4 دودرجی مساواتیں (QUADRATIC EQUATIONS)

4.1 تعارف

باب 2 میں آپ نے مختلف قسم کی کثیر رکنیوں کے بارے میں پڑھا۔ جس میں ایک قسم دو درجی کثیر رکنی بھی تھی جو $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کی شکل ہوتی ہے۔ جب ہم اس کثیر رکنی کو صفر کے برابر رکھ دیتے ہیں تو یہ دودرجی مساوات بن جاتی ہے۔ جب ہم بہت سے روزمرہ کے مسائل کا سامنا کرتے ہیں تو دودرجی مساواتیں ابھر کر سامنے آتی ہیں۔ مثال کے طور پر ایک خیراتی ٹرسٹ عبادت کے لیے ایک ایسا ہال بنانا چاہتا ہے جس کا کارپیٹ (قالین) کا رقبہ 300 مربع میٹر ہو اور اس کی لمبائی چوڑائی کے دوگنے سے 1 میٹر زیادہ ہو۔ تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہوگی؟ مان لیجئے ہال کی چوڑائی x میٹر ہے تب اس کی لمبائی ہوگی $(2x + 1)$ میٹر۔ اس مسئلہ کو تصویری طور پر ہم نے شکل 4.1 میں دکھایا ہے

شکل 4.1

اب ہال کا رقبہ = $x(2x + 1)$ مربع میٹر = $(2x^2 + x)$ مربع میٹر

اس لئے $2x^2 + x = 300$ (دیا ہوا)

اس لئے $2x^2 + x - 300 - 0$

اس طرح سے ہال کی چوڑائی، مساوات $2x^2 + x - 300 = 0$ جو ایک دودرجی مساوات ہے، کو مطمئن کریں گی۔

بہت سے لوگوں کا یہ ماننا ہے کہ بیبلونین (Babylonians) پہلے وہ لوگ تھے جنھوں نے دو درجی مساواتوں کو حل

کیا۔مثال کے طور پر وہ جانتے تھے کیسے دومثبت اعداد کو معلوم کیا جاسکتا ہے جن کا حاصل جمع مثبت ہو اور حاصل ضرب بھی مثبت ہو اور یہ مسلہ دودرجی مساوات $x^2 - px + q = 0$ کو حل کرنے کے معادل ہے۔یونانی ریاضی داں اقلیدس نے لمبائیاں ، جو ہماری موجودہ اصطلاح میں دودرجی مساوات کا حل ہے،معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ نکالا۔دودرجی مساواتوں کو حل کرنے کا سہرا ، قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں کے سر جاتا ہے ۔درحقیقت برہم گپتا (598 - 665عیسوی) نے $ax^2 - bx = c$ کی شکل والی دو درجی مساواتوں کا حل کرنے کا ایک صریح فارمولہ دیا۔بعد میں سری دھرا چاریہ (1025عیسوی) نے ایک فارمولہ معلوم کیا جواب دودرجی فارمولہ کہلاتا ہے(جیسا کے بھاسکر II سے کوٹ کیا گیا ہے) جس سے دودرجی مساواتوں کو کامل مربع کے طریقہ سے حل کیا جاتا ہے۔ایک عرب ریاضی داں الخورزمی (800عیسوی) نے بھی مختلف قسم کی دودرجی مساواتوں کا مطالعہ کیا Abraham bar Hi yya Ha-Nasi نے اپنی کتاب 'Liber embadorum' جو 1145عیسوی میں یورپ میں چھپی میں مختلف دودرجی مساواتوں کا حل دیا۔

اس باب میں آپ دودرجی مساواتوں کے بارے میں پڑھیں گے اوران کے حل مختلف طریقوں کے ذریعہ سے معلوم کریں گے۔آپ روزمرہ کے مسئلوں کو حل کرنے میں اس کے استعمال کے بارے میں بھی سیکھیں گے۔

4.2 دودرجی مساوات

متغیر x میں دودرجی مساوات وہ مساوات ہے جس کی شکل $ax^2 + bx + c = 0$ کی ہوتی ہے جہاں b, a اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ مثال کے طور پر $2x^2 - x - 300 = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے اسی طرح $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ، $4x - 3x^2 - 2 = 0$ اور $1 - x^2 + 300 = 0$ بھی دودرجی مساواتیں ہیں۔

درحقیقت کوئی بھی $p(x) = 0$ کی شکل کی مساوات جہاں $p(x)$ درجہ 2 کی کثیر رکنی ہے،دودرجی مساوات ہے۔لیکن جب ہم $P(x)$ کی ارکان کو درجہ کے حساب سے سے گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں تب ہمیں مساوات کی معیاری شکل حاصل ہوتی ہے۔ یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ یہ دودرجی کی معیاری شکل کہلاتی ہے۔

ہمارے اردگرد کی دنیا کے ریاضی کے مختلف میدانوں میں ہمیں دودرجی مساواتوں کی بہت سی صورت حال ملیں گی۔آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل صورت حال کو ریاضیاتی طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) جون اور جیوانتی کے پاس 45 ماربل ہیں۔دونوں 5 , 5 ماربل کھو دیتے ہیں اوران کے پاس باقی بچے ماربل کا حاصل

ضرب 124 ہے۔ ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ شروعات میں ان دونوں کے پاس کتنے ماربل تھے۔

(ii) ایک کاٹج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ کھلونے بناتے ہے۔ ہر ایک کھلونہ کو بنانے میں ہوا خرچ (روپیوں میں) ایک دن میں بنے کھلونوں کی تعداد سے 55 کم ہے۔ کسی ایک دن کھلونہ بنانے کا کل خرچ 750 روپے ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اس دن کل کتنے کھلونے بنائے گئے۔

