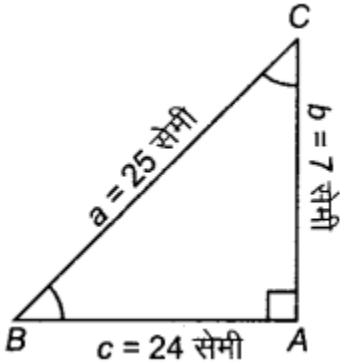


न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

Exercise 14.1

प्रश्न 1. यदि $\triangle ABC$ में $\angle A = 90^\circ$, $a = 25$ सेमी, $b = 7$ सेमी हो, तो $\angle B$ और $\angle C$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।



हल: दिया है : समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle A = 90^\circ$

भुजा AB = c ज्ञात करना है।

भुजा BC = a = 25 सेमी

तथा भुजा CA = b = 7 सेमी

$\triangle BAC$ एक समकोण त्रिभुज है।

अतः $\triangle BAC$ में, बौधायन सूत्र से

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow (25)^2 = (7)^2 + (AB)^2$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = (25)^2 - (7)^2 = 625 - 49 = 576 = (24)^2$$

$$AB = c = 24 \text{ सेमी}$$

$\angle B$ के लिए, आधार (AB) = 24 सेमी, लम्ब (AC) = 7 सेमी तथा कर्ण (BC) = 25 सेमी

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{25}$$

$$\sec B = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{24}$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{BC}{AC} = \frac{25}{7}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{24}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{25}$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{7}$$

$\angle C$ के लिए, आधार $(AC) = 7$ सेमी, लम्ब $(AB) = 24$ सेमी तथा कर्ण $(BC) = 25$ सेमी

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{AB}{BC} = \frac{24}{25} & \sec C &= \frac{BC}{AC} = \frac{25}{7} \\ \operatorname{cosec} C &= \frac{BC}{AB} = \frac{25}{24} & \tan C &= \frac{AB}{AC} = \frac{24}{7} \\ \cos C &= \frac{AC}{BC} = \frac{7}{25} & \cot C &= \frac{AC}{AB} = \frac{7}{24}\end{aligned}$$

प्रश्न 2. यदि $\triangle ABC$ में $\angle B = 90^\circ$, $a = 12$ सेमी, $b = 13$ सेमी हो, तो कोण $\angle A$ और $\angle C$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

हल

दिया है—समकोण त्रिभुज

ABC में, $\angle B = 90^\circ$

भुजा $BC = a = 12$ सेमी

भुजा $AC = b = 13$ सेमी

भुजा $AB = c$ ज्ञात करनी है। $\triangle ABC$ में,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow (13)^2 = (12)^2 + (c)^2$$

$$\Rightarrow 169 = 144 + c^2 \Rightarrow c^2 = 169 - 144$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 = (\sqrt{25})^2 \Rightarrow c = 5 \text{ सेमी}$$

$\angle A$ के लिए, आधार $(AB) = 5$ सेमी, लम्ब

$(BC) = 12$ सेमी तथा कर्ण $(AC) = 13$ सेमी

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13} \quad \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13} \quad \sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{5}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{5} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$$

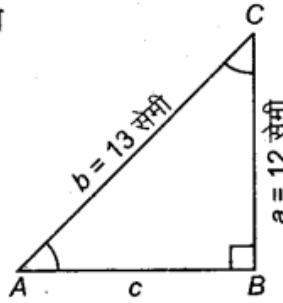
$\angle C$ के लिए, आधार $(BC) = 12$ सेमी, कर्ण

$(AC) = 13$ सेमी तथा लम्ब $(AB) = 5$ सेमी

$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13} \quad \cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{5}$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13} \quad \sec C = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$$

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12} \quad \operatorname{cosec} C = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{5}$$



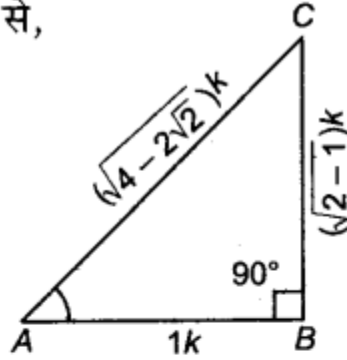
प्रश्न 3. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

हल: $\triangle ABC$ की रचना करते हैं, जिसमें $\angle B = 90^\circ$ है।

दिया है, $\tan A = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$ त्रिभुज ABC की रचना करते हैं जिसमें लम्बे BC तथा आधार AB , $\sqrt{2} - 1$ के अनुपात में हैं। माना कि $BC = (\sqrt{2} - 1)k$ तथा $AB = k$.

$\triangle ABC$ में, बौधायन सूत्र से,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= k^2 + [(\sqrt{2} - 1)k]^2 \\ &= k^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 k^2 \\ &= k^2 + 2k^2 + k^2 - 2\sqrt{2}k^2 \\ &= 4k^2 - 2\sqrt{2}k^2 \\ &= (4 - 2\sqrt{2})k^2 \end{aligned}$$



$$AC = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} k$$

[न्यूनकोण के लिए धनात्मक चिह्न लेने पर]

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{(\sqrt{2} - 1)k}{(\sqrt{4 - 2\sqrt{2}})k} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\text{और } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{k}{(\sqrt{4 - 2\sqrt{2}})k} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

अब $LHS = \sin A \cos A$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

[$\sin A \cos A$ के मान रखने पर]

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{4 - 2\sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 \times 2 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} = RHS$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए

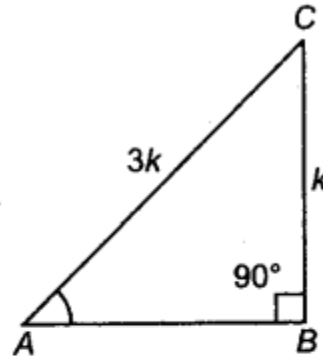
हल:

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$$

∴ त्रिभुज ABC की रचना करते हैं जिसमें लम्ब BC तथा कर्ण AC 1:3 के अनुपात है।

माना $BC = k$ तथा

$$AC = 3k$$



समकोण $\triangle ABC$ में, बौधायन सूत्र से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(3k)^2 = AB^2 + k^2 \Rightarrow AB^2 = 9k^2 - k^2 = 8k^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{8k^2} = \sqrt{8}k$$

[∵ θ न्यूनकोण है, +ve चिह्न लेने पर]

$$\therefore \triangle ABC \text{ में, } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{8}k}{3k} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{3k}{k} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{\sqrt{8}k} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{8}k} = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

अब $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$

$$= \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{3}{1} + \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{3}{\sqrt{8}} = \sqrt{8} + \frac{3}{8} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{8}$$

प्रश्न 5. यदि $\cos \theta = \frac{8}{17}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल:

एक $\triangle ABC$ की रचना करते हैं जिसमें $\angle B = 90^\circ$
तथा $\angle A = \theta$ है।

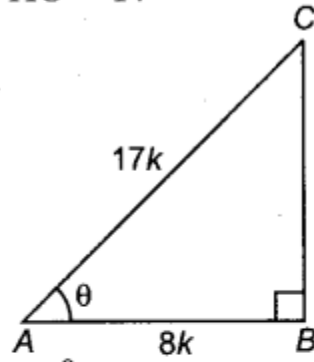
दिया है, $\cos \theta = \frac{8}{17} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{8}{17}$

