# கணிதம்

## பகுதி - 1

## வகுப்பு VIII

Mathematics
Part - 1
Tamil Medium

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்(SCERT), கேரளம்
2016

## தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா,
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா,
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா,
உச்சல ஜலதி தரங்கா,
தவ சுப நாமே ஜாகே,
தவ சுப ஆசிஸ மாகே,
காகே தவ ஜய காதா
ஜனகண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா.
ஜய ஹே, ஜயஹே, ஜயஹே
ஜய ஜய ஜய ஜயஹே!

## உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு . இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர்.

எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம்வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்து கொள்வேன்.

என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன்.

நான் எனது நாட்டினுடையவும், நாட்டு மக்களுடையவும் வளத்திற்காகவும், இன்பத்திற்காகவும் முயற்சி செய்வேன்.

*Prepared by :*

**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

*Website* : www.scertkerala.gov.in
*E-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2015, Reprint : 2016
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of Education, Government of Kerala

அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,

கணித உலகில் நாம்
நெடுந்தூரம் பயணம் செய்துள்ளோம்.
தேடல்களும் கண்டுபிடிப்புகளும்
தொடரலாம் மேலும் நாம்
கணிதத்தில் முன்னேற வேண்டும்.
எண்களின் பரந்த உலகில்
வடிவியலின் உத்திகள் தேடி
இயற்கணிதத்தின் புதிய நிலை நோக்கி
தேடலைத் தொடரலாம்.

அன்புடன்,

**முனைவர் பி. ஏ. பாத்திமா,**
இயக்குநர்
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
திருனந்தபுரம்

## Participants in Workshop

**T.P.Prakasan**, GHS Vaazhakkad, Malappuram.
**Unnikrishnan.M.V**, GHSS Kumbala, Kasargode.
**Narayanan.K**, BARHSS Bovikkana, Kasarakode.
**Mohanan.C,** GMRHSS Angadikkal South, Chengannur.
**Ubhaithullah.K.C,** SOHS, Arikkode, Malappuram.
**Vijayakumar.T.K,** GHSS Cherkula, Kasaragode.
**V.K.Balagangadharan,** GHSS, Calicut University Campus, Malappuram.
**Narayananunni,** DIET, Palakkad
**Ebraham Kurian,** CHSS, Pothukallu, Nilambur
**Anil Kumar,** Janatha HSS, Venjaramoodu.
**Krishna Prasad,** CMSAVHSS, Chappanangadi, Malappuram.
**Sreekumar T,** GGHSS, Karamana, Thiruvananthapuram.

## Cover

**Rakesh P Nair**

## Expert

**Dr.E. Krishnan**
(Rtd.) Prof. University College, Thiruvananthapuram

## Academic Coordinator

**Sujith kumar.G**, Research Officer, SCERT

## Tamil Version

**S.C.Edwin Daniel** Headmaster, GHS, Pambanar, Idukki.

**K.KrishnaKumar** HSA, PHSS, Elappara, Idukki.

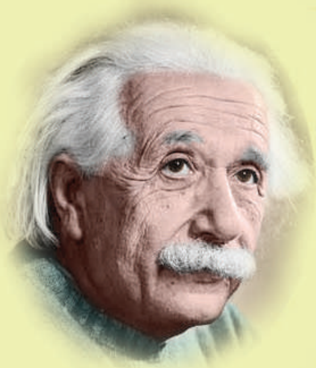
**T.Kumaradhas** Headmaster(Rtd.), GHS Kozhippara, Palakkad.

**Dr.Kanchana** Professer Head Of Dept.Tamil (Rtd.) University of Kerala, Thiruvananthapuram.

## Academic Co-ordinator

**Dr.Sahaya Dhas,** Research Officer, SCERT

State Council Of Educational Research And Trainingn (SCERT)
Vidhya Bhavan Poojapura, Thiruvananthapuram 695 012



# உள்ளடக்கம்


1 சர்வசம முக்கோணங்கள் ............... 7 - 32

2 சமன்பாடுகள் .................................. 33 - 44

3 பலகோணங்கள் ................................ 45 - 60

4 முற்றொருமைகள் ............................ 61 - 86

5 பணப்பரிமாற்றம் ............................ 87 - 96

இப்புத்தகத்தில் வசதிக்காக சில குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது

**ICTவாய்ப்புகள்**

**கணக்கு செய்து பார்ப்போம்**

**செயல்திட்டம்**

**திரும்பிப் பார்க்கும் போது**

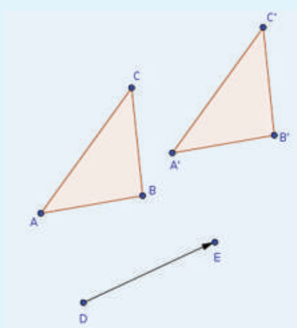
# 1

# சர்வசம முக்கோணங்கள்

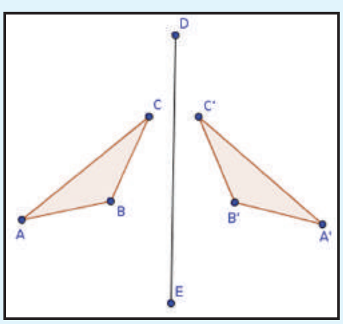
## பக்கங்களும் கோணங்களும்

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் தரப்பட்டால் அதனை வரைவதற்குத் தெரியும் அல்லவா.

முக்கோணம் ABC வரையவும். D, E எனும் இரு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். Translate by Vector எடுத்து $\Delta ABC$, D, E என்பனவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யவும் புதிதாக $\Delta A'B'C'$ கிடைக்கின்றனஅல்லவா. இவ்விரு முக்கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? $\Delta ABC$ -இன் பக்கங்களையும் கோணங்களையும் மாற்றிப் பார்க்கவும். $\Delta A'B'C'$ -இல் ஏதேனும் மாற்றம் ஏற்படுகின்றதா? E -இன் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். E எனும் புள்ளி D -ஐச் சென்றடையும் போது என்ன நிகழ்கிறது?



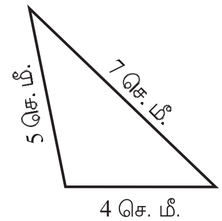

ABC என்ற முக்கோணமும் DE என்ற கோடும் வரையவும். Reflect about Line எடுத்து முக்கோணத்திலும் கோட்டிலும் கிளிக் செய்யவும். $\Delta A'B'C'$ கிடைக்கும் இரு முக்கோணங்களின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? $\Delta ABC$ -இன் பக்கங்களின் நீளம், DE என்ற கோட்டின் இடம், சாய்வு ஆகியவற்றை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



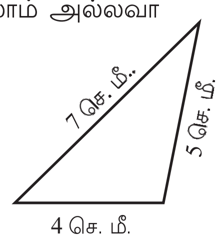

பக்கங்களின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர், 7சென்டிமீட்டர்.

முக்கோணம் வரையலாமா?

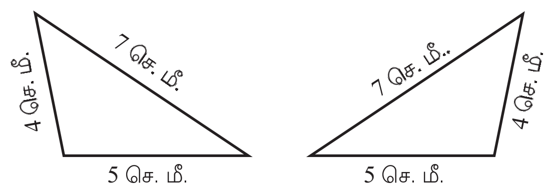
இவ்வாறு வரையலாம்:



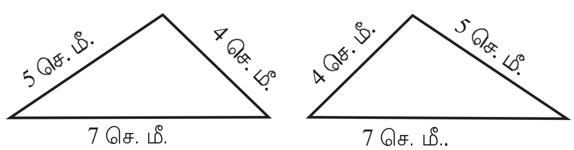

இப்படியும் வரையலாம் அல்லவா




இதுபோன்று அடிப்பக்கம் 5 சென்டிமீட்டர் அளவில் இரு முக்கோணங்கள் வரையலாம்:




அடிப்பக்கம் 7 சென்டிமீட்டர் ஆகவும் வரையலாம்:




இந்த ஆறு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் அனைத்தும் ஒன்று போலாகும். அப்படியானால் கோணங்களோ?

முதலில் வரைந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களை மாற்றிமாற்றி அமைத்தது அல்லவா பிற முக்கோணங்கள் அனைத்தும்.

முதலில் வரைந்த முக்கோணத்தைக் கட்டி அட்டையில் வெட்டி எடுத்து, பிற முக்கோணங்களுடன் மாற்றி மாற்றி வைத்தால் சரியாகச் சேர்த்து வைக்க முடிகின்றதா எனப் பார்க்கவும்.

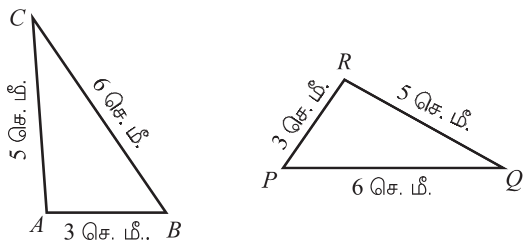
சமமான பக்கங்களைச் சேர்த்து வைத்தால் கோணங்களும் சேர்ந்திருக் கின்றன அல்லவா?

வேறு சில நீளங்களை எடுத்து இது போன்ற முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும். அவற்றின் கோணங்கள் சமம் அல்லவா?

இங்கு நாம் கண்டவற்றை ஒரு பொதுத் தத்துவமாக எழுதலாம்:

**ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமமெனில், இம்முக்கோணங்களின் கோணங்களும் சமம் ஆகும்.**

இந்த முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்.




முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் சமம் என்பதால் கோணங் களும் சமம் ஆகும்.

அதாவது, $\Delta ABC$ -இன் ஒவ்வொரு கோணமும் $\Delta PQR$ -இன் ஒவ்வொரு கோணத்திற்குச் சமம் ஆகும். எந்தெந்த கோணத் திற்குச் சமம் ஆகின்றது?

$\angle A$ -க்குச் சமமான கோணம் எது?

$\Delta ABC$ -இல் மிகப்பெரிய கோணம் $\angle A$ ஆகும்.

$\Delta PQR$ -இல் மிகப்பெரிய கோணம் எது?

எனில்

$\angle A$ = ...........

இனி இவ்விரு கோணங்களிலும் மிகச்சிறிய கோணங்கள் எவை?

$\angle C$ = ..........

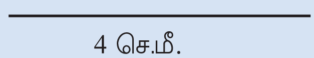
இடைப்பட்ட கோணங்களை எடுத்தாலோ?

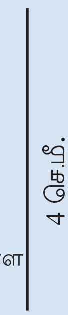
$\angle B$ = ..........

**சர்வசமம்**

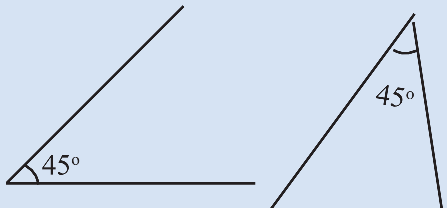
கோடுகள், கோணங்கள், செவ்வகங்கள், முக்கோணங்கள் போன்ற பல்வேறு வடிவியல் வடிவங்கள் உள்ளன.

சம நீளம் உள்ள கோடுகளை எவ்வாறு வரைந்தாலும் சமம் எனக் கூறலாம் அல்லவா.

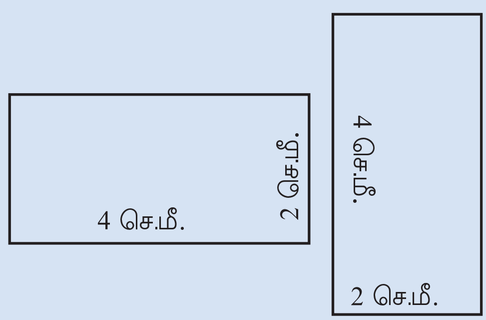



இது போன்றே சம அளவு உள்ள கோணங்களும்




சமநீளமும் வீதியும் உள்ள செவ்வ கங்களும் சர்வசமம் எனக் கூறலாம்



வேறொரு முறையிலும் இதைப் பார்க்கலாம்: $\Delta ABC$ -இன் மிகப் பெரிய பக்கமான $BC$ -க்கு எதிர்கோணம் $\angle A$. இதுவே மிகப் பெரிய கோணம்.

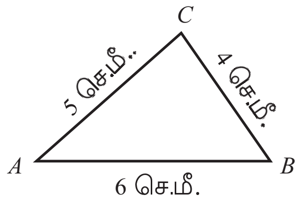
இதுபோன்று மிகச்சிறிய பக்கமான $AB$ -க்கு எதிர் கோணம் $\angle C$; இதுவே மிகச்சிறிய கோணம் ஆகும். இடைப்பட்ட பக்கமான $AC$ -க்கு எதிர் கோணம் $\angle B$. இதுவே இடைபட்ட கோணம் ஆகும்.

$\Delta PQR$ -லும் இது போன்றே உள்ளது.

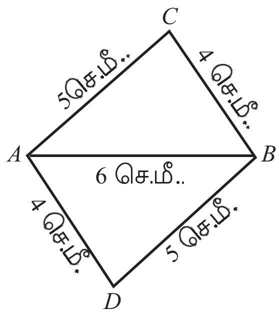
அப்படியானால் முதலில் பார்த்த கருத்தைக் கொஞ்சம் விளக்கமாக இப்படிக் கூறலாம்:

**ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சர்வசமமெனில், இம் முக்கோணங்களின் சமபக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும்.**

இதைப் பயன்படுத்திய ஒரு கணிதச்செயலைப் பார்ப்போம். கீழே காண்பது போன்று முக்கோணம் வரையவும்:




இனி இதே முக்கோணத்தை $AB$ -இன் கீழே பக்கங்களை மாற்றி வரையவும்.




$\Delta ABC$ -இன் $AC$, $BC$ எனும் பக்கங்கள், $\Delta ABD$ இன் $BD$, $AD$ எனும் பக்கங்களுக்குச் சமம் ஆகும்.

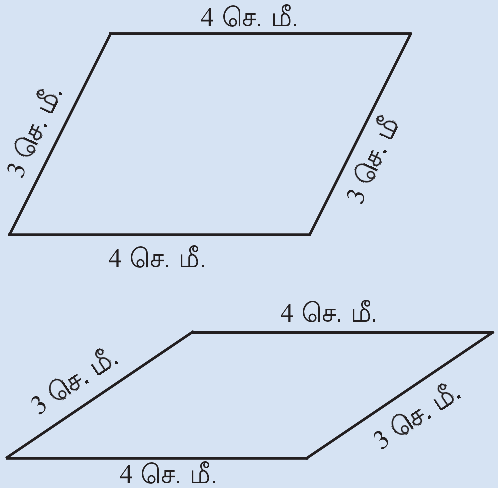
இரு முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கம் $AB$ ஆகும்.

மூன்று பக்கங்களின் நீளங்கள் சமமானதால், கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

$\angle CAB = \angle DBA \qquad \angle CBA = \angle DAB$

### வடிவியல் சர்வசமம்

படத்தில் உள்ள இணைகரங்களைப் பார்க்கவும்.




இவ்விரு இணைகரங்களிலும் பக்கங்கள் 4 சென்டிமீட்டர், 3 சென்டிமீட்டர் ஆகும். ஆனால் இந்த இணைகரங்கள் சர்வசமம் எனக் கூறுவது தவறு அல்லவா.

யூக்ளிட், வடிவியல் வடிவங்களின் சர்வசமத்தைப் பற்றி இவ்வாறு கூறுகிறார்

*ஒன்றோடொன்று பொருந்துவன சர்வசமம் ஆகும்.*

முன் பக்கத்தில் உள்ள கோடுகளும் கோணங்களும் செவ்வகங்களும் என எல்லாவற்றையும் திருப்பி வைத்தால் சரியாக பொருந்தும் அல்லவா.

$AC$, $BD$ எனும் கோடுகளை $AB$ என்ற கோடு வெட்டும் போது உருவாகும் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $\angle CAB$ ,$\angle DBA$ ஆகியன ஆகும். இவை சமமெனில், $AC$-யும் $BD$- யும் இணைகோடுகள் ஆகும்.

இது போன்று $BC$- யும் $AD$ - யும் இணைகோடுகள் ஆகும் (விளக்கலாமா?).

அதாவது $ACBD$ ஒரு இணைகரம் ஆகும் (ஏழாம் வகுப்பில் **இணைகோடுகள்** என்ற பாடத்தில் **ஒரே திசை** என்ற பகுதி).

அப்படியானால் இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 சென்டிமீட்டர், 6 சென்டிமீட்டர், ஒரு மூலைவிட்டம் 8 சென்டிமீட்டர் என்ற

ளில் இணைகரம் வரையலாமா?

## சொல்லும் பொருளும்

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமமெனில், அவற்றைச் சேர்த்து வைக்கலாம் எனக் கண்டோம் அல்லவா. யூக்ளிடின் மொழியில் சொன்னால்

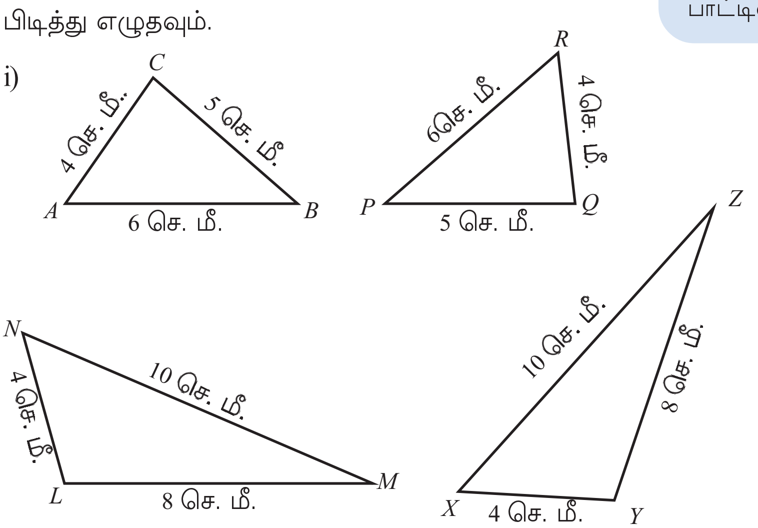
> *ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமமானால் இவ்விரு முக்கோணங்களும் சமம் ஆகும்.*

யூக்ளிட் கிரேக்க மொழியில் எழுதிய **'எலமென்ட்ஸ்'** என்ற புத்தகம் மறுமலர்ச்சிக் கால ஐரோப்பாவில் இலத்தீன் மொழியில் மொழிபெயர்க்கப்பட்டது. 'பொருத்துதல்' என்பதன் இலத்தீன் சொல் congruent என்பதாகும். பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் வடிவியல் வடிவங்களின் சர்வசமம் என்பதற்கு ஆங்கிலத்தில் equal என்பதற்குப் பதிலாக congruent எனும் சொல் பயன்பாட்டில் வந்தது.

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி படங்களிலும் ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்குச் சமமான கோணங்களை அடுத்த முக்கோணத்திலிருந்து கண்டு பிடித்து எழுதவும்.

i)

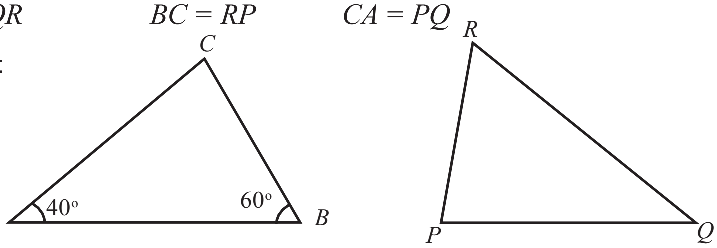
ii)




(2) கீழே வரைந்துள்ள இரு முக்கோணங்களில்

$AB = QR$ $\quad$ $BC = RP$ $\quad$ $CA = PQ$

ஆகும்:




$\Delta ABC$ -இல் $\angle C$ -யும் $\Delta PQR$ -இன் கோணங்களையும் கண்டுபிடித்து எழுதவும்

### நமது மொழி

வடிவியலைப் பற்றிய புத்தகங்களை மலையாள மொழியில் மொழி பெயர்த்த போது congruent என்பதற்குச் 'சர்வசமம்' என்றே பயன்படுத்தினர். வடிவியல் வடிவங்கள் சேர்ந்திருக்க வேண்டுமெனில் எல்லா அளவுகளும்( நீளமும், கோணங்களும்) சமமாக இருக்க வேண்டும் அல்லவா.

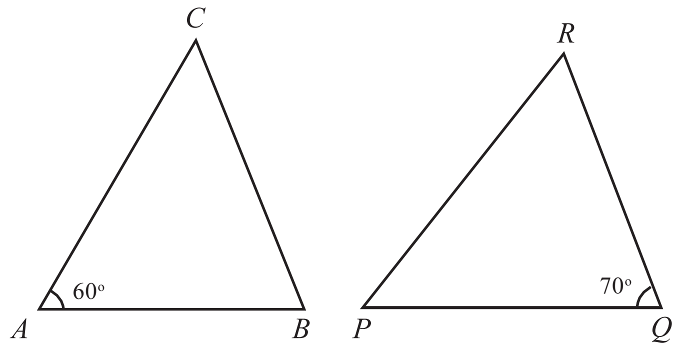
இதற்கு ஏற்ப முக்கோணங்களைக் குறித்துள்ள பொதுத்தத்துவத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்.

*ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமமெனில் அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமம் ஆகும்.*

(3) கீழே வரையப்பட்டுள்ள முக்கோணங்களில்

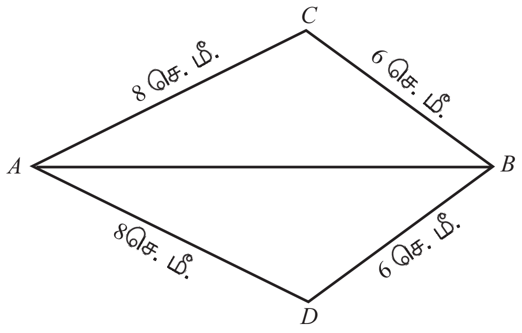
$AB = QR$ $BC = PQ$ $CA = RP$

ஆகும்.




இவ்விரு முக்கோணங்களிலும் உள்ள பிற கோணங்களைக் கண்டுபிடித்து எழுதவும்.

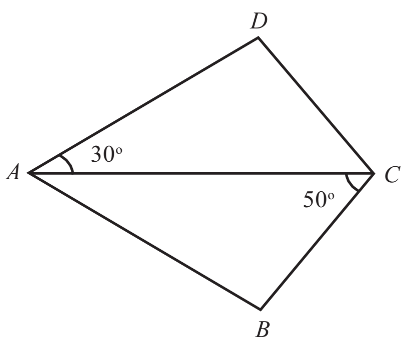
(4)




படத்தில் $\Delta ABC$, $\Delta ABD$ என்பனவற்றின் கோணங்கள் சமம் ஆகுமா? ஏன்?

(5) படத்தில் உள்ள $ABCD$ எனும் நாற்கரத்தில்

$AB = AD$ $BC = CD$




நாற்கரத்தின் எல்லாக் கோணங்களையும் பார்க்கவும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்குச் சமமெனில், முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் சமம் ஆகுமா?

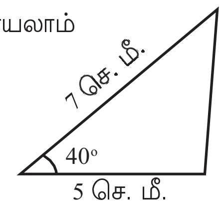
## இரு பக்கங்களும் ஒரு கோணமும்

மூன்று பக்கங்களின் நீளம் தரப்பட்டிருந்தால் முக்கோணம் வரையலாம். இரு பக்கங்களின் நீளமும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணமும் தரப் பட்டிருந்தால்

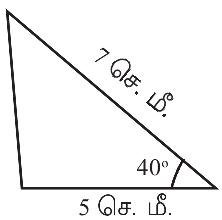
இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 சென்டிமீட்டர், 7 சென்டிமீட்டர், அவற்றின் இடையே உள்ள கோணம் 40°.

முக்கோணம் வரையலாமா?

இவ்வாறு வரையலாம்

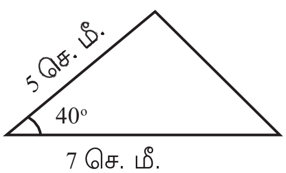


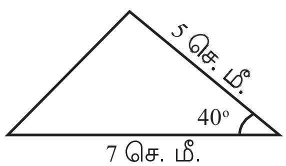

இப்படியும் வரையலாம்



min = 0, max = 5 என்ற ஸ்லைடர் a உருவாக்கவும். பக்கங்களின் நீளங்கள் 4,5, 6 ஆகுமாறு ஒரு முக்கோணத்தையும் 4a, 5a, 6a என ஆகுமாறு மற்றொரு முக்கோணத்தையும் உருவாக்கவும். இரு முக்கோணங்களின் கோணங்களைப் பார்க்கவும் (Angle எடுத்து முக்கோணத்தில் கிளிக் செய்யும் போது கோணஅளவுகளைக் காணலாம்.) a எனும் எண்ணை மாற்றிப் பார்க்கவும். என்ன நிகழ்கின்றது? a = 1 ஆகும்போது என்ன நிகழ்கின்றது?

அடிப்பக்கம் 7 சென்டிமீட்டராகவும் வரையலாம்




வேறு ஏதேனும் முறையில் வரைய முடியுமா?

இம் முக்கோணங்களில் உள்ள மூன்றாவது பக்கங்களின் நீளம் சமம் ஆகுமா?

முன்னர் செய்தது போன்று ஒரு முக்கோணத்தைக் கட்டி அட்டையில் வெட்டி எடுத்து மாற்றி மாற்றி பிற முக்கோணங்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்

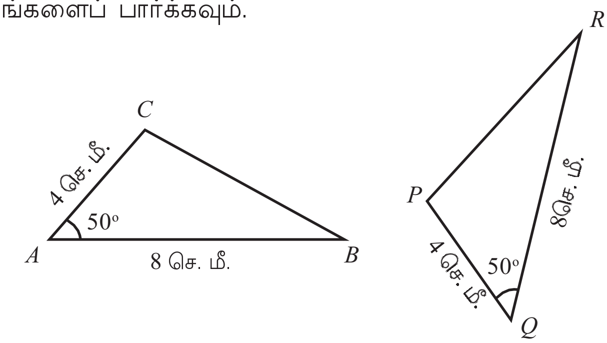
சரியாகப் பொருந்துகின்றனவா?

பக்கங்களையும் கோணத்தையும் மாற்றிப் பார்க்கவும்.

இங்கே கண்ட கருத்தினைப் பொதுத் தத்துவமாக எழுதலாம்.

**ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணமும், மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணத்திற்கும் சமமெனில் இம்முக்கோணங்களின் மூன்றாவது பக்கங்களும் சமம் ஆகும். பிற இரு கோணங் களும் சமம் ஆகும்.**

.இம் முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்.




$\Delta ABC$ - இல் $AB$, $CA$ எனும் பக்கங்களும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள $\angle A$ யும் $\Delta PQR$ -இல் $QR$, $PQ$ எனும் பக்கங் களுக்கும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள $\angle Q$ -க்கும் சமம் ஆகும்.

ஆகவே இப்போது பார்ப்பதற்கு ஏற்ப, $\Delta ABC$, $\Delta PQR$ இவற்றின் மூன்றாவது பக்கமான $BC$, $PR$ எனும் பக்கங்கள் சமம் ஆகும்; $\angle B$ -யும், $\angle C$ -யும் $\Delta PQR$ -இல் உள்ள இரு கோணங்களுக்குச் சமமாகும்.

$\angle B$ -க்குச் சமமான கோணம் எது?

சமபக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

$\Delta ABC$ -இல் $AC$ எனும் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் $\angle B$

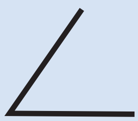
$\Delta PQR$ -இல் $AC$ -க்குச் சமமான பக்கம் $PQ$; அதற்கு எதிரே உள்ள கோணம் $\angle R$.

எனில் $\angle B = \angle R$.

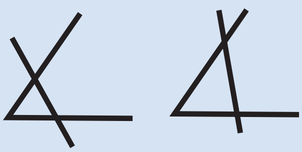
இது போன்று $\angle C = \angle P$ என்றும் காணலாம் (விளக்கலாமா?).

### முக்கோண உருவாக்கம்

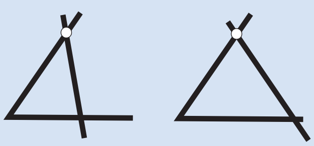
நீளம் உள்ள ஒரு ஈர்க்கில் குச்சியை மடக்கி ஒரு கோணத்தை உருவாக்கவும்.



இந்தக் கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மேலே மற்றொரு ஈர்க்கில் குச்சியை வைத்து ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்கவும். பல முறைகளில் வைக்கலாம் அல்லவா



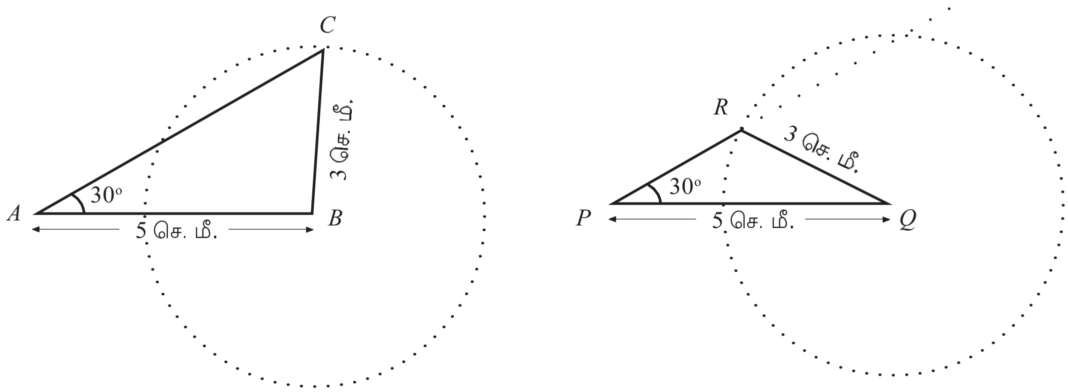
மேல் பக்கத்தில் ஒர் அடையாளம் வைத்து இரண்டாவது ஈர்க்கில் அதன் வழியாகத் தான் செல்ல வேண்டும் என்று கூறினால்?



மேலே உள்ள பக்கத்திலும் கீழே உள்ள பக்கத்திலும் அடையாளம் போட்டு இவ்விரு அடையாளங்கள் வழியாகச் செல் கின்ற முறையில் இரண்டாவது ஈர்க்கிலை வைக்க வேண்டும் என்று கூறினால் எத் தனை முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்?

ஒரு கோணமும் அதன் இரு பக்கங்களின் நீளங்களும் சொல்லப்பட்டால் முக்கோணத்தை உறுதிப்படுத்தலாம் அல்லவா?

இனி இப்படங்களைப் பார்க்கவும்




இது போன்ற முக்கோணங்கள் வரைந்தது நினைவில் உள்ளதா? (ஏழாம் வகுப்பில் **முக்கோணம் உருவாக்குவோம்** எனும் பாடத்தில் **வேறொரு கோணம்** என்ற பகுதி).

$\Delta ABC$, $\Delta PQR$ இவற்றில்,

$$AB = PQ = 5 \text{ செ.மீ.}$$

$$BC = QR = 3 \text{ செ.மீ}$$

$$\angle A = \angle P = 30°$$

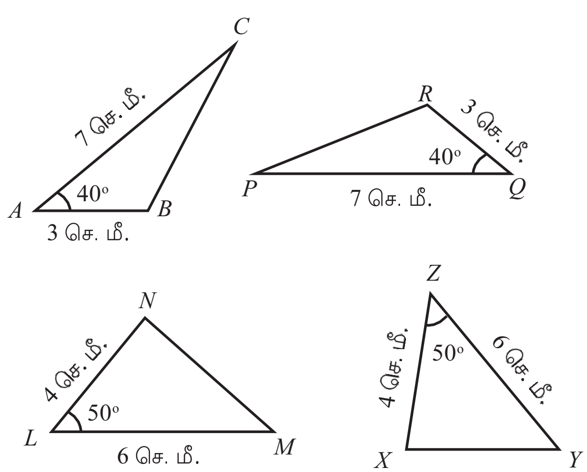
$AC$, $PR$ எனும் பக்கங்கள் சமம் ஆகுமா?

**இரு பக்கங்களும் ஒரு கோணமும் சமமாக இருந்தும் மூன்றாவது பக்கங்கள் சமம் அல்ல என்பது ஏன்?**

(1)கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு ஜோடி படங்களிலும் முதல் முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்குச் சமமான கோணங்களை இரண்டாம் முக்கோணத்திலிருந்து கண்டுபிடித்து எழுதவும்

i)

ii)

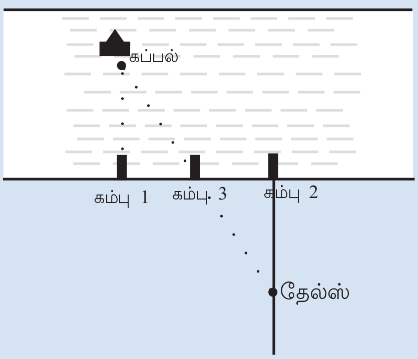


### சர்வசம தந்திரம்

கி.மு. ஆறாம் நூற்றாண்டில் கிரீஸில் வாழ்ந்திருந்தவர் தத்துவ சிந்தனையாளரும் கணித மேதையுமான தேல்ஸ் என்பவர். மிக தூரத்தில் கடலில் நங்கூரமிட்டிருந்த ஒரு கப்பல் கரையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது என்பதைக் கணக்கிட தேல்ஸ் பயன் படுத்தினார் சொல்லப்படும் ஒரு தந்திரத்தைப் பார்க்கவும்.