حل:

(i) مان لیجئے جون کے پاس x ماربل تھے

تو جیونتی کے پاس ماربل ہوئے $= (45 - x)$ (کیوں؟)

جب جون نے 5 ماربل کھو دئے تو اس کے پاس بچے ماربل $= x - 5$

جب 5 ماربل کھو گئے تو جیونتی کے پاس بچے کل ماربل $= 45 - x - 5$

$= 40 - x$

اس لئے ان کا حاصل ضرب $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= - x^2 - 45x - 200$

اس لئے $- x^2 - 45x - 200 = 124$ (دیا ہوا ہے، کے حاصل ضرب 124)

یعنی $- x^2 + 45x - 324 = 0$

یعنی $x^2 - 45x + 324 = 0$

اس لئے جون کے پاس جو ماربل ہوں گے وہ دو درجی مساوات $x^2 - 45x + 324 = 0$ کو مطمئن کریں گے جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

(ii) مان لیجئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد x ہے

اس لئے اس دن ہر ایک کھلونہ بنانے کا خرچ (روپیوں میں) ہے $= 55 - x$

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کا کل خرچ $= x(55 - x)$

اس لئے $x(55-x)=750$

یعنی $55x-x^2=750$

یعنی $-x^2-55x-750=0$

یعنی $x^2-55x-750=0$

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد دو درجی مساوات $x^2-55x-750=0$ کو مطمئن کرے گی جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

مثال 2: جانچ کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل دو درجی مساواتیں ہیں یا نہیں۔

(i) $(x-2)^2+1=2x-3$ (ii) $x(x-1)+8=(x-2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)=x^2+1$ (iv) $(x+2)^3=x^3-4$

حل:

(i) $\text{LHS}=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$

اس لئے $(x-2)^2+1=2x-3$ کو لکھا جا سکتا ہے۔

$x^2-4x+5=2x-3$

یعنی $x^2-6x+8=0$

جو $ax^2+bx+c=0$ کی شکل ہے۔

اس لئے دی ہوئی مساوات دو درجی مساوات ہے۔

(ii) کیونکہ $x(x+1)+8=x^2+x+8$ اور $(x+2)(x-2)=x^2-4$

اس لئے $x^2+x+8=x^2-4$

یعنی $x+12=0$

یہ $ax^2+bx+c=0$ کی شکل کی نہیں ہے اس لئے یہ دو درجی مساوات نہیں ہے۔

(iii) یہاں $LHS = x(2x-3) = 2x^2 + 3x$

اس لئے $x(2x+3) = x^2 + 1$ اس کو ہم لکھ سکتے ہیں

$$2x^2 - 3x = x^2 + 1$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x^2 + 3x - 1 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہے

اس لئے یہ دو درجی مساوات ہے۔

(iv) $LHS = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x - 8$

اس لئے $(x+2)^3 = x^3 - 4$ کو لکھ سکتے ہیں

$$x^3 - 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

یعنی $6x^2 - 12x + 12 = 0$ یا $x^2 + 2x + 2 = 0$

یہ $ax^2 - bx + c = 0$ کی شکل کا ہے۔

اس لئے یہ دو درجی مساوات ہیں۔

ریمارک: (ii) کے بارے میں خبردار! اس میں دی ہوئی مساوات دو درجی نظر آرہی ہے لیکن یہ دو درجی نہیں ہے اسی طرح (iv) کی مساوات دیکھنے میں کعبی مساوات نظر آتی ہے (درجہ 3 والی مساوات) لیکن یہ دو درجی مساوات نکلی، جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی مساوات کے بارے میں کوئی نظریہ قائم کرنے سے پہلے اس کو مختصر کر لیجئے۔

مشق 4.1

1۔ جانچ کیجئے کہ مندرجہ ذیل میں کون سی مساواتیں دو درجی ہیں:

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1(x+3)$

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x-5)(x-1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2۔ مندرجہ ذیل صورت حال کو دودر جی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) ایک مستطیل کی شکل والے پلاٹ کا رقبہ 528m^2 ہے۔اس پلاٹ کی لمبائی (میٹروں میں) اس کی چوڑائی کے دگنے سے 1 زیادہ ہے ہمیں پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(ii) دولگا تار مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے۔ ہمیں صحیح اعداد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(iii) روہن کی ماں اس سے عمر میں 26 سال بڑی ہے۔3 سال بعد ان کی عمروں (سالوں میں) کا حاصل ضرب 360 ہوگا۔ ہم روہن کی موجودہ عمر معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

(iv) ایک ٹرین 480 کلومیٹر کا فاصلہ یکساں رفتار سے طے کرتی ہے۔اگر اس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم ہوتی ہے تو وہی فاصلہ طے کرنے میں 3 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے ہمیں ٹرین کی رفتار معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

4.3 اجزائے ضربی کے طریقہ سے دودرجی مساوات کا حل

دودرجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$ پر غور کیجئے۔اگر ہم اس مساوات کی LHS میں x کی جگہ 1 رکھ دیں تو ہمیں ملتا ہے $(2\times 1^2) - (3\times 1) + 1 = \text{RHS}$ ہم کہتے ہیں کہ 1 دودرجی مساوات کا جزر ہے۔اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ 1 دودرجی کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 1$ کا صفر ہے

عمومی طور پر ایک حقیقی عدد α دودرجی مساوات $ax^2 - bx + c = 0, a \neq 0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2 - b\alpha + c = 0$ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ $x = \alpha$ دودرجی مساوات کا حل ہے یا α دودرجی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔یہ بات نوٹ کیجئے کہ دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ایک ہی ہوتے ہیں۔