अर्थात् आधार AB और
कर्ण AC , $8:17$ के
अनुपात में हैं।

माना $AB = 8k$

तथा $AC = 17k$

$\triangle ABC$ में बौधायन सूत्र से,



$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = (17k)^2 - (8k)^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 289k^2 - 64k^2 = 225k^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{225k^2} = 15k$$

न्यूनकोण θ के लिए

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{17k}{15k} = \frac{17}{15}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$$

$$\cot \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}$$

प्रश्न 6. यदि $\cos A = \frac{5}{13}$ हो, तो $\frac{\operatorname{cosec} A}{\cos A + \operatorname{cosec} A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $\cos A = \frac{5}{13}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$$

अर्थात् आधार AB और कर्ण AC , $5:13$ के अनुपात में है।

माना आधार $AB = 5k$, कर्ण $AC = 13k$

ΔABC में बौधायन सूत्र से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow (13k)^2 = (5k)^2 + (BC)^2$$

$$\Rightarrow (BC)^2 = (13k)^2 - (5k)^2$$

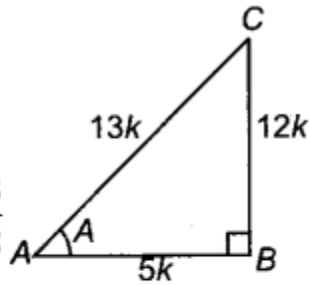
$$= 169k^2 - 25k^2 = 144k^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{144k^2} = 12k$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{12k} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{\operatorname{cosec} A}{\cos A + \operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{\frac{13}{12}}{\frac{5}{12} + \frac{13}{12}} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{5 \times 12 + 13 \times 13}{156}} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{229}{156}} = \frac{13}{12} \times \frac{156}{229} = \frac{13}{1} \times \frac{13}{229} = \frac{169}{229}$$

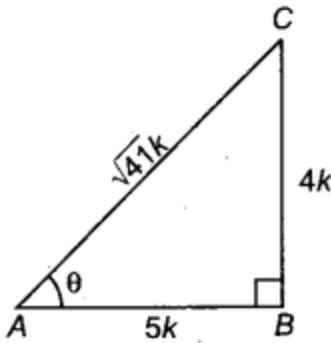


प्रश्न 7. यदि $5 \tan \theta = 4$ हो, तो $\frac{5 \sin \theta - 3 \cos \theta}{\sin \theta + 2 \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\therefore 5 \tan \theta = 4 \Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$\therefore \triangle ABC$ की रचना की जिसमें $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \theta$ लम्ब BC तथा आधार AB , 4:5 के अनुपात में है। माना $BC = 4k$ तथा $AB = 5k$



$\triangle ABC$ में बौधायन सूत्र से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = (5k)^2 + (4k)^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 25k^2 + 16k^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 41k^2 \Rightarrow AC = \sqrt{41}k$$

$$\text{अब } \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{\sqrt{41}k} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

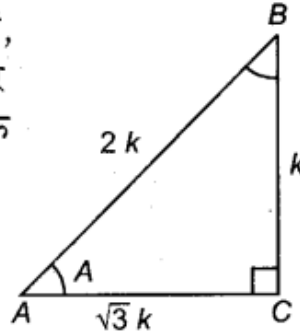
$$\text{और } \cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{41}k} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\begin{aligned} \text{अब } \frac{5 \sin \theta - 3 \cos \theta}{\sin \theta + 2 \cos \theta} &= \frac{5 \times \frac{4}{\sqrt{41}} - 3 \times \frac{5}{\sqrt{41}}}{\frac{4}{\sqrt{41}} + 2 \times \frac{5}{\sqrt{41}}} \\ &= \frac{\frac{20 - 15}{\sqrt{41}}}{\frac{4 + 10}{\sqrt{41}}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{41}}}{\frac{14}{\sqrt{41}}} = \frac{5}{\sqrt{41}} \times \frac{\sqrt{41}}{14} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

प्रश्न 8. त्रिभुज ABC में $\angle C = 90^\circ$ है और यदि $\cot A = \sqrt{3}$ तथा $\cot B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है तो सिद्ध कीजिए का $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$

हल: $\cot A = \sqrt{3}/1 = \text{आधार} / \text{कर्ण}$

$\triangle ABC$ की रचना करते हैं,
जिसमें $\angle C = 90^\circ$, आधार
AC व लम्ब BC $\sqrt{3}:1$ के
अनुपात में हैं। माना कि,
 $AC = \sqrt{3}k$ तथा $BC = k$.
 $\triangle ABC$ में,



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = (\sqrt{3}k)^2 + k^2 = 3k^2 + k^2$$

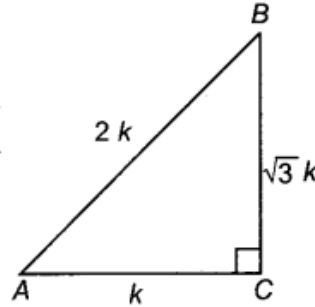
$$\Rightarrow AB = \sqrt{4k^2} = 2k$$

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रश्नानुसार, $\cot B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\triangle ABC$ की रचना करते
हैं। जिसमें $\angle C = 90^\circ$,
तथा आधार BC तथा
लम्ब AC, $1:\sqrt{3}$ के
अनुपात में हैं।
माना कि $BC = k$ तथा
 $AC = \sqrt{3}k$



समकोण $\triangle ABC$ में, बौधनयन सूत्र से

$$AB = \sqrt{k^2 + (\sqrt{3}k)^2} = \sqrt{4k^2} = 2k$$

$$\sin B = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos B = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\text{LHS} = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$= \text{RHS}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. यदि $16 \cot A = 12$ हों, तो $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ को मान ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है, $16 \cot A = 12$

$$\cot A = \frac{12}{16} \text{ या } \cot A = \frac{3}{4}$$

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AB}{BC}$$

त्रिभुज ABC की रचना करते हैं जिसमें $\angle B = 90^\circ$,
 $AB : BC = 3 : 4$ के अनुपात में है।

माना $AB = 3k$ तथा

$$BC = 4k$$

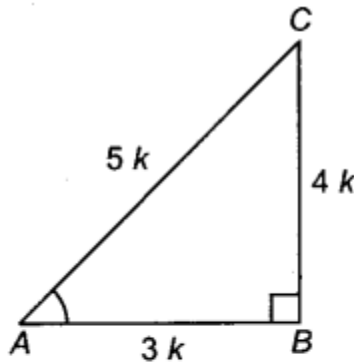
$\triangle ABC$ में बौधायन सूत्र से,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2 \\ \Rightarrow AC &= \sqrt{25k^2} = 5k \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

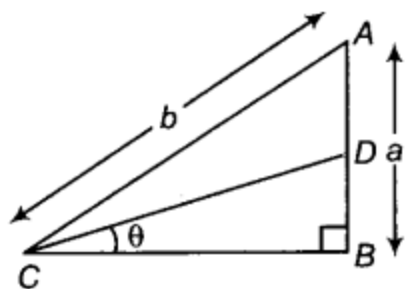
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\text{अब } \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4+3}{5}}{\frac{4-3}{5}} = \frac{7}{1} = 7$$