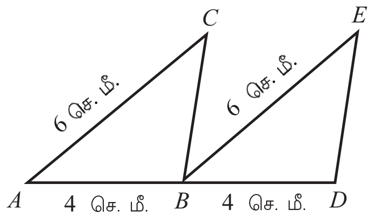
முதலில் கடற்கரையில் கப்பலுக்கு நேராக கரையோராமாக ஒரு கம்பை ஊன்றினார். சிறிது தூரத்தில் கரையோரமாகவே மற்றொரு கம்பினையும் தொடர்ந்து இவ்விரு கம்புகளுக்கு இடையே சரியாக நடுவில் மூன்றாவது ஒரு கம்பையும் ஊன்றினார்.

பின்னர் இரண்டாவது கம்பிலிருந்து கரைக்குச் செங்குத்தாகக் கரையில் ஒரு கோடு வரைந்தார். பின்னர் கப்பலைப் பார்த்துக் கொண்டே இக்கோடு வழியாகப் பின்னோக்கி நடந்து நடுவில் உள்ள கம்பு கப்பலுக்கு நேராகக் கண்ட போது நடப்பதை நிறுத்தினார். அப்போது தான் நின்றிருந்த இடத்தைக் கோட்டில் அடையாளப்படுத்தினார்




இப்போது கடலில் உள்ள முக்கோணமும் கரையில் உள்ள முக்கோணமும் சர்வசமம் ஆனதால் (எதனால்?) கரையிலிருந்து கப்பலுக்கு உள்ள தூரமும் கரைக்கும் தேல்ஸ் கடைசியாக நின்ற இடத்திற்கும் இடையில் உள்ள தூரமும் சமம் அல்லவா.

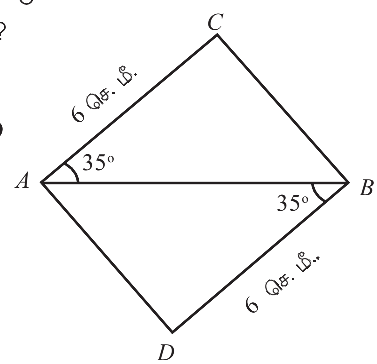
(2) படத்தில் $AC$, $BE$ என்பன இணைகோடுகள் ஆகும்.



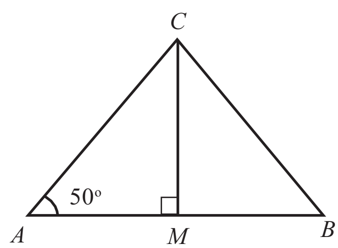

i) $BC$, $DE$ எனும் கோடுகள் சம நீளம் உடையனவா? ஏன்?

ii) $BC$, $DE$ எனும் கோடுகள் இணைகரமா?ஏன்?

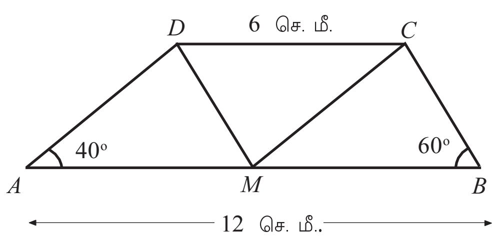
(3) படத்தில் $ACBD$ என்பது இணைகரமா? ஏன்?




(4) படத்தில் $AB$ எனும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி $M$ ஆகும் $\Delta ABC$ -இன் பிற இரு கோணங்களைக் காணவும்




(5) கீழ்க்காணும் படத்தில் $AB$, $CD$ எனும் பக்கங்கள் இணையானவை. $AB$ -இன் நடுப்புள்ளி $M$ ஆகும்



i) $\Delta AMD, \Delta MBC, \Delta DCM$ இவற்றின் எல்லாக் கோணங்களையும் கணக்கிடவும்.

ii) $AMCD, MBCD$ என்னும் நாற்கரங்களின் சிறப்பியல்புகள் யாவை?

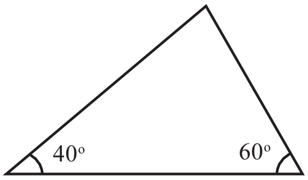
## ஒரு பக்கமும் இருகோணங்களும்

பக்கங்களின் நீளங்கள் தரப்பட்டிருந்தால் முக்கோணம் வரையலாம். இரு பக்கங்களின் நீளங்களும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணமும் தரப்பட்டிருந்தாலும் முக்கோணம் வரையலாம்.

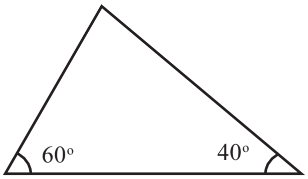
ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களும் தரப் பட்டிருந்தாலோ?

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர்; அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்கள் $40°$, $60°$ ஆகும். முக்கோணம் வரையமுடியுமா?

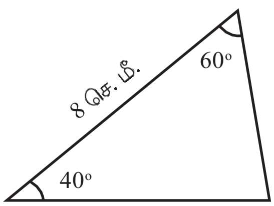
இவ்வாறு வரையலாம்

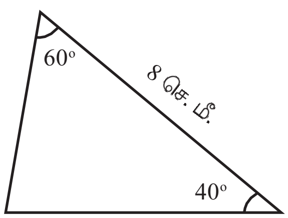



கோணங்களின் இடத்தை மாற்றியும் இவ்வாறு வரையலாம்.




இவ்வாறெல்லாம் வரையலாம்




வேறு ஏதேனும் முறையில் வரையலாமா?

இவ்வாறு வரையும் முக்கோணங்களின் மூன்றாவது கோணம் $80°$ ஆகும். (ஏன்?)

பிற இரு பக்கங்களோ?

இவ்வாறான ஒரு முக்கோணத்தை வெட்டி எடுத்து பிற முக்கோணங்களுடன் மாற்றி மாற்றிச் சேர்த்து வைத்துப் பார்க்கவும். பிற இரு பக்கங்களும் சமம் அல்லவா?

அப்படியானால் மூன்றாவது ஒரு பொதுத்தத்துவம் கிடைக்கிறது.

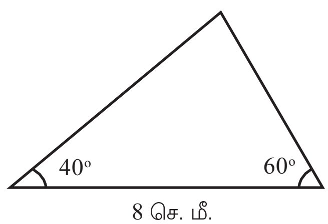
**ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கும் அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களுக்கும் சமமெனில் இம்முக்கோணங்களின் மூன்றாவது கோணங்கள் சமம் ஆகும். சம கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களும் சமம் ஆகும்.**

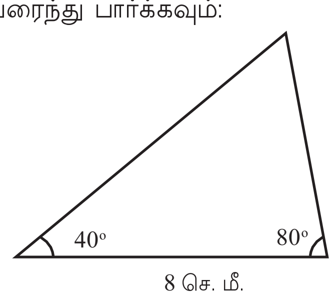
எந்த ஒரு முக்கோணத்தினுடையவும் கோணங்களின் தொகை $180^\circ$ அல்லவா. அப்படியானால் ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் தெரியுமெனில் மூன்றாவது கோணத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

அப்படியானால் ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு கோணங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களுக்குச் சமமெனில் மூன்றாவது கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

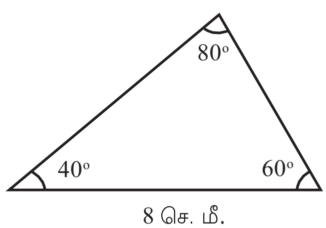
மேலும் ஏதேனும் ஒரு பக்கமும் சமமெனில் பிற இரு பக்கங்களும் சமம் ஆகுமா?

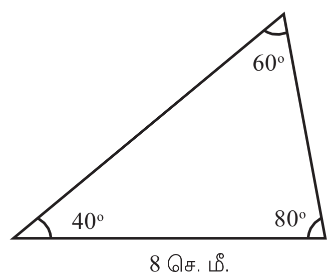
இது போன்று இரு முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும்:



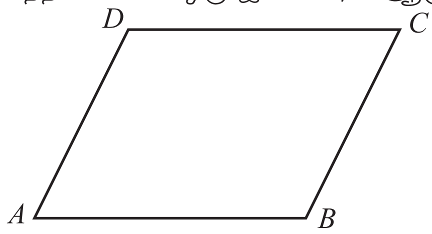

இவ்விரு முக்கோணங்களின் மூன்றாவது கோணத்தின் அளவு என்ன?



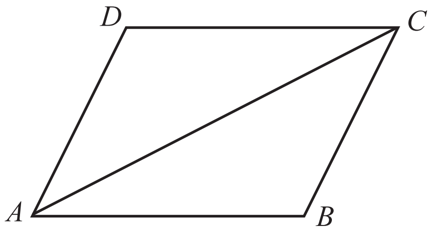
**ஒரு பக்கமும் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாக இருந்தும் முக்கோணத்தின் பிற இரு பக்கங்கள் சமம் அல்ல எதனால்?**

மேலே கூறப்பட்டுள்ள பொதுத்தத்துவத்தின் ஒரு பயன்பாட்டைப் பார்ப்போம். படத்தில் $ABCD$ ஒரு இணைகரம் ஆகும்:




அதாவது, இதில் $AB$, $CD$ எனும் எதிர்பக்கங்களும், $AD$, $BC$ எனும் எதிர்பக்கங்களும் இணைகோடுகள் ஆகும்.

$AC$ எனும் மூலைவிட்டத்தை வரைந்தால் இதை இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்:




$\Delta ABC$, $\Delta ADC$ இவை இரண்டினுடையவும் ஒரு பக்கம் $AC$ ஆகும். அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகுமா?

$AB$, $CD$ எனும் இணைகோடுகள், $AC$ என்ற கோட்டுடன் சேர்ந்துஉருவாக்குகின்றன ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $\angle CAB$ யும் $\angle DCA$ -யும் ஆகும்.

எனவே

$$\angle CAB = \angle DCA$$

இது போன்று

$$\angle ACB = \angle DAC$$

என்றும் காணலாம். (எவ்வாறு?)

அப்படியானால் $\Delta ABC$, $\Delta ADC$ என்பனவற்றில் $AC$ என்ற பக்கமும் அதன் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும், அதாவது

$$AB = CD \qquad AD = BC$$

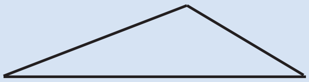
இது எந்த இணைகரத்திற்கும் பொருந்தும் அல்லவா.

**எந்த இணைகரத்திற்கும் எதிர் பக்கங்கள் சமம் ஆகும்**

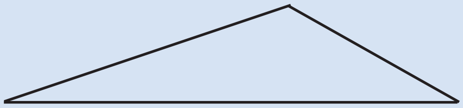
### சரியாகாத பொருத்தம்

ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்கள், மூன்று கோணங்கள் என ஆறு அளவுகள் உள்ளன அல்லவா. இந்த அளவுகளில் குறிப் பிட்ட மூன்று அளவுகள்( மூன்று பக்கங்கள், இரு பக்கங்களும் அவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணமும், ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளில் உள்ள கோணங்களும்) சமமானால் இம் முக்கோணங்கள் சமம் ஆகும் (அதாவது மீதி மூன்று அளவுகளும் சமம்) எனப் பார்த்தோம்.

இனி ஒரு வரைபடத்தாளில் 4, 6, 9 சென்டிமீட்டர் பக்க அளவுகள் உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.



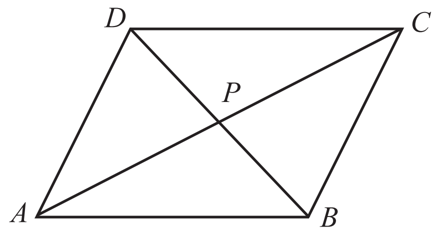
அடுத்து 6, 9, 13.5 சென்டிமீட்டர் அளவுகள் உள்ள வேறொரு முக்கோணம் வரையவும்.



இவற்றின் கோண அளவுகளை அளந்து பார்க்கவும். இரு முக்கோணங்களிலும் கோண அளவுகள் சமம் அல்லவா. (வெட்டி எடுத்த கோணங்கள் ஒவ்வொன்றையும் சேர்த்து வைத்துப் பார்த்தாலும் போதும்).

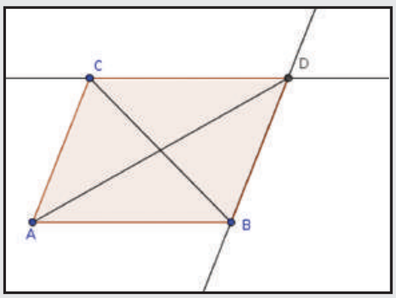
அதாவது, இம் முக்கோணங்களில் மூன்று கோணங்களும், இரண்டு பக்கங்களுமாக ஐந்து அளவுகள் சமம் ஆகும். ஆனால் இம்முக்கோணங்கள் சர்வசமம் அல்ல.

இணைகரத்தில் *DB* எனும் மூலைவிட்டத்தையும் வரையவும். மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியை *P* எனக் கூறலாம்.



**இணைகரம்**

AB, AC எனும் கோடுகள் வரையவும். Parallel Line எடுத்து B வழியாக AC -க்கு இணையாகவும்,C வழியாக AB -க்கு இணையாகவும் கோடுகள் வரையவும் D-னை அடையாளப்படுத்தவும். இணைகரம் ABDC வரைந்து மூலைவிட்டங்கள் வரையவும்.




மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமமாகப் பிரிக்கின்றதா எனப் பார்க்கவும் (Mid Point or Center எடுத்து மூலைவிட்டத்தில் கிளிக் செய்தால் அதன் நடுப் புள்ளி கிடைக்கும்). A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றி வெவ்வேறான இணைகரங்கள் வரையலாம்.

$\Delta APB$, $\Delta CPD$ என்பனவற்றைப் பார்க்கவும். இவற்றில் *AB*, *CD* எனும் பக்கங்கள் சமம் எனப் பார்த்து விட்டோம். அவற்றின் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களோ?

$\angle CAB$, $\angle DCA$ என்பன சமம் எனப் பார்த்தோம்..

அதாவது, $\angle PAB = \angle PCD$

$\angle PBA$, $\angle PDC$ என்பன சமம் ஆகுமா?

*AB*, *CD* எனும் இணைகோடுகளும் *BD* என்ற கோடும் சேர்ந்து உருவாகின்ற ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் அல்லவா இவை. எனவே இவ்விரு கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

அப்படியானால் $\Delta APB$, $\Delta CPD$ என்பனவற்றில் *AB*, *CD* என்ற பக்கங்கள் சமம் ஆகும். இப்பக்கங்களின் இரு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும். ஆகவே அவற்றில் சம கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமம் ஆகும்.

அதாவது, $AP = CP \qquad BP = DP$

வேறொரு முறையில் கூறினால் , *AC*, *BD* என்ற இரு மூலை விட்டங்களினுடையவும் நடுப்புள்ளி *P* ஆகும் .

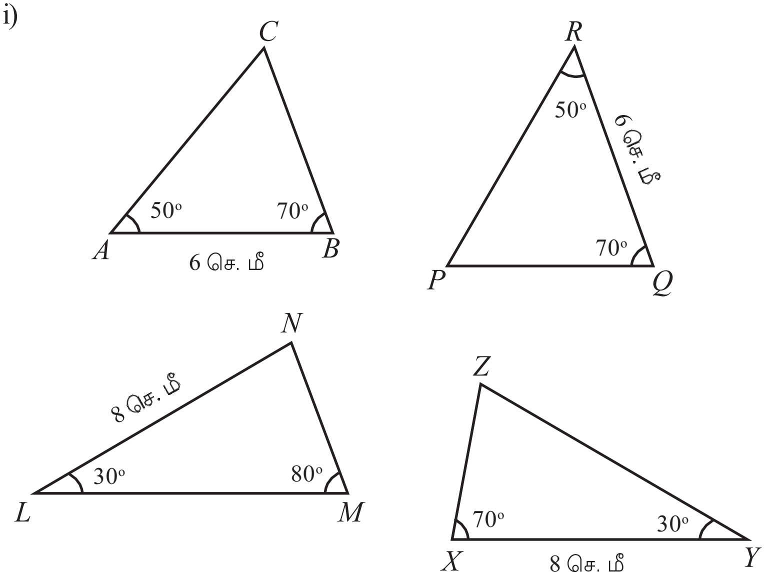
**எந்த ஓர் இணைகரத்திலும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்ற புள்ளி இரு மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளியாகும்.**

இதை வேறொரு முறையில் கூறலாம்

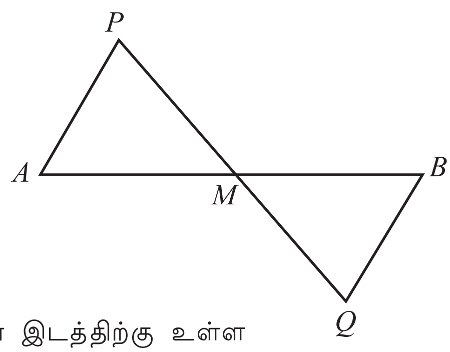
**எந்த ஓர் இணைகரத்திலும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமபாகமாகப் பிரிக்கிறது.**

(1) கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு ஜோடிப் படங்களிலும் முதல் முக்கோணத்தில் உள்ள பக்கங்களுக்குச் சமமான பக்கங்களை இரண்டாவது முக்கோணத்திலிருந்து கண்டுபிடித்து எழுதவும்

i)




(2) படத்தில், $AB$ என்ற கோட்டின் இரு முனைகளிலும் இணையானதும் சமமானதும் ஆன இரு கோடுகள் $AP$, $BQ$ வரையப்பட்டுள்ளன. $PQ$, $AB$ என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும்புள்ளி $M$ ஆகும்

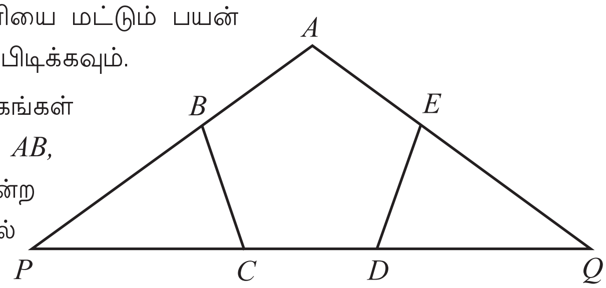



i) $\Delta AMP$ -இன் மூன்று பக்கங்களும் $\Delta BMQ$-இன் பக்கங்களுக்குச் சமம் ஆகுமா? ஏன்?

ii) $AB$ என்ற கோட்டில் $M$ என்ற புள்ளியின் இடத்திற்கு உள்ள சிறப்பியல்பு என்ன?

iii) 5.5 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோடு வரையவும். வடிவியல் பெட்டியில் உள்ள ஒரு செங்கோணமானியை மட்டும் பயன்படுத்தி கோட்டின் நடுப்புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(3) படத்தில் $ABCDE$ என்ற ஐங்கோணத்தின் பக்கங்கள் சமம் ஆகும். கோணங்களும் சமம் ஆகும். $AB$, $AE$ என்ற பக்கங்களை நீட்டியதும் $CD$ என்ற பக்கத்தை நீட்டியதும் $P$, $Q$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.



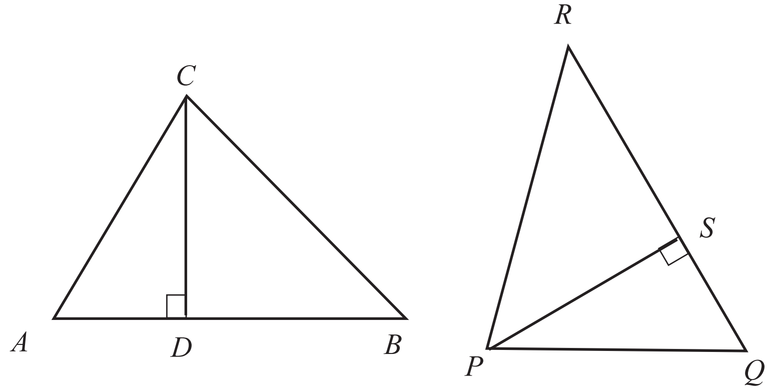

i) $\Delta BPC$ -இன் பக்கங்கள் $\Delta EQD$ இன் பக்கங்களுக்குச் சமம் ஆகுமா? எதனால்?

ii) $\Delta APQ$ இன் $AP$, $AQ$ என்னும் பக்கங்கள் சமம் ஆகுமா? எதனால்?

(4) படத்தில் உள்ள $\Delta ABC$, $\Delta PQR$ என்பனவற்றில்

$$AB = QR \qquad BC = RP \qquad CA = PQ$$

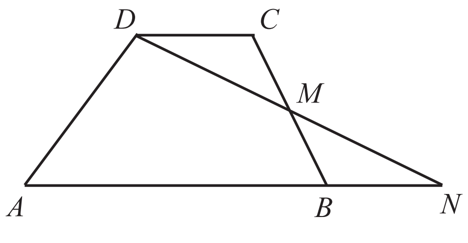
என உள்ளன.




i) $CD$, $PS$ என்பன சமம் ஆகுமா? எதனால்?

ii) $\Delta ABC$, $\Delta PQR$ ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

(5) படத்தில் உள்ள $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $AB$, $CD$ என்பன இணையாகும்; $BC$ என்ற பக்கத்தின் நடுப்புள்ளி $M$ ஆகும்.




$DM$, $AB$ என்ற கோடுகளை நீட்டும் போது $N$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

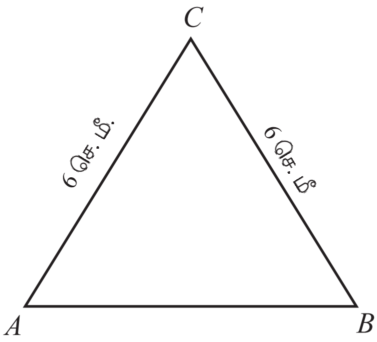
i) $\Delta DCM$, $\Delta BMN$ என்பனவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம் ஆகுமா? எதனால்?

ii) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் பரப்பளவிற்கும், $ADN$ என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும் என்ன தொடர்பு?

(6) ஒரு செவ்வகத்தின் இரு மூலைவிட்டங்கள் சமம் ஆகுமா? எதனால்?

## இருசமபக்க முக்கோணங்கள்

இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்.

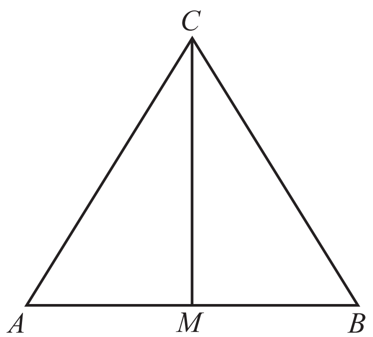



இதன் இரு பக்கங்கள் சமம் ஆகும். கீழே உள்ள கோணங்களும் சமம் என்று தோன்றுகிறது அல்லவா?

இத்தகைய ஒரு முக்கோணத்தை வெட்டி எடுத்து சமபக்கங்கள் சேர்ந்திருக்கும் விதத்தில் நடுவில் மடித்துப் பார்க்கவும். கீழே உள்ள கோணங்கள் சரியாகச் சேர்ந்திருக்கின்றன அல்லவா?

கோணங்கள் சமம் ஆவதற்கு உரிய காரணம் என்ன?

மடித்துள்ள பகுதியைப் படத்தில் வரைந்து பார்க்கவும். அதாவது மேல் உச்சியையும் கீழ்ப் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கவும்



min = 3, max = 15 ஆகுமாறு a என்ற ஸ்லைடர் உருவாக்கவும். நீளம் 6 ஆகுமாறு AB என்ற கோடு வரையவும். A, B என்பன மையப் புள்ளியாகவும் ஆரம் a எனவும் எடுத்து இரு வட்டங்கள் வரைந்து அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியை C என அடையாளப்படுத்தவும். ΔABC வரையவும். இனி வட்டங்களை மறைக்கவும். a -இன் விலை மாறுவதற்கு ஏற்ப வெவ்வேறான முக்கோணங்கள் கிடைக்கிறது அல்லவா. இம்முக்கோணங்கள் அனைத்திலும் இரு பக்கங்கள் சமம் ஆகும். அப்படியானால் கோணங்களோ? a = 6 ஆகும்போது கோணங்கள் எவ்வளவு?

இப்பொழுது *AMC, BMC* என இரு முக்கோணங்கள் ஆனது.

இவற்றில் *AC, BC* என்னும் பக்கங்கள் சமம் ஆகும்.

*M* என்பது, *AB* -இன் நடுப்புள்ளி ஆனதால் *AM, BM* என்பனவும் சமம் ஆகும். இருமுக்கோணங்களிலும் மூன்றாவது பக்கம் *CM* ஆகும்.

இரு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் எல்லாம் சமம் ஆனதால். சமபக்கங் களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

அப்படியானால் இரு முக்கோணங்களிலும் *CM* என்ற பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள $\angle A$, $\angle B$ என்பன சமம் ஆகும்.

இதை ஒரு பொதுத்தத்துவமாக எழுதலாம்:

**ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் சமமெனில் அப்பக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும்.**

இங்கே மற்றொரு கருத்தையும் காணலாம் படத்தில் உள்ள $\Delta AMC$, $\Delta BMC$ ஆகியவற்றின் சமபக்கங்களான *AC, BC* என்பனவற்றிற்கு எதிரே உள்ள $\angle AMC$, $\angle BMC$ என்பவையும் சமம் ஆகும்.

இவ்விரு கோணங்களும் $CM$ என்ற கோட்டின் இரு பக்கங்களில் உள்ள கோணங்கள் ஆனதால் அவற்றின் தொகை $180°$ ஆகும்.

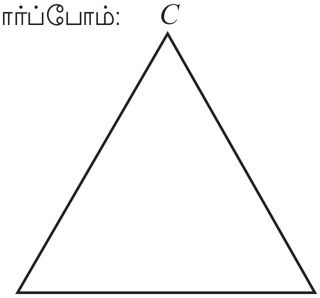
அப்படியானால், இந்தக் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் $90°$ ஆகும்.

அதாவது, $CM$ என்ற கோடு $AB$ க்குச் செங்குத்தாகும்.

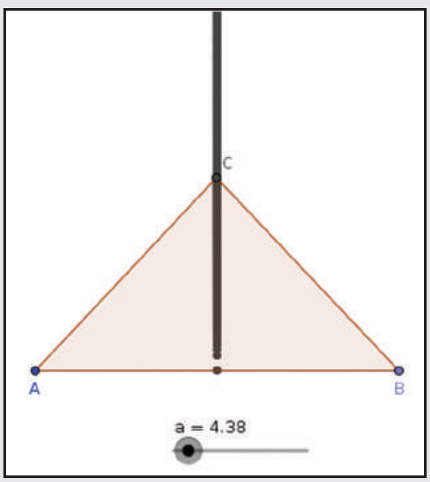
இனி வேறொரு சிந்தனை: முதலில் கூறிய பொதுத்தத்துவத்தைத் திருப்பிக் கூறினால் சரியாகுமா?

அதாவது, ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் சமமெனில் அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள் சமம் ஆகுமா?

ஒரு படத்தை வரைந்து பார்ப்போம்:

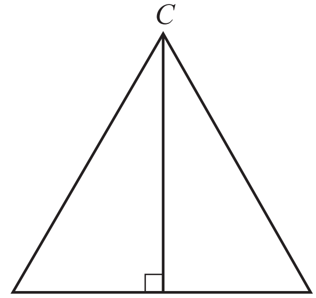


முன் பக்கத்தில் உள்ள ஜியோஜிப்ரா செயல்பாட்டில் C என்ற புள்ளிக்கு Trace On கொடுக்கவும். C போகும் பாதையைக் கவனிக்கவும்.




$\Delta ABC$ -இல் $\angle A = \angle B$ ஆகும். $AC = BC$ ஆகுமா என்பதே வினா.

முன்னர் செய்தது போன்று $\Delta ABC$ -னை இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கவும். இங்கு $C$ யையும் $AB$ -இன் நடுப்புள்ளியையும் இணைப்பதற்குப் பதிலாக, $C$ - யிலிருந்து $AB$ -க்குச் செங்குத்து வரைவது எளிதாகும்.




$\Delta APC$, $\Delta PBC$ என்ற இரண்டினுடையவும் ஒரு பக்கம் $CP$. அதன் $P$ என்ற முனையில் உள்ள கோணங்கள் செங்கோணங்கள் ஆகும்.

பிற முனையில் உள்ள கோணங்களோ?

$\angle A = \angle B$ என அறிந்துள்ளோம்.

$\angle APC = 90° = \angle BPC$ என்றும் அறிந்துள்ளோம்.

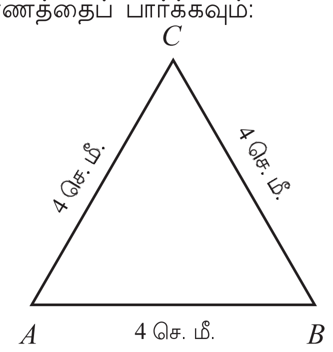
அப்படியானால் மூன்றாவது கோணங்களான $\angle ACP$, $\angle BCP$ என்பனவும் சமம் ஆக வேண்டும் அல்லவா. (எதனால்?)

ஆக இரு முக்கோணங்களிலும் ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளில் உள்ள கோணங்களும் சமம் எனக் கிடைத்தது, அப்படியானால் சமகோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களும் சமம் அல்லவா. அதனால் $AC$, $BC$ என்பன சமம் எனக் கிடைக்கிறது.

**ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் சமமெனில் இக்கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களும் சமம் ஆகும் .**

இரு பக்கங்கள் சமமான முக்கோணம் இருசமபக்க முக்கோணம் (isosceles triangle) என்று அழைக்கப்படுகிறது இங்கே நாம் கண்ட தத்துவத்திற்கு ஏற்ப இரு கோணங்கள் சமமான முக்கோணங்களும் இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.

இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



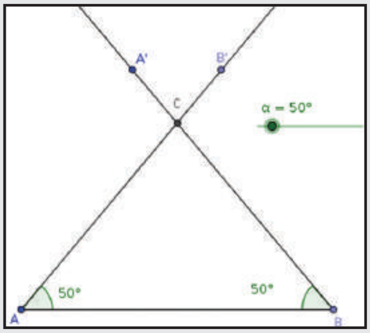

மூன்று பக்கங்களும் சமமான முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இரு சமபக்க முக்கோணங்களின் கூட்டத்தில் உள்ள தனித்தன்மை மிக்க ஒரு வகையே சமபக்க முக்கோணம் (equilateral triangle).

படத்தில் உள்ள $\Delta ABC$ இல் $AC = BC$ ஆனதால் இந்தப் பக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள $\angle B$, $\angle A$ என்பன சமம் ஆகும். மேலும் $AB = AC$ ஆனதால் அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள $\angle C$, $\angle B$ என்பனவும் சமம் ஆகும். ஆகையால் இந்த முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் சமம் ஆகும். கோணங்களின் தொகை $180°$ ஆனதால் ஒவ்வொரு கோணமும் $180° \div 3 = 60°$ என்றும் காணலாம்.

**எந்த ஒரு சமபக்க முக்கோணத்திலும் கோணங்கள் எல்லாம் 60° ஆகும்**

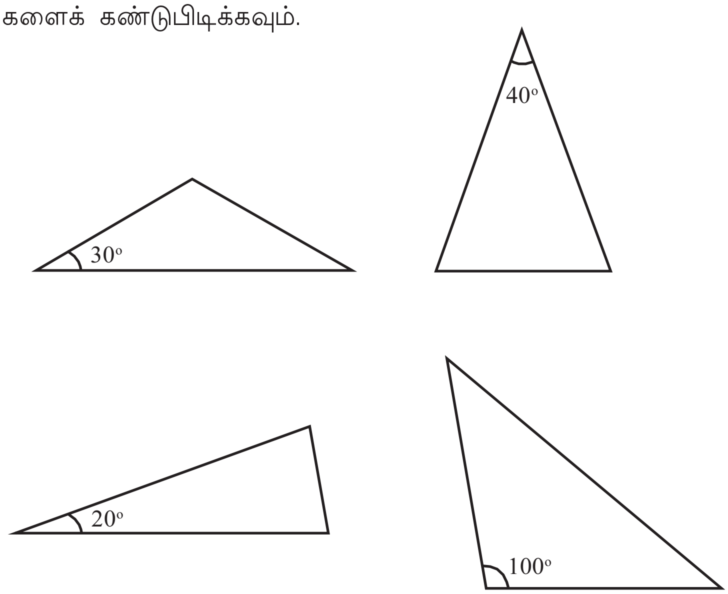
மாறாக, ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் எல்லாம் $60°$ ஆகுமெனில் அது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்(விளக்கலாமா?)

Slider எடுத்து அதில் Angle -ஐக் கிளிக் செய்தால் $\alpha$ என்று கிடைக்கும். min = $0°$, max = $90°$ என்று எடுக்கவும் நீளம் 6 ஆகுமாறு AB என்ற கோடு வரையவும். $\angle A = \angle B = \alpha$ ஆகும் விதத்தில் கோடுகள் வரைந்து வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி C-னை அடையாளப்படுத்துக. $\Delta ABC$ வரையவும்.