باب 2 میں آپ نے مشاہدہ کیا تھا کے دودرجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں اس لئے کسی بھی دودرجی مساوات کے زیادہ سے زیادہ دو جزر ہو سکتے ہیں۔

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ وسطی رکن کو منقسم کرکے ہم کس طرح دودرجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی بناتے ہیں۔ ہم اس علم کو دودرجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کے لئے استعمال کریں گے۔

آیئے دیکھتے ہیں کیسے۔

مثال3: اجزائے ضربی کے طریقہ سے دودرجی مساوات $2x^2-5x+3=0$ کے جزر معلوم کیجئے۔

حل: آیئے وسطی رکن $-5x$ کو $(-2x-3x)$ میں منقسم کرتے ہیں] کیونکہ $3\times(2x^2)=6x^2=(-2x)\times(-3x)$[

اس لئے $2x^2-5x+3=2x^2-2x-3x+3=2x(x-1)-3(x-1)=(2x-3)(x-1)$

اب $2x^2-5x+3=0$ کو ہم $(2x-3)(x-1)=0$ کی طرح لکھ سکتے ہیں

یعنی یا تو $(2x-3=0)$ یا $(x-1)=0$

اب $2x-3=0$ سے ہمیں $x=\frac{3}{2}$ ملتا ہے اور $x-1=0$ سے $x=1$ ملتا ہے

دوسرے لفظوں میں 1 اور [illegible] مساوات $2x^2-5x+3=0$ کے جزر ہیں،

تصدیق کیجئے یہ دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں۔

نوٹ کیجئے ہم نے $2x^2-5x+3=0$ کے جزر $2x^2-5x+3$ اجزائے ضربی میں تحلیل کر کے دو خطی اجزائے ضربی بنایئے اور ہر جزو ضربی کو صفر کے برابر رکھئے پھر معلوم کرتے ہیں۔

مثال4: دودرجی مساوات $6x^2-x-2=0$ کے جزر معلوم کیجئے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$6x^2-x-2=6x^2+3x-4x-2$$

$$=3x(2x+1)-2(2x+1)$$

$$=(3x-2)(2x+1)$$

$6x^2-x-2=0$ کے جزر x کی قدریں ہیں جس کے لئے $(3x-2)(2x+1)=0$

اس لئے، $3x-2=0$ یا $2x+1=0$

یعنی $x=\frac{2}{3}$ یا $x=-\frac{1}{2}$

اس لئے $6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر ہیں $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{2}$ ۔

ہم جزروں کی تصدیق اس طرح کر سکتے ہیں، ان کی قدریں مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ میں رکھ کر دیکھیں کہ وہ اس کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

مثال 5: دو درجی مساوات $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر معلوم کیجئے۔

حل:

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$$

$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}x \quad \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x \quad \sqrt{2}\right)$$

اس لئے مساوات کے جزر x کی وہ قدریں ہیں جن کے لئے

$$\left(\sqrt{3}x \quad \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x \quad \sqrt{2}\right) = 0$$

اب، $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ یا $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

اس لئے جزروں کی تکرار ہے، ہر ایک تکراری جزو ضربی $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ کے لئے

اس لئے $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر ہیں $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$

مثال 6: سیکشن 4.1 میں لئے گئے عبادت کے ہال کے ابعاد معلوم کیجئے

حل: سیکشن 4.1 میں ہم نے پایا تھا کہ اگر ہال کی چوڑائی x m, تب x مساوات $2x^2 - x - 300 = 0$ کو مطمئن کرے گا

اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کرنے پر ہم مساوات کو لکھتے ہیں۔

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x\,(x - 12) + 25\,(x - 12) = 0$$

یعنی $(x - 12)(2x + 25) = 0$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جزر ہیں $x = 12$ یا $x = -12.5$ کیونکہ x ہال کی چوڑائی ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہو سکتی

اس لئے ہال کی چوڑائی 12 میٹر ہے اور اس کی لمبائی $2x+1=25$ میٹر ہے۔

مشق 4.2

1۔ اجزائے ضربی کے طریقہ سے مندرجہ ذیل دودرجی مساواتوں کو حل کیجئے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x - \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2۔ مثال 1 میں دیئے گئے سوالوں کو حل کیجئے۔

3۔ دو عدد معلوم کیجئے جن کا حاصل جمع 27 ہے اور حاصل ضرب 182 ہے۔

4۔ دولگا تار مثبت صحیح اعداد معلوم کیجئے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 365 ہے۔

5۔ ایک قائم مثلث کا ارتفاع اس کے قاعدہ سے 7 سینٹی میٹر کم ہے۔ اگر اس کا وتر 13 سینٹی میٹر ہے تو باقی دو ضلع معلوم کیجئے۔

6۔ ایک کاٹج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ برتن بناتی ہے، یہ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ کسی ایک دن ہر ایک ایک برتن کے بنانے کا خرچ (روپیوں میں) اس دن بنے برتنوں کے دگنے سے 3 زیادہ ہے۔ اگر اس دن برتن بنانے کا کل خرچ 90 روپے ہے تو اس دن بنے برتنوں کی کل تعداد اور ہر برتن کا خرچ معلوم کیجئے۔

4.4 دودرجی مساواتوں کا حل مربع کو مکمل کرکے

پچھلے سیکشن میں آپ نے دودرجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کا ایک طریقہ سیکھا۔ اس سیکشن میں ہم ایک اور طریقہ سیکھیں گے۔

مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجئے۔

سنیتا کی دوسال پہلے کی عمر (سالوں میں) اور چار سال بعد کی عمر کا حاصل ضرب اس کی موجودہ عمر کا دگنا ہے اس کی موجودہ عمر کیا ہے؟

