(i) વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46-50 કિગ્રામાં હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) આ માહિતીના સંદર્ભમાં એવી બે ઘટનાઓ દર્શાવો કે એકમાં સંભાવના 0 આવે અને બીજી ઘટનામાં સંભાવના 1 આવે.

ઉકેલ : (i) વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 38 અને વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46 - 50 કિગ્રામાં હોય તેવા વિદ્યાર્થીની સંખ્યા = 3.

તેથી, P(46 - 50 કિગ્રામાં વજન ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓ) = $\frac{3}{38}$ = 0.079

(ii) દાખલા તરીકે એવી ઘટના લો જેમાં વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા હોય. આપણા ઉદાહરણમાં કોઈ પણ વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા નથી. તેથી આ ઘટનાની સંભાવના 0 છે. તે જ પ્રમાણે વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રાથી વધુ હોય તેની સંભાવના = $\frac{38}{38}$ = 1.

ઉદાહરણ 10 : બિયારણની 5 થેલી પૈકી દરેકમાંથી 50 બીજ પસંદ કરવામાં આવ્યા અને તેને અંકુરણ માટે ઉચિત પરિસ્થિતિમાં મૂકવામાં આવ્યા. 20 દિવસ પછી દરેકમાંથી અંકુરિત થયેલાં બીજની ગણતરી કરવામાં આવી અને તે નીચે પ્રમાણે છે :

કોષ્ટક 15.11

થેલી	1	2	3	4	5
અંકુરિત થયેલ બીજની સંખ્યા	40	48	42	39	41

નીચેનામાંથી બીજની અંકુરિત થવાની સંભાવના શોધો :

(i) થેલીમાંનાં 40 થી વધુ બીજ

(ii) થેલીમાંનાં 49 બીજ

(iii) થેલીમાંનાં 35 થી વધુ બીજ

ઉકેલ : થેલીની કુલ સંખ્યા = 5.

(i) 50 માંથી 40 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 3.

P(થેલીમાં 40 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય) = $\frac{3}{5}$ = 0.6

(ii) 49 બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 0.

P(થેલીમાં 49 બીજ અંકુરિત થયાં હોય) = $\frac{0}{5}$ = 0.

(iii) થેલીમાં 35 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 5.

તેથી, જરૂરી સંભાવના = $\frac{5}{5}$ = 1.

નોંધ : ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે નોંધ્યું હશે કે સંભાવનાનું મૂલ્ય હંમેશાં 0 થી 1 વચ્ચેનો અપૂર્ણાંક હોય છે. (0 અને 1 સહિત)

સ્વાધ્યાય 15.1

1. ક્રિકેટમાં, એક સ્ત્રી ખેલાડીએ 30 બૉલમાંથી 6 વાર દડાને ક્ષેત્રરેખા(boundary)ની બહાર મોકલ્યો. તેણે દડાને ક્ષેત્રરેખાની બહાર ન મોકલ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. બે બાળકો ધરાવતાં 1500 યાદચ્છિક કુટુંબો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યા અને નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ :

કુટુંબમાં છોકરીઓની સંખ્યા	2	1	0
કુટુંબની સંખ્યા	475	814	211

યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કુટુંબમાં

(i) 2 છોકરીઓ હોય. (ii) 1 છોકરી હોય. (iii) એક પણ છોકરી ન હોય.

તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

આ બધી સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે તે પણ ચકાસો.

3. ઉદાહરણ 5, વિભાગ 14.4, પ્રકરણ 14 નો વિચાર કરો. વર્ગનો વિદ્યાર્થી ઑગષ્ટ માસમાં જન્મ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

4. ત્રણ સિક્કાઓને એક સાથે 200 વખત ઉછાળતાં મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

પરિણામ	**3 છાપ**	**2 છાપ**	**1 છાપ**	**છાપ ન આવે**
આવૃત્તિ	23	72	77	28

જો ત્રણ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળતાં બે વાર છાપ આવે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

5. કોઈ એક સંસ્થાએ યાદચ્છિક રીતે 2400 કુટુંબોને પસંદ કર્યાં અને તેમની આવક તેમજ તેમની પાસેનાં વાહનોની સંખ્યા જાણવા માટેનું સર્વેક્ષણ કર્યું. તેમાંથી પ્રાપ્ત માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

માસિક આવક	**કુટુંબ દીઠ વાહન**			
(₹ માં)	**0**	**1**	**2**	**2 થી વધુ**
7000 થી ઓછી	10	160	25	0
7000 – 10000	0	305	27	2
10000 – 13000	1	535	29	1
13000 – 16000	2	469	59	25
16000 થી વધુ	1	579	82	88

ધારો કે એક કુટુંબ પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ કુટુંબ માટે નીચે આપેલી માહિતી પરથી સંભાવના શોધો :

(i) માસિક આવક ₹ 10000 – 13000 હોય અને તેમની પાસે ફક્ત 2 વાહન હોય.

(ii) માસિક આવક ₹ 16000 થી વધુ હોય અને તેમની પાસે ફક્ત 1 જ વાહન હોય.

(iii) માસિક આવક ₹ 7000 થી ઓછી હોય અને તેમની પાસે એક પણ વાહન ન હોય.

(iv) માસિક આવક ₹ 13000 – 16000 હોય અને તેમની પાસે 2 થી વધુ વાહન હોય.

(v) એક કરતાં વધુ વાહન ન હોય.