प्रश्न 10. चित्र में, $AD = DB$ तथा $\angle B = 90^\circ$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

- (i) $\sin \theta$
- (ii) $\cos \theta$
- (iii) $\tan \theta$



हल:

दिया है $AD = DB$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = a$, $AC = b$

$$\therefore DB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$\triangle ABC$ में, बौधायन सूत्र से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow (b)^2 = (a)^2 + (BC)^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 - a^2}$$

अब $\triangle CBD$ में, बौधायन सूत्र से

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 = (\sqrt{b^2 - a^2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= (b^2 - a^2) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{4b^2 - 4a^2 + a^2}{4}$$

$$\Rightarrow CD^2 = \frac{4b^2 - 3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{\frac{(4b^2 - 3a^2)}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 3a^2}}{2}$$

$$(i) \sin \theta = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{(4b^2 - 3a^2)}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{(4b^2 - 3a^2)}}$$

$$(ii) \cos \theta = \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{\frac{\sqrt{(4b^2 - 3a^2)}}{2}} = \frac{2\sqrt{(b^2 - a^2)}}{\sqrt{(4b^2 - 3a^2)}}$$

$$(iii) \tan \theta = \frac{BD}{BC} = \frac{a/2}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$$

Exercise 14.2

त्रिकोणमितीय अनुपातों में सम्बन्धों द्वारा हल कीजिए : [प्रश्न 1 से 10 तक]

प्रश्न 1. यदि $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$ हों, तो $\cot A$, $\sin A$, $\cos A$ को मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \\ \Rightarrow 1 + \cot^2 A &= \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ \Rightarrow \cot^2 A &= \frac{25}{16} - 1 = \frac{25-16}{16} \\ \Rightarrow \cot^2 A &= \frac{9}{16} \Rightarrow \cot A = \frac{3}{4} \\ \therefore \tan A &= \frac{1}{\cot A} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

हम जानते हैं कि

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\sec A = \frac{5}{3}, \quad \cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}$$

हम जानते हैं कि $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$$

$$\text{अतः } \cot A = \frac{3}{4}, \cos A = \frac{3}{5} \text{ और } \sin A = \frac{4}{5}$$

प्रश्न 2. यदि $\tan A = \frac{20}{21}$ हो तो $\cos A$ तथा $\sin A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan A = \frac{20}{21} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$\triangle ABC$ की रचना करते हैं,

जिसमें $\angle B = 90^\circ$, लम्ब

BC तथा आधार AB

$20:21$ के अनुपात में है। माना कि $BC = 20k$

तथा $AB = 21k$

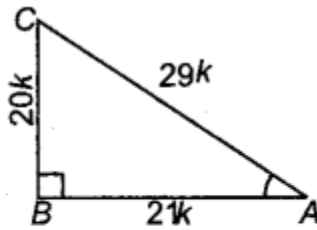
समकोण $\triangle ABC$ में, बौधयन सूत्र से

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 = (21k)^2 + (20k)^2 \\ &= 441k^2 + 400k^2 = 841k^2 = (29k)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AC = 29k$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$$

$$\text{तथा } \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{20k}{29k} = \frac{20}{29}$$



प्रश्न 3. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ हो, तो $\cos A$ और $\tan A$ के माने ज्ञात कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\Rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 A = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{अतः } \cos A = \frac{4}{5} \text{ और } \tan A = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 4. यदि $\cos B = \frac{1}{3}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned}\text{हम जानते हैं कि } \sin^2 B &= 1 - \cos^2 B \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9}\end{aligned}$$

$$\sin B = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{2\sqrt{2}/3}{1/3} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{1/3} = 3, \cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{अतः } \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan B = 2\sqrt{2},$$

$$\cot B = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \sec B = 3, \operatorname{cosec} B = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

प्रश्न 5. यदि $\sin A = \frac{5}{13}$ हो, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}\cos^2 A &= 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} \\ &= \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos A = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}\end{aligned}$$

$$\text{और } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5/13}{12/13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

प्रश्न 6. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

हल:

हम जानते हैं कि $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$= 1 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} + (1)^2$$

$$= 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\sec A = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \quad \cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

$$= \frac{\tan A}{\sqrt{\sec^2 A}} = \frac{\tan A}{\sec A} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\text{अब सिद्ध करना है—} \sin A \cdot \cos A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{4 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{अतः LHS} = \text{RHS}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 7. यदि $\tan A = 2$ हो, तो $\sec A \sin A + \tan^2 A - \operatorname{cosec} A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan A = 2$$

$$\sec^2 A = 1 + (2)^2 \quad [\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$$

$$= 1 + 4 = 5$$

$$\sec A = \sqrt{5} \quad \text{या} \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5-1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{अब } \sec A \sin A + \tan^2 A - \operatorname{cosec} A$$

$$= \sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + (2)^2 - \frac{\sqrt{5}}{2} = 2 + 4 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= 6 - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{12 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{अतः } \sec A \sin A + \tan^2 A - \operatorname{cosec} A = \frac{12 - \sqrt{5}}{2}$$

प्रश्न 8. यदि $\sin \theta = \frac{4}{5}$ हो, तो $\frac{4 \tan \theta - 5 \cos \theta}{\sec \theta + 4 \cot \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

$$\text{अब } \frac{4 \tan \theta - 5 \cos \theta}{\sec \theta + 4 \cot \theta} = \frac{4 \times \frac{4}{3} - 5 \times \frac{3}{5}}{\frac{5}{3} + 4 \times \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{16}{3} - 3}{\frac{5}{3} + 3} = \frac{\frac{16-9}{3}}{\frac{5+9}{3}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\text{अतः } \frac{4 \tan \theta - 5 \cos \theta}{\sec \theta + 4 \cot \theta} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 9. यदि $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो $\sin \theta$ तथा $\cot \theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{और } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = 1$$

$$\text{अतः } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ व } \cot \theta = 1$$

प्रश्न 10. यदि $\sec\theta = 2$ तो $\tan\theta$, $\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\sec\theta = 2 \text{ या } \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

Exercise 14.3

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए

प्रश्न 1. $\cos\theta \cdot \tan\theta = \sin\theta$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \cos\theta \cdot \tan\theta \\ &= \cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right] \\ &= \sin\theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 2. $(1 - \sin^2\theta) \tan^2\theta = \sin^2\theta$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= (1 - \sin^2\theta) \tan^2\theta \\ &= \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta \quad [\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta] \\ &= \cos^2\theta \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right] \\ &= \sin^2\theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 3.