اس کا جواب دینے کے لئے مان لیجئے اس کی موجودہ عمر (سالوں میں) x ہے تب اس کی دوسال پہلے کی عمر اور چار سال بعد کی عمر کا حاصل ضرب ہوگا $(x - 2)(x + 4)$

اس لئے $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

یعنی $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

یعنی $x^2 - 9 = 0$

اس لئے سنیتا کی موجودہ عمر دودرجی مساوات $x^2 - 9 = 0$ کو مطمئن کرتی ہے

ہم اس کو $x^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں جزر مربع لینے پر $x = 3$ یا $x = -3$ کیونکہ عمر مثبت صحیح عدد ہے اس لئے $x = 3$

اس لئے سنیتا کی موجودہ عمر 3 سال ہے

اب مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ پر غور کیجئے ۔اس کو حل کرنے کے لئے ہم $(x+2)^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں ،

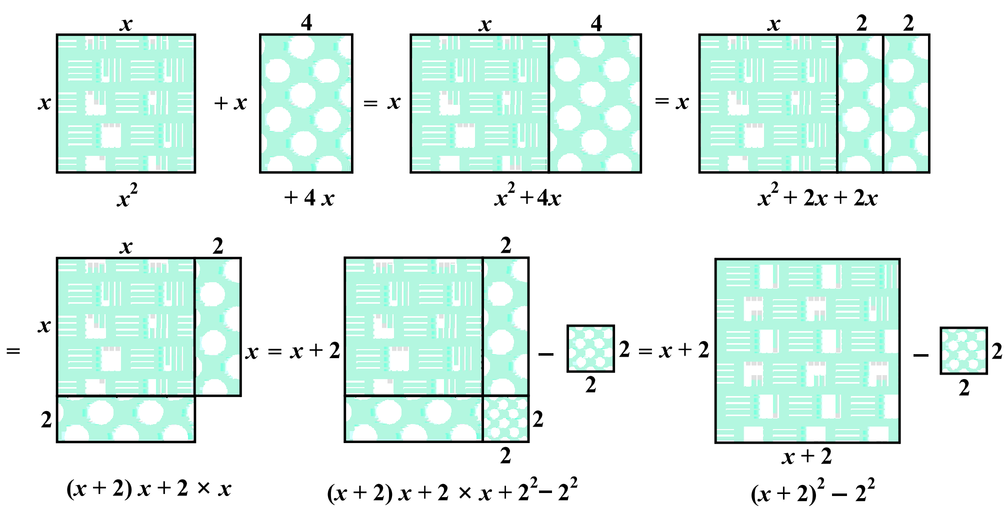
جزر المربع لینے پر ہمیں ملتا ہے $x + 2 = 3$ یا $x + 2 = -3$

اس لئے $x = 1$ یا $x = -5$

اس لئے مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ کے   ہیں 1 اور -5

اوپر دی گئی دونوں مثالوں میں وہ رکن جس میں x ہے پوری طرح مربع کے اندازہ ہے۔اس لئے ہم نے آسانی سے جزر المربع لے کر جذر معلوم کر لئے۔لیکن اگر ہم سے دودرجی مساوات $x^2+4x-5=0$ کے جزر معلوم کرنے کو کہا جائے تو کیا ہوگا ؟ یقیناً ہم ایسا کرنے کے لئے اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کریں گے جب تک کہ ہم یہ نہ جان لیں (کسی طرح) کہ $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$ ہے۔

اس لئے $x^2+4x-5=0$ کو حل کرنا معادل ہے $(x+2)^2-9=0$ کو حل کرنے کے جو ہم دیکھ چکے ہیں کہ بہت آسان ہے اور تیزی سے ہوسکتا ہے۔دراصل ہم کسی بھی دودرجی مساوات کو $(x+a)^2-b^2=0$ کی شکل میں بدل سکتے ہیں۔اور پھر ہم آسانی سے جزر معلوم کرسکتے ہیں۔آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا یہ آسان ہے۔شکل 4.2 دیکھئے۔



شکل 4.2

عمل ذیل میں دیا گیا ہے

$$x^2 + 4x = (x^2 + \frac{4}{2}x) + \frac{4}{2}x$$

$$= x^2 + 2x + 2x$$

$$= (x+2)\,x + 2 \times x$$

$$= (x+2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$

$$= (x+2)\,x + (x+2) \times 2 - 2 \times 2$$

[illegible]

$$= (x+2)^2 - 4$$

اس لئے $x^2 + 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$

اس لئے $x^2 + 4x - 5 = 0$ کو ہم $(x+2)^2 - 9 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ فاصل مربع کے طریقہ سے، اس کو ہم کامل مربع کا طریقہ کہتے ہیں۔ مختصراً ہم اس کو ذیل میں دکھاتے ہیں:

$$x^2 + 4x - \left(x - \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

اس لئے $x^2 + 4x - 0$ کو لکھا جا سکتا ہے

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

یعنی $(x+2)^2 - 9 = 0$

اب مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ پر غور کیجئے، نوٹ کیجئے کہ x^2 کا ضریب کاحل مربع نہیں ہے۔ اس لئے ہم مساوات کو دونوں طرف 3 سے ضرب کرتے ہیں۔

$$9x^2 - 15x - 6 = 0$$

اب $9x^2 - 15x - 6 - (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

اس لئے $9x^2 - 15x - 6 = 0$ کولکھا جاسکتا ہے

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

یعنی $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

اس لئے $9x^2 - 15x - 6 = 0$ کے جذر وہی ہیں جو $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ کے ہیں

یعنی $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ یا $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

(ہم اس کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ جہاں '±' کا مطلب ہے 'جمع نفی')

اس طرح $3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$ یا $3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$

اس لئے $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$ یا $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$