மேலும் $A'C$, $B'C$ என்னும் கோடுகளையும் $A'$, $B'$ என்னும் புள்ளிகளையும் மறைத்து வைக்கலாம் $\alpha$ மாறுவதற்கு ஏற்ப முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மாறுவதைப் பார்க்கவும். $\alpha = 60°$ ஆகும் போது முக்கோணத்தின் சிறப்பியல்பு என்ன? $45°$ ஆகும் போதோ?

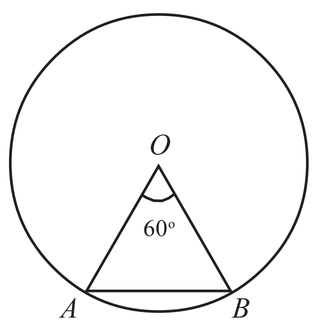
(1) கீழே பல இருசமபக்க முக்கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு கோணம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பிற கோணங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.




(2) ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் 120° ஆகும். பிற இரு கோணங்கள் எவை?

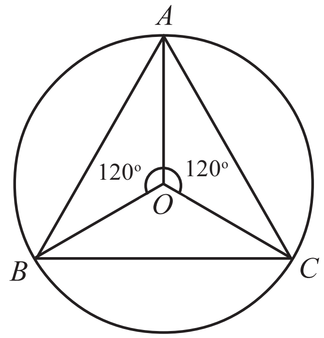
(3) ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் 90° ஆகும். அதன் பிற இரு கோணங்கள் எவை?

(4) படத்தில் $O$ வட்டமையம், $A$, $B$ என்பன வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.



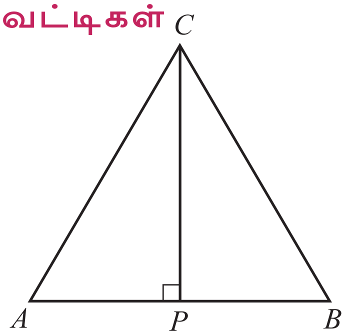

$\angle A$, $\angle B$ என்பனவற்றைக் காணவும்.

5. படத்தில் $O$ வட்டமையம், $A, B, C$ என்பன வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.




$\Delta ABC$ -இன் கோணங்கள் எவை?

## இருசமவெட்டிகள்




இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்:

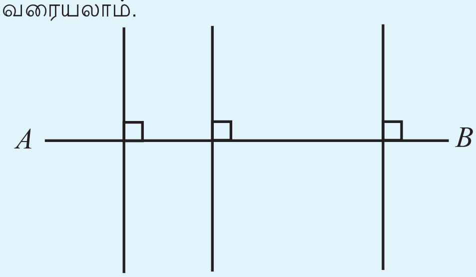
$\Delta ABC$ -இல் $AC$, $BC$ என்பன சமம் ஆகும்; $C$ யிலிருந்து $AB$-க்குள்ள செங்குத்தாகும் $CP$.

இதில் $\Delta APC$, $\Delta BPC$ என்பனவற்றின் பக்கங்களும் கோணங்களும் சமம் எனப் பார்த்தோம். ஆகவே $AP$ -யும் $BP$ -யும் சமம் ஆகும். அதாவது, $AB$ -னை $CP$ சமபாகமாகப் பிரிக்கிறது.

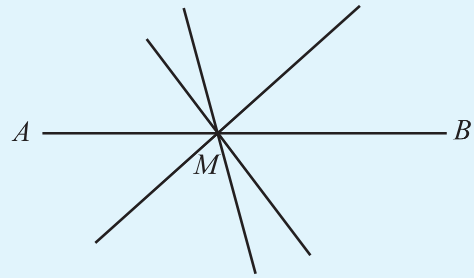
மேலும் $\angle ACP$, $\angle BCP$ என்பனவும் சமம் ஆகும். ஆகவே $CP$ எனும் கோடு, $\angle C$ -னைச் சமபாகமாகப் பிரிக்கிறது என்று கூறலாம்.

### மையக் குத்துக்கோடு

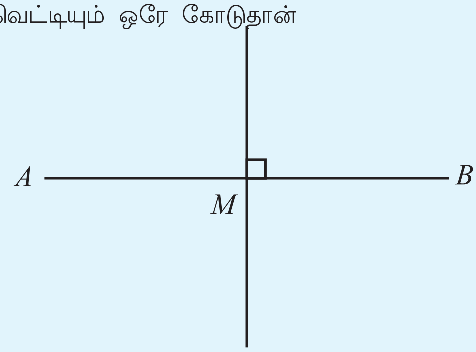
ஒரு கோட்டிற்கு அநேகம் செங்குத்துகள் வரையலாம்.




ஒரு கோட்டிற்கு அநேகம் இருசம வெட்டிகளும் வரையலாம்.




இந்த கோட்டிற்கு செங்குத்தும், இருசம வெட்டியும் ஒரே கோடுதான்

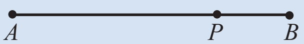



**ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தில். சமபக்கங்கள் சேர்கின்ற உச்சியிலிருந்து எதிர் பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்து, இந்த உச்சியில் உள்ள கோணத்தையும் எதிர் பக்கத்தையும் சமபாகமாகப் பிரிக்கின்றது.**

ஒரு கோட்டினையோ கோணத்தையோ சமபாகம் செய்யும் கோட்டிற்கு இரு சமவெட்டி (bisector) என்பர். அப்படியானால் மேலே உள்ள படத்தில் $CP$ என்ற கோடு $AB$, $\angle C$ -இன் இரு சமவெட்டி ஆகும். இது $AB$ -க்குச் செங்குத்தும் ஆவதால் இதை $AB$ -இன் மையக்குத்துக் கோடு (perpendicular bisector) என்று கூறலாம்.

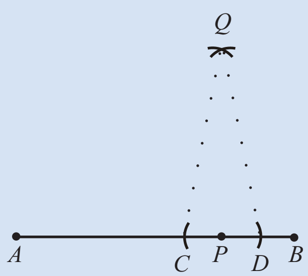
## உள்ளேயிருந்து ஒரு செங்குத்து

ஒரு கோட்டில் குறிப்பிட்ட ஒரு இடத்திலிருந்து செங்குத்து வரைவது எவ்வாறு?

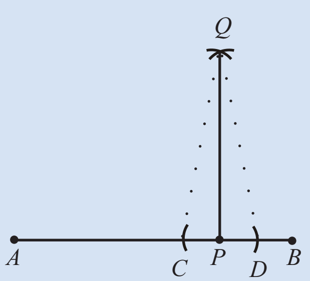



முதலில் $P$-யிலிருந்து சமதொலைவில் $AB$-யில் இரு புள்ளிகள் $C$, $D$ என அடையாளப்படுத்தவும்.

இனி $C$ , $D$ யிலிருந்து சமதொலைவில் $Q$-னை அடையாளப்படுத்தவும்.

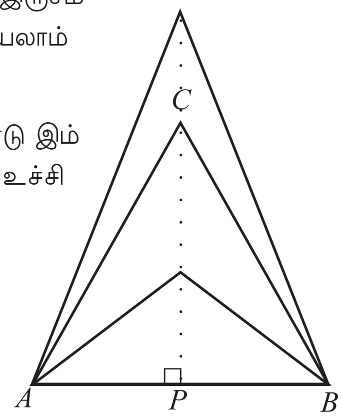



$\Delta CQD$ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் அல்லவா. எனவே $QP$ எனும் கோடு $CD$-க்குச் செங்குத்தாகும். $CD$ எனும் கோடு $AB$ என்ற கோட்டின் ஒரு பகுதி என்பதால் $QP$ எனும் கோடு $AB$ -க்குச் செங்குத்தாகும்.




இதை வேறுவிதமாகவும் கூறலாம்: $AB$ -இன் மையக்குத்துக் கோடு $C$ வழியாகச் செல்கிறது..

$AB$ -க்கு மேலே மற்றும் பல இருசம பக்க முக்கோணங்கள் வரையலாம் அல்லவா.

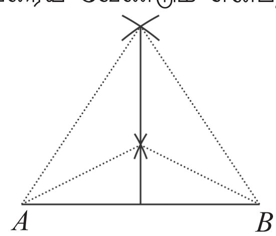



$AB$ -இன் மையக்குத்துக் கோடு இம் முக்கோணங்களின் மேல் உச்சி வழியாகக் கடந்து செல்கிறது.

ஆகவே $AB$ -இன் மையக்குத்துக் கோடு வரைவதற்கு இம்முக்கோணங்களின் மேல் உச்சிகளையெல்லாம் இணைத்து $AB$ வரை நீட்டினால் போதும்

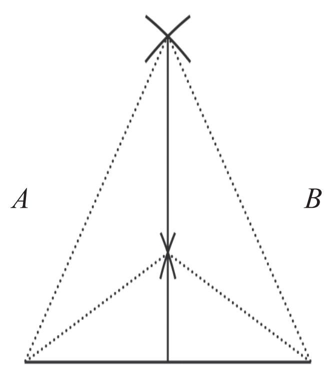
ஒரு கோடு வரைவதற்கு இரு புள்ளிகள் போதுமா?

அப்படியானால் மையக்குத்துக்கோடு வரைவதற்கு இது போன்ற இரு முக்கோணங்கள் போதும். முக்கோணங்களை முழுமையாக வரைய வேண்டும் என்பதில்லை.



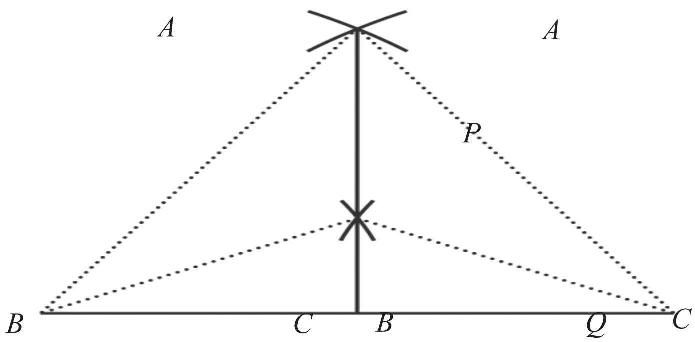

முக் கோணங்களின் மேல் உச்சிகளை மட்டும் அடையாளப்படுத்தினால் போதும், அதாவது, $A$ -யிலிருந்தும், $B$-யிலிருந்தும் சமதொலைவில் இரு புள்ளிகள்.

கீழ்நோக்கி நீட்டி வரைய வேண்டுமெனில் இப்படியும் வரையலாம்:



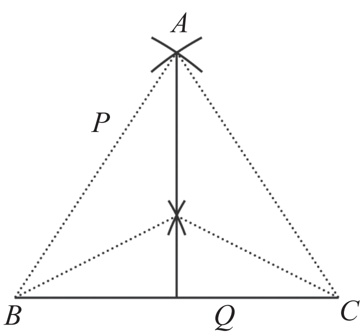
ஒரு கோணத்தின் இரு சமவெட்டி வரைவதற்கும் இதே தத்துவத்தைப் பயன் படுத்தலாம்

முதலில் இந்தக் கோணம் உட்படுமாறு ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் வரைய வேண்டும்




இனி $\Delta PBQ$ -இல் $PQ$ என்ற பக்கத்திற்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைந்தால் போதும் அல்லவா.

நாம் வரைய வேண்டிய மையக்குத்துக்கோடு $B$ வழியாகச் செல்லும் அல்லவா. (ஏன்?) அப்படியானல் இந்த இருசமவெட்டியில் மேலும் ஒரு புள்ளியை அடையாளப் படுத்தினால் போதும்.



(1) 6.5 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோடு வரைந்து அதற்கு மையக்குத்துக்கோடு வரைக.

(2) 3.75 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள பக்கங்களைக் கொண்ட சதுரம் வரைக.

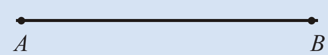
(3) $75^{\circ}$ அளவில் ஒரு கோணம் வரைந்து அதன் இருசமவெட்டி வரைக

(4) 2.25 சென்டிமீட்டர் ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரைக.

(5) $AB = 6$ சென்டிமீட்டர், $\angle A = 22\frac{1}{2}^{\circ}$, $\angle B = 67\frac{1}{2}^{\circ}$ எனும் அளவுகளில் $\Delta ABC$ வரைக.

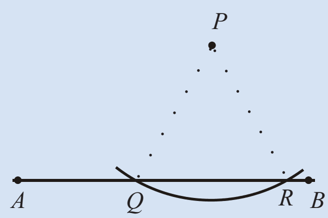
## வெளியிலிருந்து ஒரு செங்குத்து

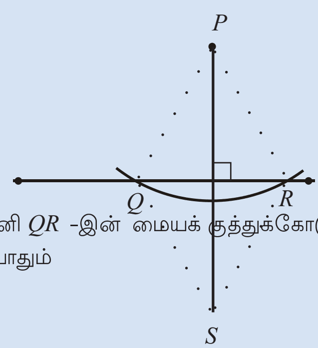
ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து காம்பசைப் பயன்படுத்தி செங்குத்து வரையலாம். கோட்டில் இல்லாத ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோட்டிற்குச் செங்குத்து வரைவது எப்படி? • $P$




அதற்கு $P$ மேல்உச்சி ஆகவும் அடிப்பக்கம் $AB$ என்ற கோட்டிலும் அமையுமாறு ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் வரையவும். அதற்கு $P$ யிலிருந்து சம தொலைவில் இரு புள்ளிகளை $AB$ -இல் அடையாளப்படுத்தினால் போதும் அல்லவா.

$P$ மையமாக வருகின்ற ஒரு வட்டம் வரைந்து $AB$-னை $Q$, R புள்ளிகளில் வெட்டவும்.



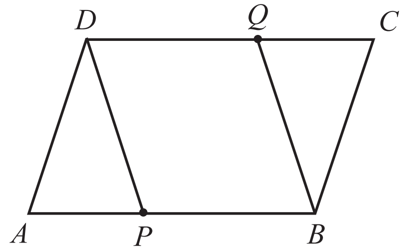

இனி $QR$ -இன் மையக் குத்துக்கோடு வரைந்தால் போதும்

(6) ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் பக்கங்கள் அனைத்திற்கும் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரையவும். இவையெல்லாம் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வது ஒரே புள்ளியிலா?

(7) ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் கோணங்கள் அனைத்திற்கும் இருசமவெட்டி வரையவும். இவையெல்லாம் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வது ஒரே புள்ளியிலா?

(8) ஒரு நாற்கரத்தின் இரு ஜோடி எதிர்பக்கங்களும் சமமெனில் அது ஓர் இணைகரம் என நிரூபிக்கவும்.

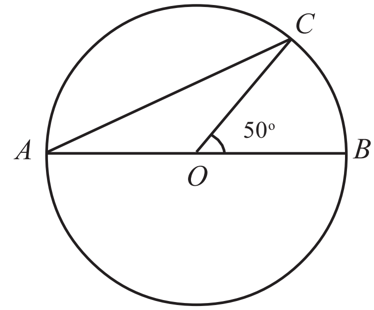
(9) $ABCD$ எனும் இணைகரத்தில் $AP = CQ$ ஆகும்.




$PBQD$ எனும் நாற்கரம், இணைகரம் என நிரூபிக்கவும்.

(10) ஓர் இணைகரத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் சமமெனில் ஒரு மூலைவிட்டம் அடுத்த மூலைவிட்டத்தின் மையக்குத்துக்கோடு என நிரூபிக்கவும்.

(11) படத்தில் $O$ வட்டமையமும் $AB$ விட்டமும் ஆகும். $C$ வட்டத்தின் ஒரு புள்ளி ஆகும்.




i) $\angle CAB$ -ஐக் கணக்கிடவும்

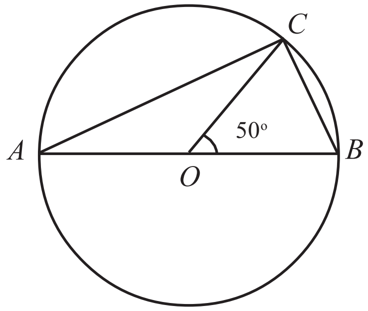
ii) $\angle COB$ இன் அளவை வேறு ஏதேனும் எண்ணாக மாற்றிய பின்னர் இந்தப் படத்தை அதற்கு ஏற்ப வரையவும் அப்படத்தில் $\angle CAB$-ஐக் கணக்கிடவும்

### கயிறும் கணிதமும்

பழங்கால வடிவியலின் அடிப்படை நூலான 'எலமென்ஸ்' பற்றிக் கேட்டிருக்கிறீர்கள் அல்லவா. இதில் கோடுகளையும் வட்டங்களையும் பயன்படுத்தி வரையக் கூடிய வடிவங்களை மட்டுமே யூக்ளிட் எடுத்துள்ளார். வேறொரு முறையில் கூறினால் நீளத்தை அடையாளப்படுத்தாத நேரான ஒரு கம்பும் (straight- edge) காம்பசும் பயன்படுத்தி வரையக் கூடிய வடிவங்கள் மட்டும். எதனால் இப்படி?

பழங்காலங்களில் நீளம் அளப்பதற்கும் வரைவதற்கும் நூல் அல்லது கயிறே பயன்படுத்தப்பட்டது. கயிறைப் பயன்டுத்தி வரைய முடிவது கோடும் வட்டமும் ஆகும். இரு கம்புகளின் இடையே கயிற்றை இழுத்துக் கட்டினால் கோடு உண்டாகிறது. ஒரு கம்பை மாற்றிவிட்டு கயிற்றைச் சுற்றிலுமாகச் சுழற்றினால் வட்டம் ஆகிறது. பல்வேறு வடிவங்கள் வரைவதற்கு உரிய கருவிகளை உருவாக்க இயலுகின்ற இன்று இத்தகைய உருவாக்குதல்களுக்கு வரலாறு சார்ந்ததும் சித்தாந்தம் சார்ந்ததுமான முக்கியத்துவமே உள்ளது.

(12) படத்தில் $O$ வட்டமையமும் $AB$ விட்டம் ஆகும்.
$C$ வட்டத்தில் உள்ள புள்ளி ஆகும்.




i) $\angle ACB$ -ஐக் கணக்கிடவும்.

ii) $\angle COB$ இன் அளவை வேறு ஏதேனும் அளவாக மாற்றிய பின்னர் இப்படத்தை அதற்கு ஏற்ப வரையவும். அந்தப் படத்தில் $\angle ACB$-ஐக் கணக்கிடவும்.

**எந்த ஒரு வட்டத்திலும் ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளை வட்டத்தில் உள்ள மற்றொரு புள்ளியுடன் இணைக்கும் போது உருவாகும் கோணம் என்ன?**

(13) ஒரு கோணம் $50^{\circ}$ -யும் ஒரு பக்கம் 7 சென்டிமீட்டர் என எத்தனை மாறுபட்ட இருசமபக்க முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

(14) $AB = 7$ சென்டிமீட்டர், $\angle A = 67\frac{1}{2}^{\circ}$, $\angle B = 15^{\circ}$ என்ற அளவுகள் கொண்ட முக்கோணத்தைக் கோணமானியை உபயோகிக்காமல் வரையவும்.

ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு பக்கங்கள் மற்றொரு நாற்கரத்தின் நான்கு பக்கங்களுக்குச் சமமெனில், இரு நாற்கரங்களின் கோணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டுமா?

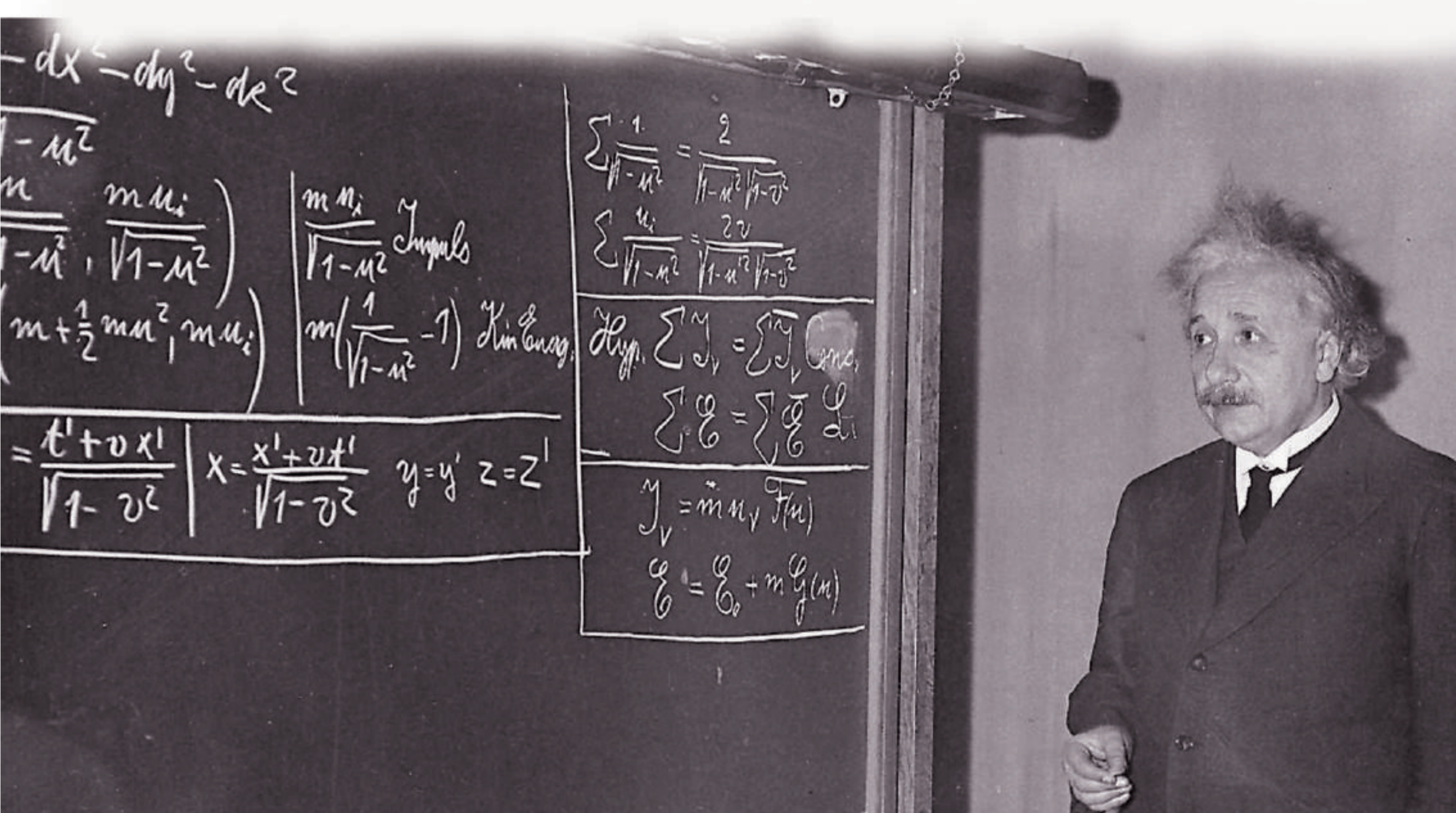
படங்கள் வரைந்து பரிசோதிக்கவும். நாற்கரத்தின் நான்கு பக்கங்களுக்கு மேலாக வேறு ஏதேனும் நீளங்கள் சமமெனில் கோணங்கள் சமம் ஆகுமா?

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | எனக்கு இயலும் | ஆசிரியரின் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்படுத்த வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • இரு முக்கோணங்களின் சில அளவுகள் சமமெனில் பிற அளவுகளும் சமமாகின்ற பல்வேறு சூழல்களை விளக்குதல் | | | |
| • முக்கோணங்களைப் பற்றிய இத்தகைய தத்துவங்களிலிருந்து பிற வடிவியல் தத்துவங்களை உருவாக்குதல். | | | |
| • கோட்டின் மையக்குத்துக்கோடும், கோணத்தின் இருசமவெட்டியும் வரைவதற்கான பல்வேறு வழிமுறைகளை விளக்குதல். | | | |
| • கோட்டிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து செங்குத்து வரைவதற்கும், கோட்டிற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து செங்குத்து வரைவதற்கும் உள்ள வழிமுறைகளை விளக்குதல். | | | |

# 2

# சமன்பாடுகள்



## கூட்டலும் கழித்தலும்

சுஹறா பணப்பெட்டியைத் திறந்து எண்ணிப் பார்க்கிறாள். "எவ்வளவு ரூபாய் இருக்கிறது?", அம்மா கேட்டாள். . "ஏழு ரூபாய் தந்தால் ஐம்பது ரூபாய் ஆகும்", சுஹறா அவளின் எண்ணத்தைக் கூறினாள்.

சுஹறாவின் பணப்பெட்டியில் எவ்வளவு ரூபாய் உள்ளது?

7 ரூபாய் கூட்டினால் 50 ரூபாய் ஆகும். எனில் பெட்டியில் உள்ளது 50 -ஐ விட 7 குறைவு: 50 – 7 = 43.

உண்ணி விஷூ கைநீட்டம் கிடைத்ததிலிருந்து எட்டு ரூபாய் எடுத்து ஒரு பேனா வாங்கினான். நாற்பத்திரண்டு ரூபாய் மீதம் உள்ளது. எவ்வளவு ரூபாய் கைநீட்டம் கிடைத்தது?

8 ரூபாய் குறைந்த போது 42 ரூபாய் ஆனதெனில். எனில் கைநீட்டம் கிடைத்தது, 42 -ஐ விட 8 கூடுதல்: 42 + 8 = 50.

(1) இராஜன் தனக்கு ஆறு மதிப்பெண்கள் கூடுதலாகக் கிடைத்திருந்தால் கணக்குத் தேர்வில் நூறு மதிப்பெண்கள் கிடைத்திருக்குமே என வருத்தப்பட்டான். இராஜனுக்கு எவ்வளவு மார்க் கிடைத்தது?

(2) புத்தகம் வாங்க லிஸிக்கு 60 ரூபாய் அம்மா கொடுத்தார். லிஸி புத்தகம் வாங்கிய பிறகு 13 ரூபாய் திருப்பிக் கொடுத்தாள் எவ்வளவு ரூபாய்க்குப் புத்தகம் வாங்கினாள்?

(3) கோபாலன் ஒரு பழக்குலை வாங்கினான். கெட்டுப்போன 7 பழத்தை மாற்றியபோது எண்ணிக்கையில் 46 இருந்தன. குலையில் எவ்வளவு பழம் இருந்தன?

(4) விமலா 163 ரூபாய்க்குப் பொருட்கள் வாங்கினாள். 217 ரூபாய் மீதம் உள்ளது. எவ்வளவு ரூபாய் கையில் இருந்தது?

(5) ஓர் எண்ணுடன் 254 -ஐ கூட்டியபோது 452 ஆனதெனில் எண் எது?

(6) ஓர் எண்ணிலிருந்து 198 குறைந்த போது 163 ஆனது. எனில் எண் எது?

## பெருக்கலும் வகுத்தலும்

ஒரு சேமிப்புத் திட்டத்தில் ஆறு ஆண்டுகளில் சேமிப்புத் தொகை இரு மடங்கு ஆகும். கடைசியில் பத்தாயிரம் ரூபாய் கிடைக்க வேண்டுமெனில் இப்பொழுது எவ்வளவு ரூபாய் போடவேண்டும்?

செலுத்திய தொகையின் இருமடங்கு 10000; எனில் 10000 -என்பதன் பாதி 5000.

காய்கறி வியாபாரத்தில் கிடைத்த இலாபத்தை நான்கு பேர் சமமாகப் பங்கிட்ட போது ஜோசுக்கு ஆயிரத்திஐநூறு கிடைத்தது. மொத்தம் எவ்வளவு ரூபாய் இலாபம் கிடைத்தது?

இலாபத்தின் $\frac{1}{4}$ பாகம் 1500 . எனில் மொத்த இலாபம் 1500 இன் 4 மடங்கு:
$1500 \times 4 = 6000.$

(1) ஒரு நிறுவனத்தில் மேலாளரின் சம்பளம் பியூனின் சம்பளத்தின் ஐந்து மடங்கு ஆகும். மேலாளருக்கு மாதம் 40000 ரூபாய் கிடைக்கிறது எனில் பியூனுக்கு மாதம் எவ்வளவு ரூபாய் கிடைக்கும்?

(2) ஒரு சுற்றுலாவிற்குச் சென்றவர்கள் செலவான 5200 ரூபாயைச் சமமாகப் பங்கிட்டார்கள். ஒவ்வொருவரும் 1300 ரூபாய் கொடுத்தார்கள். எனில் சுற்றுலா சென்றவர்கள் எத்தனைப் பேர்?

(3) ஓர் எண்ணை 12 ஆல் பெருக்கிய போது 756 கிடைத்தது எனில் பெருக்கப்பட்ட எண் எது?

(4) ஓர் எண்ணை 21 -ஆல் வகுத்த போது 756 கிடைத்தது எனில் வகுக்கப்பட்ட எண் எது?

## பலவகை மாற்றங்கள்

இந்தக் கணிதச் செயலைப் பாருங்கள்:

> இரண்டு நோட்டுப் புத்தகங்களும் மூன்று ரூபாய் விலை உள்ள ஒரு பேனாவும் வாங்கிய போது 23 ரூபாய் செலவானது. ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை என்ன?

இவ்வாறு சிந்திப்போம். 3 ரூபாய் விலையில் பேனா வாங்கிய போதுதான் 23 ரூபாய் ஆனது. பேனா வாங்காமலிருந்தால்?

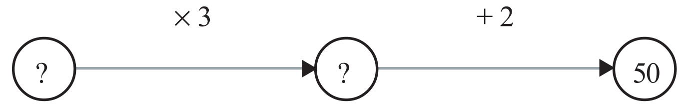
20 ரூபாய் தான் ஆகி இருக்கும்.

இந்த 20 ரூபாய் இரண்டு நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலை அல்லவா. அப்படியானால் ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை 10 ரூபாய் இனி திருப்பிப் பார்ப்போமா? 10 ரூபாய் விலை உள்ள இரண்டு நோட்டுப் புத்தகங்களுக்கு 20 ரூபாய், பேனாவிற்கு 3 ரூபாய்; மொத்தம் 23 ரூபாய்.

இந்தக் கணிதச் செயலைப் பார்க்கவும்:

> ஓர் எண்ணின் மூன்று மடங்குடன் இரண்டைக் கூட்டிய போது 50 கிடைத்தது. எண் எது?

தெரியாத எண்ணை முதலில் 3 -ஆல் பெருக்கி பின்னர் 2 கூட்டிய போது 50 ஆனது.




திருப்பிக் கூறினால் தொடக்க எண் கிடைக்க என்னென்ன செய்யவேண்டும்?

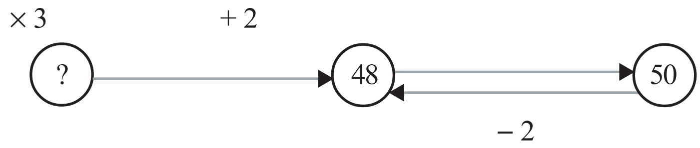
## எதிர்மறை செயல்

ஓர் எண்ணுடன் 2 -ஐ கூட்டிய போது தொகை தெரியுமெனில் எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க 2 கழிக்க வேண்டும். எண்ணிலிருந்து 2-னைக் கழித்த போது தெரியுமெனில்? எண் கண்டுபிடிக்க 2 -னைக் கூட்ட வேண்டும். இது போன்று எண்ணை 2-ஆல் பெருக்கிய பெருக்கல் பலனிலிருந்து எண் கிடைக்க 2 -ஆல் வகுக்கவும், 2 ஆல் வகுத்த பலனிலிருந்து எண் கிடைக்க 2 -ஆல் பெருக்குவது அல்லவா செய்ய வேண்டும்.

இந்திய கணிதமேதை பாஸ்கராச்சாரியர் தன்னுடைய **லீலாவதி** என்ற புத்தக்கத்தில் இதை விவாதித்துள்ளார். எதிர்மறையான செயல் முறை என அவர் சுட்டுகின்ற இம்முறையில் சொல்லப்பட்டிருப்பது இவ்வாறாகும். .

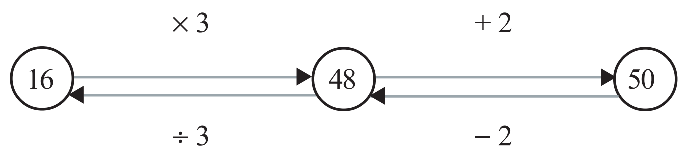
*“விடைதெரியுமெனில் எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க வகுத்தலைப் பெருக்கல் ஆக்குக. பெருக்கலை வகுத்தல் ஆக்குக. வர்க்க மூலத்தை வர்க்கம் ஆக்குக. குறை எண்ணை மிகை எண் ஆக்குக. மிகை எண்ணைக் குறை எண் ஆக்குக.”*

கடைசியாக 2 -ஐ கூட்டிய போது 50 கிடைத்தது. எனில் அதற்கு முன் $50 - 2 = 48$ ஆகும்.




இனி 48 -லிருந்து தொடக்க எண்ணைச் சென்றடைவது எப்படி?

3 -ஆல் பெருக்கிய போது தான் 48 ஆனதெனில். தொடக்க எண் $48 \div 3 = 16$.

