\text{अतः } \angle AOB = \angle COD$$

दोनों पक्षों में $\angle BOC$ जोड़ने पर

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$$

$$\text{या } \angle AOC = \angle BOD \dots\dots(1)$$

अब $\triangle AOC$ और $\triangle BOD$ में,

$$OA = OB \text{ (वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

$$OC = OD \text{ (वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

$$\angle AOC = \angle BOD \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$\triangle AOC \cong \triangle BOD \text{ (SAS से)}$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

$$\angle A = \angle B \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 2. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित होगा।

हल: दिया है-

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, जिसकी जीवाएँ AB और AC समान हैं।

सिद्ध करना है-

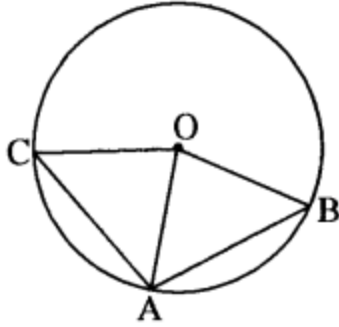
केन्द्र O , कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है।

रचना-

CO और BO को मिलाया।

उपपत्ति-

$\triangle AOB$ और $\triangle AOC$ में,



$BO = OC$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AB = AC$ (दिया है)

$\triangle AOB = \triangle AOC$ (SSS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

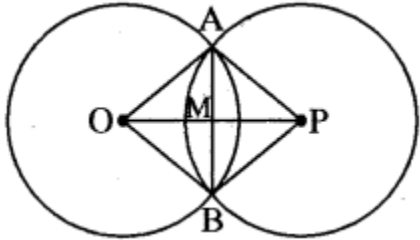
अर्थात् $\angle OAB = \angle OAC$

अर्थात् केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है। इतिसिद्धम् ।

प्रश्न 3. यदि दो वृत्त, एक-दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लम्ब समद्विभाजक होती है।

हल: दिया है-

आकृति में दो वृत्त, जिनके केन्द्र क्रमशः O एवं P हैं, जो A और B बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है-

OP जीवा AB का लम्बसमद्विभाजक है।

रचना-

OA, OB, PA और PB को मिलाया।

उपपत्ति-

AOAP और AOBP में,

$AO = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$PA = PB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\triangle OAP = \triangle OBP$ (SSS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होंगे।

$\angle AOP = \angle BOP$

या $\angle AOM = \angle BOM$ (1)

अब, $\triangle AOM$ और $\triangle BOM$ में

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\angle AOM = \angle BOM$ [समीकरण (1) से]

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ)

$\triangle AOM = \triangle BOM$ (SAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ एवं कोण समान होंगे।

अर्थात् $AM = BM$ (2)

और $\angle AMO = \angle BMO$ (3)

परन्तु $\angle AMO + \angle BMO = 180^\circ$

या $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ (4)

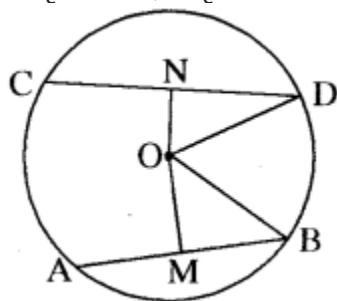
समीकरण (2) और (4) से,

OP, जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो जीवाओं में से बड़ी जीवा केन्द्र के निकट होती है।

हल: दिया है-

आकृति में, एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है और जीवा $CD >$ जीवा AB



सिद्ध करना है-

$ON < OM$

रचना-

OB और OD को मिलाया।

उपपत्ति-

OM और ON क्रमशः AB और CD पर लम्ब हैं,

अतः $MB = \frac{1}{2} AB$ और $ND = \frac{1}{2} CD$ (1)

अब $\triangle OMB$ में

$MB^2 = OB^2 - OM^2$ (2)

और $\triangle OND$ में

$ND^2 = OD^2 - ON^2$ (3)

दिया है कि $AB < CD$

या $\frac{1}{2} AB < \frac{1}{2} CD$

या $MB < ND$ [समीकरण (1) से]