اس لئے $x = \frac{4}{6}$ یا $x = 1$

یعنی $x = \frac{2}{3}$ یا $x = 1$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں 1 اور $\frac{2}{3}$

ریمارک: اس عمل کو دوسرے طریقہ سے ہم ذیل میں دکھاتے ہیں

مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ وہی ہے جو

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

اب $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

اس لئے $3x^2 - 5x + 2 = 0$ کے حل وہی ہیں جو $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ کے ہیں۔

جو ہیں $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$ یعنی $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ اور $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

آیئے اس عمل کی مزید وضاحت کے لئے کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 7: مثال 3 میں دی گئی مساوات کو کامل مربع کے طریقے سے حل کیجئے۔

حل: مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ وہی ہے جو $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$

اب $x^3 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$

اس لئے $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

اس لئے مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جذر بالکل وہی ہوں گے جو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ کے ہیں

اب $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ وہی جو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

اس لئے $x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$

یعنی $x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$

یعنی $x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$ یا $x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$

یعنی $x = \frac{3}{2}$ یا $x = 1$

اس لئے مساوات کے حل ہیں 1 اور $x = \frac{3}{2}$

آیئے حلوں کی تصدیق کرتے ہیں

$x = \frac{3}{2}$ کو $2x^2 - 5x + 3 = 0$ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$ جو صحیح ہے، اسی طرح سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ $x = 1$ دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

مثال 7 میں ہم نے مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو دونوں طرف 2 سے تقسیم کیا تھا جس سے ہمیں $x^2 \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ حاصل ہوتا ہے اور پہلا رکن کامل مربع ہو جاتا ہے اور پھر مربع کو مکمل کرتے ہیں۔اس کے بجائے ہم دونوں طرف 2 سے ضرب کر کے پہلے رکن کو $4x^2 = (2x)^2$ کامل مربع بنا کر پھر مکمل کر سکتے ہیں۔

اس طریقہ کی وضاحت اگلی مثال میں کی گئی ہے۔

مثال 8: مساوات $5x^2 - 6x - 2 = 0$ کے جذر مربع مکمل کرنے (کامل مربع) کے طریقہ سے معلوم کیجئے۔

حل: مساوات کے دونوں طرف 5 سے ضرب کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$25x^2 - 30x - 10 - 0$$

یہ مساوات ایسی ہے جیسے

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 - 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

یعنی $(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$

یعنی $(5x - 3)^2 - 19 = 0$

یعنی $(5x - 3)^2 = 19$

یعنی $5x - 3 = \pm \sqrt{19}$

یعنی $5x = 3 \pm \sqrt{19}$

اس لئے $x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$

اس لئے جزر ہیں $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$

تصدیق کیجئے کہ جزر ہیں $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$

مثال 9: مربع مکمل کرنے کے طریقہ سے $4x^2 - 3x + 5 = 0$ کے جزر معلوم کیجئے۔

حل: نوٹ کیجئے کہ $4x^2 - 3x + 5 = 0$ وہی جو

$$(2x)^2 + 2\times(2x)\times\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

یعنی
$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

یعنی
$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

یعنی
$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{71}{6} < 0$$

لیکن $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے منفی نہیں ہوسکتا (کیوں؟) اس لئے x کی کوئی ایسی حقیقی قدر نہیں ہے جو دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہوں گے۔

اب آپ نے مربع مکمل کرنے کے طریقہ کی بہت سی مثالیں دیکھ لیں۔ آیئے اب اس طریقے کو عمومی بناتے ہیں۔

دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ پر غور کیجئے۔ دونوں طرف a سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

یہ وہی ہے جسے
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

یعنی
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جزر وہی ہوں گے جو مساوات

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ یعنی $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$ کے

اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ تب (1) کا جزر المربع لینے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اس لئے
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اس لئے مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جزر ہیں $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اگر

$b^2-4ac\geq 0$ اگر $b^2-4ac<0$ تو مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہوں گے (کیوں؟)

اس طرح اگر $b^2-4ac\geq 0$، تب دودرجی مساوات کے حقیقی جذر ہیں $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

دودرجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کا یہ فارمولہ دودرجی فارمولہ کہلاتا ہے۔

آیئے کچھ مثالیں لے کر اس فارمولہ کی وضاحت کریں۔

مثال 10: مشق 4.1 کا سوال نمبر 2(i) کو دودرجی فارمولہ کی مدد سے حل کیجئے۔

حل: مان لیجئے پلاٹ کی چوڑائی x میٹر ہے تب لمبائی $(2x + 1)$ میٹر ہے تب ہمیں دیا ہوا ہے کہ $x(2x + 1) = 528$ یعنی

$$2x^2+x-528=0$$

یہ $ax^2+bx-c=0$ کی شکل ہے جہاں $a = 2$، $b = 1$, $c = -528$

اس لئے دودرجی فارمولہ سے ہمیں حل ملتے ہیں۔

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}=\frac{-1\pm 65}{4}$$

یعنی $x=\frac{64}{4}$ یا $x=\frac{-66}{4}$

یعنی $x = 16$ یا $x=-\frac{66}{4}$

کیونکہ x منفی نہیں ہوسکتا کیونکہ یہ پلاٹ کی چوڑائی ہے اس لئے پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر اور پھر لمبائی 33 میٹر ہے۔

آپ ان قدروں کی تصدیق مساوات کو مطمئن کر سکتے ہیں۔

مثال 11: دو لگا تار (مسلسل) مثبت طاق صحیح اعداد معلوم کیجئے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 290 ہے۔