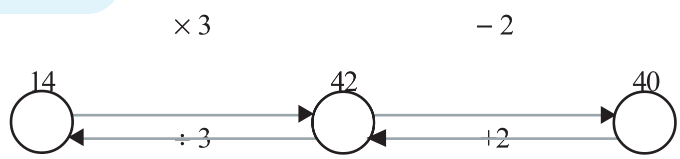



இப்பொழுது செய்த கணிதச் செயலை இப்படி மாற்றுவோமா?

ஓர் எண்ணின் மூன்று மடங்கிலிருந்து இரண்டைக் கழித்த போது 40 ஆனதெனில் எண் எது?

இங்கு கடைசியில் 2 -ஐ கழிப்பதற்கு முன் எண் $40 + 2 = 42$;

இது, 3 ஆல் பெருக்கிய போது கிடைத்தது. அப்படியானால் அதன் முன்னர் $42 \div 3 = 14$. அதாவது தொடக்க எண் 14.




வேறொரு கணிதச் செயலைப் பார்ப்போம்:

ஓர் எண்ணுடன் அதன் நான்கில் ஒரு பாகத்தைக் கூட்டிய போது 30 கிடைத்தது. எண் எது?

ஓர் எண்ணுடன் அதன் நான்கில் ஒன்றைக் கூட்டும் போது எண்ணின் $\frac{5}{4}$ மடங்கு அல்லவா கிடைக்கின்றது. அதாவது எண்ணின் $\frac{5}{4}$ மடங்கு 30 ஆகுமெனில் எண் 30 -இன் $\frac{4}{5}$ பாகம் ஆகும்.

அதாவது, $30 \times \frac{4}{5} = 24$

(1) அனிதாவும் தோழிகளும் பேனா வாங்கினார்கள். மொத்தமாக ஐந்து பேனாக்கள் வாங்கிய போது மொத்த விலையிலிருந்து மூன்று ரூபாய் குறைவாகக் கிடைத்தது. அவர்களுக்கு 32 ரூபாய் செலவானது. தனித்தனியாக வாங்கியிருந்தால் எவ்வளவு ரூபாய் வீதம் கொடுக்க வேண்டும்?

(2) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 25 மீட்டரும் ஒரு பக்கம் 5 மீட்டரும் ஆகும். அடுத்தப் பக்கம் எத்தனை மீட்டர்?

(3) கீழ்க்காணும் கணிதச் செயல்கள் அனைத்திலும் ஓர் எண்ணில் சில செயல்கள் செய்ததன் விடைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் எண்ணைக் கணடுபிடிக்கவும்.

i) இரண்டு மடங்குடன் மூன்று கூட்டிய போது 101.

ii) மூன்று மடங்குடன் இரண்டு கூட்டிய போது 101.

iii) இரண்டு மடங்கிலிருந்து மூன்று கழித்த போது 101.

iv) மூன்று மடங்கிலிருந்து இரண்டு கழித்த போது 101.

(4) ஓர் எண்ணுடன் அதன் பாதியைக் கூட்டிய போது 111 கிடைத்ததெனில் எண் எது?

(5) பழைய ஒரு கணக்கு - பறவைக் கூட்டத்திடம் குழந்தை கேட்டாள். "நீங்கள் மொத்தம் எத்தனைப் பேர்?". ஒரு பறவை இவ்வாறு கூறியது:

" நாங்களும் எங்களைப் போன்ற மற்றொரு பங்கும்
எங்களில் பாதியும்
பாதியில் பாதியும்
ஒன்றும் சேர்ந்தால் நூறாகும்".

எத்தனைப் பறவைகள் உள்ளன?

**பறவை கணக்கில் இறுதியில் சொல்லப்பட்டுள்ள தொகை 100. நூறுக்குப் பதிலாக வேறு ஏதெல்லாம் எண்கள் வரலாம்?**

**பழங்காலக் கணிதம்**

ஏகதேசம் கி.மு. மூவாயிரத்தின் அண்மைக் காலத்தில் எகிப்தியர்கள் பலவகையான செய்திகள் பற்றி எழுதிப் பாதுகாத்துள்ளனர். பப்பைரஸ் என்னும் பெயர் கொண்ட செடியின் தண்டுகளைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கிய தாள்களில்தான் அந்தக் காலத்தில் எழுதியுள்ளனர். இவ்வாறு ஏராளம் எழுத்துச் சான்றுகளைக் ஆய்வாளர்கள் கண்டுபிடித்திருக்கிறார்கள். அவ்வாறான சான்றுகளுக்கும் பப்பைரஸ் என்றே சொல்லப்படுகிறது.

இத்தகைய ஒரு பப்பைரஸில் கணிதப் பிரச்சினைகளும் அவற்றைச் செய்வதற்கு உரிய வழிமுறைகளும் விவாதிக்கப் பட்டுள்ளது. ஏகதேசம் கி. மு. 1650 -இல் எழுதப்பட்டுள்ளது இது எனக் கணக்கிடப் பட்டுள்ளன. இதன் ஆரம்பத்திலேயே இதை எழுதியவரின் பெயர் ஆஹ்மோஸ் என்றும் இருநூறு ஆண்டுகள் பழமை வாய்ந்த ஓர் எழுத்துச் சான்றிலிருந்து பார்த்து எழுதியது என்றும் கூறப் பட்டுள்ளது. ( பிரிட்டீஸ் அருங்காட்சிய கத்தில் பாதுகாக்கப்பட்டுள்ள இந்தச் சான்று ஆஹ்மோஸ் பப்பைரஸ் என்று சொல்லப் படுகிறது. இதைக் கண்டெடுத்தவர் அலக் ஸாண்டர் ரின்ட் என்ற ஆய்வாளர் என்ப தால் ரின்ட் பப்பைரஸ் என்றும் சொல்கின் றனர்) எண்களையும் வடிவங்களையும் குறித்துள்ள பிரச்சினைகளே இதில் விவா திக்கப்பட்டுள்ளன.

## இயற்கணித முறை

இதுவரை செய்த கணிதச் செயல்கள் அனைத்திலும் உள்ள பொதுத்தன்மை என்ன? ஏதோ ஓர் எண்ணில் சில செயல்கள் செய்த போது கிடைத்த விடை எந்த எண் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தொடக்கம் எந்த எண்ணிலிருந்து எனக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

எப்படிக் கண்டுபிடித்தோம்? செய்த செயல்கள் எல்லாம் எதிர்மறையான செயல்கள், கடைசியில் செய்ததை முதலில் செய்ததாக வரிசைப்படுத்தி செய்யவும்: எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கணிதச் செயலைப் பார்க்கவும்

ரஷீத் 4 கிலோகிராம் வெண்டைக்காயும் 10 ரூபாய்க்கு மல்லி இலை, கறிவேப்பிலை முதலியன வாங்கிய போது 130 ரூபாய் ஆனது. ஒரு கிலோகிராம் வெண்டைக்கா யின் விலை எவ்வளவு?

முதலில் இதைக் கணிதமொழியில் எழுதுவோம்.

ஓர் எண்ணை 4 -ஆல் பெருக்கி பின் 10 கூட்டிய போது 130 கிடைத்தது. எண் எது?

எவ்வாறு தொடக்க எண்ணைக் கண்டுபிடிப்பது? கடைசியில் கூட்டிய 10 -னை முதலில் கழிக்கவும். முதலில் பெருக்கிய 4 -ஆல் வகுக்கவும், அதாவது,

$$(130 - 10) \div 4 = 120 \div 4 = 30$$

இவ்வாறு ஒரு கிலோகிராம் வெண்டைக்காயின் விலை 30 ரூபாய் எனக் காணலாம்.

இனி இந்தக் கணிதச் செயலைப் பார்க்கவும்:

பத்து மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கம்பியை வளைத்து ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்க வேண்டும். அகலத்தை விட நீளம் ஒரு மீட்டர் கூடுதலாக இருக்க வேண்டும். நீளமும் அகலமும் காண்க?

முதலில் பிரச்சினையை எண்களை மட்டும் பயன்படுத்திக் கூறலாம்.

செவ்வகத்தின் சுற்றளவு நீளமும் அகலமும் கூட்டியதன் இருமடங்கு அல்லவா. இங்கே நீளம் அகலத்தை விட 1 கூடுதல் ஆகும். அப்படியானால் நீளமும் அகலமும் கூட்டுவது என்பது, அகலமும் அகலத் துடன் 1 சேர்த்து கூட்டுவது என்பதாகும். அப்படியானால் பிரச்சினை இதுவே.

ஓர் எண்ணினுடையவும்அதனோடு 1 கூட்டியதினுடையவும் தொகையின் 2 மடங்கு 10 ஆகும். எண் எது?

கடைசியில் செய்த 2 மடங்கை நீக்கினால் இவ்வாறு கூறலாம்.

ஓர் எண்ணையும் அதனோடு 1-உம் கூட்டியதன் தொகை 5; எண் எது?

**பழையமுறை**

ஆஹ்மோஸ் பப்பைரஸில் ஒரு பிரச்சினை இதுதான்.

ஒரு எண்ணையும் அதன் நான்கில் ஒன்றையும் சேர்த்தால் பதினைந்தாகும். எண் எது?

இதன் விடையை இவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.

4 என்ற எண்ணோடு அதன் நான்கில் ஒன்றைக் கூட்டினால் கிடைப்பது 5 ஆகும். நமக்கு கிடைக்க வேண்டியது 15 அல்லவா, அது 5 இன் மூன்று மடங்காகும். அப்படியானால் பிரச்சினையின் விடை 4 இன் மூன்று மடங்கான 12 ஆகும்.

இந்த யுக்தி இங்கு சரியானது எப்படி என்று புரிந்ததா?

இது எல்லா கணக்கிற்கும் சரியாகுமா?

எந்த எண்ணாயினும் அதையும் அதனுடன் ஒன்று கூட்டியதையும் கூட்டுவது என்பது அந்த எண்ணின் இரண்டு மடங்கோடு ஒன்று கூட்டுவதற்குச் சமம் என ஏழாம வகுப்பில் படித்தது நினைவிருக்கிறதா? (**மாறும் எண்களும் மாறாதத் உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில் **எண் தத்துவங்கள்** என்ற பகுதி)

இதை இயற்கணிதத்தில் எழுதுவது தான் எளிதானது என்று கண்டோம்:

$x$ எந்த எண்ணாயினும், $x + (x + 1) = 2x + 1$.

இப்போது சிந்தித்துக் கொண்டிருக்கும் கணிதச் செயலில் இதைப் பயன்ப டுத்தலாம். இந்தக் கணிதச் செயலில் எண்ணை $x$ என எடுத்தால், இப்பிரச் சினை இவ்வாறு ஆகும்.

$2x + 1 = 5$ எனில் $x$ எவ்வளவு?

இதன் பொருள் என்ன?

ஓர் எண்ணின் 2 மடங்கோடு 1 - னைக் கூட்டினால் 5 எண் எது?

எதிர்மறைச் செயல் வாயிலாக எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா

$$(5 - 1) \div 2 = 2$$

அப்படியானால் செவ்வகத்தின் அகலம் 2 மீட்டரும் நீளம் 3 மீட்டரும் ஆகும் எனக் கிடைக்கும்.

இவ்வாறான கணிதச் செயல்களை முதலிலேயே இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்வதே சில வேளைகளில் எளிதாக இருக்கும். இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

ஒரு நாற்காலிக்கும் மேசைக்கும் சேர்ந்து விலை 4500 ரூபாய் ஆகும். மேசைக்கு நாற்காலியை விட 1000 ரூபாய் கூடுதல் எனில் ஒவ்வொன்றின் விலை என்ன?

இங்கு நாற்காலியின் விலை $x$ ரூபாய் என்று செய்து பார்ப்போம்.

மேஜையின் விலை 1000 ரூபாய் கூடுதல் என்பதால் அதன் விலை $x + 1000$ ரூபாய். அப்படியானால் பிரச்சினையின் இயற்கணித வடிவம் என்ன?

$x + (x + 1000) = 4500$ எனில், $x$ எவ்வளவு?

இதில் $x + (x + 1000)$ என்பதை எவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்?

$$x + (x + 1000) = 2x + 1000$$

அப்படியானால் பிரச்சினை இவ்வாறாகும்:

$2x + 1000 = 4500$ எனில், $x$ எவ்வளவு?

இதன் பொருள் என்ன?

### கூட்டலும் கழித்தலும்

ஓர் எண்ணுடன் மற்றொரு எண்ணைக் கூட்டிய பின்னர் கூட்டிய எண்ணைக் கழித்தால் முதல் எண் கிடைக்கும். இதை இயற்கணித மொழியில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

$x$, $a$ எந்த எண்களாயினும்
$(x + a) - a = x$

இதை மற்றொரு முறையிலும் எழுதலாம்.

$x + a = b$ எனில் $x = b - a$

ஓர் எண்ணுடன் மற்றொரு எண்ணைக் கூட்டிக் கிடைக்கும் தொகையும், கூட்டிய எண்ணும் தெரியுமெனில், எந்த எண்ணுடன் கூட்டப்பட்டது எனக் கண்டுபிடிக்கும் முறையின் இயற்கணித வடிவமே இது.

இதுபோன்று

$x - a = b$ எனில் $x = b + a$

என்பதும் சரியே. ஓர் எண்ணிலிருந்து மற்றொரு எண்ணைக் கழித்தால் கிடைப்பதும், கழித்தது எந்த எண் எனத் தெரியுமெனில் எந்த எண்ணிலிருந்து கழிக்கப் பட்டது எனக் கண்டுபிடிக்கும் முறையின் இயற்கணித வடிவமே இது.

ஓர் எண்ணின் 2 மடங்குடன் 1000 கூட்டிய போது 4500; எண் எது?

இது முன்னர் செய்த கணிதச் செயல் அல்லவா! எண்கள் மாறியுள்ளன என்பது மட்டுமே?

எதிர்மறையாக உள்ள செயல்களின் வழியாக எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கலாம். அவற்றையும் இயற்கணிதத்தில் எழுதுவோமா?

எண்ணின் இரு மடங்கு $4500 - 1000 = 3500$ என்று தான் முதலில் கிடைக்கும் அதாவது

$$2x = 4500 - 1000 = 3500$$

எனில் எண் $3500 \div 2 = 1750$ எனக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இயற்கணிதத்தில் எழுதினால்

$$x = 3500 \div 2 = 1750$$

இனித் தொடங்கிய பிரச்சினைக்கு மீண்டும் சென்று நாற்காலியின் விலை 1750 ரூபாயும், மேசையின் விலை 2750 ரூபாய் என்றும் கூறலாம்

ஒரு கணிதச் செயலைக் கூடப் பார்க்கலாம்:

> நூறு ரூபாயைச் சில்லறையாக மாற்றிய போது இருபது ரூபாய் நோட்டுகளும், பத்து ரூபாய் நோட்டுகளும் தான் கிடைத்தன. மொத்தம் ஏழு நோட்டுகள் ஒவ்வொன்றும் எத்தனை வீதம்?

இருபது ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $x$ என எடுத்துக் கொள்வோம்; அப்படியானால் பத்து ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $7 - x$.

$x$ இருபது ரூபாய் நோட்டுகள் எனில் $20x$ ரூபாய்.

$7 - x$ பத்து ரூபாய் நோட்டுகள் எனில் $10 \times (7 - x)$ ரூபாய்.

மொத்தம் $20x + 10 \times (7 - x)$ ரூபாய், இது 100 ரூபாய் என முன்னரே சொல்லியிருக்கிறோம்.

அப்படியானால் பிரச்சினை இயற்கணித மொழியில் இவ்வாறு ஆகும்:

$20x + 10\,(7 - x) = 100$ எனில், $x$ எவ்வளவு?

இதில் $20x + 10\,(7 - x)$ -யைக் கொஞ்சம் சுருக்கலாம்:

$$20x + 10\,(7 - x) = 20x + 70 - 10x = 10x + 70$$

இதைப் பயன்படுத்தி, பிரச்சனையை மாற்றி எழுதலாம்:

$10x + 70 = 100$ எனில், $x$ எவ்வளவு?

**பெருக்கலும் வகுத்தலும்**

ஒரு எண்ணை மற்றொரு எண்ணால் பெருக்கிகிடைக்கும் விடையில் இருந்து, முதல் எண் கிடைப்பதற்கு பெருக்கிய எண்ணால் வகுத்தால் போதும். இதுபோன்று வகுத்து கிடைக்கும் விடையில் இருந்து எண்கிடைப்பதற்கு, வகுத்த எண்ணால் பெருக்கினால் போதும். இயற்கணித மொழியில்

$ax = b \ (a \neq 0)$ எனில் $x = \frac{b}{a}$

$\frac{x}{a} = b$ எனில் $x = ab$ என்றும் எழுதலாம்.

பெருக்கி கிடைக்கும் விடையிலிருந்தும் வகுத்து கிடைக்கும் விடையிலிருந்தும் ஒரு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க பயன்படுத்தப்படும் எதிர்மறை கணிதச் செயல்களின் இயற்கணித வடிவம் தான் இது.

$x$ என்ற எண்ணின் 10 மடங்குடன் 70 கூட்டியபோது 100 கிடைத்தது. என்பது அல்லவா இதன் பொருள். எனில் $x$ எண் கிடைக்க 100 லிருந்து 70 -ஐக் கழித்து, 10 -ஆல் வகுக்க வேண்டும். இயற்கணிதத்தில் எழுதினால்

$$x = (100 - 70) \div 10 = 30 \div 10 = 3$$

அதாவது, ஆரம்பித்த பிரச்சினையின் விடை 3 இருபது ரூபாய் நோட்டுகளும், 4 பத்து ரூபாய் நோட்டுகளும் ஆகும்.

அல்காரிஸ்மி

(1) 80 மீட்டர் சுற்றளவு உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம், அகலத்தின் இருமடங்கை விட ஒரு மீட்டர் கூடுதல் எனில் அதன் அகலமும் நீளமும் எவ்வளவு?

(2) ஒரு கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு கோடு வரையவேண்டும். இரு பக்கமும் உருவாகின்ற கோணங்களில் ஒன்று மற்றொன்றை விட $50^\circ$ கூடுதல் ஆகும். சிறிய கோணத்தின் அளவு எவ்வளவு?

(3) ஒரு புத்தகத்தின் விலை ஒரு பேனாவின் விலையை விட 4 ரூபாய் கூடுதல் ஆகும். ஒரு பென்சிலின் விலை பேனாவின் விலையைவிட 2 குறைவு ஆகும். ஒருவர் 5 புத்தகங்களும் 2 பேனாக்களும் 3 பென்சில்களும் வாங்கினார்.மொத்தம் 74 ரூபாய் ஆனது ஒவ்வொன்றினுடையவும் விலை எவ்வளவு?

(4) i) தொடர்ச்சியான மூன்று எண்ணல் எண்களின் தொகை 36 ஆகும். எண்கள் எவை?

ii) தொடர்ச்சியான மூன்று ஒற்றை எண்களின் தொகை 36 ஆகும். எண்கள் எவை?

iii) தொடர்ச்சியான மூன்று ஒற்றை எண்களின் தொகை 36 ஆகுமா? காரணம் கூறுக.

iv) தொடர்ச்சியான மூன்று ஒற்றை எண்களின் தொகை 33 ஆகும். எண்கள் எவை?

v) தொடர்ச்சியான மூன்று எண்ணல் எண்களின் தொகை 33 ஆகும். எண்கள் எவை?

(5) i) நாட்காட்டியில் நான்கு எண்கள் உள்ள ஒரு சதுரத்தை அடையாளப்படுத்தி, அதில் உள்ள எண்களைக் கூட்டியபோது 80 கிடைத்தது. எண்கள் எவை?

### பெயர் வந்த வழி

அரபு மொழிப் புத்தகங்களின் மொழி மாற்றம் வாயிலாக, தற்போதைய ஐரோப்பாவில் இயற்கணிதம் பரவத் தொடங்கியது. இவற்றில் மிக முக்கியமானது முகமது அல் காரிஸ்மி எனும் கணித மேதையின் படைப்புகள் ஆகும்.

கி. பி. எட்டாம் நூற்றாண்டில் தான் அல்காரிஸ்மி வாழ்ந்திருந்தார். தெரியாத எண்களைக் குறிப்பிட பொருள் என்ற அர்த்தம் வரக்கூடிய அரபுச் சொல்லையே இவர் பயன்படுத்தினார்.

ஓர் எண்ணிலிருந்து 2 -னைக் கழித்த போது 5 கிடைத்தது என்பதிலிருந்து எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க 5-யும் 2 -யும் கூட்ட அல்லவா வேண்டும். இவ்வாறான செயல்களை அல் ஜபர் என்ற அரபு சொல்லால் அல்காரிஸ்மி குறிப்பிட்டிருந்தார். “கூட்டிச் சேர்க்கவும்” அல்லது “பழையது போல் மாற்றுதல்” என்பதே இதன் பொருள். இயற்கணிதத்திற்கு ஆங்கிலத்தில் algebra என்ற பெயர் இந்த அரபுச் சொல்லிலிருந்தே வந்தது.

ஒழுங்கான பாதை வாயிலாக ஒரு பிரச்சினைக்கு தீர்வுகாணும் செயல்திட்டத்திற்கு (குறிப்பாக கணினியில்) algorithm என்ற பெயர் உண்டு. அல்காரிஸ்மி என்ற சொல்லிலிருந்தே இது வந்தது.

ii) நாட்காட்டியில் ஒன்பது எண்கள் உள்ள ஒரு சதுரத்தை அடையாளப்படுத்தி அதிலுள்ள எண்களைக் கூடிய போது 90 கிடைத்தது. எண்கள் எவை?

## மாறுபட்ட பிரச்சினைகள்

இந்தக் கணிதச் செயலைப் பார்க்கவும்:

ஓர் எண்ணின் மூன்று மடங்குடன் பத்தைக் கூட்டிய போது எண்ணின் ஐந்து மடங்கு ஆனது. எண் எது?

இங்கு எதிர்மறையான செயல்கள் வாயிலாக எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க முடியாது அல்லவா:

ஆனால் இப்படியும் சிந்திக்கலாம். எந்த எண்ணினுடையவும் மூன்று மடங்கை ஐந்து மடங்கு ஆக்குவதற்குக் கூட்ட வேண்டியது எண்ணின் இரு மடங்கு ஆகும். (ஏழாம் வகுப்பிலுள்ள **மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில், **எண் தத்துவகள்** என்ற பகுதி).

கணிதச் செயலில் சொல்லப்பட்டிருப்பது கூட்டியது பத்து என்று. அப்படியானால் எண்ணின் இரு மடங்கு பத்து, ஆகையால் எண்ணை ஐந்து என எடுத்துக் கொள்ளலாம்

இதை இயற்கணிதத்தில் கூறினால்?

தொடக்க எண் $x$ என எடுத்தால் பிரச்சினையில் சொல்லப்பட்டிருப்பது,

$$3x + 10 = 5x$$

$3x$ -ஐ $5x$ ஆக்குவதற்குக் கூட்ட வேண்டியது $2x$ எனத் தெரியும். அதாவது,

$x$ எந்த எண்ணானாலும், $3x + 2x = 5x$.

நமது கணிதச் செயலில் $3x$ -ஐ $5x$ ஆக்குவதற்குக் கூட்டியது 10 ஆகும். எனில் $2x = 10$; ஆகவே $x = 5$.

கணிதச் செயலைச் சிறிது மாற்றி இப்படி ஆக்கினால்?

ஓர் எண்ணின் 13 மடங்குடன் 36 -ஐக் கூட்டிய போது எண்ணின் 31 மடங்கு ஆனது. எண் எது?

ஓர் எண்ணின் 13 மடங்கை 31 மடங்கு ஆக்குவதற்கு எண்ணினுடைய எத்தனை மடங்கைக் கூட்ட வேண்டும்?

$31 - 13 = 18$ மடங்கு அல்லவா?

கூட்டியது 36 என்றுதான் சொல்லப்பட்டுள்ளது எனில் எண்ணின் 18 மடங்கு 36;எனவே எண், 2 ஆகும்.

இயற்கணிதத்தில் கூறினாலோ எண் $x$ என எடுத்தால் பிரச்சினையையும் தீர்வு கண்ட முறையையும் சேர்த்து இவ்வாறு எழுதலாம்:

**சமன்பாடுகள்**

$2x + 3 = 3x + 2$ என்று எழுதியதன் பொருள் என்ன?

$x$ என்ற எண்ணின் 2 மடங்குடன் 3 -ஐக் கூட்டினாலும், 3 மடங்குடன் 2-ஐக் கூட்டினாலும் ஒரே எண்தான் கிடைக்கும்.

$x$ -ஐ 1 என எடுத்தால் மட்டுமே இது சரியாகும். இவ்வாறு ஓர் எண்ணில் செய்யும் இரு செயல்கள் ஒரே விடையை தரும் என்று கூறும் இயற்கணித வாக்கியங்கள் சமன் பாடுகள் (equations) என்று அழைக் கப்படுகின்றன.

$$13x + 36 = 31x$$
$$31x - 13x = 18x$$
$$18x = 36$$
$$x = 2$$

இனி இந்தக் கணிதச் செயலைப் பார்ப்போம்:

ஓர் எண்ணின் 3 மடங்குடன் 12 -ஐக் கூட்டுவது எண்ணின் 5 மடங்குடன் 2 கூட்டுவதற்குச் சமம் ஆகும் அப்படியானால் எண் எது?

எண் $x$ என எடுத்து, சொல்லப்பட்டுள்ள கருத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$3x + 12 = 5x + 2$$

$3x$ உடன் $2x$ ஐக் கூட்டினால் $5x$ ஆகும்.

$5x + 2$ ஆக வேண்டுமெனில், 2 -உம் கூட்ட வேண்டும் அல்லவா? அதாவது,

$$3x + (2x + 2) = 5x + 2$$

தரப்பட்டுள்ள கணிதச் செயல்களைப் பொறுத்து கூட்டிய எண் 12 அல்லவா. எனில்,

$$2x + 2 = 12$$

இனி எதிர்மறையான செயல்கள் செய்து $x$ -ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$x = (12 - 2) \div 2 = 5$$

வேறு சில கணிதச் செயல்களைப் பார்ப்போம்:

அப்புவின் அம்மாவின் வயது, அப்புவின் வயதின் ஒன்பது மடங்கு ஆகும். ஒன்பது ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு இது மூன்று மடங்கு ஆகும். அவர்களின் தற்போதைய வயது என்ன?

அப்புவின் இப்போதுள்ள வயது $x$ என எடுக்கவும். தரப்பட்டுள்ள விவரங்களின் படி அம்மாவின் இப்போதுள்ள வயது $9x$.

9 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு?

அப்புவின் வயது $x + 9$

அம்மாவின் வயது $9x + 9$

தரப்பட்டுள்ள கணக்கின்படி. இது அப்புவின் வயதின் 3 மடங்கு ஆகும்; அதாவது $3(x + 9) = 3x + 27$

இதை இயற்கணிதத்தில் இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$3x + 27 = 9x + 9$$

$3x$ -ஐ $9x + 9$ என ஆக்குவதற்கு எதையெல்லாம் கூட்ட வேண்டும்.

### ஒன்பதால் ஒரு விளையாட்டு

9 -இல் முடியும் ஏதாவது ஓர் இரண்டிலக்க எண்ணை எடுத்து, இலக்கங்களின் தொகையையும் பெருக்கற்பலனையும் கூட்டிப் பாருங்கள். எடுத்துக்காட்டாக 29 ஐ எடுத்தால் இலக்கங்களின் தொகை $2 + 9 = 11$.

பெருக்கல்பலன் தொகை $2 \times 9 = 18$.

இவற்றைக் கூட்டினால் $18 + 11 = 29$.

9 -இல் முடியும் எல்லா எண்களுக்கும் இது பொருந்துமா? எண் $10x + 9$ என எடுத்துப் பார்க்கவும்.

9 அல்லாமல் வேறு ஏதேனும் இலக்கங்களில் முடியும் இரண்டிலக்க எண்களுக்கு இந்தச் சிறப்பு உண்டா?

$10x + y = x + y + xy$ என்பதிலிருந்து $y$ கண்டுபிடிக்கலாமா?

இயற்கணிதத்தில் கூறினால்

$$(9x + 9) - 3x = 6x + 9$$

இந்தக் கணக்கில் கூட்டியது 27.
எனில்

$$6x + 9 = 27$$

இதிலிருந்து $6x = 27 - 9 = 18$ என்றும், மேலும் $x = 18 \div 6 = 3$ என்றும் காணலாம். அதாவது அப்புவின் வயது 3, அம்மாவின் வயது $3 \times 9 = 27$.

அறிவியல் கண்காட்சியில் நுழைவுக்கட்டணம் குழந்தைகளுக்கு 10 ரூபாயும், பெரியவர்களுக்கு 25 ரூபாயும் ஆகும் 50 பேருக்கு நுழைவுச்சீட்டு கொடுத்தப் பின்னர் 740 ரூபாய் கிடைத்தது. இதில் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

(2) ஒரு வகுப்பில் ஆண் குழந்தைகளுடையவும், பெண் குழந்தைகளுடையவும் எண்ணிக்கை சமம் ஆகும். ஒரு நாள் வகுப்பிற்கு எட்டு ஆண் குழந்தைகள் மட்டும் வராமலிருந்த போது பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையின் இருமடங்கு ஆகும் ஆண் குழந்தைகளினுடையவும் பெண் குழந்தைகளினுடையவும் எண்ணிக்கை எத்தனை?

(3) அஜயனுக்கு விஜயனை விடப் பத்து வயது கூடுதல் ஆகும். அடுத்த ஆண்டில் அஜயனின் வயது விஜயனுடைய வயதின் இரு மடங்கு ஆகும். இப்பொழுது இவர்களின் வயது என்ன?

(4) ஓர் எண்ணின் ஐந்து மடங்கு அந்த எண்ணை விட 4 கூடுதலான மற்றொரு எண்ணின் மூன்று மடங்கிற்குச் சமமெனில் எண் எது?

(5) ஒரு கூட்டுறவுச் சங்கத்தில் ஆண்களின் எண்ணிக்கை பெண்களின் எண்ணிக்கையின் மூன்று மடங்கு ஆகும். சங்கத்தில் புதிதாக 29 பெண்களும் 16 ஆண்களும் சேர்ந்த போது ஆண்களின் எண்ணிக்கை பெண்களின் எண்ணிக்கையின் இரு மடங்கு ஆகும். அப்படியானால் சங்கத்தில் முதலில் எத்தனைப் பெண்கள் இருந்தனர்?

**பழைய கணக்கு**

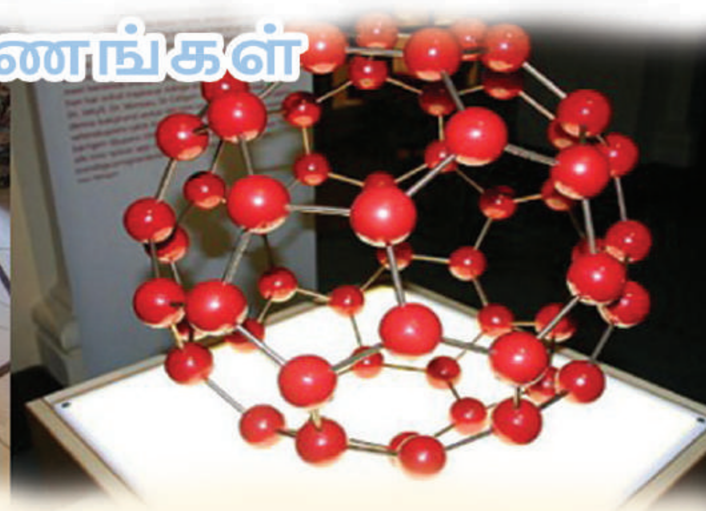
ஒரு குளத்தில் தாமரை பூக்கள் மலர்ந்திருக்கின்றன. பறந்து வந்த பறவைக்கூட்டம் களைப்பை மாற்றுவதற்குப் பூக்களில் இருந்தன. ஒரு தாமரையில் ஒரு பறவை வீதம் இருந்த போது ஒரு பறவைக்கு இருக்க இடம் இல்லை. ஒரு தாமரையில் இருபறவைகள் சேர்ந்திருந்தபோது, ஒரு தாமரையில் இருக்க பறவை இல்லை. தாமரைகள் எத்தனை? பறவைகள் எத்தனை?

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | எனக்கு இயலும் | ஆசிரியரின் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்படுத்த வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • இலகுவான கணிதப் பிரச்சினைகளுக்கு எதிர்மறையான செயல்கள் வாயிலாகத் தீர்வு காணுதல். | | | |
| • எதிர்மறையான செயல்கள் வழி நேரடியாகத் தீர்வு காணமுடியாத பிரச்சினைகளில் தேவைக்கு ஏற்ப இயற்கணிதம் பயன்படுத்துதல். | | | |

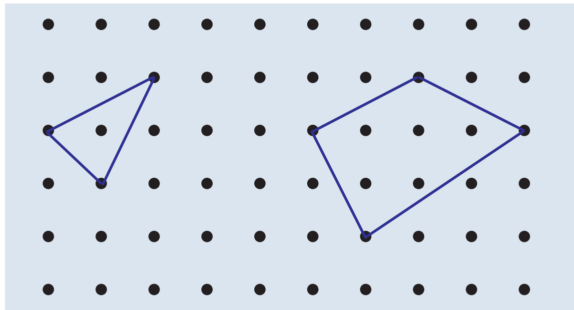
# 3

# பல கோணங்கள்



## வடிவங்கள்

படத்தைப் பார்க்கவும்.