या $MB^2 < ND^2$ (4)

समीकरण (2), (3) और (4) से

$(OB^2 - OM^2) < (OD^2 - ON^2)$

परन्तु $OB = OD$ (वृत्त की त्रिज्या) है

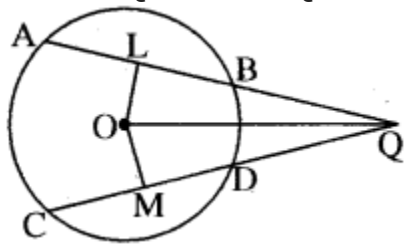
अतः $- OM^2 < - ON^2$

या $OM^2 > ON^2$

या $OM > ON$

या $ON < OM$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 5. आकृति में, एक वृत्त में जीवा $AB =$ जीवा CD हों, तो सिद्ध कीजिए कि $DQ = BQ$.



हल: दिया है-

जीवा $AB =$ जीवा CD

सिद्ध करना है-

$DQ = BQ$

रचना-

$OL \perp AB$ और $OM \perp CD$ खींचे और OQ को मिलाया।

उपपत्ति-

$AB = CD$ (दिया हुआ है)

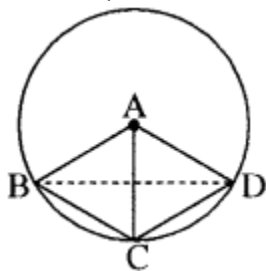
$OL = OM$ (1)

$\triangle OMQ$ और $\triangle OLQ$ में,

$OQ = OQ$ (उभयनिष्ठ भुजा)
 $OM = OL$ [समीकरण (1) से]
 $\angle OMQ = \angle OLQ$ (समकोण)
 $\triangle OMQ = \triangle OLQ$ (RHS से)
 अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।
 अर्थात् $MQ = LQ$ (2)
 परन्तु $MD = \frac{1}{2} CD$ और $LB = \frac{1}{2} AB$
 $AB = CD \Rightarrow MD = LB$ (3)
 समीकरण (2) में से (3) को घटाने पर
 $MQ - MD = LQ - LB$
 अतः $DQ = BQ$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 6. एक चतुर्भुज $\triangle BCD$ में $AB = AC = AD$ हों, तो सिद्ध कीजिए $\angle BAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$.

हल: दिया है कि $AB = AC = AD$ अर्थात् बिन्दु B, C और D बिन्दु A से समान दूरी पर हैं, अतः वृत्त का केन्द्र A है।



अब चाप BC केन्द्र पर $\angle BAC$ और वृत्त के शेष भाग पर $\angle BDC$ बनाता है।
 $\therefore \angle BAC = 2\angle BDC$ (1)
 इसी प्रकार चाप CD केन्द्र पर $\angle CAD$ और वृत्त के शेष भाग $\angle CBD$ बनाता है।
 $\therefore \angle CAD = 2\angle CBD$ (2)
 समीकरण (1) और (2) का योग करने पर
 $\angle BAC + \angle CAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$
 $= \angle BAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$ इतिसिद्धम्।

प्रश्न 7. आकृति में, $\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है। इसका केन्द्र है। यदि A को O से मिलाते हुए आगे बढ़ाया तो यह वृत्त को D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए $\triangle OBD$ एक समबाहु त्रिभुज है।

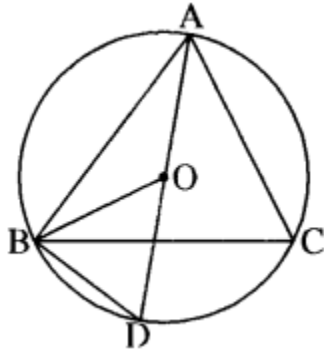
हल: दिया हुआ है-
 $\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है। O, $\triangle ABC$ का केन्द्र है।
 AO को आगे बढ़ाने पर वृत्त से D पर मिलता है।

सिद्ध करना-

$\triangle OBD$ समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति-

OB एवं OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)



अतः $\angle OBD = \angle ODB$ (i)

$\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है।

अतः $\angle C = 60^\circ$ (ii)