حل: مان لیجئے دو مثبت صحیح طاق اعداد میں چھوٹا عدد x ہے تب دوسرا صحیح عدد $x + 2$ ہوگا۔ سوال کے مطابق

$$x^2+(x+2)^2=290$$

یعنی $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

یعنی $2x^2 + 4x - 286 = 0$

یعنی $x^2 + 2x - 143 = 0$

جو کے x میں ایک دودرجی مساوات ہے۔

دودرجی فارمولہ کو استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

یعنی $x = -13$ یا $x = 11$

لیکن کیونکہ x ایک مثبت طاق صحیح عدد ہے اس لئے $x \neq -13$ یعنی $x = 11$

اس لئے دو مسلسل طاق صحیح اعداد ہیں 11 اور 13

جانچ: $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$

مثال 12: ایک مستطیل نما پارک کو اس طرح ڈیزائن کیا جاتا ہے کہ اس کی چوڑائی اس کی لمبائی سے 3 میٹر کم ہو اور اس کا رقبہ پہلے ہی سے بنے مساوی الساقین مثلث نما پارک کے رقبہ سے 4 میٹر زیادہ ہے جبکہ مثلث کا قاعدہ وہی ہے جو مستطیل کی چوڑائی ہے اور اس کا ارتفاع 12 میٹر ہے۔ اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

حل: مان لیجئے مستطیل نما پارک کی چوڑائی x میٹر ہے۔

اس لئے اس کی لمبائی $= (x + 3)$

اس لئے مستطیل پارک کا رقبہ $= x(x+3)\text{m}^2 = (x^2 + 3x)\text{m}^2$

اب مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ہے $= x$ m

اس لئے اس کا رقبہ $\frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x\ \text{m}^2$

ہماری ضرورت کے مطابق

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

یعنی $x^2 - 3x - 4 = 0$

دودرجی فارمولہ کرنے سے ہمیں ملتا ہے

$$x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=4 \text{ یا } -1$$

لیکن $x\neq -1$ (کیوں؟) اس لئے $x=4$

اس لئے پارک کی چوڑائی = 4 میٹر اور اس کی لمبائی 7 میٹر ہوگی۔

تصدیق: مستطیل نما پارک کا رقبہ $= 28\text{m}^2$

مثلث نما پارک کا رقبہ $= 24\text{ m}^2 = (28-4)\text{ m}^2$

مثال 13: دودرجی فارمولہ کی مدد سے مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کے جزر معلوم کیجئے اگر موجود ہوں۔

(i) $3x^2-5x+2=0$ (ii) $x^2+4x+5=0$ (iii) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

حل:

(i) $3x^2-5x+2=0$ جہاں $a=3$، $b=-5$، $c=2$ اس لئے $b^2-4ac=25-24=1>0$

اس لئے $x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6}$ یعنی $x=1$ یا $x=\frac{2}{3}$

اس لئے جزر $\frac{2}{3}$ اور 1 ہیں

(ii) $x^2+4x+5=0$ یہاں $a=1, b=4, c=5$ اس لئے $b^2-4ac=16-20=-4<0$

کیونکہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع منفی نہیں ہوسکتا اس لئے $\sqrt{b^2-4ac}$ کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہوگی۔

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہیں۔

(iii) $2x^2-2\sqrt{2x}+1=0$ یہاں $a=2, b=-2\sqrt{2}, c=1$

اس لئے $b^2-4ac=8-8=0$

اس لئے $x=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm0$ یعنی $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے جزر ہیں $\frac{1}{\sqrt{2}}$، $\frac{1}{\sqrt{2}}$

مثال 14: مندرجہ ذیل مساواتوں کے جزر معلوم کیجئے۔

(i) $x - \frac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

حل:

(i) $x - \frac{1}{x} = 3$ دونوں طرف x سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 + 1 = 3x$$

یعنی $x^2 - 3x + 1 = 0$ جو کہ ایک دو درجی مساوات ہے

یہاں $a = 1,\ b = 3,\ c = 1$

اس لئے $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

اس لئے $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (کیوں؟)

اس لئے جزر ہیں $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ اور $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0,\ 2$

جیسے کہ $x \neq 0, 2$ مساوات کو $x(x-2)$ سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$

$$= 3x^2 - 6x$$

اس لئے دی ہوئی مساوات $3x^2 - 6x + 2 = 0$ میں تحلیل ہوگئی جو ایک دو درجی مساوات ہے۔

یہاں $a = 3,\ b = -6,\ c = 2$ اس لئے $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

اس لئے $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$

اس لئے جزر ہیں $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ اور $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

مثال15: ایک موٹر بوٹ جب کہ ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار 18 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔24 کلومیٹر کا فاصلہ ایک ہی مقام تک بہاؤ کے خلاف پہنچنے میں 1 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے بنسبت بہاؤ کے ساتھ چلنے میں۔ پانی کی رفتار معلوم کیجئے۔

حل: مان لیجئے پانی کی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

اس لئے بوٹ کی بہاؤ کے خلاف رفتار ہے $(18 - x)$ = کلومیٹر فی گھنٹہ اور بہاؤ کے ساتھ بوٹ کی رفتار $(18 + x)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

بہاؤ کے خلاف جانے میں لیا گیا وقت = $\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \frac{24}{18 - x}$ گھنٹے

اسی طرح سے بہاؤ کے ساتھ جانے میں لیا گیا وقت = $\frac{24}{18 - x}$ گھنٹے

سوال کے مطابق

$$\frac{24}{18 - x} - \frac{24}{18 + x} = 1$$

یعنی $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

یعنی $x^2 + 48x - 324 = 0$

دو درجی فارمولہ کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{-48 + \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{48 \pm 60}{2} = 6 \text{ یا } -54$$