6. કોષ્ટક 14.7, પ્રકરણ 14 ધ્યાનમાં લો.

(i) કોઈ વિદ્યાર્થીએ ગણિતની કસોટીમાં 20 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) કોઈ વિદ્યાર્થીએ 60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. આંકડાશાસ્ત્ર વિષય પ્રત્યેનો વિદ્યાર્થીઓનો અભિગમ જાણવા માટે 200 વિદ્યાર્થીઓનું સર્વેક્ષણ કરવામાં આવ્યું. તેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલી છે :

અભિગમ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
ગમે	135
ન ગમે	65

યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વિદ્યાર્થીને પસંદ કરતાં મળતી નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) આંકડાશાસ્ત્ર ગમે (ii) આંકડાશાસ્ત્ર ન ગમે

8. સ્વાધ્યાય 14.2 પ્રશ્ન નં. 2 નો વિચાર કરો. કોઈએ એક સ્ત્રી ઈજનેરને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં મળતી નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) તેના કાર્યક્ષેત્રથી 7 કિમીથી ઓછા અંતરે રહેતા હોય.

(ii) તેના કાર્યક્ષેત્રથી 7 કિમીથી વધુ અંતરે રહેતા હોય.

(iii) તેના કાર્યક્ષેત્રથી $\frac{1}{2}$ કિમીથી ઓછા અંતરે રહેતા હોય.

9. **પ્રવૃત્તિ :** તમારી શાળાના દરવાજા આગળ ઊભા રહો અને ચોક્કસ સમય-મર્યાદામાં દ્વિચક્રી વાહનો, ત્રિચક્રી વાહનો અને ચાર પૈડાવાળાં કેટલાં વાહનો પસાર થાય છે તેની આવૃત્તિ નોંધો. કુલ વાહનની સંખ્યામાંથી પસાર થતું વાહન દ્વિચક્રી વાહન હોય તેની સંભાવના શોધો.

10. **પ્રવૃત્તિ :** તમારા વર્ગમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓને 3 અંકવાળી એક સંખ્યા લખવાનું કહો. યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરો. પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થી દ્વારા લખાયેલ સંખ્યા એ 3 થી વિભાજ્ય હોય તેની સંભાવના શોધો. યાદ રાખો કે જો આપેલી સંખ્યાના અંકોનો સરવાળાને 3 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય તો આપેલ સંખ્યા એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

11. ઘઉંના લોટની થેલી પર 5 કિગ્રા વજન લખેલ હોય તેવી 11 થેલી પસંદ કરી. તેમાં ખરેખર કેટલો લોટ છે તે વજન(કિગ્રામાં) નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

આમાંની કોઈ એક થેલી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં તેમાં લોટનું વજન 5 કિગ્રાથી વધુ હોય તેની સંભાવના શોધો.

12. સ્વાધ્યાય 14.2 માં પ્રશ્ન નં. 5 નો વિચાર કરો. કોઈ એક શહેરમાં હવામાં સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા શોધવા માટેનો પ્રયોગ કરવામાં આવ્યો. તે દસ લાખના ભાગમાં (*ppm*) 30 દિવસની માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ તમારે તૈયાર કરવાનું હતું. આ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને 0.12 - 0.16 વર્ગ માટે સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતાની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

13. સ્વાધ્યાય 14.2 ના દાખલા 1 નો વિચાર કરો. એક વર્ગના 30 વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર જૂથ માટેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તમારે તૈયાર કરવાનું હતું. તો આ વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એક વિદ્યાર્થીનું રૂધિર જૂથ AB હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. પ્રયોગના જરૂરી પરિણામોના સમૂહને તે પ્રયોગની ઘટના કહે છે.

2. ઘટનાથી પ્રાપ્ત થાય તેની (પ્રાયોગિક) સંભાવના P(E) આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$P(E) = \frac{\text{E ઉદ્ભવવા માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

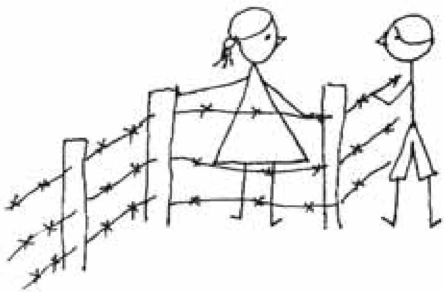
3. કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે જ હોય છે. (0 અને 1 સહિત)