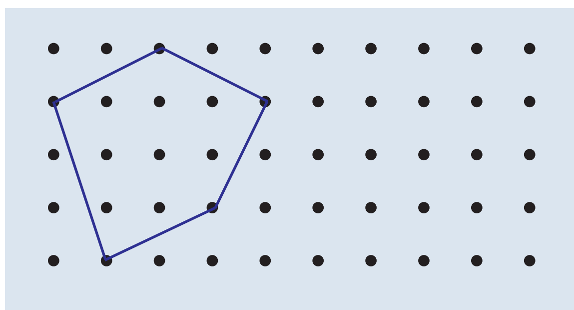
புள்ளிகளை இணைத்தால் பலவகை வடிவங்கள்

மூன்று புள்ளிகளை இணைத்தால் முக்கோணம்.

நாற்கரமானால்?

மேலும் ஐந்து புள்ளிகளை இணைத்து வரைந்து பார்க்கவும்.

மூலைகள் எத்தனை? பக்கங்கள் எத்தனை?



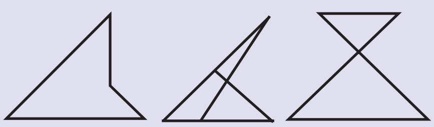
ஆறு மூலை உடைய வடிவம் வரையவும்.

பக்கங்கள் எத்தனை?

ஐந்து மூலைகளும் ஐந்து பக்கங்களும் உடைய வடிவங்களை ஐங்கோணம் எனக் கூறலாம். ஆறுமூலைகளும் ஆறு பக்கங்களும் உள்ள வடிவங்களின் பெயர் அறுங்கோணம். ( ஐந்தாம் வகுப்பு கணிதப் புத்தகத்தில், **கோடுகள் சேரும்போது** எனும் பாடத்தில் **பல கோணங்கள்** என்ற பகுதி). இங்ஙனம் மூன்றோ அதற்குக் கூடுதலாகவோ பக்கங்கள் உடைய வடிவத்தின் பொதுவான பெயரே பலகோணம் (polygon) ஆகும்.

### விசித்திரமான பல கோணங்கள்

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.



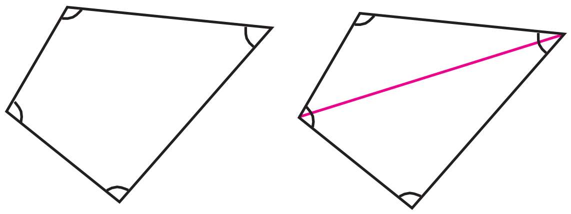
இவையும் நேர்கோடுகள் மட்டுமே பயன்படுத்தி வரையப்பட்டுள்ளன. ஆகையால் இவற்றையும் சில நேரங்களில் பல கோணங்களாக ஏற்றுக்கொள்வது உண்டு. ஆனால் நமது பாடத்தில் உச்சிகள் உள்வாங்கியதோ பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்வதோ ஆன வடிவங்களைப் பலகோணங்கள் என்ற குழுக்களில் உட்படுத்துவதில்லை. நாம் பொதுவாகச் சொல்ல நினைக்கும் பல தத்துவங்களும் இவைகளுக்குப் பொருந்தாததே காரணம்.

## கோணங்களின் தொகை

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களைக் கூட்டினால் $180^{\circ}$ கிடைக்கும் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்தோம் அல்லவா.

இது போன்று எல்லா நாற்கரங்களிலும் கோணங்களின் தொகை ஒன்று போல் உள்ளதா?

ஒரு நாற்கரம் வரைந்து அதன் ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்து பார்க்கவும்.



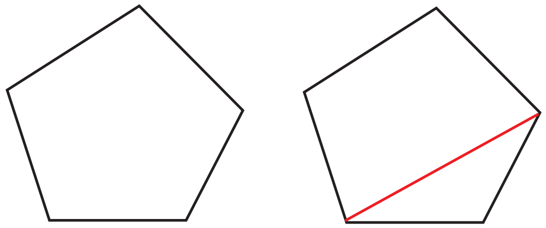
நாற்கரம் இப்போது இரு முக்கோணங்களாக ஆனது. மூலைவிட்டம் இரு மூலைகளிலும் உள்ள கோணங்களை இரு பாகமாகப் பிரிக்கிறது. ஒரு பாகம் ஒரு முக்கோணத்திலும் அடுத்தப் பாகம் அடுத்த முக்கோணத்திலும் உள்ளது. அப்படியானால் நாற்கரத்தின் கோணங்கள் இரு முக்கோணங்களின் கோணங்களாக ஆயின ஆகையால் நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் தொகை, இரண்டு முக்கோணங்களின் தொகைக்குச் சமம் அல்லவா

அதாவது, $2 \times 180^{\circ} = 360^{\circ}$.

இது போன்று எந்த நாற்கரத்திலும் கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$ தான் எனக் காணலாம்.

இனி ஐங்கோணத்தைப் பார்ப்போம்?

ஒன்று விட்ட இரு மூலைகளை இணைத்தால் ஒரு நாற்கரமும் ஒரு முக்கோணமும் எனப் பிரிக்கலாம்.

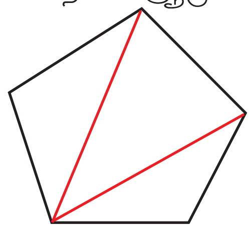


இந்த நாற்கரம், முக்கோணம் ஆகியவற்றின் கோணங்களின் தொகையே ஐங்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை ஆகும்.

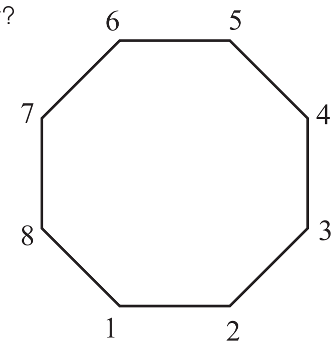
அதாவது,

$$360^{o} + 180^{o} = 540^{o}$$

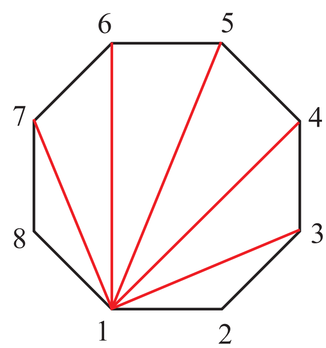
வேறொரு முறையில் கூறினால் ஐங்கோணத்தை மூன்று முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம். முக்கோணங்களின் கோணங்களின் தொகையே ஐங்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை ஆகும்.



மேலும் எட்டு பக்கங்கள் உள்ள பலகோணம்(எண் கோணம்) ஆனாலோ?




எத்தனை முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்? 1-ஆம் மூலையை 3, 4, 5, 6, 7 என்னும் ஐந்து மூலைகளுடன் இணைக்கலாம்:




ஐந்து கோடுகள், ஆறு முக்கோணங்கள்.

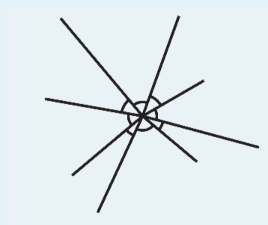
கோணங்களின் தொகை $6 \times 180^\circ = 1080^\circ$

12 பக்கங்கள் உள்ள பலகோணம் ஆனாலோ?

படம் வரையாமல் சிந்திக்கவும். ஒரு மூலையிலிருந்து தொடங்கினால்,

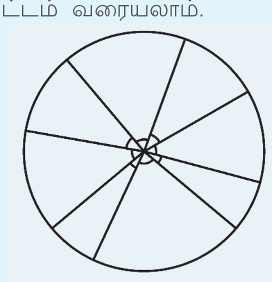
**புள்ளியைச் சுற்றிலும்**

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு புள்ளியில் மட்டும் பலகோணங்கள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் தொகை என்ன?

இவற்றின் பக்கங்கள் எல்லாவற்றையும் சம நீளமாக ஆக்கினால் கீழே காண்பதுபோல் ஒரு வட்டம் வரையலாம்.



அப்படியானால் இந்தக் கோணங்களைச் ஒழுங்காக சேர்த்து வைத்து ஒரு முழுமையான வட்டத்தை உருவாக்கலாம்.அதாவது ஒரு வட்டத்தைப் பல துண்டுகளாக ஆக்கிக் கிடைப்பனவே இந்தக் கோணங்கள். அப்படியானால் டிகிரி என்ற அளவின் வரையறைக்கு ஏற்ப, அவற்றின் தொகை 360° ஆகும்

இங்கு நாம் அறிந்த செய்தியை இவ்வாறு சுருக்கமாகக் கூறலாம்:

ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் தொகை 360° ஆகும்.

அதன் வலதுபக்கமும் இடதுபக்கமும் உள்ள மூலைகளைத் தவிர, பிற 9 மூலைகளுடனும் இணைத்து வரையலாம். 9 கோடுகள், 10 முக்கோணங்கள்;

கோணங்களின் தொகை $10 \times 180^{\circ} = 1800^{\circ}$

இதை இயற்கணிதம் உபயோகித்தும் கூறலாம். $n$ மூலைகள் (பக்கங்கள்) உள்ள பலகோணத்தில் ஒரு மூலையை எடுத்தால், மீதி $n - 1$ மூலைகள் உள்ளன. இவற்றில் முதல் மூலையின் இரு பக்கங்களில் உள்ள மூலைகளைத் தவிர, மீதி எல்லா மூலைகளுடனும் இணைக்கும்போது மொத்தம் $(n - 1) - 2 = n - 3$ கோடுகள் வரும்.

ஒவ்வொரு கோடு வரையும் போதும் ஒரு புதிய முக்கோணமும், ஒரு பல கோணமும் கிடைக்கும். கடைசி கோடு வரையும் போது இரு முக்கோணங்கள் மற்றொரு முக்கோணமும் கிடைக்கும் மொத்தம் $(n-3)+1 = n-2$ முக்கோணங்கள், கோணங்களின் தொகை $(n - 2) \times 180^{\circ}$

**$n$ பக்கம் உள்ள ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $(n - 2) \times 180^{\circ}$ ஆகும்.**

இனி ஒரு வினா

ஏதேனும் ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $2700^{\circ}$ ஆகுமா?

எந்த ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $180^{\circ}$ இன் மடங்கு அல்லவா?

அப்படியானால் $2700^{\circ}$ என்பது $180^{\circ}$ மடங்கு தானா என்று சோதித்துப் பார்த்தால் போதும்.

அதற்கு 2700 -னை 180 -ஆல் வகுத்துப் பார்க்க வேண்டும்.

$$2700 \div 180 = 15$$

அதாவது, $2700 = 180 \times 15$

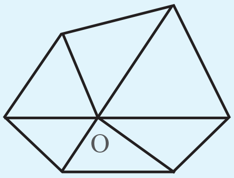
நம்முடைய பொதுத் தத்துவத்திற்கு ஏற்ப, $15 + 2 = 17$ பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $2700^{\circ}$ அல்லவா.

(1)52 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு?

(2) ஒரு பல கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $8100^{\circ}$. எனில் அதற்கு எத்தனைப் பக்கங்கள் உண்டு?

**பிரித்தல் மற்றொரு விதம்**

ஒரு பலகோணத்தின் உள்ளேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து உச்சிகளுக்குக் கோடுகள் வரைந்தும் அதனை முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.




$n$ பக்கம் உள்ள பலகோணத்தை இவ்வாறு பிரித்தால் $n$ முக்கோணங்கள் கிடைக்கும் அல்லவா. இங்கு கோணங்களின் தொகை $= n \times 180^{\circ}$ ஆகும்

இந்தக் கோணங்களில், எல்லா முக்கோணங்களினுடையவும் $O$ வில் உள்ள கோணங்களைத் தவிர, பிற கோணங்களின் தொகை பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகைக்குச் சமம் ஆகும். $O$ -இல் உள்ள கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$ என முன்னர் பார்த்தோம் அல்லவா. அப்படியானால் பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை

$$(n \times 180^{\circ}) - (2 \times 180^{\circ}) = (n-2) \times 180^{\circ}$$

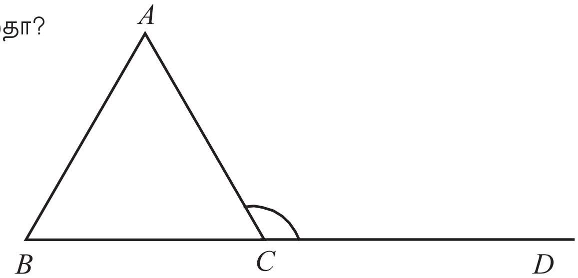
(3) ஏதேனும் ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $1600^\circ$ ஆகுமா? $900^\circ$ ஆகுமா?

(4) 20 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்கள் எல்லாம் சமம் ஆகும். ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவு எத்தனை டிகிரி?

(5) ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $1980^\circ$ ஆகும். பக்கங் களின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று கூடுதலான பல கோணத்தின் கோணங் களின் தொகை எவ்வளவு? பக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று குறைந்தால் கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு?

## வெளிக்கோணங்கள்

ஒரு முக்கோணம் வரைந்து ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை ஒரு பக்கமாக நீட்டி வரையவும். அப்போது முக்கோணத்தின் வெளியே ஒரு புதிய கோணம் கிடைக்கிறதா?

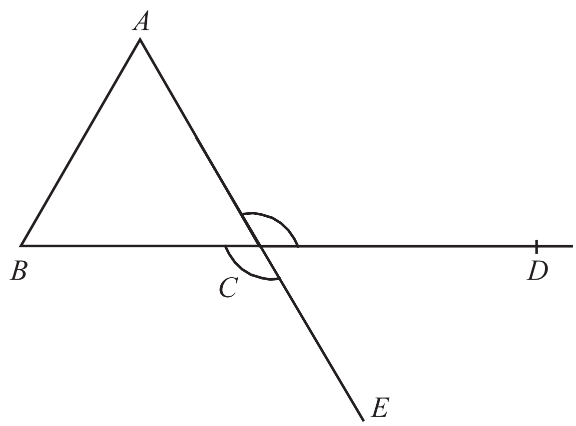



இந்தக் கோணத்தை முக்கோணத்தின் ஒரு வெளிக்கோணம் (external angle) என்று கூறுவர்.

$C$ என்ற மூலையில் முக்கோணத்திற்கு ஒரு கோணம் உண்டு அல்லவா. இதனை $C$ -இல் உள்ள உட்கோணம் (interior angle) என்று கூறலாம்.

$\angle ACD$ எனும் வெளிக்கோணத்திற்கு $\angle ACB$ என்னும் கோணத்துடன் உள்ள தொடர்பு என்ன? இவை ஒரு வரை ஜோடி ஆனதால், $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$.

மேலும் $AC$ என்ற பக்கத்தை நீட்டினால் $C$ -இல் மற்றொரு வெளிக் கோணம் $\angle BCE$ கிடைக்கும்.

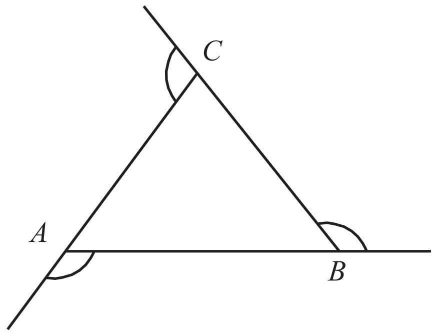


இந்த இரு வெளிக்கோணங்களின் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா? $AE$ , $BD$ ஆகியன ஒன்றையொன்று வெட்டும் போது உண்டாகும் ஒரு ஜோடி எதிர்கோணங்களே. இவை, ஆகவே $\angle ACD = \angle BCE$.

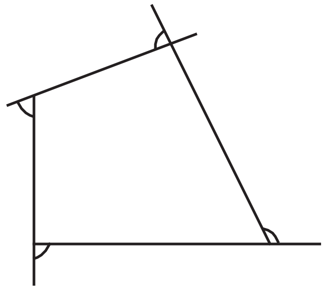
அதாவது உச்சியில் உள்ள இரு வெளிக்கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

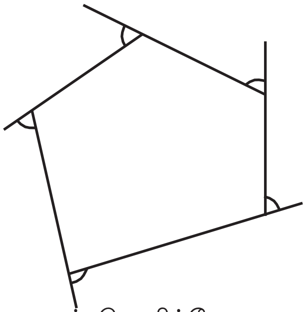
அப்படியானால் ஒரு மூலையிலுள்ள வெளிக்கோணங்களின் அளவுகளைப் பற்றி மட்டுமே கூறும்போது இவற்றில் எது என்ற பிரச்சினை இல்லை.

முக்கோணத்தின் மூன்று மூலைகளிலும் வெளிக்கோணங்கள் வரையவும்.




இது போன்று நாற்கரத்திலும் ஐங்கோணத்திலும் ஒவ்வொரு மூலையிலும் வெளிக்கோணங்கள் வரையவும்.

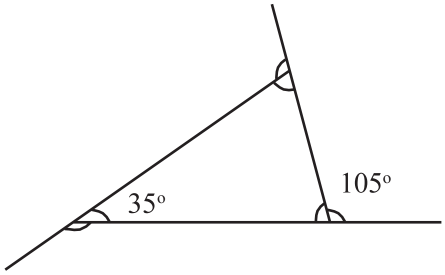




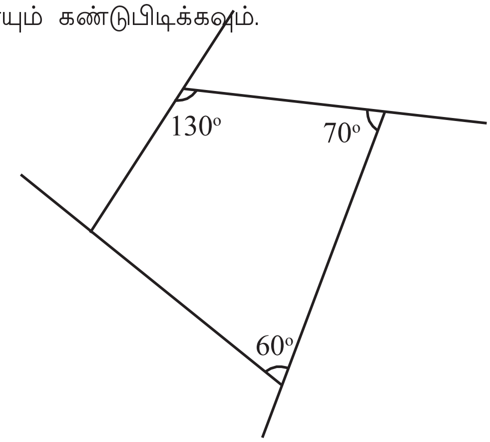
ஒவ்வொரு மூலையிலும் உள்ள உட்கோணமும் வெளிக்கோணமும் வரை ஜோடிகள் அல்லவா?

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் $40^o$, $60^o$. ஆகும். எல்லா வெளிக்கோணங்களின் அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

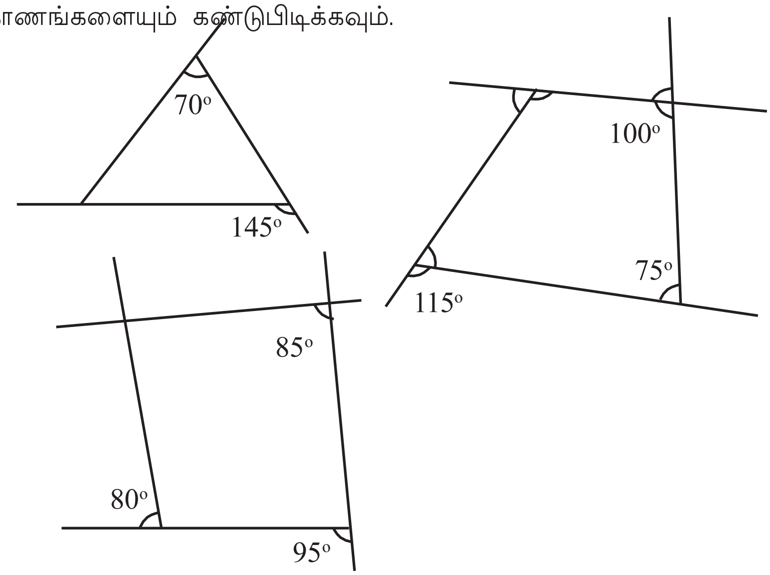
(2) கீழ்க் காணும் படத்தில் உள்ள எல்லா கோணங்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.



(3) கீழ்க்காணும் படத்தில் உள்ள நாற்கரத்தின் எல்லா வெளிக் கோணங்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.




(4) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களில் உள்ள எல்லாக் கோணங்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.



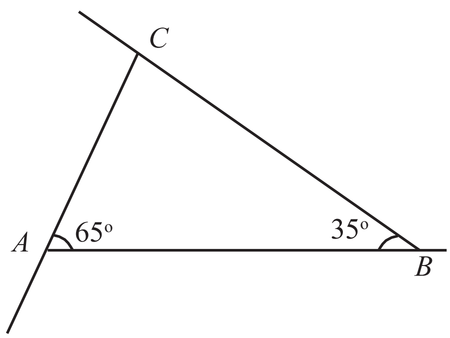

(5) எந்த ஒரு முக்கோணத்திலும் ஒரு மூலையில் உள்ள வெளிக்கோணம், பிற இருமூலைகளில் உள்ள உட்கோணங்களின் தொகைக்குச் சமம் ஆகும் என நிரூபிக்கவும்.

## மாறாத தொகை

எந்தப் பல கோணத்திலும் உட்கோணங்களின் தொகையினைக் கணக்கிடுவதற்குப் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை தெரிந்தால் போதும்.

அப்படியானால் வெளிக்கோணங்ளின் தொகை? முக்கோணத்திலிருந்து தொடங்குவோம்.

படத்தில் உள்ள வெளிக்கோணங்கள் எல்லாவற்றையும் கண்டுபிடிக்கலாமா?



$A$ -இன் வெளிக்கோணம், $180^{\circ} - 65^{\circ} = 115^{\circ}$

$B$ -இன் வெளிக்கோணம் $180^{\circ} - 35^{\circ} = 145^{\circ}$

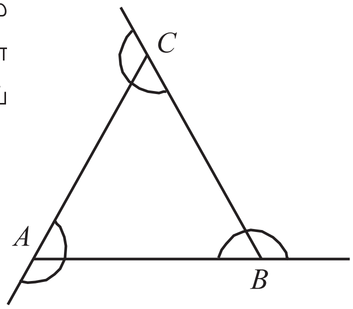
$C$ -இன் உட்கோணம் $180^{\circ} - (65^{\circ} + 35^{\circ}) = 180^{\circ} - 100^{\circ} = 80^{\circ}$

$C$ இன் வெளிக்கோணம் $180^{\circ} - 80^{\circ} = 100^{\circ}$

வெளிக்கோணங்களின் தொகை

$$115^{\circ} + 145^{\circ} + 100^{\circ} = 360^{\circ}$$

எல்லா முக்கோணங்களிலும் வெளிக்கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$ ஆகுமா? இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்.




முக்கோணத்தில் $A$ என்ற மூலையில் உள்ள உட்கோணத்தையும் வெளிக்கோணமும் கூட்டினால் $180^{\circ}$ கிடைக்கும் அல்லவா. இது போன்று $B$ யிலும் $C$ யிலும் $180^{\circ}$ கிடைக்கும். அப்படியானால் மூன்று மூலைகளில் உள்ள அனைத்து உட்கோணங்களையும் வெளிக்கோணங்களையும் கூட்டினால்

$$3 \times 180^{\circ} = 540^{\circ}$$

இதில் முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் தொகை $180^{\circ}$ ஆகும்

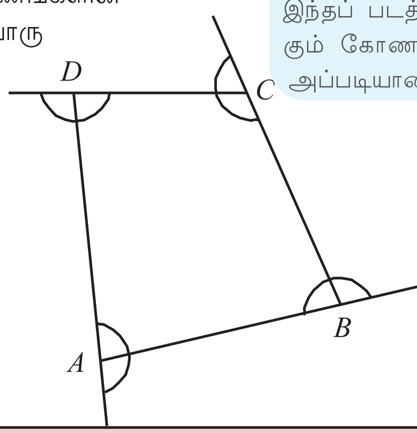
அப்படியானால் வெளிக்கோணங்களின் தொகை $540^{\circ} - 180^{\circ} = 360^{\circ}$.

எந்த முக்கோணத்திலும் வெளிக்கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$. நாற்கரமானால், ஒவ்வொரு மூலையிலும் உள்ள உட்கோணம், வெளிக்கோணம் ஆகியவற்றின் தொகை $180^{\circ}$ ஆகும். நான்கு உச்சிகளையும் சேர்த்தால்

$$4 \times 180^{\circ} = 720^{\circ}$$

இதிலிருந்து நாற்கரத்தின் கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$ -னைக் கழித்தால்

$$720^{\circ} - 360^{\circ} = 360^{\circ}.$$




### ஈர்க்கில் கணக்கு

ஈர்க்கில் துண்டுகளைப் பயன்படுத்தி, கீழே காண்பது போன்று ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்கி கோணங்கள் வரைந்து அடையாளப்படுத்

இதன் மேலே வேறு மூன்று ஈர்க்கில்கள் எடுத்து முன்னர் வைத்ததற்கு இணையகவைத்து கொஞ்சம் மேலும் சிறிதான முக்கோணத்தை உருவாக்கவும்.

இப்பொழுது கோணங்கள் மாறவில்லை அல்லவா. இன்னும் கொஞ்சம் சிறிதாக ஆக்கினால்?

இறுதியாக முக்கோணங்கள் இல்லாமல் போனால்?

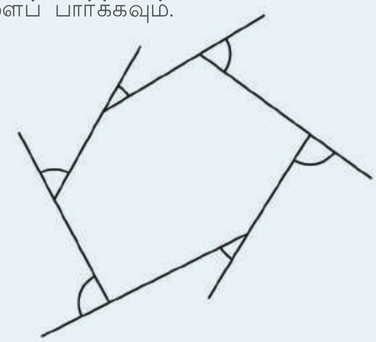
இந்தப் படத்தில் அடையாளப்படுத்தியிருக்கும் கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு? அப்படியானால் முதல் படத்திலோ?

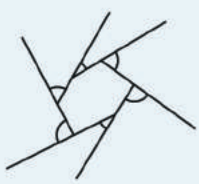
நாற்கரத்தினுடையவும் வெளிக்கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$ ஆகும்.

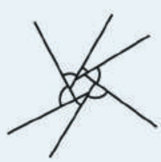
இது போன்று ஐங்கோணத்திலும் அறுங்கோணத்திலும் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

**மீண்டும் மீண்டும் சுருங்கினால்**

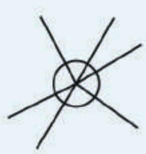
கோணங்கள் மாறாமல் முக்கோணத்தைச் சுருக்கியது போன்று, எந்த ஒரு பல கோணத்தையும் சுருக்கலாம். இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.







இறுதியாக பல கோணம் இல்லாமல் போய் ஒரு புள்ளி மட்டும் இருந்தால் எப்படி இருக்கும்?



பலகோணத்தின் வெளிக்கோணங்களின் தொகை என்ன?

பொதுவாக $n$ பக்கம் உள்ள பலகோணத்தைப் பற்றிச் சிந்திப்போம். மொத்தம் $n$ மூலைகள். ஒவ்வொரு மூலையிலும் ஒரு வெளிக்கோணமும், பலகோணத்தில் உள்ள கோணமும் சேர்ந்து ஒரு வரை ஜோடி ஆகிறது; மொத்தம் $n$ கோணங்களுடையவும் தொகை $n \times 180^{\circ}$. ஆகும். இதில் உட்கோணங்களின் தொகை $(n - 2) \times 180^{\circ}$. அப்படியானால் வெளிக்கோணங்களின் தொகை

$$= n \times 180^{\circ} - (n - 2) \times 180^{\circ}$$

$$= 2 \times 180^{\circ}$$

$$= 360^{\circ}$$

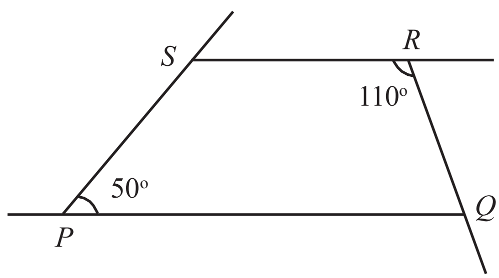
அதாவது

**எந்த ஒரு பல கோணத்திலும் வெளிக்கோணங்களின் தொகை $360^{\circ}$ ஆகும்.**

(1) 18 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பல கோணத்தின் கோணங்கள் எல்லாம் சமம் ஆகும். ஒவ்வொரு வெளிக்கோணத்தின் அளவும் எவ்வளவு?

(2) $PQRS$ என்னும் நாற்கரத்தில் $PQ$, $RS$ என்னும் பக்கங்கள் இணையாகும். நாற்கரத்தின் எல்லாக் கோணங்களையும், வெளிக்கோணங்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(3)




ஒரு நாற்கரம் வரைந்து ஏதேனும் இரு மூலைகளில் உள்ள வெளிக்கோணங்களை அடையாளப்படுத்தவும். இவற்றின் தொகைக்கும், மற்ற இரு மூலைகளிலுள்ள உட்கோணங்களின் தொகைக்கும் ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

(4) ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்கள் எல்லாம் சமமெனில் அப் பலகோணத்தின் வெளிக்கோணம் உட்கோணததின் இரு மடங்கு ஆகும்.

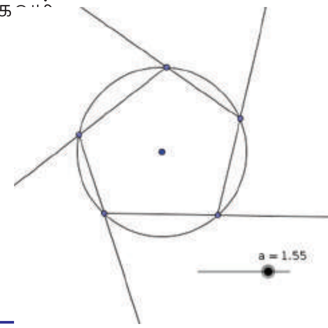
i) அதன் ஒவ்வொரு கோணமும் எத்தனை டிகிரி?

ii) அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

(5) ஒரு பல கோணத்தின் வெளிக்கோணங்களின் தொகை உட் கோணங்களின் தொகையின் இரு மடங்கு ஆகும். அந்தப் பலகோணத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உண்டு? வெளிக்கோணங்களின் தொகை உட்கோணங்களின் தொகையின் பாதியானால் பக்கங்கள் எத்தனை? தொகைகள் சமம் ஆனாலோ?

min = 0.01, max = 2, increment = 0.01 ஆகும் விதம் a என்ற ஸ்லைடரை உருவாக்கவும். ஆரம் a ஆன ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் ஐந்தோ ஆறோ புள்ளிகள் வைக்கவும். இந்தப் புள்ளிகளைப் படத்தில் காண்பது போல் இணைக்கவும். (ray tool பயன்படுத்தலாம்)

இனி வட்டத்தை மறைத்து வைக்கவும். Angle எடுத்து வெளிக் கோணங்களைக் அடையாளப்படுத்தவும். a என்ற எண்ணை மாற்றிப் பார்க்கவும்.




## ஒழுங்கு பலகோணம்

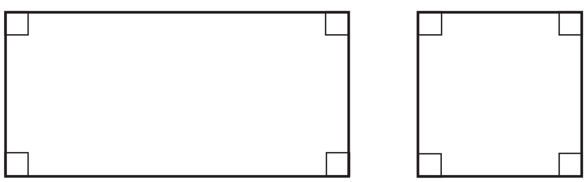
ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் சமமெனில் ஒவ்வொரு கோணமும் எவ்வளவு?

கோணங்கள் சமம் ஆனதால் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளமும் சமம் ஆகும். (**சமபக்க முக்கோணங்கள்** எனும் பாடத்தில் **இருசமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி)

மாறாக ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் சமமானால் கோணங்களும் சமம் ஆகும். இவ்வாறான முக்கோணங்கள் சமபக்க முக்கோணங்கள் அல்லவா.

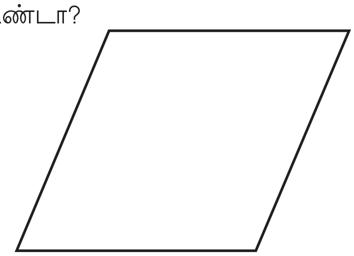
ஒரு நாற்கரத்தின் எல்லாக் கோணங்களும் சமமெனில் பக்கங்களின் நீளமும் சமமாக இருக்க வேண்டுமா?

செவ்வகத்தின் அனைத்துக் கோணங்களும் சமம் ஆகும். ஆனால் பக்கங்கள் சமம் ஆக இருக்க வேண்டும் என்று இல்லை. பக்கங்களின் நீளமும் சமமெனில் இருந்தால் சமசதுரம் ஆகிறது.



மாறாக ஒரு நாற்கரத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமமானால் கோணங்கள் சமம் ஆக இருக்க வேண்டும் என்று உண்டா?

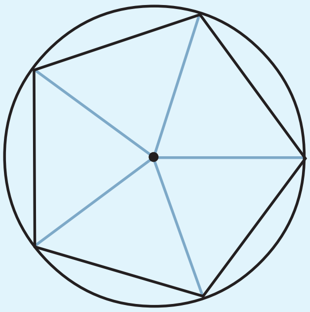
பக்கங்கள் சமமான இணைகரத்தின் கோணங்கள் சமமாக ஆக இருக்க வேண்டும் என்றில்லை?



கோணங்களும் சமமானால் சதுரம் ஆகும்.

### வட்டமும் ஒழுங்கு பலகோணங்களும்

வட்டத்தினுள் ஒழுங்கு ஐங்கோணமும், ஒழுங்கு அறுங்கோணமும் வரைந்து நினைவிருக்கிறதா? வட்டமையத்தில், 72° கோணங்கள் வரைந்தால் ஒழுங்கு ஐங்கோணம் வரையலாம்.



இதைப்போன்று ஒழுங்கு அறுங்கோணம் வரைய கோணங்கள் எவ்வளவு எடுக்க வேண்டும்? ஒழுங்கு எண்கோணத்திற்கு எவ்வளவு எடுக்கவேண்டும்?

வடிவியல் பெட்டியில் உள்ள செங்கோணமானியை உபயோகித்து, வட்டத்தைப் பற்பல முறைகளில் சமபாகங்கள் ஆக்கலாம்.