$\angle ADB = \angle C$

[(ii) से एक ही वृत्त खण्ड पर बने कोण]

अतः $\angle ADB = 60^\circ$ [(i) से]

परन्तु $\angle ADB$ एवं $\angle ODB$ एक ही कोण को दर्शाता है।

अतः $\angle ODB = 60^\circ$

$\therefore \angle OBD = 60^\circ$ (समीकरण (i) से)

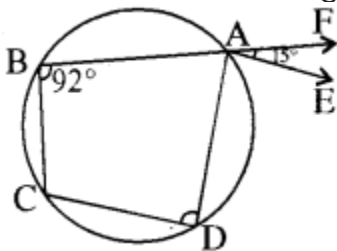
परन्तु $\triangle$ में तीनों कोणों का योग 180° होता है।

अतः $\triangle OBD$ का तीसरा कोण $\angle BOD$ भी 60° का होगा।

अतः $\triangle OBD$ एक समबाहु त्रिभुज है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 8. आकृति में, $\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। CD के समान्तर रेखा AE खींची गई है। BA को F तक आगे बढ़ाया गया है। यदि $\angle ABC = 92^\circ$ और $\angle FAE = 20^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle BCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है अतः



$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ BO°

या $\angle CDA = 180^\circ - 92^\circ$

या $\angle CDA = 88^\circ$

परन्तु $CD \parallel AE$

या $\angle DAE = \angle CDA$ (एकान्तर कोण)

या $\angle DAE = 88^\circ$

$$\text{याहाँ } \angle DAF = \angle FAE + \angle DAE = 20^\circ + 88^\circ$$

$$\text{या } \angle DAF = 108^\circ$$

$$\angle DAB = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$\text{अब } \angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$$

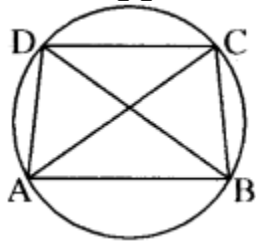
$$\text{या } \angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 72^\circ$$

$$\text{या } \angle BCD = 108^\circ \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 9. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की दो भुजाएँ समान्तर हों, तो सिद्ध कीजिए कि शेष भुजाएँ बराबर होंगी और विकर्ण भी बराबर होंगे। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: दिया है-

चक्रीय चतुर्भुज $\Delta ABCD$ में,



$AB \parallel DC$ है।

सिद्ध करना है-

$$(i) AD = BC$$

$$(ii) AC = BD$$

उपपत्ति-

$\therefore AB \parallel DC$ और BC एक AK तिर्यक रेखा है,

$$\text{अतः } \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ \dots\dots\dots(1)$$

परन्तु ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है,

$$\text{अतः } \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$\angle ABC + \angle DCB = \angle ABC + \angle ADC$$

$$\text{या } \angle DCB = \angle ADC \dots\dots\dots(3)$$

अब AADC और ABCD में,

$$\angle ADC = \angle DCB \text{ [समीकरण (3) से]}$$

$$\angle DAC = \angle DBC \text{ (एक ही वृत्त खण्ड के कोण) और } DC = DC \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

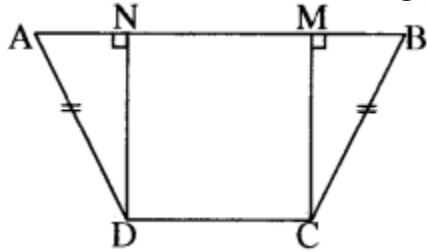
$$\Delta ADC = \Delta BCD. \text{ (ASA से)}$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी,

$$\text{अर्थात् } AD = BC$$

$$\text{और } AC = BD \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 10. आकृति में, ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें $AD = BC$ और $\angle ADC = \angle BCD$ है। सिद्ध कीजिए। ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।



हल: दिया है-

चतुर्भुज ABCD में $AD = BC$ और $\angle ADC = \angle BCD$ है।

सिद्ध करना है-

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना-

$DN \perp AB$ और $CM \perp AB$ खींचें।

उपपत्ति-

दिया है कि

$$\angle ADC = \angle BCD$$

$$\therefore \angle ADN = \angle ADC - 90^\circ \dots\dots\dots(1)$$

$$= \angle BCD - 90^\circ [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\angle ADN = \angle BCM \dots\dots\dots(2)$$