પરિશિષ્ટ 1

ગણિતમાં સાબિતીઓ

A1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધારો કે તમારા પરિવાર પાસે જમીનનો એક પ્લોટ છે. પરંતુ તેની કોઈપણ બાજુએ કોઈ વાડ બનાવેલી નથી. એક દિવસ તમારા પડોશીએ તેની જમીનની ચારેય બાજુ વાડ બનાવવાનો નિર્ણય લીધો. જ્યારે પડોશીએ વાડ બનાવી લીધી ત્યારે તમને ખ્યાલ આવ્યો કે વાડની અંદર તમારી જમીનનો કેટલોક ભાગ ચાલ્યો ગયો છે. તમે તમારા પડોશી પાસે કેવી રીતે સાબિત કરશો કે તેણે તમારી જમીનના કેટલાક ભાગ પર કબજો કરવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે ? આ બાબતે તમારું પહેલું કામ સીમાના વિવાદને હલ કરવા માટે ગામના વડીલોની મદદ લેવાનું છે. પરંતુ માની લો આ બાબતમાં વડીલોના મત જુદા જુદા છે. કેટલાક વડીલો તમારા પડોશીની વાતને સાચી માને છે અને કેટલાક વડીલો તમારી વાતને સાચી માને છે. ત્યારે આવી પરિસ્થિતિમાં તમે શું કરશો ? આ બાબતે તમારી પાસે માત્ર એક જ વિકલ્પ રહે છે કે તમારી જમીનના પ્લોટની હદ પર તમારો દાવો રાખવા માટે તમે એવો રસ્તો શોધી કાઢો કે જે બધાને સ્વીકાર્ય હોય. ઉદાહરણ તરીકે તમારા દાવાને સાચો સાબિત કરવા માટે અને તમારા પડોશીના દાવાને ખોટો સાબિત કરવા માટે જરૂર લાગે તો તમે અદાલતમાં સરકાર દ્વારા માન્ય તમારા ગામના સર્વેક્ષણના નકશાનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો હવે આપણે વધુ એક પરિસ્થિતિ માટે વિચાર કરીએ. ધારો કે તમારી માતાએ ઑગષ્ટ 2005 નું ઘરનું વીજળીનું બિલ ભરી દીધેલ છે. પરંતુ સપ્ટેમ્બર 2005 ના બિલમાં એ દર્શાવેલ છે કે ઑગષ્ટનું વીજળી બિલ ભરવામાં આવેલ નથી. વીજળી

વિભાગ દ્વારા કરવામાં આવેલ આ દાવાને તમે કઈ રીતે ખોટો સાબિત કરશો ? તેના માટે તમારે ભરેલા બીલની પહોંચ રજૂ કરવી પડશે. તે એ સાબિત કરી દેશે કે ઑગષ્ટ મહિનાનું બિલ ભરાઈ ગયેલ છે.

આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણું વિધાન કે દાવો સત્ય છે કે અસત્ય તે સાબિત કરવાની જરૂર પડે છે એવું બને છે. જોકે કેટલાંક વિધાનો આપણે સાબિત કરવાની ચિંતા કર્યા વગર પણ સ્વીકારીએ છીએ. પરંતુ ગણિતમાં આપણે માત્ર ગાણિતિક તર્ક અનુસાર સત્ય કે અસત્ય પુરવાર કરેલાં વિધાનોને જ સ્વીકારીએ છીએ(કેટલીક પૂર્વધારણાઓ સિવાય).

વાસ્તવમાં ગણિતમાં સાબિતીઓનું અસ્તિત્વ હજારો વર્ષોથી રહેલ છે અને તે ગણિતની કોઈ પણ શાખામાં કેન્દ્રસ્થાને હોય છે. એવું માનવામાં આવે છે કે પહેલી જાણીતી સાબિતી ગ્રીસના એક તત્ત્વચિંતક અને ગણિતશાસ્ત્રી *Thales* દ્વારા આપવામાં આવેલ હતી. આમ તો મેસોપોટામિયા, ઈજિપ્ત, ચીન અને ભારત જેવી અનેક પ્રાચીન સંસ્કૃતિઓમાં ગણિત કેન્દ્રસ્થાને હતું. જે પ્રકારે આજે આપણે સાબિતીઓનો ઉપયોગ કરીએ છીએ તે રીતે તેમણે એ સાબિતીનો ઉપયોગ કરેલ હોય એ બાબતનું કોઈ સ્પષ્ટ પ્રમાણ મળતું નથી.

આ પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું કે વિધાન શું છે, ગણિતમાં કેવી રીતે તર્ક કરવામાં આવે છે અને એક ગાણિતિક સાબિતીમાં કયા કયા પુરાવા સમાવિષ્ટ છે.

A1.2 ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનો

આ વિભાગમાં આપણે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનના અર્થની વ્યાખ્યા કરવાનો પ્રયત્ન કરીશું. વિધાન એ એક એવું વાક્ય છે કે જે આદેશાત્મક અથવા ઉદ્‌ગાર વાક્ય નથી. નિશંકપણે વિધાન એ પ્રશ્ન નથી. ઉદાહરણ તરીકે ''તમારા વાળનો રંગ કયો છે ?'' આ એક વિધાન નથી. આ એક પ્રશ્ન છે. ''મહેરબાની કરીને જાઓ અને મારા માટે થોડું પાણી લઈ આવો'' આ એક આદેશ અથવા વિનંતી છે, પરંતુ વિધાન નથી. ''કેટલો અદ્‌ભુત સૂર્યાસ્ત છે!'' આ એક ઉદ્‌ગારવાચક નિર્દેશ છે, આ વિધાન નથી. છતાં ''તમારા વાળનો રંગ કાળો છે:'' આ એક વિધાન છે.

સામાન્ય રીતે વિધાન નીચે આપેલા પ્રકારોમાંથી એક હોઈ શકે છે :

- હંમેશાં સત્ય
- હંમેશાં અસત્ય
- અસ્પષ્ટ

અહીં ''અસ્પષ્ટ'' શબ્દની સમજ આપવી જરૂરી છે. બે સ્થિતિઓને લીધે વિધાન અસ્પષ્ટ બને છે. પહેલી સ્થિતિ એ છે કે ''આપણે એ નિર્ણય ન લઈ શકીએ કે વિધાન હંમેશાં સત્ય છે કે અસત્ય છે.'' ઉદાહરણ તરીકે ''કાલે ગુરુવાર છે'' અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે એવો સંદર્ભ નથી આપ્યો કે જેના આધારે એ નિર્ણય લઈ શકીએ કે વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય.