کیونکہ x پانی کی رفتار ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہو سکتی اس لئے ہم $x = -54$ کو نظر انداز کر دیتے ہیں، اس لئے $x = 6$ ہمیں پانی کی رفتار ملتی ہے جو 6 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

مشق 4.3

1۔ مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے جزر معلوم کیجئے، مربع مکمل کرنے کے طریقہ سے، اگر موجود ہوں۔

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2۔ سوال 1 میں دی گئی دو درجی مساوات کے جزر دو درجی فارمولہ سے کیجئے۔

3۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے جز رمعلوم کیجئے۔

(i) $x \quad \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} \quad \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$ ، $x \neq -4, 7$

4۔ رحمان کی 3 سال پہلے کی عمر اور 5 سال بعد کی عمر کے مقلوبوں کا حاصل جمع $\frac{1}{3}$ ہے اس کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

5۔ ایک کلاس ٹسٹ میں شیفالی کے ریاضی اور انگلش میں حاصل کردہ نمبروں کا حاصل جمع 30 ہے۔ اگر اس کے ریاضی میں 2 نمبر زیادہ ہوتے اور انگلش میں 3 نمبر کم ہوتے تو اس کے نمبروں کا حاصل ضرب 210 ہوتا۔ دو مضمون میں اس کے نمبر معلوم کیجئے۔

6۔ ایک مستطیل نما میدان کا وتر اس کے چھوٹے ضلع سے 60 میٹر زیادہ ہے۔ اگر اس کا بڑا ضلع چھوٹے ضلع سے 30 میٹر زیادہ ہے تو میدان کے اضلاع معلوم کیجئے۔

7۔ دو اعداد کے مربعوں کا حاصل فرق 180 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع بڑے عدد کا 8 گنا ہے۔ دو نمبر معلوم کیجئے۔

8۔ ایک ٹرین 360 کلومیٹر یکساں رفتار سے چلتی ہے۔ اگر اس کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو وہ یہی سفر 1 گھنٹہ میں کم میں طے کرتی۔ ٹرین کی رفتار معلوم کیجئے۔

9۔ پانی کے دو نل ایک ٹینک کو $9\frac{3}{8}$ گھنٹے میں بھرتے ہیں۔ بڑے قطر والا نل اسی ٹینک کو اکیلے بھرنے میں چھوٹے قطر والے نل سے 10 گھنٹہ کم لیتا ہے۔ وہ وقت معلوم کیجئے، جس میں دونوں نل علیحدہ علیحدہ اسی ٹینک کو بھریں گے۔

10۔ میسور سے بنگلور تک کا 132 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں ایک ایکسپریس ٹرین سواری گاڑی سے 1 گھنٹہ کم لیتی ہے۔ (درمیان میں آنے والے اسٹیشنوں پر رکنے کے وقت نظر انداز کرتے ہوئے) اگر ایکسپریس ٹرین کی اوسط رفتار سواری گاڑی کی اوسط رفتار سے 11 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہے۔ تو دونوں ٹرینوں کی اوسط رفتار معلوم کیجئے۔

11۔ دو مربعوں کے رقبہ کا حاصل جمع $468 m^2$ ۔ اگر ان کے احاطوں کا 24 میٹر ہے تو دونوں مربعوں کے اضلاع معلوم کیجئے۔

4.5 جزروں کی قسم

پچھلے سیکشن میں آپ نے دیکھا کہ دو درجی مساوات کے جزر ہیں۔

$$x - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ تو ہمیں دو مختلف حقیقی جزر مل سکتے ہیں $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $-\frac{b}{2a} \quad \frac{\sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac = 0$ تب $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$ یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ یا $-\frac{b}{2a}$

اس لئے مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر ہیں

اس لئے ہم کہتے ہیں کہ اس حالت میں $ax^2 + bx + c = 0$ کے مساوی ہوں گے۔

اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہے تب کوئی ایسا حقیقی عدد نہیں ہے جس کا مربع $b^2 - 4ac$ ہو۔ اس لئے اس حالت میں دو درجی مساوات کے حقیقی جذر نہیں ہیں۔

کیونکہ $b^2 - 4ac$ کی قدر طے کرتی ہے کہ دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے حقیقی ہیں یا نہیں،
$b^2 - 4ac$ دو درجی مساوات کی ممیز (Discriminant) کہتے ہیں۔

اس لئے دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے

(i) مختلف اور حقیقی ہوں گے اگر $b^2 - 4ac > 0$

(ii) حقیقی اور مساوی ہوں گے اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) حقیقی نہیں ہوں گے اگر $b^2 - 4ac < 0$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

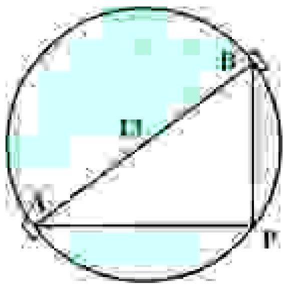
مثال 16: دو درجی مساوات $2x^2 - 4x + 3 = 0$ کا ممیز معلوم کیجئے اور پھر اس کے جزروں کو معلوم کیجئے۔

حل: دی ہوئی مساوات $ax^2 + bx - c = 0$ کی شکل کی ہے جہاں $a = 2$، $b = -4$ اور $c = 3$ اس لئے ممیّز ہے

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہیں۔

مثال 17: 13 میٹر قطر والے ایک دائری پارک کی باؤنڈری کے ایک نقطہ پر ایک کھمبا اس طرح کھڑا کیا جاتا ہے کہ اس کے قطر کے سرے کے نقطوں A اور B پر موجود دو دروازوں سے اس کے فاصلہ کا فرق 7 میٹر ہے۔ کیا ایسا کرنا ممکن ہے؟ اگر ہاں تو