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sin \theta \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta \cdot \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= \{(\sin \theta)^2 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + (\cos \theta)^2\} \\ &\quad + \{(\sin \theta)^2 - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + (\cos \theta)^2\} \\ &\left[\begin{array}{l} \because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right] \text{का प्रयोग करने पर} \\ &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &\quad - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 2 [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] = 2 \times 1 = 2 = \text{RHS} \\ \therefore \quad \text{LHS} &= \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 5. $\operatorname{cosec}^6 \theta - \cot^6 \theta = 1 + 3 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^2 \theta$

हल:

हम जानते हैं कि

$$\text{सूत्र } (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$\text{तब } a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \text{ से}$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \operatorname{cosec}^6 \theta - \cot^6 \theta \\ &= (\operatorname{cosec}^2 \theta)^3 - (\cot^2 \theta)^3 \\ &= (\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta)^3 + 3 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^2 \theta \\ &\quad (\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta) \\ &= (1)^3 + 3 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^2 \theta \times (1) \\ &\quad \left[\begin{array}{l} \because 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \\ \therefore 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta \end{array} \right] \\ &= 1 + 3 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^2 \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. $\sin^2\theta \cos\theta + \tan\theta \sin\theta + \cos^3\theta = \sec\theta$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \sin^2\theta \cdot \cos\theta + \tan\theta \sin\theta + \cos^3\theta \\&= \sin^2\theta \cdot \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \sin\theta + \cos^3\theta \\&= \sin^2\theta \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos^3\theta \\&= \sin^2\theta \left(\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} \right) + \cos^3\theta \\&= \sin^2\theta \left(\frac{\cos^2\theta + 1}{\cos\theta} \right) + \cos^3\theta \\&= \frac{(1 - \cos^2\theta)(1 + \cos^2\theta)}{\cos\theta} + \cos^3\theta \\&\quad [\because \sin^2\theta = (1 - \cos^2\theta)] \\&= \frac{1 - \cos^4\theta}{\cos\theta} + \cos^3\theta \\&\quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ से}] \\&= \frac{1 - \cos^4\theta + \cos^4\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \text{RHS} \\ \therefore \quad \text{LHS} &= \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 7.

$$\frac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} + \frac{\sin\theta}{1 - \cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cot \theta} \\&= \frac{\cos \theta}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\&= \frac{\cos \theta}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta}} \\&= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\&= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\&= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)} \\&= \cos \theta + \sin \theta = \sin \theta + \cos \theta = \text{RHS} \\ \therefore \quad \text{LHS} &= \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 8.

$$\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - 1} + \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta + 1} = 2 \sec^2 \theta$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - 1} + \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta + 1} \\&= \frac{\operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec} \theta + 1) + \operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec} \theta - 1)}{(\operatorname{cosec} \theta - 1)(\operatorname{cosec} \theta + 1)} \\&= \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta + \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1} \\&= \frac{2 \operatorname{cosec}^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1} = \frac{2 \operatorname{cosec}^2 \theta}{\cot^2 \theta} \\&\quad [\because \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1] \\&= \frac{2 \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}} \left[\because \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \quad \left[\because \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta \right]$$

$$= 2 \sec^2 \theta = \text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9.

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

हल:

$$\text{LHS} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\sin}{1 - \cos \theta} \times \frac{(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}$$

अंश और हर में $(1 + \cos \theta)$ से गुणा करने पर,

$$= \frac{\sin \theta (1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = \frac{\sin \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \text{RHS इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 10.

$$\frac{\sin}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\&= \frac{\sin \theta \times \sin \theta + (1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{1 + 1 + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2 + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2}{\sin \theta} \\&= 2 \operatorname{cosec} \theta = \text{RHS}\end{aligned}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 11.

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\times(1-\sin\theta)}} \\ (1-\sin\theta) \text{ से अंश व हर में गुणा करने पर} \\ &= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1)^2 - (\sin\theta)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} \quad [\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta] \\ &= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 12.

$$\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} \times \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta+1}} \\ &\quad [\text{अंश व हर में } (\sec\theta+1) \text{ से गुणा करने पर}] \\ &= \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)^2}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}} = \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)^2}{\sec^2\theta-1}} \\ &\quad [\because \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1] \\ &= \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)^2}{\tan^2\theta}} = \frac{\sec\theta+1}{\tan\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos\theta} + 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \text{RHS} \\ &\quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 13.

$$\frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)}}{\operatorname{cosec} \theta} = \cos \theta$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)}}{\operatorname{cosec} \theta} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 = \cot^2 \theta] \\ &= \frac{\sqrt{\cot^2 \theta}}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{\cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta} = \cot \theta \times \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \sin \theta = \cos \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 14. $(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)(1 + \tan \theta + \sec \theta) = 2$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)(1 + \tan \theta + \sec \theta) \\ &= \left[1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right] \left[1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right] \\ &= \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta} \right) \left(\frac{\cos \theta + \sin \theta + 1}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{\{(\sin \theta + \cos \theta) - 1\} \{(\sin \theta + \cos \theta) + 1\}}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1.

यदि $\tan \theta = \sqrt{3}$ तो $\sin \theta$ का मान है-

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) 1

उत्तर:

(B)

संकेत : $\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ ($\tan \theta$ के पदों में)

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रश्न 2. यदि $\sin \theta = \frac{5}{13}$ है तो $\tan \theta$ का मान है-

- (A) $\frac{5}{12}$
(B) $\frac{12}{13}$
(C) $\frac{13}{12}$
(D) $\frac{12}{5}$

उत्तर: (A)

संकेत:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \\&= \frac{5/13}{\sqrt{1 - (5/13)^2}} = \frac{5/13}{\sqrt{1 - \frac{25}{169}}} = \frac{5/13}{\sqrt{\frac{144}{169}}} = \frac{5/13}{12/13} \\&= \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

प्रश्न 3. यदि $\sqrt{3} \cos A = \sin A$ हो तो $\cot A$ का मान है-

- (A) $\sqrt{3}$
(B) 1
(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(D) 2

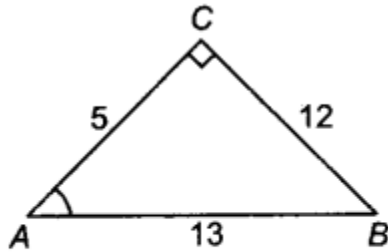
उत्तर : (C)

संकेत:

$$\sqrt{3} \cos A = \sin A$$
$$\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 4.

यदि



तो $\cot A$ का मान है—

- (A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $\frac{13}{5}$

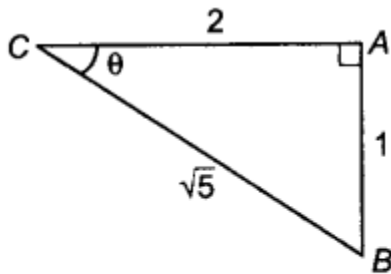
उत्तर:

(B)

संकेत : $\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$

प्रश्न 5.

यदि



तो $\tan \theta$ का मान है—

- (A) 2 (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{2}$

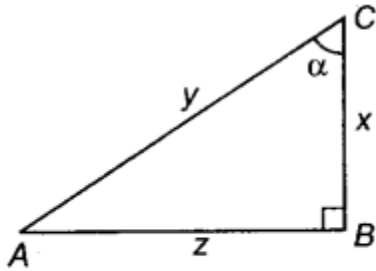
उत्तर:

(D)

$$\text{संकेत : } \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 6.