અસ્પષ્ટતા બીજી સ્થિતિ ત્યારે ઊભી થાય છે જ્યારે વિધાન વ્યક્તિલક્ષી હોય છે. એટલે કે કેટલીક વ્યક્તિઓ માટે તે સત્ય હોય અને અન્ય વ્યક્તિ માટે અસત્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ''કૂતરાઓ બુદ્ધિમાન હોય છે'' અસ્પષ્ટ વિધાન છે. કારણ કે કેટલાક લોકો તેને સત્ય માને છે અને કેટલાક તેને અસત્ય માને છે.

ઉદાહરણ 1 : નક્કી કરો કે આગળ આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં કયાં વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, હંમેશાં અસત્ય છે અથવા અસ્પષ્ટ છે. તમારા જવાબોનું કારણ સાથે સમર્થન કરો.

(i) એક અઠવાડિયામાં આઠ દિવસ હોય છે.

(ii) અહીં વરસાદ થઈ રહ્યો છે.

(iii) સૂર્યાસ્ત પશ્ચિમ દિશામાં થાય છે.

(iv) ગૌરી એક દયાળુ છોકરી છે.

(v) બે અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર યુગ્મ થાય છે.

(vi) બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ થાય છે.

ઉકેલ :

(i) વિધાન હંમેશાં અસત્ય છે, કારણ કે એક અઠવાડિયામાં સાત દિવસ હોય છે.

(ii) આ વિધાન અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે તે સ્પષ્ટ નથી કે 'અહીં' ક્યાં છે.

(iii) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે. આપણે ક્યાંય પણ રહીએ, સૂર્યાસ્ત પશ્ચિમમાં જ થાય છે.

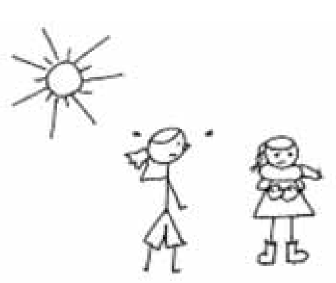
(iv) વિધાન અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે વ્યક્તિલક્ષી છે. કેટલાક લોકો માટે ગૌરી દયાળુ હોઈ શકે અને અન્ય માટે નહિ.

(v) વિધાન હંમેશા અસત્ય છે. બે અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર હંમેશાં અયુગ્મ હોય છે.

(vi) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે.

આમ છતાં આ વિધાન સત્ય છે તેને સમર્થન આપવા માટે આપણે કંઈક વધુ કરવાની જરૂરિયાત છે. તેને વિકલ્પ A1.4 માં સાબિત કરવામાં આવશે.

પહેલાં કહ્યું છે તે પ્રમાણે આપણે દૈનિક જીવનમાં વિધાનની સત્યાર્થતા પ્રત્યે વધુ કાળજી લેતાં રહેતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે તમારી મિત્ર તમને એ કહે છે કે કેરલના મનંતાવડીમાં જુલાઈ મહિનામાં દરરોજ વરસાદ થાય છે. પૂર્ણ વિશ્વાસ સાથે તમે તેના આ વિધાનને સત્ય માની લેશો. અલબત તે શક્ય છે કે જુલાઈના મહિનામાં એક કે બે દિવસ વરસાદ ન પણ થયો હોય અને જો તમે વકીલ ન હો તો, તમે તેની સાથે દલીલ કરશો નહિ !



એક અન્ય ઉદાહરણરૂપે જેને આપણે વારંવાર એકબીજા સાથે પ્રયોગમાં લેતા હોઈએ એવાં કેટલાંક વિધાનો લો, જેમકે ''આજે બહુ ગરમી છે.'' આપણે એવાં વિધાનોને સરળતાથી સ્વીકારી લઈએ છીએ, કારણ કે આપણે સંદર્ભ જાણીએ છીએ. અલબત આ વિધાન અસ્પષ્ટ છે : ''આજે બહુ ગરમી છે''નો અર્થ જુદા જુદા લોકો માટે જુદો જુદો હોઈ શકે છે. કારણ કે કુમાઉના વ્યક્તિ માટે જે મોસમ ગરમ હશે એ ચેન્નઈના વ્યક્તિ માટે ગરમ ન પણ હોઈ શકે.

પરંતુ ગાણિતિક વિધાન અસ્પષ્ટ ન હોઈ શકે. જે વિધાન કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તે વિધાન જ ગણિતમાં સ્વીકાર્ય અથવા માન્ય છે. જે વિધાન હંમેશા સત્ય હોય તેને આપણે સત્ય વિધાન કહીશું, નહીં તો તેને અસત્ય વિધાન કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે $5 + 2 = 7$ હંમેશાં સત્ય છે. આથી '$5 + 2 = 7$' એક સત્ય વિધાન છે. $5 + 3 = 7$ અસત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 2 : નિશ્ચિત કરો કે નીચે આપેલ વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય :

(i) ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ હોય છે.

(ii) 1 થી મોટી પ્રત્યેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય છે.

(iii) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $4x + x = 5x$ હોય છે.

(iv) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $2x > x$ થાય.

(v) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq x$ થાય.

(vi) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય, તો તે એક ચોરસ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન સત્ય છે. તમે તે પ્રકરણ 6 માં સાબિત કરી દીધું છે.

(ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે 9 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

(iii) આ વિધાન સત્ય છે.