अब AAND और AIBMC में

$$\angle ANI = \angle BMC \text{ (समकोण)}$$

$$\angle ADN = \angle BCM [\text{समीकरण (2) से}]$$

और $AD = BC$ (दिया है)

$$\therefore \triangle ADN = \triangle BMC \text{ (AAS से)}$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे,

$$\text{अर्थात् } \angle A = \angle B \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{इसी प्रकार } \angle C = \angle D \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{परन्तु } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

समीकरण (3) और (4) से,

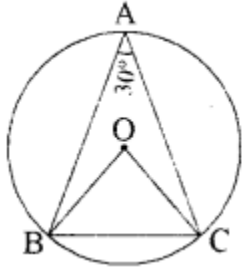
$$\angle B + \angle B + \angle D + \angle D = 360^\circ$$

$$2\angle B + 2\angle D = 360^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। इतिसिद्धम्

प्रश्न 11. दिये गये चित्र में, त्रिभुज ABC है। जिसमें $\angle BAC = 30^\circ$ है। सिद्ध कीजिए कि BC त्रिभुज ABC के परिवृत्त की त्रिज्या है, जिसका केन्द्र O है।



हल: हम जानते हैं कि केन्द्र पर बना कोण शेष परिधि पर बने कोण का दुगुना होता है।

इस कारण से

$$\angle BOC = 2 \angle BAC$$

$$\angle BOC = 2 \times 30^\circ$$

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ$$

OB = OC एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$$\angle CBO = \angle BCO$$

हम जानते हैं

$$\angle CBO + \angle BCO + \angle BOC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CBO + \angle BCO = 180^\circ - \angle BOC$$

$$\Rightarrow \angle CBO + \angle BCO = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

लेकिन $\angle CBO = \angle BCO$

अतः हम कह सकते हैं कि

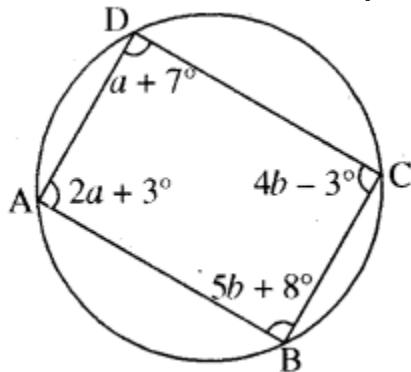
$$\angle CBO = \angle BCO = 60^\circ$$

अतः त्रिभुज BOC एक समबाहु त्रिभुज होगा। इसमें OB = OC = BC लेकिन OB = OC वृत्त की त्रिज्या है।

अतः BC भी वृत्त की त्रिज्या होगी अतः BC त्रिभुज ABC के परिवृत्त की त्रिज्या है जिसका केन्द्र O है।

इतिसिद्धम्

प्रश्न 12. आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। a और b का मान ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)



हल: दी हुई आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है इसलिए $\angle A + \angle C = 180^\circ$ होगा।

$$2a + 3^\circ + 4b - 3^\circ = 180^\circ$$

या $2a + 4b = 180^\circ$

या $a + 2b = 90^\circ$ (1)

तथा $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$$5b + 8^\circ + a + 7^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + 5b + 15^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + 5b = 180^\circ - 15^\circ$$

$$a + 5b = 165^\circ$$
(2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर

$$a + 2b = 90^\circ$$

$$a + 5b = 165^\circ$$

घटाने पर

$$\begin{array}{r} - \quad - \quad - \\ - 3b = - 75^\circ \end{array}$$

$$b = \frac{-75^\circ}{-3} = 25^\circ$$

समीकरण (1) में मान रखने पर

$$a + 2b = 90^\circ$$

$$\Rightarrow a + 2 \times 25^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow a = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

अतः $a = 40^\circ$, $b = 25^\circ$ उत्तर