यदि



तो $\operatorname{cosec} \alpha$ का मान है-

- (A) $\frac{y}{x}$ (B) $\frac{y}{z}$ (C) $\frac{x}{z}$ (D) $\frac{x}{y}$

उत्तर:

(B)

$$\text{संकेत : } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{AB} = \frac{y}{z}$$

प्रश्न 7. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ का मान है-

- (A) 0
(B) 2
(C) 3
(D) 1

उत्तर : (D)

$$\text{संकेत: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

यदि $\theta = 30^\circ$ है, तो $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

प्रश्न 8. $\operatorname{cosec}^2 55^\circ - \cot^2 55^\circ$ का मान है-

- (A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 0

उत्तर : (A)

संकेत :

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta,$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

यदि $\theta = 55^\circ$, तो $\operatorname{cosec}^2 55^\circ - \cot^2 55^\circ = 1$

प्रश्न 9.

यदि $\cot \phi = \frac{20}{21}$ हो, तो $\operatorname{cosec} \phi$ का मान है-

- (A) $\frac{21}{20}$ (B) $\frac{20}{29}$ (C) $\frac{29}{21}$ (D) $\frac{21}{29}$

उत्तर:

(C)

संकेत : $\cot \phi = \frac{20}{21} = \frac{AB}{BC}$

माना कि $AB = 20k$

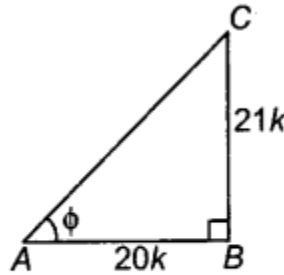
तथा $BC = 21k$

$$AC = \sqrt{(20k)^2 + (21k)^2}$$

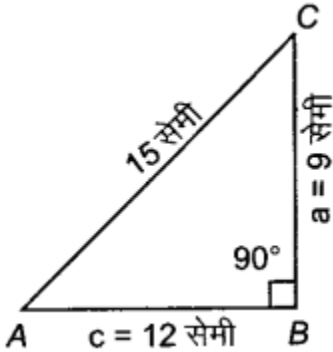
$$= \sqrt{400k^2 + 441k^2}$$

$$= \sqrt{841k^2} = 29k$$

$$\operatorname{cosec} \phi = \frac{AC}{BC} = \frac{29k}{21k} = \frac{29}{21}$$



प्रश्न 10. यदि $\triangle ABC$ में $\angle B = 90^\circ$, $c = 12$ सेमी तथा $a = 9$ सेमी हो, तो $\cos C$ का मान है-



- (A) $\frac{3}{5}$
(B) $\frac{3}{4}$
(C) $\frac{5}{3}$
(D) $\frac{4}{5}$

उत्तर : (A)

संकेत :

ΔABC में, $c = AB = 12$ सेमी

तथा $a = BC = 9$ सेमी।

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (12)^2 + (9)^2 = 144 + 81 = 225$$

$$AC = \sqrt{225} = 15$$

$$\cos C = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

प्रश्न 11. $(\sec 40^\circ + \tan 40^\circ)(\sec 40^\circ - \tan 40^\circ)$ बराबर है-

(A) -1

(B) 1

(C) $\cos 40^\circ$

(D) $\sin 40^\circ$

उत्तर : (B)

संकेत :

$$(\sec 40^\circ + \tan 40^\circ)(\sec 40^\circ - \tan 40^\circ)$$

$$= (\sec 40^\circ)^2 - (\tan 40^\circ)^2$$

$$= \sec^2 40^\circ - \tan^2 40^\circ$$

$$= 1$$

प्रश्न 12.

$\frac{1}{\sin \theta - \tan \theta}$ बराबर है-

(A) $\frac{\cot \theta}{\cos \theta - 1}$ (B) $\frac{\cot \theta}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta}$

(C) $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$ (D) $\cot \theta$

उत्तर:

(A)

संकेत : $\frac{1}{\sin \theta - \tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta(\cos \theta - 1)} = \frac{\cot \theta}{\cos \theta - 1}$$

प्रश्न 13.

$\frac{\sec A - 1}{\sec A + 1}$ बराबर है-

- (A) $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}$ (B) $\frac{\cos A - 1}{1 + \cos A}$
(C) $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ (D) $\frac{\cos A - 1}{1 - \cos A}$

उत्तर:

(C)

संकेत : $\frac{\sec A - 1}{\sec A + 1} = \frac{\frac{1}{\cos A} - 1}{\frac{1}{\cos A} + 1} = \frac{\frac{1 - \cos A}{\cos A}}{\frac{1 + \cos A}{\cos A}} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$

प्रश्न 14.

$\cot^2 \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta}$ बराबर है-

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

उत्तर

(D)

संकेत : $\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta}$
 $= -\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -1$

प्रश्न 15. यदि $\operatorname{cosec} \theta = \frac{41}{40}$ हो, तो $\tan \theta$ और $\cot \theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

दिया है : $\operatorname{cosec} \theta = \frac{41}{40}$

$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{1}{41/40} = \frac{40}{41}$

$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{40}{41}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1681-1600}{1681}} = \sqrt{\frac{81}{1681}} = \frac{9}{41}$$

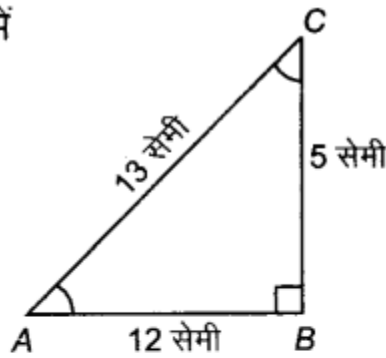
$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{40/41}{9/41} = \frac{40}{41} \times \frac{41}{9} = \frac{40}{9}$$

प्रश्न 16. यदि $\triangle ABC$ में, $\angle B$ समकोण है, तथा $AB = 12$ सेमी और $BC = 5$ सेमी हो, तो $\sin A$, $\tan A$, $\sin C$ तथा $\cot C$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

समकोण $\triangle ABC$ में
बौधायन सूत्र से,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= (12)^2 + (5)^2 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169 \\ AC &= \sqrt{169} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow AC = 13$$

$\angle A$ के लिए, आधार $(AB) = 12$ सेमी

लम्ब $(BC) = 5$ सेमी, कर्ण $(AC) = 13$ सेमी

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}, \quad \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$$

$\angle C$ के लिए, आधार $(BC) = 5$ सेमी

लम्ब $(AB) = 12$ सेमी, कर्ण $(AC) = 13$ सेमी

$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}, \quad \cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$$

प्रश्न 17.

यदि $\cos \theta = \frac{3}{5}$ हो, तो $\frac{\sin \theta - \cot \theta}{2 \tan \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\text{अब } \frac{\sin \theta - \cot \theta}{2 \tan \theta} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{2 \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{16-15}{20}}{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{1}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{160}$$

प्रश्न 18.