(iv) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $2 \times (-1) = -2$ અને -2 એ -1 થી મોટી સંખ્યા નથી.

(v) આ વિધાન અસત્ય છે ઉદાહરણ તરીકે $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, અને $\frac{1}{4}$ એ $\frac{1}{2}$ થી મોટી સંખ્યા નથી.

(vi) આ વિધાન અસત્ય છે. કારણ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓ સમાન હોય છે. પરંતુ એ જરૂરી નથી કે તે એક ચોરસ હોય.

એક વાત તરફ તમે ચોક્કસ ધ્યાન આપ્યું હશે કે ગણિત અનુસાર વિધાન સત્ય નથી તે સ્થાપિત કરવા માટે આપણે એવું એક ઉદાહરણ અથવા એવી પરિસ્થિતિ બતાવવી પડે જ્યાં તે સત્ય ન બને. આથી (ii) માં કારણ કે 9 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી, એ એક એવું ઉદાહરણ છે કે વિધાન "1 થી મોટી પ્રત્યેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય છે." તે સત્ય નથી. આ પ્રકારના જે વિધાનને અનુકૂળ ન હોય તેવા ઉદાહરણને પ્રતિઉદાહરણ કહે છે. આપણે વિભાગ A1.5 માં પ્રતિઉદાહરણો પર વિગતથી ચર્ચા કરીશું.

એ વિગત તરફ પણ તમે ચોક્કસ ધ્યાન આપ્યું હશે કે જો કે વિધાન (iv), (v) અને (vi) અસત્ય છે. છતાં પણ તેના પર કેટલીક શરત લગાવીને તેને સત્ય બનાવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિધાનોને ઉચિત શરતો સાથે એવી રીતે ફરી લખો કે જેથી તે સત્ય વિધાન બને.

(i) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $2x > x$ થાય.

(ii) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq x$ થાય.

(iii) જો તમે કોઈ એક સંખ્યાને તે જ સંખ્યા વડે ભાગો તો તમને હંમેશાં 1 મળે.

(iv) વર્તુળના એક બિંદુ પર તેની જીવાએ આંતરેલ ખૂણો $90°$ નો હોય છે.

(v) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય તો તે ચોરસ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) જો $x > 0$ હોય તો $2x > x$ થાય.

(ii) જો $x \leq 0$ હોય અથવા $x \geq 1$ હોય તો $x^2 \geq x$ થાય.

(iii) જો શૂન્યેતર સંખ્યાને તે જ સંખ્યા વડે ભાગીએ તો આપણને હંમેશાં 1 મળે.

(iv) વર્તુળના એક બિંદુ પર તેના વ્યાસ દ્વારા આંતરાયેલ ખૂણો $90°$ નો હોય છે.

(v) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ અને તમામ ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે એક ચોરસ થાય.

સ્વાધ્યાય A1.1

1. નીચે આપેલાં વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, હંમેશાં અસત્ય છે કે અસ્પષ્ટ છે તે નક્કી કરો.. કારણ સાથે જવાબ જણાવો.

   (i) એક વર્ષમાં 13 મહિના હોય છે.

   (ii) દિવાળી શુક્રવારના દિવસે આવે છે.

   (iii) મગાદીમાં તાપમાન $26°$ C છે.

   (iv) પૃથ્વીને એક ચંદ્ર છે.

   (v) કૂતરાઓ ઉડી શકે છે.

   (vi) ફેબ્રુઆરીમાં માત્ર 28 દિવસ હોય છે.

2. નીચે આપેલાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય, તે કારણ સાથે જણાવો.

   (i) ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો $350°$ હોય છે.

   (ii) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$ છે.

   (iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

   (iv) બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ થાય છે.

   (v) બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો અયુગ્મ થાય છે.

3. ઉચિત શરતો લગાવીને નીચેનાં વિધાનોને એવી રીતે લખો કે વિધાન સત્ય બની જાય.

   (i) તમામ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ હોય છે.

   (ii) એક વાસ્તવિક સંખ્યાના બે ગણા હંમેશાં એક યુગ્મ સંખ્યા હોય છે.

   (iii) કોઈ પણ x માટે $3x + 1 > 4$ થાય.

   (iv) કોઈ પણ x માટે $x^3 \geq 0$ થાય.

   (v) પ્રત્યેક ત્રિકોણમાં મધ્યગા કોણદ્વિભાજક પણ હોય છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

એક સ્પષ્ટ વિધાનની યથાર્થતા સ્થાપિત કરવામાં મુખ્ય તર્કસંગત સાધન આનુમાનિક તર્ક છે.

આવો આનુમાનિક તર્કને સમજવા માટે આપણે એક કોયડાને ઉકેલવાથી શરૂઆત કરીએ.

ધારો કે તમને ચાર કાર્ડ આપવામાં આવ્યા છે. પ્રત્યેક કાર્ડની એક બાજુમાં એક મૂળાક્ષર છાપેલ છે અને બીજી બાજું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

A	V	6	5

ધારો કે તમને કહેવામાં આવે છે કે કાર્ડ નીચે આપેલા નિયમનું પાલન કરે છે.

''જો કાર્ડની એક બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય તો બીજી બાજુ એક સ્વર હોય છે.''

નિયમની સત્યતાની ચકાસણી કરવા માટે ઓછામાં ઓછા કેટલા કાર્ડને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત પડશે ?