شکل 4.4

معلوم کیجئے کہ 2 دروازوں سے کتنے فاصلہ پر کھمبا کھڑا کیا جائے گا۔

حل: آیئے پہلے ڈائی گرام بنایئے (شکل 4.4 دیکھئے)

مان لیجئے P، کھمبا کا مطلوبہ مقام ہے، مان لیجئے کھمبا کا دروازہ B سے فاصلہ x میٹر ہے یعنی $BP = x$ میٹر۔ اب دونوں دروازوں کے کھمبا سے فاصلوں کا فرق $AP - BP = 7$ میٹر

(یا $BP - AP$) اس لئے $AP = (x + 7)$ میٹر

اب $AB = 13$ میٹر اور کیونکہ AB وتر ہے

$\angle APB = 90^\circ$ (کیوں؟)

اس لئے $AP^2 + PB^2 = Ab^2$ (فیثاغورث کا مسئلہ)

یعنی $(x+7)^2 + x^2 = 13^2$

یعنی $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

یعنی $2x^2 + 14x - 120 = 0$

اس لئے دروازہ B سے کھمبا کا فاصلہ x مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

اس لئے اگر اس مساوات کے جزر حقیقی ہوئے تو ایسا ممکن ہے کہ کھمبا اس مقام پر لگایا جا سکے۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ ایسا ہے آیئے اس کی ممیّز (Discriminant) پر غور کیجئے۔ ممیّز ہے۔

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

اس لئے دی ہوئی دودرجی مساوات کے دو حقیقی جزر ہیں۔ اس لئے پارک کی باؤنڈری پر کھمبا کھڑا کیا جا سکتا ہے۔

دودرجی مساوات $x^2 + 7x - 60 = 0$ کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

اس لئے $x = 5$ یا -12

کیونکہ x دروازہ Bاور کھمبے کے درمیان فاصلہ ہے۔اس لئے یہ مثبت ہوگا۔اس لئے $x = -12$ کونظر انداز کرنا ہوگا۔اس لئے $x = 5$

اس لئے کھمبا پارک کی باؤنڈری پر دروازہ Bسے 5 میٹر کے فاصلہ پر اور دروازہ Aسے 12 میٹر کے فاصلہ پر ہوگا۔

مثال 18: مساوات $3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ کا ممیّز معلوم کیجئے اور پھر جزروں کی استعمال معلوم کیجئے۔ان کو معلوم کیجئے اگر یہ حقیقی ہیں۔

حل: یہاں $a = 3, b = -2$ اور $c = \frac{1}{3}$

اس لئے ممیّز $b^2 - 4ac - (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} - 4 - 4 - 0$

اس طرح دی ہوئی دودرجی مساوات کے دو مساوی حقیقی جزر ہیں۔

جزر ہیں $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ یعنی $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

مشق 4.4

1۔ مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کے جزروں کی nature معلوم کیجئے۔اگر جزر موجود ہیں تو ان کو معلوم کیجئے۔

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2۔ k کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کے مساوی جزر ہیں۔

(i) $2x^2 - kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3۔ کیا یہ ممکن ہے کہ ایسا آموں کا باغ ڈیزائن کیا جائے جس کی لمبائی اس کی چوڑائی کی دگنی ہے اور اس کا رقبہ $800 m^2$ ہو؟ اگر ایسا ممکن ہے تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

4۔ کیا مندرجہ ذیل صورتِ حال ممکن ہے۔اگر ہے تو ان کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

دو دستوں کی عمروں کا حاصل جمع 20 سال ہے۔چار سال پہلے ان کی عمروں کا حاصل ضرب (سالوں میں) 48 تھا۔

5۔ کیا ایک ایسا مستطیل پارک کا ڈیزائن کرنا ممکن ہے جس کا احاطہ 80 میٹر ہو اور رقبہ 400 مکعب میٹر ؟ اگر ہے تو اس کی لمبائی و چوڑائی معلوم کیجئے۔

4.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1۔ متغیر x میں دودرجی مساوات $ax^2+bx+c-0$ کی شکل کی ہوتی ہے جہاں b, a اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a\neq 0$ –

2۔ ایک حقیقی عدد α دودرجی مساوات $a\,x^2+b\,x-c=0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ دو درجی کثیر رکنی ax^2+bx-c کے صفر اور دودرجی مساوات $ax^2+bx+c-0$ کے جزر مساوی ہوتے ہیں۔

3۔ اگر ہم دودرجی کثیر رکنی $ax^2+bx+c, a\neq 0$ کو دو خطی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں تو دو درجی مساوات $ax^2-bx+c-0$ کے جزر ہر ایک خطی جزو ضربی کو صفر کے برابر رکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔

4۔ دودرجی مساوات کو مربع مکمل کر کے، طریقہ سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔

5۔ دودرجی فارمولہ: دودرجی مساوات $ax^2+bx+c-0$ کے جزر ہیں

$\frac{-b\perp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$، ہے جب کہ $b^2+4ac>0$

6۔ ایک دودرجی مساوات $ax^2+bx+c-0$ کے

(i) دو مختلف اور حقیقی جزر ہوں گے اگر $b2-4ac>0$

(ii) مساوی جزر ہوں گے اگر $b^2-4ac-0$

(iii) حقیقی جزر نہیں ہوں گے اگر $b^2-4ac<0$

قارئین کے لئے نوٹ

عبارتی سوال کے سلسلہ میں موصول حل کو ہمیشہ اصل مساوات کی شرطوں میں رکھ کر تصدیق کرنی چاہیے نہ کے بعد میں بنی مساواتوں کے (مثالیں 19,13,11 جو باب 3 کی ہیں اور باب 4 کی مثالوں 11,10 اور 12 کو دیکھئے)۔