यदि $\cos \theta = \frac{21}{29}$ हो, तो $\frac{\sec \theta}{\tan \theta - \sin \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

$$\cos \theta = \frac{21}{29}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{29}{21}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{21}{29}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{441}{841}} = \sqrt{\frac{841-441}{841}}$$

$$= \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{841}} = \frac{20}{29}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{20/29}{21/29} = \frac{20}{21}$$

$$\text{अब } \frac{\sec \theta}{\tan \theta - \sin \theta} = \frac{29/21}{\frac{20}{21} - \frac{20}{29}}$$

$$= \frac{29/21}{\frac{20 \times 29 - 20 \times 21}{21 \times 29}} = \frac{29}{\frac{580 - 420}{21 \times 29}}$$

$$= \frac{29}{\frac{160}{21 \times 29}} = \frac{29}{21} \times \frac{21 \times 29}{160} = \frac{841}{160}$$

प्रश्न 19. यदि $\cot A = \sqrt{3}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$

हल:

दिया है, $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

$\triangle ABC$ की रचना करते हैं,

जिसमें $\angle C = 90^\circ$ आधार

AC तथा लम्ब $BC \sqrt{3}:1$

के अनुपात में हैं।

माना कि $AC = \sqrt{3}k$ तथा

$BC = k$

समकोण $\triangle ABC$ में,

बौधायन सूत्र से,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (\sqrt{3}k)^2 + (k)^2$$

$$= 3k^2 + k^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow AB = \pm 2k = 2k$$

(क्योंकि दूरी ऋणात्मक नहीं हो सकती)

$\angle A$ के लिए, आधार $AC = \sqrt{3}k$, लम्ब $BC = k$,

तथा कर्ण $AB = 2k$

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\text{और } \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अब $\angle B$ के लिए,

आधार $BC = k$, लम्ब $AC = \sqrt{3}k$

तथा कर्ण $AB = 2k$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

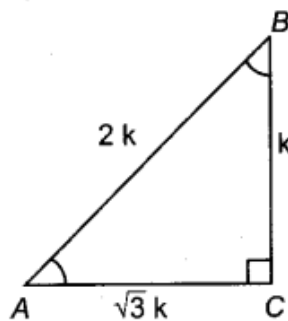
$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

सिद्ध करना है— $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$

$$\text{LHS} = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$



प्रश्न 20.

यदि $\tan \theta = \frac{4}{3}$ हो, तो $\frac{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}{3 \sin \theta - 2 \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}{3 \sin \theta - 2 \cos \theta} = \frac{\frac{3 \sin \theta}{\cos \theta} + 2 \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{3 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}$$

(अंश व हर के प्रत्येक पद में $\cos \theta$ से भाग देने पर)

$$= \frac{3 \tan \theta + 2}{3 \tan \theta - 2} = \frac{3 \times \frac{4}{3} + 2}{3 \times \frac{4}{3} - 2} = \frac{4 + 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

प्रश्न 21.

यदि $\cot \theta = \frac{b}{a}$ हो, तो $\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\cot \theta = b/a$$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta}}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta}} = \frac{\cot \theta + 1}{\cot \theta - 1}$$

(अंश व हर के प्रत्येक पद को $\sin \theta$ से भाग देने पर)

$$= \frac{b/a + 1}{b/a - 1} = \frac{\left(\frac{b+a}{a}\right)}{\left(\frac{b-a}{a}\right)} = \frac{b+a}{b-a}$$

प्रश्न 22.

यदि $\operatorname{cosec} A = 2$ हो, तो $\cot A + \frac{\sin A}{1 + \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$\because \operatorname{cosec} A = 2$ तो $\sin A = 1/2$ तथा

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{1 - 1/4}$$

$$\Rightarrow \cos A = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

उपर्युक्त मान दिए गए व्यंजक में रखने पर

$$\begin{aligned} \cot A + \frac{\sin A}{1 + \cos A} &= \sqrt{3} + \frac{1/2}{1 + \sqrt{3}/2} \\ &= \sqrt{3} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 3 + 1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3 + 1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 4}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} + 2)} = 2 \end{aligned}$$

प्रश्न 23.

यदि $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5}$$

हल:

दिया है- $\cot \theta = 1/\sqrt{3}$

$$\text{LHS} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = \frac{1 - \left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} \right)^2}{2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} \right)^2}$$

[सारणी से, $\cos \theta = \frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$ तथा

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}]$$

$$= \frac{1 - \frac{\cot^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta}}{2 - \frac{1}{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{(1 + \cot^2 \theta - \cot^2 \theta)}{(1 + \cot^2 \theta)} \cdot \frac{(2 + 2 \cot^2 \theta - 1)}{(1 + \cot^2 \theta)}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 \cot^2 \theta} = \frac{1}{1 + 2(1/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{1 + 2/3}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3+2}{3} \right)} = \frac{3}{5} = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 24. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ हो, तो $\cos A \cdot \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\therefore \sin A = \frac{1}{3} \text{ तो } \operatorname{cosec} A = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos A &= \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - (1/3)^2} \\ &= \sqrt{1 - 1/9} = \sqrt{8/9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\sec A = \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ तथा}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

उपर्युक्त मान दिए गए व्यंजक में रखने पर

$$\begin{aligned} \cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{3}{8} = \frac{16\sqrt{2} + 3}{8} \end{aligned}$$

प्रश्न 25.

$$\sqrt{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = \tan A + \cot A$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sqrt{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} \\ &= \sqrt{(1 + \tan^2 A) + (1 + \cot^2 A)} \\ &\quad [\text{मूलभूत सर्वसमिकाओं के उपयोग से}] \\ &= \sqrt{\tan^2 A + 2 + \cot^2 A} \\ &= \sqrt{\tan^2 A + 2 \tan A \cot A + \cot^2 A} \\ &\quad [\because \tan A \cot A = 1] \\ &= \sqrt{(\tan A + \cot A)^2} = \tan A + \cot A = \text{RHS} \\ \therefore \quad \text{LHS} &= \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 26.

$$\frac{1 + \sec \theta}{\sec \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{1 + \sec \theta}{\sec \theta} = \frac{1 + \frac{1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{1} = \frac{1 + \cos \theta}{1} \end{aligned}$$

अंश और हर में $(1 - \cos \theta)$ से गुणा करने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 + \cos \theta) \times (1 - \cos \theta)}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{(1)^2 - (\cos \theta)^2}{1 - \cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \quad (\because 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta) \\ &= \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 27

$$\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \tan A + \sec A$$

हल:

$$\text{LHS} = \frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1}$$

$$\text{हम जानते हैं} \quad \left[\begin{array}{l} 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \\ = \sec^2 A - \tan^2 A \end{array} \right]$$

$$= \frac{(\tan A + \sec A) - (\sec^2 A - \tan^2 A)}{\tan A - \sec A + 1}$$

$$= \frac{(\tan A + \sec A) - (\sec A - \tan A)}{(\tan A - \sec A + 1)}$$

$$= \frac{(\sec A + \tan A)}{(\tan A - \sec A + 1)}$$

$$= \frac{(\tan A + \sec A) [1 - \sec A + \tan A]}{(\tan A - \sec A + 1)}$$

$$= \frac{(\tan A + \sec A) (\tan A - \sec A + 1)}{(\tan A - \sec A + 1)}$$

$$= \tan A + \sec A = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

निम्न सर्वसमिकाओं के सिद्ध कीजिए [प्रश्न 28-29]

प्रश्न 28.

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta}} \quad \left[\because \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \right] \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\tan \alpha + \tan \beta) \times \frac{\tan \alpha \tan \beta}{(\tan \beta + \tan \alpha)} \\
&= \tan \alpha \tan \beta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}
\end{aligned}$$

प्रश्न 29.