હા, એ વિકલ્પ તો તમારી પાસે છે જ કે તમે દરેક કાર્ડને ઉલટાવી શકો છો અને ચકાસણી કરી શકો છો. પરંતુ શું તમે **ઓછામાં ઓછી સંખ્યામાં** કાર્ડને ઉલટાવીને આપેલ વિધાનની ચકાસણી કરી શકશો ?

ધ્યાનાકર્ષક મુદ્દો છે કે જે કાર્ડની એક બાજુ યુગ્મ સંખ્યા છે હોય, તો તેની બીજી બાજુ એક સ્વર છે. આ વિધાનમાં એ કહ્યું નથી કે જે કાર્ડની એક બાજુ સ્વર છે, તેની બીજી બાજુ એક યુગ્મ સંખ્યા હોય જ. એવું બની પણ શકે અથવા ન પણ બની શકે. નિયમમાં એ પણ કહેલ નથી કે જે કાર્ડની એક બાજુ અયુગ્મ સંખ્યા હોય, તો તેની બીજી બાજુ વ્યંજન જ હોવો જોઈએ. એવું બની પણ શકે અથવા ન પણ બની શકે.

આથી શું આપણે 'A' એ ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે ? ના ! બીજી બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય કે અયુગ્મ સંખ્યા ત્યારે પણ નિયમ લાગુ પડે છે.

'5' ના સંબંધમાં તમે શું કરશો ? અહીં પણ આપણે કાર્ડ ઉલટાવવાની જરૂર નથી. કારણ કે નિયમ બીજી બાજુ સ્વર હોય કે વ્યંજન ત્યારે પણ લાગું પડે છે.

પરંતુ V અને 6 વાળા કાર્ડને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે. જો V ની બીજી બાજુએ એક યુગ્મ સંખ્યા હોય તો નિયમ ભંગ થઈ જાય છે. તે જ પ્રકારે જો 6 ની બીજી બાજુ વ્યંજન હોય તો પણ નિયમ ભંગ થઈ જાય છે.

આ કોયડાને ઉકેલવા માટે આપણે જે પ્રકારે તર્કનો ઉપયોગ કર્યો છે. તેને આનુમાનિક તર્ક કહેવાય છે. આને ''આનુમાનિક'' એટલા માટે કહેવાય છે, કારણ કે તર્કનો ઉપયોગ કરીને પહેલાં તારવેલ અથવા સ્થાપિત કરેલા વિધાન પરથી આપણે એક પરિણામ અથવા વિધાન પ્રાપ્ત કરી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ માટે ઉપરના કોયડામાં અનુમાન કરેલા તર્કની હારમાળા પરથી આપણે એ મેળવ્યું કે માત્ર, V અને 6 ને જ ઉલટાવવાની જરૂર છે.

આનુમાનિક તર્કની સહાયતાથી આપણે એ તારણ પણ કાઢી શકીએ કે અમુક ચોક્કસ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે જેને સત્ય માનવામાં આવ્યું છે એવા એક ખૂબ જ વ્યાપક વિધાનનો તે એક વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે એકવાર આપણે એ સાબિત કરી લઈએ કે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર હંમેશાં અયુગ્મ જ થાય છે. ત્યારે આપણે તરત જ એ તારણ કાઢી શકીએ કે 70001×134563 અયુગ્મ થશે. કારણ કે 70001 અને 134563 બંને સંખ્યાઓ જ અયુગ્મ છે.

સદીઓથી આનુમાનિક તર્ક માનવચિંતનનું એક અંગ રહ્યું છે અને તેનો પ્રયોગ આપણા દૈનિક જીવનમાં થતો રહે છે. ઉદાહરણ તરીકે માની લો કે આ વિધાન ''જ્યારે આગળના દિવસનું મહત્તમ તાપમાન $28°$ C થી વધુ હોય માત્ર ત્યારે જ સોલારિસ ફૂલ ખીલે છે'' અને ''15 સપ્ટેમ્બર, 2005 ના દિવસે કાલ્પનિક ખીણમાં સોલારિસ ખીલ્યું હતું'' ત્યારે આનુમાનિક તર્કનો પ્રયોગ કરીને આપણે એ તારણ કાઢી શકીએ કે કાલ્પનિક ખીણમાં 14 સપ્ટેમ્બર 2005 ના રોજ મહત્તમ તાપમાન $28°$ C થી વધુ હતું.

આપણી કમનસીબી એ છે કે, આપણે દૈનિક જીવનમાં હંમેશાં સત્ય તર્કનો ઉપયોગ કરતાં નથી! હંમેશાં આપણે પહેલાં અસત્ય તર્કના આધારે અનેક તારણ કાઢી લઈએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે જો તમારા મિત્ર એક દિવસ તમને જોઈને હસે નહિ તો તમે એ તારણ કાઢી લો છો કે તે તમારાથી નારાજ છે. અલબત આ પણ બની શકે કે ‘‘જો તેના માથામાં ખૂબ દુખાવો હોય તો તે તમને જોઈને હસ્યા ન હોય’’ તમે રોજબરોજ જે તારણ કાઢો છો તે તારણ માન્ય તર્ક પર આધારિત છે કે ખામીયુક્ત તર્ક પર તે શા માટે ચકાસતા નથી ?

સ્વાધ્યાય A1.2

1. આનુમાનિક તર્ક પરથી નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) મનુષ્ય સસ્તન છે. તમામ સસ્તન પૃષ્ઠવંશી હોય છે. આ બે વિધાનોના આધારે તમે મનુષ્યના સંબંધમાં શું તારણ કાઢી શકો છો ?