செங்கோணமானியைப் பயன்படுத்தி என்னென்ன ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரையலாம்?

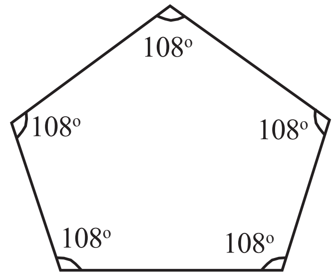
24 பக்கங்கள் உள்ள ஓர் ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரைய முடியுமா?

அதாவது, பக்கங்கள் சமமாகவும் கோணங்கள் சமமாகவும் உள்ள ஒரு நாற்கரமே சமசதுரம்.

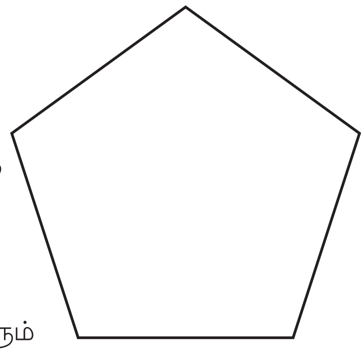
ஒரு ஐங்கோணத்தின் அனைத்துக் கோணங்களும் சமமெனில் ஒவ்வொரு கோணமும் எவ்வளவு?

ஐங்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ அல்லவா.

ஆகையால் ஒரு கோணத்தின் அளவு $\frac{540}{5} = 108^\circ$ எனக் கிடைக்கும். அப்படியானால் கோணங்கள் சமமாக உள்ள ஐங்கோணம் வரைவதற்கு ஒவ்வொரு உச்சியிலும் $108^\circ$ வருமாறு வரைந்தால் போதும் அல்லவா. இதில் பக்கங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டுமா?



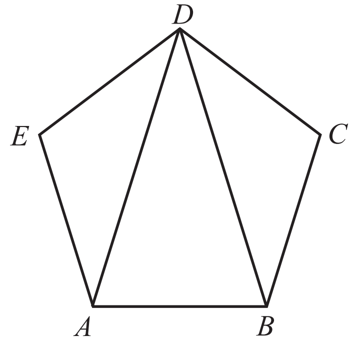

கோணங்களும் பக்கங்களும் சமமான ஓர் ஐங்கோணமும் வரையலாம். இவ்வாறான ஐங்கோணங்களை ஒழுங்கு ஐங்கோணம் என்பர்



இதைப் போன்று கோணங்களும் பக்கங்களும் சமமான அறுகோணம்( ஒழுங்கு அறுகோணம்) வரையலாம் அல்லவா? பக்கங்கள் சமமாகவும் கோணங்கள் சமமாகவும் உள்ள பல கோணங்களை ஒழுங்கு பல கோணங்கள் (regular polygons) என்று கூறுவர்.

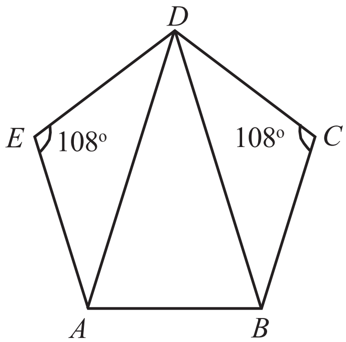
Regular Polygon எடுத்து இரண்டு புள்ளிகளில் கிளிக் செய்யவும். மூலைகளின் எண்ணிக்கையினைக் (பக்கங்களின் எண்ணிக்கை) கொடுத்து OK கொடுக்கவும்.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

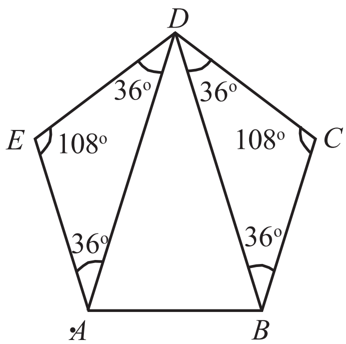


*ABCDE* ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணமாகும் *D* என்னும் மூலையில் உள்ள மூன்று கோணங்களைக் கணக்கிடலாமா?

ஒழுங்கு ஐங்கோணமானதால் கோணங்கள் எல்லாம் $108^\circ$.

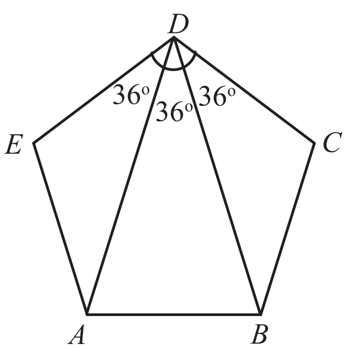



$\Delta AED$ -உம் $\Delta BCD$ -உம் இருசமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும். (ஏன்?) அப்படியானால் அவற்றின் பிற இரு கோணங்களைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா. (எவ்வாறு?)




*D* எனும் மூலையில் உள்ள மூன்று கோணங்களையும் கூட்டினால் $108^\circ$; அப்படியானால் இனி மீதம் உள்ள கோணம்?

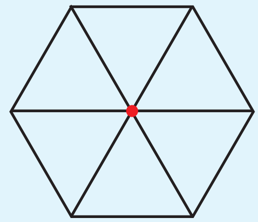
$$\angle ADB = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ.$$




ஆக, *AD*, *BD* என்னும் கோடுகள் ஐங்கோணத்தில் உள்ள D என்ற மூலையில் உள்ள கோணத்தை மூன்று சமபாகங்கள் ஆக்குகின்றன எனக் காணலாம்.

### சேர்த்து வைக்கலாம்

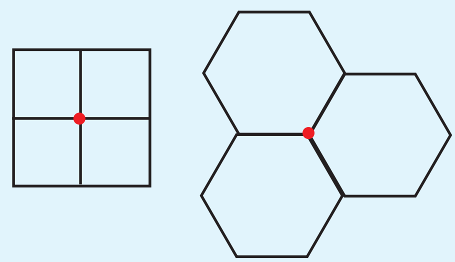
படத்தில் 6 சர்வ சமபக்க முக்கோணங்கள் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி சேர்த்து வைத்திருப்பதைப் பார்க்கவும்.



இதைப் போன்று வேறு எந்தெந்த சர்வசம ஒழுங்கு பலகோணங்களை ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி இவ்வாறு சேர்த்து வைக்கலாம்.

ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணம் $360^\circ$ அல்லவா. சர்வசம ஒழுங்கு பலகோணங்களை ஒரு புள்ளியின் சுற்றிலும் சேர்த்து வைக்க பலகோணத்தின் கோண அளவு 360-இன் காரணியாக இருக்க வேண்டும்.

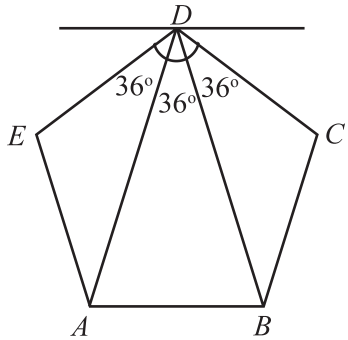
படத்தைப் பார்க்கவும்.



இனி ஏதேனும் ஒழுங்கு பலகோணங்கள் இருக்கின்றனவா?

ஒழுங்கு பலகோணங்கள் இல்லையெனில்?

மேலும் இந்தப் படத்திலேயே $D$ வழியாக, $AB$ க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்து பார்க்கவும்.




இப்போது $D$ இல் உருவான இரு புதிய கோணங்களும் $36^\circ$ அல்லவா? ஏன்?

வேறொரு வினா:

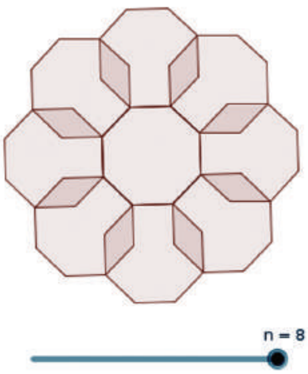
ஓர் ஒழுங்கு பல கோணத்தின் ஒரு கோணம் $144^\circ$ ஆகும். அதன் பக்கங்கள் எத்தனை?

ஒவ்வொரு கோணமும் $144^\circ$.
அப்படியானால் ஒவ்வொரு வெளிக்கோணமும் $36^\circ$.

வெளிக்கோணங்களின் தொகை $360^\circ$ ஆனதால் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$

அதாவது இந்த ஒழுங்கு பல கோணத்திற்கு 10 பக்கங்கள் உண்டு.

Slider எடுத்து அதில் Integer கிளிக் செய்தால் n என்று கிடைக்கும். (Integer என்றால் முழுஎண் என்று பொருள்) min = 3, max=8 என எடுக்கவும். n என்ற எண் 8 என எடுத்தால் 8 பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணம் கிடைக்கும். Reflect about Line எடுத்து பலகோணத்தின் உள்ளேயும் ஒரு பக்கத்திலும் கிளிக் செய்யவும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் செய்தால் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் கிடைக்கும்




n என்ற எண் 6 -ஐ விடக் குறையும் போது படத்திற்கு என்ன சிறப்புத் தன்மை உள்ளது? 6-ஐ விடக் கூடும் போதோ? 6ஆனாலோ?

(1) பக்கங்கள் சமமானதும் கோணங்கள் வேறுபட்டதுமான ஓர் அறுகோ ணம் வரையவும்.

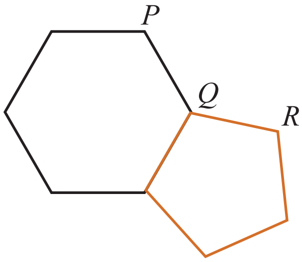
(2) கோணங்கள் எல்லாம் சமமானதும் பக்கங்கள் மாறுபட்டதுமான ஓர் அறுங்கோணம் வரையவும்.

(3) 15 பக்கங்கள் உள்ள ஓர் ஒழுங்கு பல கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் எத்தனை டிகிரி? வெளிக்கோணம் எவ்வளவு?

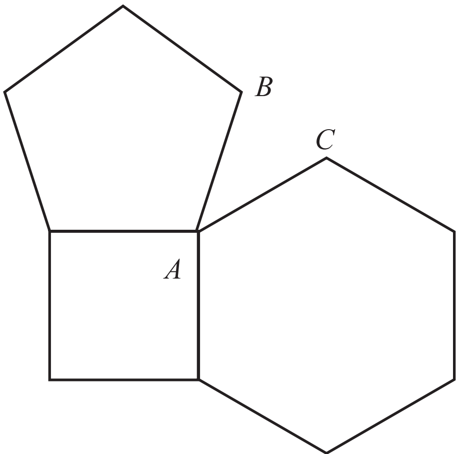
(4) ஓர் ஒழுங்கு பல கோணத்தின் ஒரு கோணம் $168^\circ$. அதன் பக்கங்கள் எத்தனை?

(5) வெளிக்கோணங்கள் எல்லாம் $6^\circ$ ஆன ஓர் ஒழுங்கு பலகோணம் வரைய முடியுமா? $7^\circ$ ஆனாலோ?

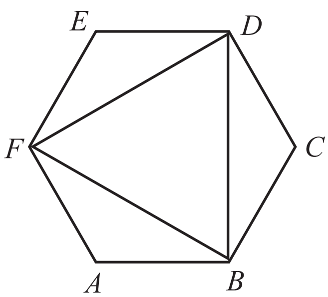
(6) படத்தில் ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணமும் ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணமும் சேர்த்து வைக்கப் பட்டுள்ளது. $\angle PQR$ -இன் கோண அளவு என்ன?



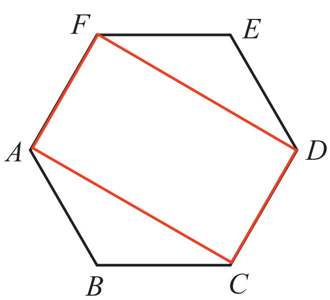

(7) படத்தில் சதுரமும், ஒழுங்கு ஐங்கோணமும் ஒழுங்கு அறுகோணமும் சேர்த்து வரைந்திருப்பதை பார்க்கவும். $\angle BAC$ -இன் கோண அளவு என்ன?




(8) படத்தில் $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் ஆகும். இதில் ஒன்றுவிட்ட மூலைகளை இணைத்தால் கிடைக்கும் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிரூபிக்கவும்.




(9) படத்தில் $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் ஆகும். $ACDF$ ஒரு செவ்வகம் என நிறுவவும்.




**காம்பஸ்**

செங்கோணமானியோ, கோணமானியோ பயன்படுத்தி கோணங்களை அளக்காமல், காம்பஸ் பயன்படுத்தியும் ஒழுங்கு பல கோணங்கள் வரையலாம். இவ்வாறு சமபக்க முக்கோணமும், சமசதுரமும் ஒழுங்கு அறு கோணமும் வரைவதனை நாம் பல வகுப் புகளில் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா.

காம்பஸ் உபயோகித்து ஒழுங்கு ஐங்கோணம் வரைய பல வழிகள் உள்ளன. எளிய ஒரு வழி முனை.

www.cut-the-knot.org/pythagoras/PentagonConstruction

என்ற இணையதளப் பக்கத்திலல் உள்ளது. காம்பஸும் அளவுகோலும் மட்டும் பயன் படுத்தி 17 பக்கங்கள் ஒழுங்கு பலகோணம் வரையலாம் என்று புகழ் பெற்ற கணித மேதை யான கௌஸ் தன்னு டைய பத்தொன்பதாம் வயதில் நிறுவினார். இதைப் பற்றிய கூடுதல் தகவல்கள்.

en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon

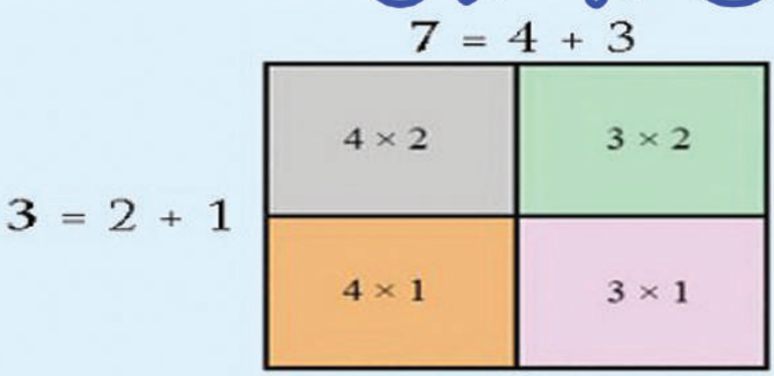
என்ற இணையதளப் பக்கத்தில் உள்ளன.

## மீள்பார்வை

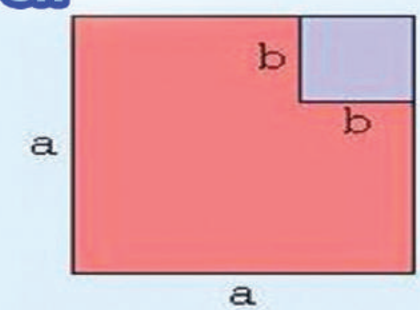
| கற்றல் அடைவுகள் | எனக்கு இயலும் | ஆசிரியரின் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்படுத்த வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை காண்பதற்கு உரிய பல்வேறு வழிமுறைகளை விளக்குதல். | | | |
| • பல கோணத்தின் வெளிக்கோணத்திற்கும் உட்கோணத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை விளக்குதல். | | | |
| • வெளிக் கோணங்களின் தொகையினைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான வழிகளை விளக்குதல் | | | |
| • பல கோணத்திலிருந்து ஒழுங்கு பலகோணத்தைப் புரிந்துகொள்ளுதல். | | | |
| • கோண அளவு உபயோகித்து ஒழுங்கு பல கோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடித்தல் | | | |

# 4

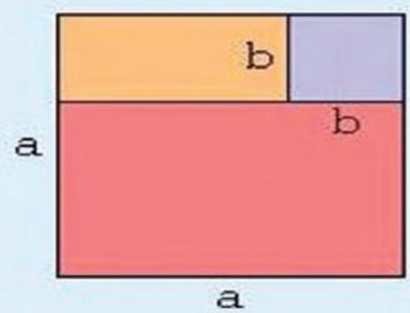
# முற்றொருமைகள்



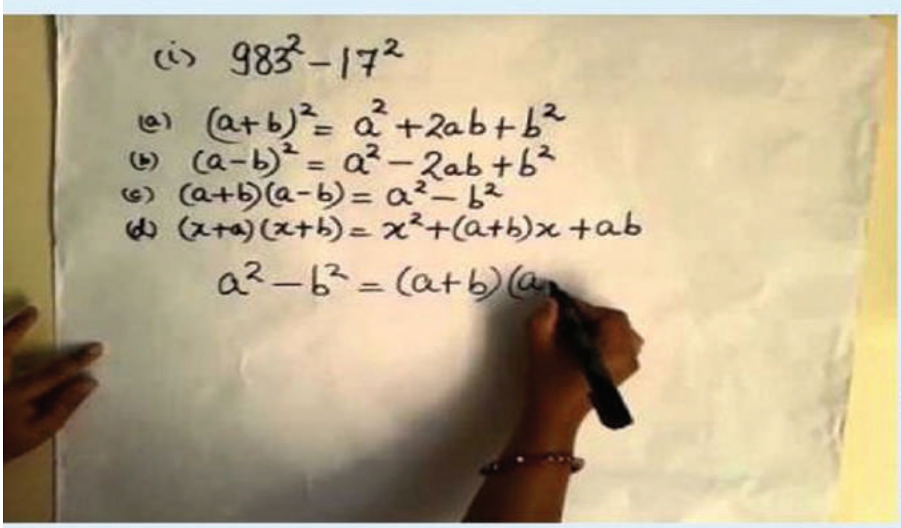
7 = 4 + 3
3 = 2 + 1
4 × 2
3 × 2
4 × 1
3 × 1

b
b
a
a

b
b
a
a

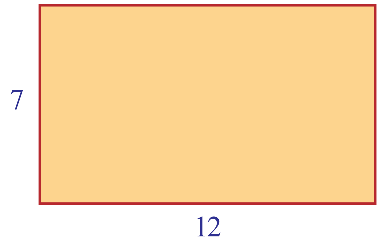



(i) 983² − 17²
(a) (a+b)² = a² + 2ab + b²
(b) (a−b)² = a² − 2ab + b²
(c) (a+b)(a−b) = a² − b²
(d) (x+a)(x+b) = x² + (a+b)x + ab
a² − b² = (a+b)(a

a−b
a+b

## தொகைகளின் பெருக்கல்

ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் 12 சென்டிமீட்டர், அகலம் 7 சென்டிமீட்டர் பரப்பளவு எவ்வளவு?




நீளத்தை 3 சென்டிமீட்டர் கூட்டி செவ்வகம் சிறிது பெரியதாக ஆக்கப்பட்டது.

பரப்பளவு எவ்வளவு அதிகரித்தது?

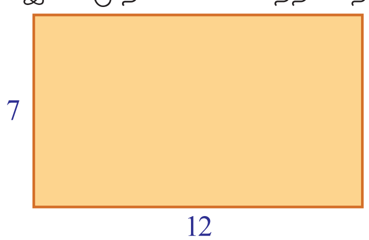
முதல் பரப்பளவு 84. பெரியதாக மாற்றிய போது பரப்பளவு $15 \times 7 = 105$. அதிகரித்தது $105 - 84 = 21$ எனக் கணக்கிடலாம்.

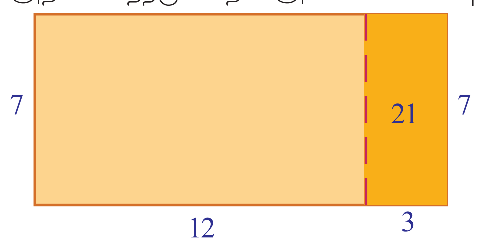
பெருக்கல்பலன்களை வெவ்வேறாகக் கணக்கிடாமலும் இதைச் செய்யலாம்.

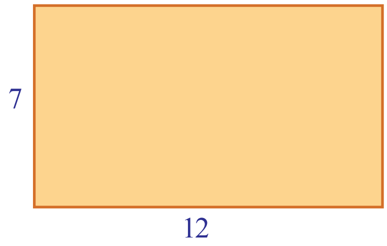
$$(12 + 3) \times 7 = (12 \times 7) + (3 \times 7) = (12 \times 7) + 21$$

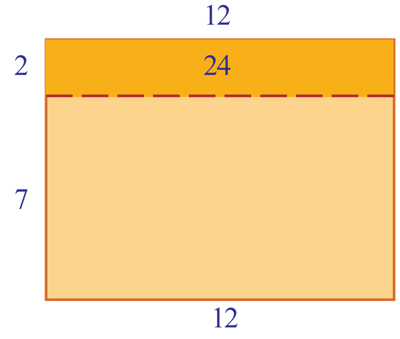
அதிகரித்தது 21 என இதிலிருந்து காணலாம் அல்லவா.

இனி முதல் செவ்வகத்தின் நீளம் அதிகரிப்பதற்குப் பதில் அகலம் 2 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தது எனில்?




இப்போது செய்தது போல் பரப்பளவு எவ்வளவு அதிகரித்தது எனக் கணக்கிடலாம்:

$$12 \times (7 + 2) = (12 \times 7) + (12 \times 2) = (12 \times 7) + 24$$

அப்படியானால் அதிகரித்தது 24.

**முற்றொருமை**

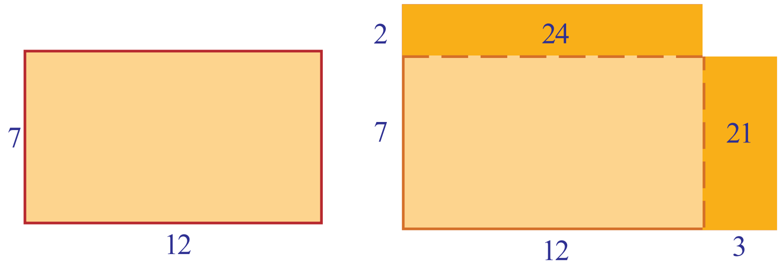
$2x + 3 = 3x + 2$ என்ற சமன்பாட்டில், $x$ என்ற எண்ணை 1 என எடுத்தால் மட்டுமே சரியாகும்

$x + (x + 1) = 2x + 1$

என்ற சமன்பாடோ?

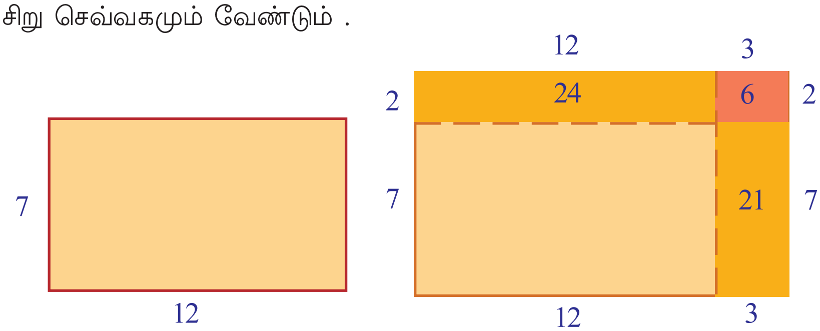
$x$ ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் சரியாகும் எல்லா எண்களுக்கும் சரியாகும் சமன்பாட்டை முற்றொருமை (identity) எனக் கூறலாம்

இனி நீளம் 3 சென்டிமீட்டரும் அகலம் 2 சென்டிமீட்டரும் அதிகரித்தாலோ?




முதலில் பார்த்தது போன்று நீளம் அதிகரித்த போது பரப்பளவில் அதிகரித்தது 21; அகலம் அதிகரித்த போது பரப்பளவில் அதிகரித்தது 24; மொத்தம் அதிகரித்தது $21 + 24 = 45$ எனக் கணக்கிடலாம்.

ஆனால் செவ்வகமாக ஆகவில்லை அல்லவா. அதற்கு மூலையில் ஒரு சிறு செவ்வகமும் வேண்டும் .




பெரிய செவ்வகம் ஆகும் போது பரப்பளவில் அதிகரித்தது 21 + 24+6=51

இதை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். முதல் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $12 \times 7$. இப்போதைய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $15 \times 9$ அல்லவா?. முதல் பெருக்கல்பலனை விட இரண்டாவது பெருக்கல்பலனில் எவை எல்லாம் கூட்டப்பட்டன?

$$15 \times 9 = (12 \times 7) + 24 + 21 + 6$$

கூட்டியவற்றை எல்லாம் பெருக்கல்பலனாக எழுதினாலோ?

$$15 \times 9 = (12 \times 7) + (12 \times 2) + (3 \times 7) + (3 \times 2)$$

அதாவது

$$(12 + 3) \times (7 + 2) = (12 \times 7) + (12 \times 2) + (3 \times 7) + (3 \times 2)$$

இங்கு செய்தது என்ன?

$12 \times 7$ -னை $15 \times 9$ ஆக மாற்றுவதற்கு,

- $15 \times 9$ என்பது $(12 + 3) \times (7 + 2)$ என விரிவாக எழுதப்பட்டது.
- 12 -ஆல் 7 -உம் 2 -உம் பெருக்கப்பட்டது;

- 3 -ஆல் 7 -உம் 2 -உம் பெருக்கப்பட்டது.
- அவை எல்லாம் கூட்டப்பட்டது.

இது போல் $13 \times 15$ என்பதை $14 \times 16$ என ஆக்குவதற்கு எதைக் கூட்ட வேண்டும் எனப் பார்க்கலாம்.

$$14 \times 16 = (13 + 1) \times (15 + 1)$$
$$= (13 \times 15) + (13 \times 1) + (1 \times 15) + (1 \times 1)$$

அதாவது கூட்ட வேண்டியது $13 + 15 + 1 = 29$.

இரண்டு கணிதச் செயல்பாடுகளிலும் ஒரு தொகையை மற்றொரு தொகையால் பெருக்குவது அல்லவா செய்யப்பட்டது. இதற்கு உரிய பொதுவான முறை என்ன?

**மிகை எண்களின் தொகையை, தொகையால் பெருக்க ,முதல் தொகையிலுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் இரண்டாவது தொகையின் ஒவ்வொரு எண்ணாலும் பெருக்கி கூட்ட வேண்டும்**

இதைப் பயன்படுத்தி, $26 \times 74$ செய்து பார்ப்போம்.

$$26 \times 74 = (20 + 6) \times (70 + 4)$$
$$= (20 \times 70) + (20 \times 4) + (6 \times 70) + (6 \times 4)$$
$$= 1400 + 80 + 420 + 24$$
$$= 1924$$

$103 \times 205$ ஆனால்?

$$103 \times 205 = (100 + 3)\ (200 + 5)$$
$$= (100 \times 200) + (100 \times 5) + (3 \times 200) + (3 \times 5)$$
$$= 20000 + 500 + 600 + 15$$
$$= 21115$$

### பெருக்கல் செயல்

$24 \times 36$ சாதாரண முறையில் கணக்கிட்டு எவ்வாறு எழுதலாம்?

$$\begin{array}{r} 24\ \times \\ 36 \\ \hline 144 \\ 720 \\ \hline 864 \end{array}$$

இதில் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் பெருக்கல் பலன்கள் கிடைத்தது எவ்வாறு?

$$\begin{array}{rl} 24\ \times & \\ 36 & \\ \hline 144 & \rightarrow 6 \times (4 + 20) = 24 + 120 \\ 720 & \rightarrow 30 \times (4 + 20) = 120 + 600 \\ \hline 864 & \end{array}$$

இனி தொகைகளின் பெருக்கலைப் பற்றிக் கூறியதை இயற் கணிதத்தில் எழுதலாம்

முதல் தொகையை $x + y$ என்றும் இரண்டாவது தொகையை $u + v$ என்றும் எடுக்கலாம், இவற்றின் பெருக்கல் பலனைக் கண்டுபிடிக்க, $xu$, $xv$, $yu$, $yv$ ஆகிய இவற்றை எல்லாம் கூட்ட வேண்டும்.

**$x, y, u, v$ என்ற எந்த நான்கு மிகை எண்கள் எடுத்தாலும்**

$$(x + y)\ (u + v) = xu + xv + yu + yv$$

மேலும் ஒரு கணக்கு

$$6\frac{1}{2}\times 8\frac{1}{3} = \left(6+\frac{1}{2}\right)\times\left(8+\frac{1}{3}\right)$$

$$= (6\times 8)+\left(6\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times 8\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$= 48+2+4+\frac{1}{6}$$

$$= 54\frac{1}{6}$$

வேறொரு கணிதச் செயலைப் பார்ப்போம். நாட்காட்டியில் உள்ள எண்களின் தொகைகளைப் பற்றிய சில சுவையான கருத்துகளை ஏழாம் வகுப்பில் படித்திருக்கிறோம். (**மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில், **நாட்காட்டி கணக்கு,வேறொரு நாட்காட்டி கணக்கு** ஆகிய பகுதிகள்). இனி அவற்றின் பெருக்கல் பலன்களைப் பற்றிய ஒரு கணிதச் செயலைப் பார்ப்போம்.

நாட்காட்டியில் ஏதேனும் ஒரு மாதத்தை எடுத்து ஒரு சதுரத்தில் வரும் நான்கு எண்களை அடையாளப்படுத்தவும்

| ஞாயிறு | திங்கள் | செவ்வாய் | புதன் | வியாழன் | வெள்ளி | சனி |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |

எதிர் மூலைகளில் வரும் எண்களைப் பெருக்கிப் பார்த்தால்

$14 \times 6 = 84$

$13 \times 7 = 91$

இவற்றின் வித்தியாசம்

$91 - 84 = 7$

இதுபோல் சதுரத்தில் வரும் வேறு நான்கு எண்களை எடுத்துப் பார்க்கவும்.

$22 \times 30 = 660$

$23 \times 29 = 667$

$667 - 660 = 7$

வித்தியாசம் எப்பொழுதும் 7 ஆக இருப்பதன் காரணம் என்ன?

இயற்கணிதம் வாயிலாகப் பார்ப்போம்:

சதுரத்தில் முதல் எண்ணை $x$ என எடுத்தால் நான்கு எண்களை இவ்வாறு எழுதலாம்.

| | |
|---|---|
| $x$ | $x + 1$ |
| $x + 7$ | $x + 8$ |

(ஏழாம் வகுப்பில் **மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில் **நாட்காட்டி கணக்கு** என்ற பகுதியில் இதைப் பார்த்தோம் அல்லவா.)

எதிர் மூலைகளில் வரும் எண்களைப் பெருக்கினால்?

$$x\,(x + 8) = x^2 + 8x$$

$(x + 1)\,(x + 7)$ என்ற பெருக்கலை எவ்வாறு பிரித்து எழுதலாம்?

$$(x + 1)\,(x + 7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

இரு பெருக்கல் பலன்களையும் பார்க்கவும் வித்தியாசம் 7 அல்லவா?

இதில் $x$ ஆக எந்த மிகை எண்ணையும் எடுக்கலாம் அல்லவா. அதாவது நாட்காட்டியின் எந்தப் பகுதியிலும் இது சரியாகும்.

வேறொரு கணிதச் செயல் கீழ்க் காண்பது போல் ஒரு பெருக்கல் அட்டவணையை உருவாக்கவும்:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

நாட்காட்டியில் செய்தது போல் சதுரத்திற்குள் வரும் நான்கு எண்களை அடையாளப்படுத்தவும்.

| | |
|---|---|
| 12 | 15 |
| 16 | 20 |

எதிர்மூலைகளைப் பெருக்குவதற்குப் பதிலாகக் கூட்டிப் பார்க்கவும்

$$12 + 20 = 32$$

$$16 + 15 = 31$$

வேறு ஏதேனும் நான்கு எண்களை இவ்வாறு எடுத்தால்?

| | |
|---|---|
| 35 | 40 |
| 42 | 48 |

$$35 + 48 = 83$$

$$40 + 42 = 82$$

எப்பொழுதும் வித்தியாசம் 1 ஆக இருப்பது ஏன்?

அட்டவணையில் ஒரு வரிசையில் உள்ள எண்கள் எல்லாம் ஒரே எண்ணின் மடங்குகள் அல்லவா. பொதுவாக ஒரு வரிசையில் எண்கள் இவ்வாறே இருக்கும்.

$$x \quad 2x \quad 3x \quad 4x \quad 5x \quad 6x \quad 7x \quad 8x \quad 9x$$

அடுத்த வரிசையின் எண்களையும் பார்ப்போம்.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $2x$ | $3x$ | $4x$ | $5x$ | $6x$ | $7x$ | $8x$ | $9x$ |
| $x+1$ | $2(x+1)$ | $3(x+1)$ | $4(x+1)$ | $5(x+1)$ | $6(x+1)$ | $7(x+1)$ | $8(x+1)$ | $9(x+1)$ |

முதலில் எழுதிய வரிசையில் ஓர் எண்ணை $yx$ என எடுப்போம். இந்த வரிசையின் அடுத்த எண் $x$ இன் அடுத்த பெருக்கல் பலன் அல்லவா அதாவது, $(y + 1)x$.

அடுத்த வரிசையில், $yx$ இன் அடியில் வரும் எண் எது?

அது $x + 1$ -இன் மடங்கு ஆகும். எந்த மடங்கு?

இந்த வரிசையில் அதற்கு அடுத்த எண்ணோ?