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

हल:

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta}} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} \\
&= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{1} = \sin \theta = \text{LHS}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

सिद्ध कीजिए [प्रश्न 30-34]

प्रश्न 30. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

हल:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \cos^4 \theta - \sin^4 \theta \\
&= (\cos^2 \theta)^2 - (\sin^2 \theta)^2 \\
&= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
&\quad [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ से}] \\
&= 1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
&= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\
&= 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta) \\
&= 1 - 2 \sin^2 \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}
\end{aligned}$$

प्रश्न 31. $\sec^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta = \tan^2 \theta - \cot^2 \theta$

हल:

$$\text{LHS} = \sec^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$$

हम जानते हैं

$$\begin{bmatrix} \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \\ \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= (1 + \tan^2 \theta) - (1 + \cot^2 \theta)$$

$$= 1 + \tan^2 \theta - 1 - \cot^2 \theta$$

$$= \tan^2 \theta - \cot^2 \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 32.

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$$

हल:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} \\ &= \frac{(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) + (\cos A - \cos B)(\cos A + \cos B)}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B + \cos^2 A - \cos^2 B}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) - (\sin^2 B + \cos^2 B)}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= \frac{1 - 1}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= \frac{0}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= 0 = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 33. $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = \tan^2 A + \cot^2 A + 7$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 \\&= (\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A \operatorname{cosec} A) \\&\quad + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \sec A) \\&= \left(\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A \times \frac{1}{\sin A} \right) \\&\quad + \left(\cos^2 A + \sec^2 A + 2 \times \cos A \times \frac{1}{\cos A} \right) \\&= (\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2) + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2) \\&= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + \sec^2 A + 4 \\&= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 4 \\&= 1 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 4 \\&= \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 5 \\&= (1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A) + 5 \\&\quad [\because \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta, \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta] \\&= \tan^2 A + \cot^2 A + 7 = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 34.

$$\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} \\&= \frac{(\tan A + \sec A) - (\sec^2 A - \tan^2 A)}{(\tan A - \sec A + 1)} \\&\quad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1] \\&= \frac{(\tan A + \sec A) - (\sec A - \tan A)}{(\tan A - \sec A + 1)} \\&= \frac{(\sec A + \tan A)}{(\tan A - \sec A + 1)} \\&= \frac{(\tan A + \sec A) [1 - \sec A + \tan A]}{(\tan A - \sec A + 1)} \\&= \frac{(\tan A + \sec A) (\tan A - \sec A + 1)}{(\tan A - \sec A + 1)} \\&= \tan A + \sec A \\&= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = \frac{\sin A + 1}{\cos A} = \frac{1 + \sin A}{\cos A} \\&= \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि $\tan\theta = 1$ हो, तो $\cos\theta$ का मान होगा:

- (A) 1
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 2. निम्न में से कौन-सा विकल्प सही है।

- (A) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$
- (B) $1 - \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- (C) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- (D) $1 - \sec^2\theta = \tan^2\theta$

प्रश्न 3. $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta + \cos\theta \sec\theta$ बराबर है :

- (A) 2
- (B) 1
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) -1

प्रश्न 4.

यदि $\sin\theta = \frac{4}{3}$ हो, तो $\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$ का मान होगा:

- (A) $-1/7$
- (B) $1/8$
- (C) $1/9$
- (D) इनमें से कोई नहीं।

प्रश्न 5.

$\frac{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}{\cot\theta}$ बराबर होगा:

- (A) $\sec\theta$
- (B) $\cos\theta$
- (C) $\tan\theta$
- (D) $\sin\theta$

प्रश्न 6.

$$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}{\operatorname{cosec} \theta} \text{ बराबर है :}$$

- (A) $\cos \theta$ (B) $\sec \theta$ (C) $\sin \theta$ (D) $\operatorname{cosec} \theta$

प्रश्न 7. यदि $\cot \phi = \frac{20}{21}$ हो, तो $\operatorname{cosec} \phi$ का मान है:

- (A) $\frac{21}{20}$
(B) $\frac{20}{29}$
(C) $\frac{29}{21}$
(D) $\frac{21}{29}$

प्रश्न 8. यदि $\sin A + \sin^2 A = 1$ तब व्यंजक $(\cos^2 A + \cos^4 A)$ का मान है:

- (A) 1
(B) $\frac{1}{2}$
(C) 2
(D) 3

प्रश्न 9. यदि $\tan \theta = \sqrt{3}$ है, तो $\sin \theta$ का मान है:

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
(D) 1

प्रश्न 10. एक समकोण त्रिभुज में, $\angle C = 90^\circ$ तथा भुजा $AB = c$, $BC = a$ तथा $AC = b$ हो तो दिए गए विकल्पों में कौन-सा विकल्प सही है?

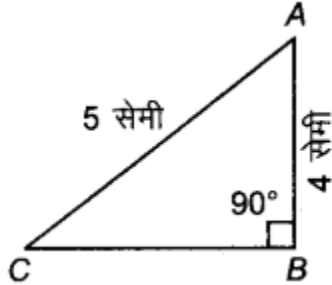
- (A) $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$
(B) $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$
(C) $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{b}$
(D) $\operatorname{cosec} A = \frac{b}{a}$

उत्तरमाला:

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1. (D) | 2. (C) | 3. (A) | 4. (A) | 5. (A) |
| 6. (A) | 7. (C) | 8. (A) | 9. (B) | 10. (B) |

अतिलघूत्तरीय/लघूत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. किसी त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। यदि भुजा AB = 4 सेमी तथा भुजा AC = 5 सेमी हो, तो भुजा BC ज्ञात कीजिए।



हल: प्रश्नानुसार $\triangle ABC$ का कच्चा चित्र बनाइए, जिसमें $\angle B = 90^\circ$, $AC = 5$ सेमी तथा $AB = 4$ सेमी अब बौधायन सूत्र से,
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$
 $\Rightarrow (5)^2 = (4)^2 + BC^2$
 $\Rightarrow BC^2 = 25 - 16 = 9$
 अतः $BC = 3$ सेमी

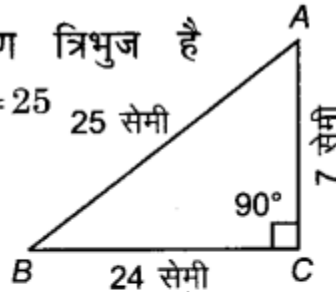
प्रश्न 2. त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है तथा $AB = 25$ सेमी तथा $BC = 24$ सेमी है, तो कोण A के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल:

$\therefore \triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है

जिसमें, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 25$ सेमी तथा $BC = 24$ सेमी

$$\begin{aligned}\therefore AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} \\ &= \sqrt{(25)^2 - (24)^2} \\ &= \sqrt{625 - 576} \\ &= \sqrt{49} = 7 \text{ सेमी}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \sin A &= \frac{BC}{AB} = \frac{24}{25} & \cos A &= \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25} \\ \tan A &= \frac{BC}{AC} = \frac{24}{7} & \cot A &= \frac{AC}{BC} = \frac{7}{24} \\ \sec A &= \frac{AB}{AC} = \frac{25}{7} & \operatorname{cosec} A &= \frac{AB}{BC} = \frac{25}{24}\end{aligned}$$