(ii) એન્થની એક વાળ કાપનાર છે. દિનેશે તેના વાળ કપાવ્યા છે. શું તમે એ તારણ કાઢી શકો કે એન્થનીએ દિનેશના વાળ કાપ્યા છે ?

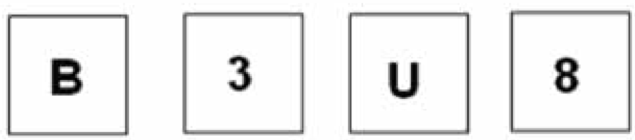
(iii) મંગળવાસીને લાલ જીભ છે. ગુલગ એક મંગળવાસી છે. આ બે વિધાનોના આધારે તમે ગુલગના વિશે તારણ કાઢી શકો ?

(iv) જો કોઈ દિવસ ચાર કલાકથી વધુ સમય સુધી વરસાદ થાય, તો બીજા દિવસે ગટરોની સફાઈ કરવી પડે છે. આજે છ કલાક સુધી વરસાદ થયો છે. કાલે ગટરની સ્થિતિ શું હશે ? આ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો છો ?

(v) બાજુના કાર્ટૂનમાં આપેલ ગાયે કરેલા તર્કમાં શું વિરોધાભાસ છે ?

2. તમને ફરીથી ચાર કાર્ડ આપેલ છે. દરેક કાર્ડની એક બાજુ એક સંખ્યા અને બીજી બાજુ અક્ષર છાપેલ છે. નીચે આપેલા નિયમ લાગુ પડે છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરવા માટે કયાં બે કાર્ડ એવાં છે જેને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે ?

‘‘જો કાર્ડની એક બાજુ એક વ્યંજન છે તો તેની બીજી બાજુ એક અયુગ્મ સંખ્યા છે.’’



A1.4 પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા

અત્યાર સુધી આપણે કેટલાંક વિધાનોની ચર્ચા કરી છે અને જોયું છે કે, આ વિધાનોની માન્યતાની-ચકાસણી કેવી રીતે કરવામાં આવે છે.

આ વિભાગમાં તમે જે તે ત્રણ જુદા-જુદા પ્રકારનાં વિધાનોથી ગણિતનું નિર્માણ થયું છે એ પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા અને તેમની વચ્ચેનો તફાવત સમજવા વિશે અભ્યાસ કરશો.

તમે પહેલાં પણ અનેક પ્રમેયો શીખી ગયા છો. આ પ્રમેય શું છે ? જેની સત્યાર્થતા (સાબિત) કરી દેવામાં આવી છે એવાં ગાણિતિક વિધાનોને પ્રમેય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે આગળ આપેલ વિધાન પ્રમેય છે તે તમે વિભાગ A1.5 માં જોશો.

પ્રમેય A1.1 : ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો 180^o હોય છે.

પ્રમેય A1.2 : બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.

પ્રમેય A1.3 : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય હોય છે.

આપણે ગાણિતિક સમજ અને અનુભવ એટલે કે ગાણિતિક અંતઃસ્ફુરણાના આધારે સત્ય માનીએ છીએ એવું વિધાન ગાણિતિક અટકળ કહેવાય છે. ગાણિતિક અટકળ સત્ય પણ હોય કે અસત્ય પણ હોય, જો આપણે તેને સાબિત કરી શકીએ તો તે એક પ્રમેય બની જાય છે. ગણિતજ્ઞો ભાત નિહાળી તે પરથી ચતુર ગાણિતિક કલ્પના કરી ગાણિતિક અટકળ કરે છે. ચાલો આપણે કેટલાંક સ્વરૂપ લઈએ અને જોઈએ કે આપણે તેમનો કેવી રીતે બુદ્ધિપૂર્વક ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 4 : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક સંખ્યાઓ લો અને તેને ઉમેરો, જેમકે,

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$, $20 + 22 + 24 = 66$.

શું તમે આ સરવાળાઓનાં પરિણામોથી કોઈ સ્વરૂપનું અનુમાન લગાવી શકો છો ? તેના વિશે તમે શું અનુમાન લગાવી શકો છો ?

ઉકેલ : એક અનુમાન આ હોઈ શકે છે.

(i) ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ હોય છે.

અન્ય અનુમાન એ પણ હોઈ શકે છે :

(ii) ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 થી વિભાજ્ય હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : સંખ્યાઓનું નીચે પ્રમાણે સ્વરૂપ લો. તેને પાસ્કલ ત્રિકોણ કહેવામાં આવે છે.

હરોળ												સંખ્યાઓનો સરવાળો
1						1						1
2					1		1					2
3				1		2		1				4
4			1		3		3		1			8
5		1		4		6		4		1		16
6	1		5		10		10		5		1	32
7			:						:			:
8			:						:			:

7 મી અને 8 મી હરોળની સંખ્યાઓના સરવાળા માટે તમે શું અનુમાન આપી શકો છો ? હરોળ 21 ની સંખ્યાઓ માટે તમે શું કહેશો ? શું તમે આ તરાહ જોઈ ? હરોળ n ની સંખ્યાઓના સરવાળાના સૂત્ર માટે અનુમાન કરો.