அப்படியானால் நான்கு எண்களுடைய சதுரத்தின் பொது வடிவம் இவ்வாறு ஆகும்

| | |
|---|---|
| $yx$ | $(y + 1)x$ |
| $y(x + 1)$ | $(y + 1)(x + 1)$ |

இவற்றில்

$$(y+1)\,x = yx + x$$
$$y\,(x+1) = yx + y$$

இவற்றின் தொகை

$$(y+1)\,x + y\,(x+1) = 2yx + y + x$$

பிற இரண்டு மடங்குகளில் $yx$ ஐ ஒன்றும் செய்வதற்கு இல்லை; $(y+1)\ (x+1)$ என்பதை விரிவாக எழுதினால்?

$$(y+1)\,(x+1) = yx + y + x + 1$$

இரண்டாவது ஜோடி மடங்குகளின் தொகை

$$yx + (y+1)\,(x+1) = 2yx + y + x + 1$$

அப்போது எதிர் மூலைகளின் ஒரு தொகை $2yx + x + y$;அடுத்த தொகை $2yx + y + x + 1$; இவற்றின் வித்தியாசம் 1

**இந்தக் கணிதச் செயலைச் செய்யும் போது,**

**$(y+1)\ (x+1) = yx + y + x + 1$ எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. இதைச் சாதாரண மொழியில் ஒரு பொதுத் தத்துவமாக எவ்வாறு கூறலாம்? இதைப் பயன்படுத்தி சில பெருக்கல்களை மனக்கணக்காகச் செய்ய இயலுமா?**

**இந்தத் தத்துவத்தில், 1 –க்குப் பதிலாக 2 எடுத்தால்?**

(1) கீழ்க் காண்பது போல் எண்கள் எழுதவும்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

i) நாட்காட்டியில் செய்தது போல் நான்கு எண்கள் உள்ள ஒரு சதுரத்தை அடையாளப்படுத்தி எதிர் மூலை வழியாகப் பெருக்கி வித்தியாசம் கண்டுபிடிக்கவும்.எந்தச் சதுரத்தினுடையவும் நான்கு எண்கள் எடுத்தால் ஒரே வித்தியாசம் கிடைக்குமா?

இது ஏன் என்று இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும்.

iii) நான்கு எண்கள் உள்ள சதுரத்திற்குப் பதில் ஒன்பது எண்கள் உள்ள ஒரு சதுரம் எடுத்து நான்கு மூலைகளில் உள்ள எண்களை மட்டும் அடையாளப்படுத்தவும்.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 13 | 14 | 15 |
| 18 | 19 | 20 |

எதிர்மூலைகளின் பெருக்கல் பலன்களினுடைய வித்தியாசம் என்ன? இயற் கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

(2) முதலில் பார்த்த பெருக்கல் அட்டவணையில் நான்கு எண்கள் உள்ள சதுரத்திற்குப் பதில் ஒன்பது எண்கள் உள்ள ஒரு சதுரம் எடுத்து நான்கு மூலைகளில் உள்ள எண்களை மட்டும் அடையாளப்படுத்தவும்

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 8 | 10 |
| 9 | 12 | 15 |
| 12 | 16 | 20 |

i) எதிர்மூலைகளிலுள்ள தொகைகளின் வித்தியாசம் என்ன?

ii) இவ்வாறான சதுரங்களில் எல்லாம் வித்தியாசம் ஒரே எண்ணாகக் கிடைப்பது ஏன் என்று இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும்.

iii) பதினாறு எண்களின் சதுரம் எடுத்தாலோ?

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள செயல்களைப் பார்க்கவும்:

$$1 \times 4 = (2 \times 3) - 2$$

$$2 \times 5 = (3 \times 4) - 2$$

$$3 \times 6 = (4 \times 5) - 2$$

$$4 \times 7 = (5 \times 6) - 2$$

i) இந்த வரிசையில் அடுத்தடுத்த இரு வரிசைகளின் செயல்கள் எழுதுக

ii) அடுத்தடுத்த நான்கு எண்ணல் எண்களில் முதல் மற்றும் இறுதி எண்களின் பெருக்கல் பலனுக்கும் இவற்றிற்கு இடையில் உள்ள இரு எண்களின் பெருக்கல் பலனுக்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன?

iii) இந்தப் பொதுத் தத்துவத்தை இயற்கணிதத்தில் எழுதி விளக்கவும்.

(4) $46 \times 28$ என்ற பெருக்கல் பலனைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டிய ஒருமுறை கீழே தரப்பட்டுள்ளது

| | | |
|---|---|---|
| $4 \times 2 = 8$ | $8 \times 100$ | 800 |
| $(4 \times 8) + (6 \times 2) = 44$ | $44 \times 10$ | 440 |
| $6 \times 8$ | | 48 |
| $46 \times 28$ | | 1288 |

i) வேறு சில ஈரிலக்க எண்களில் இந்த முறையைப் பரிசோதிக்கவும்.

ii) இது சரியாக உள்ளதன் காரணத்தை இயற்கணித முறையில் விளக்கவும் ( ஈரிலக்க எண்களை எல்லாம் $10m + n$ என இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதலாம் என ஏழாம் வகுப்பில் **எண்களும் இயற் கணிதமும்** என்ற பாடத்தில் **ஈரிலக்க எண்கள்** என்ற பகுதியில் பார்த்ததை நினைவூட்டவும்)

## தொகையின் வர்க்கம்

$51^2$ எவ்வளவு?

பெருக்கிப் பார்க்காமல் கணக்கிடுவதற்கு உரிய ஒருமுறையினை ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்திருக்கிறார்கள் அல்லவா. (**வர்க்கமும் வர்க்கமூலமும்** என்ற பாடத்தில் **அடுத்த வர்க்கம்** என்ற பகுதி)

அதன்படி $50^2$ உடன் 50 உம் 51 உம் கூட்டினால் போதும் அதாவது,

$$51^2 = 50^2 + 50 + 51 = 2601$$

இது சரியாவது ஏன்?

அதைத் தெரிந்து கொள்ள, $51^2$ -ஐ விரிவாக எழுதலாம்.

$51^2 = 51 \times 51 = (50 + 1)(50 + 1)$

இதை நான்கு எண்களின் பெருக்கல் பலன்களின் தொகையாக எழுதலாம் அல்லவா

$$\begin{aligned}(50 + 1)(50 + 1) &= (50 \times 50) + (50 \times 1) + (1 \times 50) + (1 \times 1)\\ &= 2500 + 50 + 50 + 1\\ &= 2500 + 50 + 51\end{aligned}$$

இது போல் எந்த வர்க்கத்தையும் விரிவாக எழுதலாம்.

இதை இயற்கணிதத்தில் எழுதுவது எப்படி?

$x^2$ -லிருந்து $(x + 1)^2$ கிடைக்க, $x^2$ உடன் $x$ -உம், அடுத்த எண்ணான $x + 1$ உம் கூட்ட வேண்டும். இது எதனால் சரியாக உள்ளது என அறிவதற்கு முன்னர் கண்ட பெருக்கல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x+1)(x+1)\\ &= (x\times x)+(x\times 1)+(1\times x)+(1\times 1)\\ &= x^2+x+(x+1)\end{aligned}$$

$x+(x+1)=2x+1$ அல்லவா, அப்போது

$$(x+1)^2 = x^2+2x+1$$

இதைப் பயன்படுத்தி

$$61^2=(60+1)^2=60^2+(2\times 60)+1=3600+120+1=3721$$

எனக் கணக்கிடவும் செய்யலாம்.

இனி $75^2$ கண்டுபிடிக்க வேண்டும் என்று வைத்துக் கொள்வோம். இதை $(74+1)^2$ என எழுதி செய்யத் தொடங்கினால் $74^2$ கண்டுபிடிக்க வேண்டி வரும்.

$(70+5)^2$ என எழுதினால்?

இவ்வாறு விரிவாக எழுதலாம்

$$\begin{aligned}75^2 &= (70+5)(70+5)\\ &= 70^2+(70\times 5)+(5\times 70)+5^2\\ &= 4900+350+350+25\\ &= 5625\end{aligned}$$

இரு எண்களின் பெருக்கல் பலனின் வர்க்கமும் வர்க்கங்களின் பெருக்கல் பலனும் சமம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோம்.

இரு எண்களின் தொகையின் வர்க்கமும் வர்க்கங்களின் தொகையும் சமம் ஆகுமா?

$103^2$ ஆனால்?

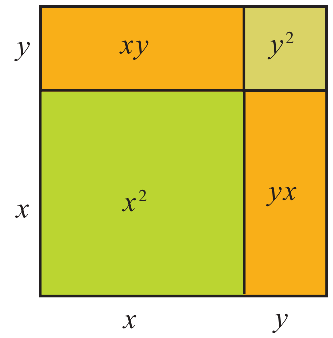
$$\begin{aligned}103^2 &= (100+3)(100+3)\\ &= 10000+300+300+9\\ &= 10609\end{aligned}$$

இவற்றில் எல்லாம் பார்த்ததைப் பொதுவாக எழுதலாம்

**இரு மிகை எண்களின் தொகையின் வர்க்கம் எண்களின் வர்க்கங்களினுடையவும் பெருக்கல் பலனின் இரு மடங்குகளினுடையவும் தொகை ஆகும்**

எடுத்துக்காட்டாக

$$\left(10\frac{1}{2}\right)^2=\left(10+\frac{1}{2}\right)^2=10^2+\left(2\times 10\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=100+10+\frac{1}{4}=110\frac{1}{4}$$




இதை இயற்கணித மொழியில் இவ்வாறு எழுதலாம்

**$x, y$ என்ற எந்த இரண்டு மிகை எண்களை எடுத்தாலும்**

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$$

(1) கீழே காணப்படும் எண்களின் வர்க்கங்களை மனக்கணக்காகக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) 52 (ii) 105 (iii) $20\frac{1}{2}$ (iv) 10.2

முழு வர்க்கங்களின் சில வரிசைகள் எவ்வாறு கிடைக்கின்றன என்று இந்தத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி அறிந்து கொள்ளலாம். இந்தச் செயல்களைப் பார்க்கவும்

$$1 \times 3 = 3 = 2^2 - 1$$
$$2 \times 4 = 8 = 3^2 - 1$$
$$3 \times 5 = 15 = 4^2 - 1$$

இந்த வரிசையில் மேலும் சில செயல்களை எழுதிப் பார்க்கவும் இது போல் தொடருமா?

ஒன்றுவிட்ட எந்த இரு எண்ணல் எண்களினுடையவும் பெருக்கல்பலன், நடுவில் உள்ள எண்ணின் வர்க்கத்திலிருந்து ஒன்று குறைவாக இருக்குமா?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திப் பார்ப்போம். ஒன்றுவிட்ட எண்களை $x$, $x + 2$ என எடுக்கலாம். அவற்றின் பெருக்கல் பலன்.

$$x(x + 2) = x^2 + 2x$$

இங்கு நடுவில் உள்ள எண் $x + 1$. அதன் வர்க்கத்திலிருந்து 1 குறைத்தாலோ?

$$(x + 1)^2 - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 1 = x^2 + 2x$$

அப்போது

$$x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$$

இதில் $x$ ஆக 1, 2, 3, .... என எடுத்தால்,மேலே எழுதிய வரிசை கிடைக்கும் அல்லவா.

வேறொரு கணிதச் செயலைப் பார்ப்போம்

$$3 = 2^2 - 1^2$$
$$5 = 3^2 - 2^2$$
$$7 = 4^2 - 3^2$$

ஒன்றைவிடப் பெரிய ஒற்றை எண்களை எல்லாம் இவ்வாறு அடுத்தடுத்த எண்ணல் எண்களின் வர்க்க வித்தியாசமாக எழுத இயலுமா?

ஒன்றை விடப் பெரிய எந்த ஒற்றை எண்ணையும் $2x + 1$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம் என ஏழாம்வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா. (**எண்களும் இயற் கணிதமும்** என்ற பாடத்தில் **பொதுவடிவங்கள்** என்ற பகுதி).

இதை அடுத்தடுத்த இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எவ்வாறு எழுதலாம்?

$x^2$ என்ற எண்ணிலிருந்து $(x + 1)^2$ என்ற எண்ணை அடைய, $2x + 1$ என்ற எண்ணை அல்லவா கூட்ட வேண்டும்.

அப்போது $2x + 1$ கிடைக்க $(x + 1)^2$ இல் இருந்து $x^2$ ஐக் கழித்தால் போதும், அதாவது

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2$$

இதில் $x$ ஆக 1, 2, 3, … என எடுக்கும் போது, $2x + 1$ ஆகஒன்றை விட பெரிய எல்லா ஒற்றை எண்களும் கிடைக்கும் $x$, $x + 1$ ஆக அடுத்தடுத்த எல்லா எண்ணல் எண்களும் கிடைக்கும்.

இவ்வாறு ஒன்றைவிட பெரிய எந்த ஒற்றை எண்ணையும் அடுத்தடுத்த முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம் எனக் காணலாம்.

வர்க்கங்களின் பொதுவான சில பண்புகளை விளக்குவதற்கும் தொகையின் வர்க்கத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒற்றை எண்களின் வர்க்கங்களும் ஒற்றை எண்களே.

இது ஏன்?

ஒற்றை எண்களின் வர்க்கம் $(2x + 1)^2$ என்ற வடிவத்தில் அல்லவா.

$$(2x + 1)^2 = (2x)^2 + (2 \times 2x \times 1) + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

இதில்

$$4x^2 + 4x = 4(x^2 + x) = 4x\,(x + 1)$$

என எழுதலாம். அப்போது

$$(2x + 1)^2 = 4x\,(x + 1) + 1$$

இதில் $4x\,(x + 1)$ என்ற எண் 4 -இன் மடங்காகும் எனவே இது இரட்டை எண் ஆகும், அதனுடன் 1 கூட்டியது ஒற்றை எண் ஆகும்.

இங்கு வேறொரு கருத்தும் கிடைத்தது.

$4x\,(x + 1) + 1$ -ஐ 4 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 அல்லவா. இதிலிருந்து எந்த ஒற்றை எண்ணின் வர்க்கத்தையும் 4 -ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 எனக் காணலாம்.

மேலும் சிந்திப்போம்.

$x, x + 1$ இவை அடுத்தடுத்த எண்ணல் எண்கள் என்பதால் அவற்றில் ஒன்று இரட்டை எண் ஆகும். அது எந்த எண் ஆனாலும், $x\,(x + 1)$ இரட்டை எண் ஆகும். எனவே $4x\,(x + 1)$ என்ற எண் 8 -இன் மடங்காகும்

அப்போது எந்த ஒற்றை எண்ணின் வர்க்கத்தையும் 8 -ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கும் என்று காணலாம்.

### 76 இன் விளையாட்டு

$$76^2 = 5776$$
$$176^2 = 30976$$
$$276^2 = 76176$$

76 இல் முடியும் வேறு எண்களினுடையவும் வர்க்கம் கண்டுபிடித்துப் பார்க்கவும்

எத்தகைய சிறப்பியல்பினை காண்கிறீர்கள்? எதனால்?

76 இல் முடியும் எந்த எண்ணினையும் $100x+76$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$(100x+76)^2 = 10000x^2 + 15200x + 5776.$

$x$ எந்த எண் ஆனாலும் $10000x^2$ னுடையவும் $15200x$ னுடையவும் தொகையில் ஒன்று மற்றும் பத்தாம் இடங்களில் பூஜ்ஜியம் தான் வரும் அல்லவா இவற்றின் தொகையுடன் 5776 -ஐக் கூட்டும் போது இறுதியில் உள்ள ஈரிலக்கங்கள் 76 ஆக இருக்கும்.

76 -க்குப் பதில் வேறு ஏதேனும் ஈரிலக்க எண்களுக்கு இந்தச் சிறப்பியல்பு உண்டா?

(1) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, ... என்ற எண்களின் வர்க்கங்களைக் கண்டுபிடிக்க பொதுவான ஏதேனும் வழிமுறை உண்டா அதை இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும்.

(2) $37^2$ கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய ஒரு வழிமுறை தான் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது:

| | | |
|---|---|---|
| $3^2 = 9$ | $9 \times 100$ | 900 |
| $2 \times (3 \times 7) = 42$ | $42 \times 10$ | 420 |
| $7^2$ | | 49 |
| $37^2$ | | 1369 |

i) வேறு சில ஈரிலக்க எண்களில் இந்த முறையைப் பரிசோதித்துப் பார்க்கவும்.

ii) இது சரியாக இருப்பதன் காரணத்தை இயற்கணித முறையில் விளக்கவும்

iii) 5 -இல் முடிவுறும் எண்களின் வர்க்கம் காண்பதற்கு உரிய எளிய வழியைக் கண்டுபிடிக்கவும்

(3) இந்தச் செயல்களைப் பார்க்கவும்:

$$1^2 + (4 \times 2) = 3^2$$
$$2^2 + (4 \times 3) = 4^2$$
$$3^2 + (4 \times 4) = 5^2$$

i) தொடர்ந்து வரும் மேலும் இரண்டு செயல்கள் எழுதுக

ii) இதிலிருந்து கிடைக்கும் பொதுத்தத்துவம் என்ன? இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

(4) 3 -இன் மடங்கு அல்லாத எந்த எண்ணல் எண்ணின் வர்க்கத்தையும் 3 -ஆல் மீதியில்லாமல் வகுத்தால் மீதி 1 என இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும்.

(5) 3 -இல் முடிவுறும் எண்களின் வர்க்கங்கள் எல்லாம் முடிவுறுவது 9-இல் ஆகும் என நிறுவுக.

5 -இல் முடிவுறும் எண்கள் எனில்? 4 இல் முடிவுறும் எண்கள் எனில்?

## வித்தியாசமான பெருக்கல்

சில பெருக்கல் செயல்களைத் தொகைகளாக விரித்தெழுதி கணக்கிடுவதற்கு உரிய முறையைப் பார்த்தோம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக

$$302 \times 205 = (300 + 2) \times (200 + 5) = 60000 + 1500 + 400 + 10 = 61910$$

இனி $298 \times 195$ கணக்கிட வேண்டுமானால்?

$$298 \times 195 = (300 - 2) \times (200 - 5)$$

என விரிவாக எழுதலாம். இதனை முதல் கணக்கினைப் போன்று நான்கு பெருக்கல் பலன்களாக விரிவாக எழுதுவது எவ்வாறு?

முதலில்

$$298 \times 195 = (300 - 2) \times 195$$

என எழுதலாம். இதை விரிவாக எழுதலாம் அல்லவா:

$$(300 - 2) \times 195 = (300 \times 195) - (2 \times 195)$$

இனி $195 = 200 - 5$ என எழுதி இந்த இரண்டு பெருக்கல்களையும் விரிவாக எழுதலாம்:

$$300 \times 195 = 300 \times (200 - 5) = 60000 - 1500 = 58500$$

$$2 \times 195 = 2 \times (200 - 5) = 400 - 10 = 390$$

இவற்றை எல்லாம் சேர்த்து வாசித்தால்

$$\begin{aligned} 298 \times 195 &= (300 - 2) \times 195 \\ &= (300 \times 195) - (2 \times 195) \\ &= 58500 - 390 \end{aligned}$$

58500 என்ற எண்ணிலிருந்து 390 குறைப்பதற்கான எளிய வழி, 400 கழித்து 10 கூட்டுவதே ஆகும்.

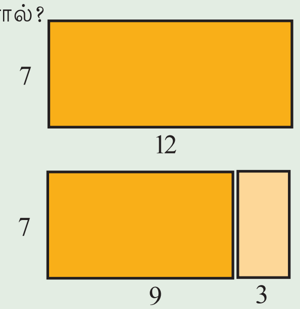
அதாவது,

$$58500 - 390 = 58500 - 400 + 10 = 58\,110$$

(ஏழாம் வகுப்பில் **மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில் **கழிப்பது குறைந்தால்** என்ற பகுதி)

**நீளம் குறைந்தால்**

12 சென்டிமீட்டர் நீளமும் 7 சென்டிமீட்டர் அகலமும் உள்ள செவ்வகத்திலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் நீளத்தைக் குறைத்து சிறிய செவ்வகம் ஆக்கினால்?




பரப்பளவு எவ்வளவு குறைந்தது? இங்கே செய்த செயல் என்ன?

$$(12 - 3) \times 7 = (12 \times 7) - (3 \times 7)$$

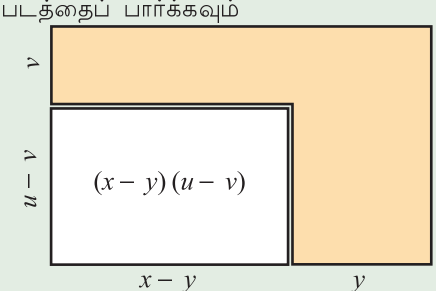
இதே போல் 397 -ஐ 199 -ஆல் பெருக்குவதைச் செய்து பார்ப்போம்.

$$\begin{aligned} 397 \times 199 &= (400 - 3) \times 199 \\ &= (400 \times 199) - (3 \times 199) \\ 400 \times 199 &= 400 \times (200 - 1) \\ &= (400 \times 200) - (400 \times 1) \\ &= 80000 - 400 \\ &= 79600 \\ 3 \times 199 &= 3 \times (200 - 1) \\ &= 600 - 3 \\ &= 597 \end{aligned}$$

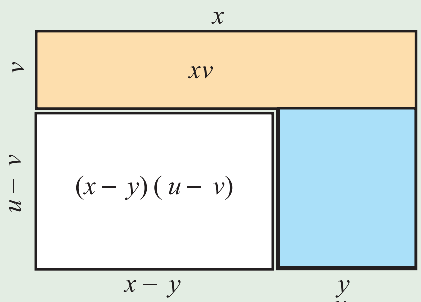
எல்லாம் சேர்த்து வாசித்தாலோ?

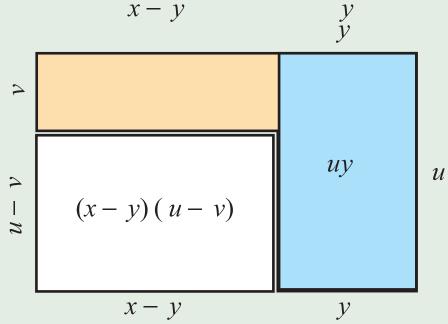
### வித்தியாசப் பெருக்கல் வடிவியல் வாயிலாக

ஒரு செவ்வகத்தின் இரண்டு பக்கங்களையும் குறைத்து செவ்வகத்தை சிறிதாக ஆக்கிய படத்தைப் பார்க்கவும்

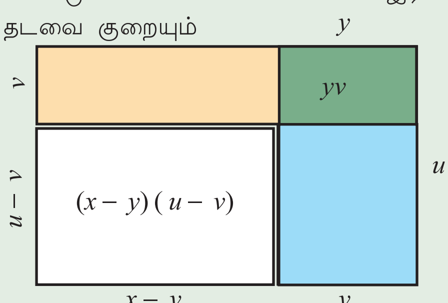



இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.




மேல் பகுதியிலும் வலதுபக்கத்திலும் உள்ள இரண்டு செவ்வகங்களைக் குறைத்தால் மேல் பக்க மூலையில் உள்ள செவ்வகம் இரண்டு தடவை குறையும்




அதனைச் சரியாக்குவதற்கு இந்தச் செவ்கத்தை ஒரு தடவை கூட்ட வேண்டும். அதாவது

$$(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$$

$$397 \times 199 = 79600 - 597$$

597 -னைக் கழிப்பதை விட எளிய வழி 600 -ஐக் கழித்து 3 கூட்டுவதாகும்

அப்போது $397 \times 199 = 79600 - 600 + 3 = 79003$

இங்குச் செய்த செயல்களை எல்லாம் ஒன்றாக எழுதிப் பார்ப்போம் .

$$397 \times 199 = 80000 - 400 - 600 + 3$$

மேலும் கூடி விரிவாக எழுதினால்,

$$397 \times 199 = (400 \times 200) - (400 \times 1) - (3 \times 200) + (3 \times 1)$$

இதுபோல்

$$\begin{aligned} 398 \times 197 &= (400 - 2) \times (200 - 3) \\ &= (400 \times 200) - (400 \times 3) - (2 \times 200) + (2 \times 3) \\ &= 80000 - 1200 - 400 + 6 \\ &= 78400 + 6 \\ &= 78406 \end{aligned}$$

இதை ஒரு பொதுத்தத்துவமாக சாதாரண மொழியில் கூறுவது கடினம். இயற்கணிதத்தில் எனில்?

**$x > y,\ u > v$ எனும் எந்த மிகை எண்களை எடுத்தாலும்**

$$(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$$

இதைப்பயன்படுத்தி இரண்டு எண்களின் வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தைக் கணக்கீடு செய்வதற்கான பொதுவான முறையினைக் கண்டுபிடிக்கலாம்:

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= (x - y) \times (x - y) \\ &= (x \times x) - (x \times y) - (y \times x) + (y \times y) \\ &= x^2 - xy - yx + y^2 \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 \end{aligned}$$

இதில் முதலில் $x^2$ என்ற எண்ணிலிருந்து $xy$ என்ற எண்ணைக் கழிக்க வேண்டும் தொடர்ந்து மேலும் ஒரு தடவை அதே எண்ணைக் கழிக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒன்றன்பின் ஒன்றாகக் கழிப்பதற்கு பதில், $xy + xy = 2xy$ என்ற தொகையைக் கழித்தால் போதும் அல்லவா?. (ஏழாம் வகுப்பில் **மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில், **தொகையும் வித்தியாசமும்** என்ற பகுதி).

அதாவது,

$$x^2 - xy - xy = x^2 - (xy + xy) = x^2 - 2xy$$

இனி முதலில் முடிவுபெற்ற இடத்திலிருந்து தொடரலாம்:

$$(x - y)^2 = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

இதை ஒரு பொதுத் தத்துவமாக எழுதலாம்:

**$x > y$ ஆன எந்த மிகை எண்கள் எடுத்தாலும்**

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

இதைச் சாதாரண மொழியிலும் கூறலாம்:

**இரண்டு மிகை எண்களின் வித்தியாசத்தின் வர்க்கம் அவற்றின் வர்க்கங்களின் தொகையிலிருந்து பெருக்கல் பலனின் இரண்டு மடங்கைக் குறைத்தது ஆகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - (2 \times 100 \times 1) + 1^2$$

$$= 10000 - 200 + 1 = 9800 + 1 = 9801$$

இனி இந்தக் கணிதச் செயலைப் பார்க்கவும்:

$$2\,(2^2 + 1^2) = 10 = 3^2 + 1^2$$

$$2\,(3^2 + 2^2) = 26 = 5^2 + 1^2$$

$$2\,(5^2 + 1^2) = 52 = 6^2 + 4^2$$

$$2\,(4^2 + 6^2) = 104 = 10^2 + 2^2$$

சில எண்ணல் எண்களின் ஜோடிகளை எடுத்து வர்க்கங்களின் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதன் இரு மடங்கை ஒரு ஜோடி முழு வர்க்கங்களின் தொகையாக எழுத இயலுமா?

தொடங்கும் ஜோடிக்கும் இறுதியில் எழுதும் ஜோடிக்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

முதலில் எடுத்த ஜோடியின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் கண்டுபிடித்து பார்க்கவும்

இதன் காரணம் என்ன?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தலாம். தொடங்கும் ஜோடியை $x, y$ என எடுக்கலாம். அப்போது தொகையின் வர்க்கம்

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ஜோடியில் பெரிய எண் $x$ என எடுத்தால் வித்தியாசத்தின் வர்க்கம்

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

இவற்றைக் கூட்டினாலோ? $x^2, y^2$ இரு தடவை வரும்; $2xy$-ஐக் கூட்டவும் கழிக்கவும் செய்ததால் இது இல்லாமல் போகும். அதாவது

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2 (x^2 + y^2)$$

இதைத் திருப்பி $2 (x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$ என எழுதினால். தொடங்கிய கணக்குகளுக்குக் காரணம் ஆயிற்று.

இரண்டு எண்களின் தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் வர்க்கத்தைக் கூட்டினால், எண்களின் வர்க்கத்தைக் கூட்டுவதன் இரு மடங்கு கிடைக்கும்

தொகையின் வர்க்கத்திலிருந்து வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தைக் கழித்தால்?

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2 - 2xy)$$

அதாவது, $x^2 + y^2$, $2xy$ எனும் எண்களின் தொகையிலிருந்து அவற்றின் வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும். அது $2xy$ என்ற எண்ணின் இரு மடங்கு அல்லவா. (ஏழாம் வகுப்பில் **மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில், **தொகையும் வித்தியாசமும்** என்ற பகுதி). அதாவது,

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2 \times 2xy = 4xy$$

இதைத் திருப்பி எழுதினால்,

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

எடுத்துக்காட்டாக

$$8 = 4 \times 2 \times 1 = 3^2 - 1^2$$

$$12 = 4 \times 3 \times 1 = 4^2 - 2^2$$

$$16 = 4 \times 4 \times 1 = 5^2 - 3^2$$

$$20 = 4 \times 5 \times 1 = 6^2 - 4^2$$

இவ்வாறு 8 முதல் உள்ள 4 -இன் மடங்குகளை எல்லாம் இரு முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம்.

### பைதாகரஸ் மூவெண்கள்

மூன்று எண்ணல் எண்களில் இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் தொகை மூன்றாவது எண்ணின் வர்க்கத்திற்குச் சமமானால், இந்த மூன்று எண்களையும் ஒரு பைதாகரஸ் மூவெண் என்று கூறலாம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோம்

எடுத்துக்காட்டாக

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

எனவே 3, 4, 5 ஆகிய மூன்று எண்கள் ஒரு பைதாகரஸ் மூவெண்ணாகும் ஏறத்தாழ கி.மு. இரண்டாயிரத்தில் பாபிலோனியாவிலிருந்து கிடைத்த ஒரு களிமண் பலகையில் இத்தகைய மூவெண்களின் அட்டவணை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இத்தகைய எல்லா மூவெண்களையும் கண்டுபிடிக்க ஒரு வழியுண்டு. $m$, $n$ என்ற ஏதேனும் இரண்டு எண்ணல் எண்கள் எடுக்கவும். கீழே காண்பது போல $x$, $y$, $z$ என்ற எண்களை எடுக்கவும்.

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

இப்போது

$$x^2 + y^2 = z^2$$

எனக் கண்டுபிடிப்பது கடினம் அல்லவா

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= z^2 \end{aligned}$$

சுமார். கி. மு. மூன்றாம் நூற்றாண்டிலேயே கிரீசின் கணித வல்லுனர்களுக்கு இந்த முறையை அறிந்திருந்தார்கள்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) 49 ii) 98 iii) $7\frac{3}{4}$ iv) 9.25

(2) இந்தக் கணிதச் செயல்களைப் பார்க்கவும்:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \qquad 2 = 2 \times 1^2$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2} \qquad 8 = 2 \times 2^2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2} \qquad 18 = 2 \times 3^2$$

இவற்றின் பொதுத் தத்துவத்தை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

(3) சில எண்ணல் எண்களை இரு முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக இரு முறைகளில் எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$$24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$$

$$32 = 9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2$$

$$40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$$

i) 24 முதல் உள்ள 8 -இன் மடங்குகளை எல்லாம் இவ்வாறு இரண்டு முறைகளில் எழுதும் முறையை இயற்கணிதம மூலம் விளக்கவும்.

ii) 48 முதல் உள்ள 16 -இன் மடங்குகளை எத்தனை முறைகளில் முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம்?

## தொகையும் வித்தியாசமும்

எண்களைத் தொகைகளாகவும், வித்தியாசங்களாகவும் விரிவாக எழுதி பெருக்கல் பலனைக் கண்டோம் அல்லவா.எடுத்துக்காட்டாக

$$203 \times 302 = (200 + 3) \times (300 + 2) = 60000 + 400 + 900 + 6 = 61306$$

$$197 \times 298 = (200 - 3) \times (300 - 2) = 60000 - 400 - 900 + 6 = 58706$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

$203 \times 298$ -ஐ எவ்வாறு விரிவாக எழுதுவது எளிதாக அமையும்?

$$203 \times 298 = (200 + 3) \times (300 - 2)$$

இதனைக் கணக்கிட முன்னர் செய்ததுபோல முதலில் 203 -ஐ மட்டும் விரிவாக எழுதலாம்.

$$203 \times 298 = (200 + 3) \times 298 = (200 \times 298) + (3 \times 298)$$

இனி 298 ஐ விரித்தெழுதி. இந்த இரண்டு பெருக்கல்களையும் தனித் தனியாகச் செய்யலாம்.

$$200 \times 298 = 200 \times (300 - 2) = 60000 - 400 = 59600$$

$$3 \times 298 = 3 \times (300 - 2) = 900 - 6 = 894$$

எல்லாச் செயல்களையும் சேர்த்து எழுதினால்

$$\begin{aligned} 203 \times 298 &= (200 + 3) \times 298 \\ &= (200 \times 298) + (3 \times 298) \\ &= 59600 + 894 \\ &= 60494 \end{aligned}$$

பொதுவான முறையைப் புரிந்து கொள்வதற்காகச் செய்த செயல்களை எல்லாம் ஒன்றாக எழுதலாம்:

$$203 \times 298 = 60000 - 400 + 900 - 6$$

விவரித்து எழுதினால்

$$(200 + 3) \times (300 - 2) = (200 \times 300) - (200 \times 2) + (3 \times 300) - (3 \times 2)$$

இதுபோன்று

$$\begin{aligned} 105 \times 197 &= (100 + 5) \times (200 - 3) \\ &= (100 \times 200) - (100 \times 3) + (5 \times 200) - (5 \times 3) \\ &= 20000 - 300 + 1000 - 15 \\ &= 20000 + 700 - 15 \\ &= 20685 \end{aligned}$$

இந்தக் கணக்கீட்டின் இயற்கணித வடிவத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்:

**$x, y, u, v$ என்ற மிகை எண்களில் $u > v$ எனில்**

$$(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$$

இதைப் பயன்படுத்தி இரு எண்களின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் பெருக்குவதற்கான பொதுவான முறையையும் கண்டுபிடிக்கலாம்:

$$\begin{aligned} (x + y)(x - y) &= (x \times x) - (x \times y) + (y \times x) - (y \times y) \\ &= x^2 - xy + yx - y^2 \\ &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

**$x > y$ ஆன எந்த மிகை எண்கள் எடுத்தாலும்**

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

சாதாரண மொழியில் கூறினால்?