प्रश्न 3. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए

$$(\sec\theta + \cos\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta + \sin^2\theta$$

हल:

$$\text{LHS} = (\sec\theta + \cos\theta)(\sec\theta - \cos\theta)$$

$$= \sec^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= 1 + \tan^2\theta - (1 - \sin^2\theta)$$

$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= \text{RHS}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए।

$$(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$$

हल:

LHS

$$= (\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta \cos\theta}$$

[मूलभूत सर्वसमिकाओं के उपयोग से]

$$= 1 = \text{RHS}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta$$

हल:

हम जानते हैं कि:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \sec^6 \theta - \tan^6 \theta = (\sec^2 \theta)^3 - (\tan^2 \theta)^3 \\ &= (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)(\sec^4 \theta + \sec^2 \theta \tan^2 \theta + \tan^4 \theta) \\ &= (1 + \tan^2 \theta - \tan^2 \theta) \{ \sec^2 \theta (\sec^2 \theta + \tan^2 \theta + \tan^4 \theta) \} \\ &= 1 \cdot \{ (1 + \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta + \tan^2 \theta) + \tan^4 \theta \} \\ &= (1 + \tan^2 \theta)(1 + 2 \tan^2 \theta) + \tan^4 \theta \\ &= 1 + 2 \tan^2 \theta + \tan^2 \theta + 2 \tan^4 \theta + \tan^4 \theta \\ &= 1 + 3 \tan^2 \theta + 3 \tan^4 \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 6. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$$

हल: LHS में करणी चिह्न को हटाने के लिए अंश तथा हर को $\sqrt{1 + \cos \theta}$ से गुणा करने पर

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \times \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}\end{aligned}$$

प्रश्न 7. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए

$$\frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta}$$

हल: दोनों पक्षों का पुनः निर्धारण से

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} + \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} &= \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta \\ \text{LHS} &= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} + \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} \\ &= \frac{\sec\theta + \tan\theta + \sec\theta - \tan\theta}{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta)} \\ &= \frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta} = \frac{2\sec\theta}{1 + \tan^2\theta - \tan^2\theta} \\ &= 2\sec\theta = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।} \end{aligned}$$

प्रश्न 8. यदि $\operatorname{cosec} A = \sqrt{10}$ हो, तो $\cot A$, $\sin A$, $\cos A$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्धों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल:

$$\begin{aligned} \text{हम जानते हैं कि } 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \\ \Rightarrow \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A - 1 \\ \Rightarrow \cot^2 A &= (\sqrt{10})^2 - 1 = 10 - 1 = 9 \\ \Rightarrow \cot A &= 3 \quad (\text{क्योंकि } \theta \text{ न्यून कोण है}) \\ \text{अब } \sin A &= \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \text{और } \cos A &= \cot A \cdot \sin A = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \text{अतः } \cot A &= 3, \sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos A = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

प्रश्न 9. यदि $\cos\theta = \frac{5}{13}$ हो, तो $\sin\theta$, $\tan\theta$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्धों की सहायता से ज्ञात कीजिए, जबकि θ एक न्यून कोण है।

हल: हम जानते हैं कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\cos\theta = \frac{5}{13} \text{ रखने पर}$$

$$\sin^2\theta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin\theta = \pm \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{12}{13} \text{ (क्योंकि } \theta \text{ न्यून कोण है)}$$

$$\text{अब } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$$

प्रश्न 10. यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्धों की सहायता से ज्ञात कीजिए जबकि θ एक न्यूनकोण है।

हल:

$$\text{हम जानते हैं कि } 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \sec\theta = \pm 2$$

$$\Rightarrow \sec\theta = 2 \text{ (क्योंकि } \theta \text{ न्यून कोण है)}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\text{अतः } \sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{(\sqrt{3}/2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 11. यदि $\sec\theta = \frac{17}{8}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्धों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यूनकोण है।

हल:

हम जानते हैं कि

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = \left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1 = \frac{289 - 64}{64} = \frac{225}{64}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt{\frac{225}{64}} = \pm \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{15}{8} \text{ (क्योंकि } \theta \text{ न्यूनकोण है।)}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{17/8} = \frac{8}{17}$$

$$\text{और } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{8}{17}} = \sqrt{\frac{9}{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

$$\text{और } \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{3/\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

प्रश्न 12. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta \tan\theta + 2\tan^2\theta$$

हल:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\ &= \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\end{aligned}$$

अंश और हर दोनों में $(1 - \sin\theta)$ से गुणा करने पर

$$= \frac{(1 - \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = \frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= 1 - \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\cos\theta} + 2\tan^2\theta$$

$$= 1 - 2\tan\theta \sec\theta + 2\tan^2\theta = \text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS} \quad \text{इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 13. $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 24$ सेमी तथा $AC = 7$ सेमी है। $\sin A$, $\text{cosec } A$ तथा $\cot A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: एक $\triangle ABC$ जिसमें $\angle C = 90^\circ$, $BC = 24$ सेमी तथा $AC = 7$ सेमी है।

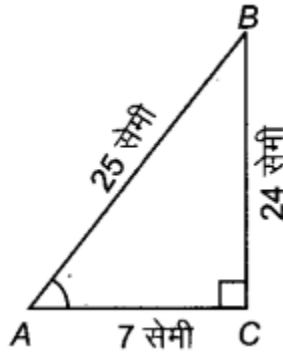
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{625} = 25 \text{ सेमी}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{24}$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{24}$$



प्रश्न 14. $\triangle PQR$ में, $\angle Q = 90^\circ$, $PR = 10\sqrt{2}$ सेमी तथा $QR = 10$ सेमी है। $\sec P$, $\cot P$ तथा $\operatorname{cosec} P$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

एक $\triangle PQR$ जिसमें $\angle Q = 90^\circ$, $PR = 10\sqrt{2}$ सेमी तथा $QR = 10$ सेमी है।

$\triangle PQR$ में, बौधायन सूत्र में,

$$PQ^2 = PR^2 - QR^2$$

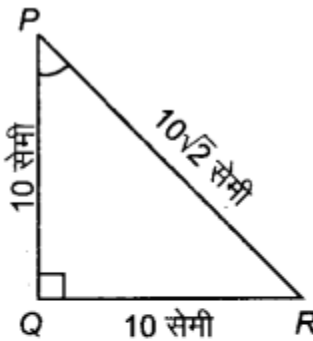
$$= (10\sqrt{2})^2 - (10)^2$$

$$= 100 \times 2 - 100 = 100$$

$$PQ = \sqrt{100} = 10 \text{ सेमी}$$

$$\sec P = \frac{PR}{PQ} = \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}, \cot P = \frac{PQ}{QR} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\operatorname{cosec} P = \frac{PR}{QR} = \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$$



प्रश्न 15. समकोण $\triangle ABC$ में, शीर्ष B पर समकोण है, $AC = 10$ सेमी तथा $AB = 6$ सेमी है। $\sin C$, $\cos C$ तथा $\tan C$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

ΔABC में, बौधायन सूत्र से

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$= 10^2 - 6^2$$

$$= 100 - 36 = 64$$

$$BC = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$

$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