**இரண்டு மிகை எண்களின் தொகையினுடையவும் வித்தியா சத்தினுடையவும் பெருக்கல்பலன் வர்க்கங்களின் வித்தியா சத்துக்குச் சமம் ஆகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக

$$205 \times 195 = (200+5)\times(200-5) = 200^2 - 5^2 = 40000 - 25 = 39975$$

$$9\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = \left(9+\frac{1}{2}\right)\times\left(9-\frac{1}{2}\right) = 9^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 81 - \left(\frac{1}{4}\right) = 80\ \frac{3}{4}$$

இந்தத் தத்துவத்தைத் திருப்பியும் பயன்படுத்தலாம்.

**இரு மிகை எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசமும் அவற்றின் தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமம் ஆகும்.**

எடுத்துக்காட்டாக

$$168^2 - 162^2 = (168+162)\times(168-162) = 330\times 6 = 1980$$

சில எண்ணல் எண்களை முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அவ்வாறு எழுத இந்தத் தத்துவத்தையே பயன் படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக 45 -ஐப் பார்க்கவும். $x^2 - y^2 = 45$ஆகும் இரு எண்கள் $x, y$ -ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இது

$$45 = (x+y)(x-y)$$

என எழுதலாம். அப்போது $(x+y), (x-y)$ இவை 45 இன் காரணிகள் ஆக வேண்டும்.

45 -ஐ அதன் இரு காரணிகளின் பெருக்கலாக பல முறைகளில் எழுதலாம் அல்லவா.

$$45 = 45\times 1$$

$$45 = 15\times 3$$

$$45 = 9\times 5$$

என எழுதலாம். இதில் 45, 1 ஆகிய காரணிகளை எடுத்து

$$x + y = 45$$

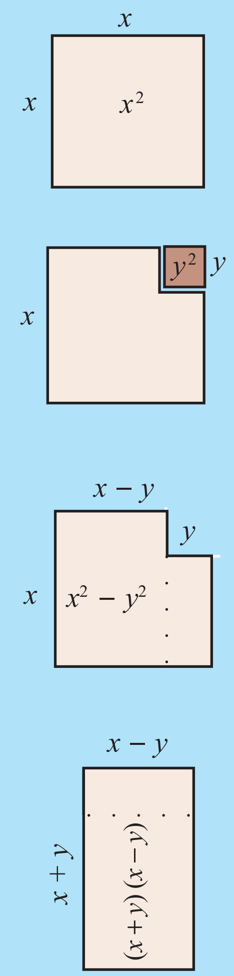
$$x - y = 1$$

என எழுதிப் பார்க்கவும். தொகையும் வித்தியாசமும் தெரிந்தால் எண்களைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான வழிமுறையை ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா (**மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில் **தொகையும் வித்தியாசமும்** என்ற பகுதி).

அப்போது 45, 1 ஆகிய எண்களின் தொகை $x$ ஆகும்; வித்தியாசத்தின் பாதி $y$ ஆகும்.

$$x = 23 \qquad y = 22$$

**வர்க்கங்களின் வித்தியாசம்**



அப்போது

$$45 = 23^2 - 22^2$$

இதுபோல் $45 = 15 \times 3$ என எடுத்துப் பார்ப்போம். $x$ உம் $y$ உம் இல்லாமல் சிந்திக்கக் கூடாதா?

15, 3 என்பவற்றின் தொகையின் பாதி 9; வித்தியாசத்தின் பாதி 6.

அப்போது

$$45 = 9^2 - 6^2$$

இனி $45 = 9 \times 5$ என எடுத்தால்?

$$45 = 7^2 - 2^2$$

எந்த எண்ணல் எண்ணையும் இவ்வாறு இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத இயலுமா?

எடுத்துக்காட்டாக 10 எடுக்கலாம். $10 = 10 \times 1$.

காரணிகளின் தொகையின் பாதி எடுத்தால் $5\frac{1}{2}$; வித்தியாசத்தின் பாதி எடுத்தால் $4\frac{1}{2}$; அப்போது

$$10 = \left(5\frac{1}{2}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$$

என வேண்டுமெனில் எழுதலாம், ஆனால் எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்கள் இல்லை அல்லவா, அதாவது முழுவர்க்கங்கள் அல்ல

$10 = 5 \times 2$ என எடுத்தாலோ?

**எத்தகைய எண்ணல் எண்களை இரு முழு எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத இயலாது?**

இரு எண்களின் பெருக்கல்பலனை வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதுவது சில வேளைகளில் கணக்கிடுவதற்கு எளிதாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக $26.5 \times 23.5$ -ஐப் பார்க்கவும் இதை இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத இயலுமா?

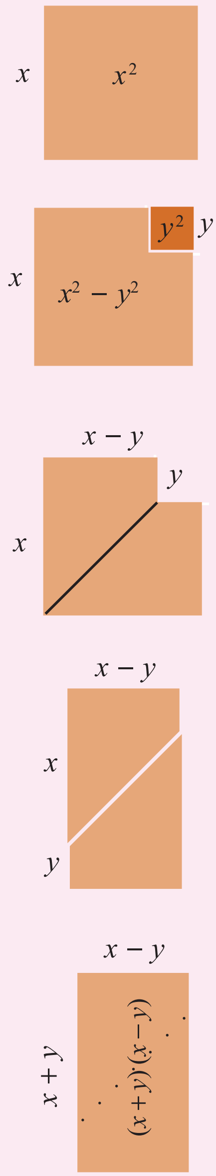
தொகை 26.5 -உம் வித்தியாசம் 23.5 உம் ஆகின்ற இரு எண்களைக் கண்டு பிடித்தால் போதாதா?

அதற்கு 26.5, 23.5 என்பனவற்றின் தொகையின் பாதியும் வித்தியாசத்தின் பாதியும் எடுத்தால் போதும்.

அதாவது 25 -உம் 1.5 -உம். அப்போது

$$26.5 = 25 + 1.5 \qquad 23.5 = 25 - 1.5$$

### வேறொரு முறை



இதைப் பயன்படுத்தி

$26.5 \times 23.5 = (25 + 1.5)(25 - 1.5) = 25^2 - 1.5^2 = 625 - 2.25 = 622.75$

(1) கீழேதரப்பட்டுள்ள செயல்களை மனக்கணக்காகச் செய்யவும்.

i) a) $68^2 - 32^2$ b) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ c) $3.6^2 - 1.4^2$

ii) a) $201 \times 199$ b) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{2}{3}$ c) $10.7 \times 9.3$

(2) இந்தச் செயல்களை பார்க்கவும்

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

இவற்றில் பொதுவான முறையை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பெருக்கலிலும் எந்தப் பெருக்கலில் பெரிய எண் கிடைக்கும் எனப் பெருக்கிப் பார்க்காமல். கண்டுபிடிக்கவும்.

i) $25 \times 75$, $26 \times 74$

ii) $76 \times 24$, $74 \times 26$

iv) $10.6 \times 9.6$, $10.4 \times 9.6$

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள வித்தியாசங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) $(125 \times 75) - (126 \times 74)$

ii) $(124 \times 76) - (126 \times 74)$

iii) $(224 \times 176) - (226 \times 174)$

iv) $(10.3 \times 9.7) - (10.7 \times 9.3)$

v) $(11.3 \times 10.7) - (11.7 \times 11.3)$

**ஒரே தொகையில் உள்ள சில ஜோடி எண்களை எடுத்து பெருக்கல் பலனைக் கணக்கிடவும், வித்தியாசம் மாறுவதைப் பொறுத்து பெருக்கல் பலன் எவ்வாறு மாறுகிறது? மிகப் பெரிய பெருக்கல் பலனைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான எளிய வழி என்ன?**

(1) நாட்காட்டியில் ஒரு சதுரத்தில் வரும் நான்கு எண்களை அடையாளப் படுத்தவும்.

| | |
|---|---|
| 4 | 5 |
| 11 | 12 |

எதிர் மூலைகளில் வருகின்ற எண் ஜோடிகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டவும்; இந்தத் தொகைகளின் வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடவும்;

$4^2 + 12^2 = 160 \qquad 11^2 + 5^2 = 146 \qquad 160 - 146 = 14$

i) இதுபோன்று வேறு நான்கு எண்களை அடையாளப்படுத்தி இந்தக் கணிதச் செயல்களைச் செய்யவும்.

ii) எல்லாச் சதுரங்களிலும் வித்தியாசம் 14 கிடைப்பதன் காரணத்தினை இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும்.

(2) நாட்காட்டியில் ஒன்பது எண்களில் உள்ள ஒரு சதுரம் எடுத்து நான்கு மூலைகளிலும் உள்ள எண்களை மட்டும் அடையாளப்படுத்தவும்:

| | | |
|---|---|---|
| (3) | 4 | (5) |
| 10 | 11 | 12 |
| (17) | 18 | (19) |

எதிர் மூலைகளில் வருகின்ற எண் ஜோடிகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டவும்; இந்தத் தொகைகளின் வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடவும்:

$3^2 + 19^2 = 370 \qquad 17^2 + 5^2 = 314 \qquad 370 - 314 = 56$

i) ஒன்பது எண்கள் உள்ள வேறு சதுரங்களை எடுத்து இதுபோல் செய்யவும்.

(ii) எல்லாச் சதுரங்களிலும் வித்தியாசம் 56 கிடைப்பதன் காரணத்தை இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும்( சதுரத்தின் நடுவில் உள்ள எண்ணை $x$ என எடுத்தால் எளிதாகும் - ஏழாம் வகுப்பில் **மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்** என்ற பாடத்தில், **வேறொரு நாட்காட்டி கணக்கு** என்ற பகுதியைப் பார்க்கவும்)

(3) நாட்காட்டியில் ஒன்பது எண்களில் உள்ள ஒரு சதுரத்தை எடுத்து, நான்கு மூலைகளிலும் உள்ள எண்களை மட்டும் அடையாளப் படுத்தவும்.

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 10 | 11 | 12 |
| 17 | 18 | 19 |

எதிர் மூலைகளில் வரும் எண் ஜோடிகளைப் பெருக்கவும், இந்தப் பெருக்கல் பலன்களின் வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடவும்.

$3 \times 19 = 57$ $\quad$ $17 \times 5 = 85$ $\quad$ $85 - 57 = 28$

i) ஒன்பது எண்கள் உள்ள வேறு சதுரங்கள் எடுத்து இதுபோன்று செய்யவும்.

ii) எல்லாச் சதுரங்களிலும் வித்தியாசம் 28 கிடைப்பதன் காரணத்தை இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்கவும். (நடுவில் உள்ள எண்ணை $x$ என எடுப்பதால் எளிதாக உள்ளது)

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | எனக்கு இயலும் | ஆசிரியரின் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்படுத்த வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • இரு மிகை எண்களின் தொகையைத் தொகையால் பெருக்குவதற்கான வழியை விளக்குதல். | | | |
| • இரு மிகை எண்களின் தொகையின் வர்க்கம் காணும் முறையை வடிவியல் முறையிலும் இயற்கணித முறையிலும் விளக்க இயலுதல். | | | |
| • இரு மிகை எண்களின் வித்தியாசத்தின் வர்க்கம் காணும் முறையை வடிவியல் முறையிலும் இயற்கணித முறையிலும் விளக்க இயலுதல். | | | |
| • வர்க்க எண்களின் சிறப்பியல்புகளை இயற்கணிதம் வாயிலாக விளக்க இயலுதல். | | | |
| • முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத இயலும் எண்களின் சிறப்பியல்புகளை விளக்குதல். | | | |
| • ஒரே தொகை உடைய எண்ஜோடிகளில் மிகக் கூடிய பெருக்கல் பலன் உள்ள எண்ஜோடிகளைக் கண்டுபிடித்தல். | | | |
| • எண் தொடர்புகளை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி பொதுவாகக் கூறுதல். | | | |

# 5

# பணப்பரிமாற்றம்

## வட்டிக்கு வட்டி

இரு வங்கிகளின் விளம்பரங்களைப் பார்க்கவும்.

**10% வட்டி**
**24 மாதங்களில் 1 இலட்சம் ரூபாய்**
**1.20 இலட்சம் ரூபாய் ஆகும்.**

**10% வட்டி**
**24 மாதங்களில் 1 இலட்சம் ரூபாய்**
**1.21 இலட்சம் ரூபாய் ஆகும்.**

இரு வங்கிகளிலும் வட்டி விகிதம் ஒன்று போல் ஆகும். ஒரே தொகை ஒரே காலத்திற்குச் சேமித்தால் கிடைக்கும் தொகையில் வித்தியாசம் வருவது ஏன்?

வட்டியைக் கணக்கிட்டுப் பார்ப்பது பலமுறைகளில் ஆகும். வட்டியைக் கணக்கீடு செய்வதற்கு உரிய ஒரு வழிமுறையை ஏழாம் வகுப்பில் கற்றது நினைவில் உண்டு அல்லவா?

எடுத்துக்காட்டாக 1000 ரூபாய் 2 வருடங்களுக்குச் சேமிக்கப்படுகிறது. வருட வட்டி விகிதம் 10%.

ஒவ்வொரு வருடமும் எவ்வளவு ரூபாய் வட்டி கிடைக்கும்?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

10% வருட வட்டி விகிதத்தில் வட்டியைக் கணக்கிடும் ஒரு வங்கியில் அனுவும்,மனுவும் 15000 ரூபாய் வீதம் சேமித்தார்கள். ஓர் வருடம் கழிந்த போது அசலையும் வட்டியையும் அனு பெற்றுக் கொண்டான். பெற்றுக் கொண்ட முழுத்தொகையையும் அனு மீண்டும் சேமித்தாள். மீண்டும் ஓர் வருடம் கழிந்து இருவரும் தொகையைப் பெற்றுக் கொண்டனர். யாருக்கு கூடுதல் பணம் கிடைத்தது? எவ்வளவு கூடுதல்?

2 வருடங்களுக்கான வட்டி மனுவிற்குக் கிடைக்கிறது அதாவது,

$$15000 \times \frac{10}{100} \times 2 = 3000$$

அப்படியானால் இரு வருடங்களுக்குப் பின் மனுவிற்கு மொத்தம் எவ்வளவு ரூபாய் கிடைக்கும்?

$$15000 + 3000 = 18000 \text{ ரூபாய்}$$

அனுவுக்கோ? ஓர் வருடத்திற்குப் பின் எவ்வளவு ரூபாய் வட்டி கிடைத்தது?

$$15000 \times \frac{10}{100} = 1500$$

அப்படியானால் எத்தனை ரூபாய் பெற்றுக் கொண்டாள்?

$$15000 + 1500 = 16500 \text{ ரூபாய்}$$

இந்தத் தொகையைத்தான் மீண்டும் சேமித்தாள்.

அப்படியானால் இரு வருடங்கள் சென்றபின் எவ்வளவு ரூபாய் கிடைக்கும்?

$$16500 \times \frac{10}{100} = 1650$$

மொத்தம் எத்தனை ரூபாய்?

$$16500 + 1650 = 18150 \text{ ரூபாய்}$$

அனுவுக்கு எவ்வளவு ரூபாய் அதிகம் கிடைத்தது?

முதல் வருடத்தில் வட்டியாகக் கிடைத்த 1500 ரூபாயின் வட்டி தான் அதிகமாகக் கிடைத்தது.

பல சேமிப்புத் திட்டங்களிலும் இவ்வாறு ஒவ்வொரு வருடமும் (தொகையைப் பெற்றுக் கொண்டு மீண்டும் சேமிக்காமலேயே) வட்டியை அசலுடன் கூட்டி அடுத்த வருடத்திற்கான வட்டியைக் கணக்கீடு செய்வது உண்டு.

அதாவது இந்த முறையில் வட்டிக்கும் வட்டி கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு ஒவ்வொரு கால அளவிலும் அசல் மாறிக் கொண்டிருக்கிறது, கிடைக்கும் வட்டியும் மாறுகிறது. இந்த முறையில் கணக்கிடும் வட்டியை கூட்டுவட்டி (compound interest) எனக் கூறுவர். அசலில் மாற்றம் இல்லாமல் ஒவ்வொரு வருடமும் கிடைக்கும் வட்டியைத் தனி வட்டி (simple interest) எனக் கூறுவர்.

இரண்டாவது வங்கியில் சேமித்தால் அதிகம் கிடைப்பது ஏன் என்று தெரிந்து கொண்டீர்கள் அல்லவா?

5% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டு வட்டியைக் கணக்கிடும் ஒரு வங்கியில் சுமேஷ் 10000 ரூபாய் சேமித்தார். 2 வருடம் நிறைவடையும் போது அவருக்கு எவ்வளவு ரூபாய் கிடைக்கும்?

முதல் வருட அசல் = 10000 ரூபாய்

முதல் வருட வட்டி $= 10000 \times \frac{5}{100}$

$= 500$

இரண்டாம் வருட அசல் $= 10000 + 500$

$= 10500$

இரண்டாம் வருட வட்டி $= 10500 \times \frac{5}{100}$

$= 525$

இரு வருடங்கள் நிறைவடையும் போது சுமேஷிற்குக் கிடைக்கும் தொகை

$= 10500 + 525$

$= 11025$ ரூபாய்

(1) 8% வருட ஆண்டு விகிதத்தில் கூட்டு வட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் சந்தீப் 25000 ரூபாய் சேமித்தான். இரு வருடங்கள் நிறைவடையும் போது எவ்வளவு ரூபாய் திரும்பக் கிடைக்கும்?

(2) 12% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டி வட்டி கணக்கிடும் வங்கியிலிருந்து தோமஸ் 15000 ரூபாய் கடன் பெற்றான். 2 வருடங்களுக்குப் பின் 10000 ரூபாய் திருப்பிச் செலுத்தினான் மூன்றாம் வருட இறுதியில் கடனைத் தீர்க்க எவ்வளவு ரூபாய் திருப்பிச் செலுத்த வேண்டும்?

(3) 5% வருட வருட விகிதத்தில் ஒரு தொகைக்கு 2 வருடங்களுக்குத் தனி வட்டியாக 200 ரூபாய் கிடைத்தது. அந்தத் தொகைக்கு அதே வட்டி விகிதத்தில் 2 வருடங்களுக்குக் கிடைக்கும் கூட்டு வட்டி எவ்வளவு?

## வேறொரு முறை

5% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டுவட்டி முறையில் வட்டியைக் கணக் கிட்டால், 10000 ரூபாய் 2 வருடங்களில் 11025 ரூபாயாக ஆகும் என்று பார்த்தோம் அல்லவா. இதைக் கண்டுபிடித்த வழிமுறையை மேலும் ஒரு தடவை பார்ப்போம். முதல் வருட 10000 ரூபாயின் $\frac{5}{100}$ பாகமே வட்டி. இவ்வாறு கிடைக்கும் 500 ரூபாயும், 10000 ரூபாயும் சேரும்போது கிடைக்கின்ற 10500 ரூபாயின் $\frac{5}{100}$ பாகமே இரண்டாம் வருட வட்டி இந்த 525 ரூபாயும், 10500 ரூபாயே சேர்த்து கிடைக்கும் தொகையான 11025 ரூபாயே இரு வருடங்களுக்குப் பின் கிடைக்கும். மேலும் ஒரு ஆண்டு சேமிப்பு தொடர்ந்தால்? மூன்று வருடங்களுக்குப் பின் எவ்வளவு ரூபாய் கிடைக்கும் எனக் கணக்கிட.11025 ரூபாயின் $\frac{5}{100}$ பாகத்தை அதனுடன் கூட்ட வேண்டும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு வருடமும் நிறைவடையும் போதும், அப்போது இருக்கும் தொகையின் $\frac{5}{100}$ பாகத்தை அதனுடன் சேர்க்க வேண்டும். இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திக் கூறினால் $x$ என்ற தொகையின் $\frac{5}{100}$ பாகத்தை $x$ -உடன் கூட்ட வேண்டும்.

$$x + \frac{5}{100}x = \left(1+\frac{5}{100}\right)x$$

என எழுதலாம் அல்லவா. அப்போது ஒவ்வொரு வருடமும் $\frac{5}{100}$ பாகத்தைக் கூட்டுவதற்குப் பதில் $1+\frac{5}{100}$ ஆல் பெருக்கினால் போதும். அதாவது,

ஓர் வருடத்திற்குப் பின் கிடைப்பது $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)$

2 வருடங்களுக்குப் பின் கிடைப்பது $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$

3 வருடங்களுக்குப் பின் கிடைப்பது $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

எனத் தொடரலாம். இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திக் கூறினால், $n$ வருடங்களுக்குப் பின் கிடைப்பது $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$.

சேமிக்கும் தொகையோ, வட்டி விகிதமோ மாறினாலும்இதே முறையில் இறுதியில் கிடைக்கும் தொகையைக் கணக்கிட்டலாம்.

பொதுவாகக் கூறினால்

**$p$ ரூபாய் $r$ % வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டு வட்டியினைக் கணக்கிடும் சேமிப்புத் திட்டத்தில், $n$ வருடங்களுக்குப் பின் கிடைப்பது $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ரூபாயாகும்.**

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்

9% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் நான்சி 15000 ரூபாய் சேமித்தாள். 2 வருடங்கள் நிறைவடையும் போது எவ்வளவு ரூபாய் ஆகும்?

இப்போது பார்த்ததற்கு ஏற்ப, இதை நேரிடையாகக் கணக்கிடலாம்.

$$15000\left(1+\frac{9}{100}\right)^2 = 15000\left(\frac{100+9}{100}\right)^2$$

$$= 15000 \times \left(\frac{109}{100}\right)^2 = 15000 \times (1.09)^2$$

$$= 15000 \times 1.1881$$

$$= 17821.5 = 17821 \text{ ரூபாய் } 50 \text{ பைசா.}$$

$$109 \times 109 = (100+9)^2$$
$$= 10000+1800+81$$
$$= 11881$$
$$1.09^2 = 1.1881$$

பணப் பரிமாற்றங்களில் 50 பைசா முதல் 1 ரூபாய் வரை உள்ளவற்றை 1 ரூபாய் ஆகக் கணக்கிடுவது தான் முறை. 50 பைசாவை விடக் குறைவானவற்றை கணக்கில் எடுப்பதில்லை

அப்போது நான்சிக்கு 2 வருடங்கள் இறுதியில் 17822 ரூபாய் கிடைக்கும்.

(1) 6% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் அனஸ் 20000 ரூபாய் சேமித்தான். 3 வருடங்களுக்குப் பின் அனஸிற்கு கிடைக்கும் தொகை என்ன?

(2) 10% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டு வட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் தியா 8000 ரூபாய் சேமித்தாள். 2 வருடங்களுக்குப் பின் 5000 திரும்பப் பெற்றாள். மீண்டும் ஓர் வருடம் சென்ற பின் தியாவின் கணக்கில் எவ்வளவு ரூபாய் இருக்கும்?

(3) 11% வருட வட்டி விகிதத்தில் கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் வங்கியிலிருந்து வருண் 25000 ரூபாய் கடன் எடுத்தான். 2 வருடங்களுக்குப் பின் 10000 ரூபாய் திருப்பிச் செலுத்தினான். மீண்டும் ஓர் வருடத்திற்குப் பின் கடனை அடைப்பதற்கு எவ்வளவு ரூபாய் செலுத்த வேண்டும்?

## காலம் மாறுகிறது

ஒவ்வொரு வருடமும் நிறைவடையும் போது வட்டியை அசலுடன் கூட்டுவது போல் ஒவ்வொரு 6 மாதம் நிறைவடையும் போதும் வட்டியை அசலுடன் கூட்டும் முறையும் நடைமுறையில் உண்டு. இவ்வாறு கூட்டுவட்டியைக் கணக்கிடும் முறையை அரைவருட முறை எனக்கூறுவர்.

அரை வருட கூட்டுவட்டியைக் கணக்கிடும் வங்கியில் அம்பிளி 12000 ரூபாய் சேமித்தாள். 8% வருட வட்டி விகிதம் எனில் ஓர் வருடத்திற்குப் பின் அம்பிளிக்கு எவ்வளவு ரூபாய் கிடைக்கும்?

அரைவருட முறையில் வட்டியைக் கணக்கிடுவதால் வருடத்தில் 2 தடவை வட்டியைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். ஓர் வருடம் 8% வட்டி என்பதால் 6 மாதத்திற்கு 4% வட்டி ஆகும்.

முதல் 6 மாதத்திற்கு வட்டி $= 12000 \times \frac{4}{100}$

$= 480$ ரூபாய்

இதை 12000 உடன் கூட்டி, அடுத்த 6 மாதத்திற்கான வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. .

$$12000 + 480 = 12480$$

அடுத்த 6 மாதத்திற்கான வட்டி $= 12480 \times \frac{4}{100}$

$= 499.20$ ரூபாய் $= 499$ ரூபாய் 20 பைசா.

இனி இந்தக் கணக்கில் $1\frac{1}{2}$ வருடம் நிறைவடையும் போது அம்பிளிக்கு எத்தனை ரூபாய் கிடைக்கும் என்று காண வேண்டுமெனில்?

ஒவ்வொரு 6 மாதமும் $\frac{4}{100}$ பாகம் கூட்ட வேண்டும். அதாவது $1 + \frac{4}{100}$ -ஆல் பெருக்க வேண்டும். அப்போது $1\frac{1}{2}$ வருடங்கள் நிறைவடையும் போது கிடைப்பது

$$12000 \times \left(1+\frac{4}{100}\right)^3 = 12000 \times \left(\frac{104}{100}\right)^3 = 12000 \times (1.04)^3$$

என நேரிடையாகக் கணக்கிடலாம்.

இதைக் கால்குலேட்டர் பயன்படுத்திச் செய்தால் 13498.368 எனக் கிடைக்கும். அப்படியானால் கிடைக்கும் தொகை 13498 ரூபாய்.

இது போல் பல அளவுகளுக்கான தொகையினைக் காணலாம்.

ஒவ்வொரு மூன்று மாதமும் கூட்டு வட்டி கணக்கிடும் திட்டங்களும் உள்ளன.

இதைக் காலாண்டு வட்டிக் கணக்கிடுதல் எனக் கூறுவர். காலாண்டுக்கு வட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் அம்பிளி பணம் சேமித்தால் எனில்?

ஒவ்வொரு மூன்று மாதமும் 2% வட்டி கிடைக்கும்.

ஒரு வருடத்திற்குப் பின் அம்பிளிக்குக் கிடைக்கும் தொகை

$$12000 \times \left(1+\frac{2}{100}\right)^4 = 12000 \times \left(\frac{102}{100}\right)^4 = 12000 \times (1.02)^4$$

கால்குலேட்டரைப் பயன்படுத்தி, கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

(1) அரைவருடம் கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் அருண் 5000 ரூபாய் சேமித்தான். காலாண்டு கூட்டு வட்டி கணக்கிடும் வங்கியில் மோகன் 5000 ரூபாய் சேமித்தான். இரண்டு வங்கிகளும் 6% வருட வட்டி அளிக்கிறது. ஒரு வருடத்திற்குப் பின் இருவரும் பணத்தை திரும்பப் பெற்றனர். மோகனுக்கு அருனை விட எத்தனை ரூபாய் அதிகம் கிடைத்தது?

(2) காலாண்டு கூட்டு வட்டி கணக்கிடும் வங்கியிலிருந்து ஒருவர் 16000 ரூபாய் கடன் எடுத்தார், வருட வட்டி விகிதம் 10% ஆகும். 9 மாதத்திற்குப் பின் கடனைத் திருப்பிச் செலுத்த எத்தனை ரூபாய் தேவை?

(3) ஒரு நிதி நிறுவனத்தில் மனு 15000 ரூபாய் சேமிக்கிறான். ஒவ்வொரு 3 மாதத்திலும் வட்டி விகிதம் கணக்கிட்டு அசலுடன் கூட்டப்படுகிறது. வருட வட்டி விகிதம் 8%. ஓர் வருட நிறைவடையும் போது அவருக்கு எவ்வளவு ரூபாய் திரும்பக் கிடைக்கும்?

(4) ஜான் 2500 ரூபாயை ஜனவரி 1-ஆம் தேதி ஒரு கூட்டுறவு வங்கியில் சேமிக்கிறான். வங்கி அரைவருட கூட்டுவட்டியைக் கணக்கிடுகிறது. வருட வட்டி விகிதம் 6 % ஆகும். ஜூலை 1- ஆம் தேதி 2500 ரூபாய் மீண்டும் சேமிக்கிறான். வருட இறுதியில் ஜானின் கணக்கில் எவ்வளவு ரூபாய் இருக்கும்?

(5) ஒவ்வொரு நான்கு மாதத்திற்கும் கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் ஒரு நிதி நிறுவனத்தில் ரம்லத் 30,000 ரூபாய் சேமிக்கிறாள். வருட வட்டி விகிதம்9%. ஓர் வருடத்திற்குப் பின் ரம்லத்திற்கு திரும்பக் கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு?

## கூடியும் குறைந்தும்

சில பொருட்களின் உற்பத்தி வருடந்தோறும் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் அதிகரிக்கும். அது போல சில பொருட்களின் விலையும் வருடந்தோறும் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் அதிகரிக்கவோ குறையவோ செய்யும். இவ்வாறு உற்பத்தி செய்யக்கூடிய பொருட்களின் எண்ணிக்கையையும் விலையையும் கணக்கிடுவதற்குக் கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் முறையையே பயன்படுத்தலாம்.

பெருவாரியான மனிதர்கள் மொபைல் போன் பயன்படுத்துபவர்கள் அல்லவா. அதனுடன் தொடர்புடைய ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

> ஒரு மொபைல் போன் கம்பெனியின் தயாரிப்பு வருடந்தோறும் 20% அதிகரிக்கிறது என்பது கணக்கு. 2014 -இல் சுமார் 7 கோடி மொபைல் போன்கள் தயாரிக்கப்பட்டன. அதில் 2018 -இல் எத்தனைப் போன்கள் தயாரிக்கப்படும் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது?

வருடத்திற்கு 20% உற்பத்தி அதிகரிக்குமாறு இலக்கு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

கூட்டுவட்டியோடு அசல் கண்டுபிடித்த முறையைப் பார்ப்போம்.

2014-இல் தயாரிக்கப்பட்ட மொபைல் போன்களின் எண்ணிக்கை

$= 7$ கோடி

2018-இல் தயாரிக்கப்படும் மொபைல் போன்களின் எண்ணிக்கை

$$= 70000000\left(1+\frac{20}{100}\right)^4$$

கால்குலேட்டர் வாயிலாகச் செய்து பார்க்கவும்

(1) ஒவ்வொரு வருடமும் 15% வீதம் இ- வேஸ்ட் பெருகிக் கொண்டிருக் கிறது என்பது ஆய்வு அறிக்கை. 2014-இல் சுமார் 9 கோடி டன் இ-வேஸ்ட் உண்டு எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. எனில் 2020 ஆகும் போது எத்தனை டன் இ- வேஸ்ட் பெருக வாய்ப்பு உண்டு?

(2) ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி நிறுவனம் ஒரு தனிப்பட்ட வகை தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விலையை வருடந்தோறும் 5% வீதம் குறைக்கிறது. தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் இப்போதைய விலை 8000 ரூபாய் எனில் 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின் என்ன விலையாக இருக்கும்?

(3) நமது தேசிய விலங்கு புலி அல்லவா. வருடந்தோறும் இவற்றின் எண்ணிக்கை குறைந்து கொண்டிருக்கிறது. ஆண்டுதோறும் 3% வீதம் குறைகிறது என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. 2011-இல் புலி பாதுகாப்பு பொறுப்பு ஆணையத்தின் கணக்கெடுப்புப்படி இந்தியாவில் 1700 புலிகள் உள்ளன. இவ்வாறு தொடர்ந்தால் 2016 ஆகும் போது எத்தனைப் புலிகள் இருக்கும்?

## மீள்பார்வை

| கற்றல் அடைவுகள் | எனக்கு இயலும் | ஆசிரியரின் உதவியுடன் இயலும் | மேலும் மேம்படுத்த வேண்டும் |
|---|---|---|---|
| • வட்டிக்கு வட்டியைக் கணக்கிட்டு கூட்டு வட்டி காணும்முறை விளக்கப்படுதல் | | | |
| • அரை வருடமாகவும் கால் வருடமாகவும் பிற கால அளவுகளிலும் கூட்டு வட்டி முறையில் வட்டியைக் கணக்கிடும் முறை விளக்குதல். | | | |
| • கூட்டுவட்டி முறையில் பிற நடைமுறைப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணுதல் | | | |