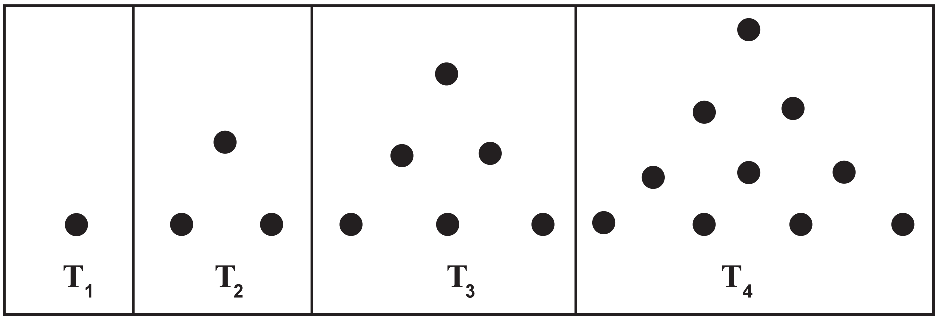
ઉકેલ : 7 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$ છે.

8 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$ છે.

21 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2^{20}$ છે.

હરોળ n ની સંખ્યાઓનો સરવાળો = 2^{n-1} છે.

ઉદાહરણ 6 : નીચે જણાવેલ ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ T_n લો :

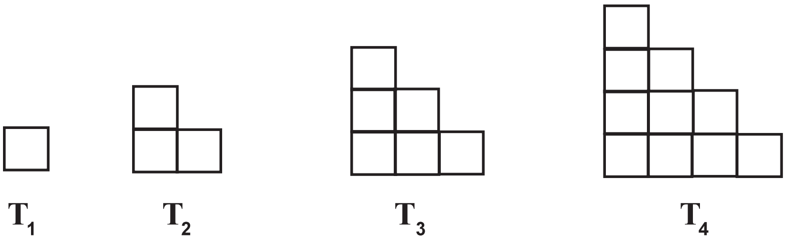


આકૃતિ A1.1

અહીં ટપકાંઓની એવી રીતે ગોઠવણી કરેલ છે કે જેનાથી એક ત્રિકોણ બને છે. અહીં $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ વગેરે. શું તમે અનુમાન લગાવી શકો કે T_5 શું છે ? T_6 વિશે તમે શું કહી શકો ? T_n ના વિશે તમે શું કહી શકો છો ?

T_n નું એક અનુમાન આપો.

જો તમે તેને નીચે દર્શાવેલ રીત વડે ફરી દોરો તો તમને મદદ (સરળતા) મળી શકે છે :



આકૃતિ A1.2

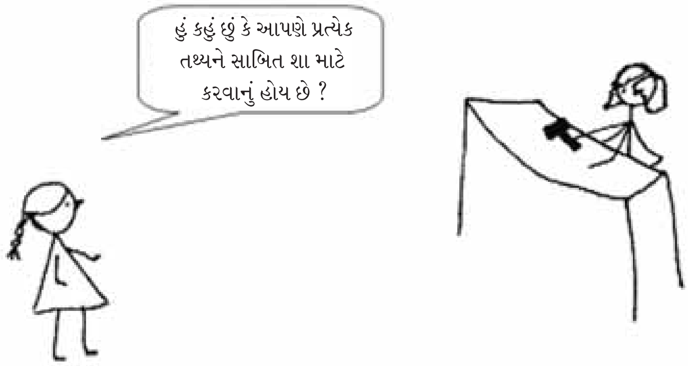
ઉકેલ : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \dfrac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ગાણિતિક અટકળ માટે એક અનુકૂળ ઉદાહરણ હજી પણ મુક્ત છે. (એટલે કે હજી સુધી સાબિત કરવામાં આવ્યું નથી કે તે સત્ય છે કે અસત્ય) આ ગાણિતિક અટકળ ગણિતશાસ્ત્રી ***Christian Goldbach*** (1690 – 1764)ના નામે રાખવામાં આવી છે. ***Goldbach***ની અટકળનું વિધાન એ છે કે "4 થી મોટા પ્રત્યેક યુગ્મ પૂર્ણાંકને બે અયુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સરવાળાના રૂપમાં વ્યક્ત કરી શકાય છે." જો તમે આ સાબિત કરી શકશો કે આ પરિણામ સત્ય છે કે અસત્ય તો તમે પ્રસિદ્ધ થઈ જશો.

એ જોઈને તમને ચોક્કસ આશ્ચર્ય થયું હશે કે શું ગણિતમાં તમારી સામે જે કંઈ પણ આવે છે તેને સાબિત કરવું જરૂરી છે અને જો નહિ તો શા માટે નહિ ?



વાસ્તવિકતા તો એ છે કે ગણિતના દરેક ક્ષેત્ર કેટલાંક વિધાનો પર આધારિત હોય છે. તેમને આપણે સત્ય માની લઈએ છીએ અને તેમને સાબિત કરતા નથી. જેને આપણે સાબિતી વગર સત્ય માની લઈએ છીએ તે ''સ્વયં સત્ય છે''. આ વિધાનોને ''સ્વયં સિદ્ધ સત્ય'' કહે છે. પ્રકરણ-5 માં તમે યુક્લિડના સ્વંય સિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરી ગયા છો.(આજકાલ સ્વયં સિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓ વચ્ચે કોઈ ભેદ રાખવામાં આવતો નથી.) ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડની પહેલી પૂર્વધારણા છે :

કોઈ એક બિંદુથી અન્ય કોઈ બિંદુ સુધી એક સીધી રેખા દોરી શકાય છે અને

તેની ત્રીજી પૂર્વધારણા છે : કોઈ કેન્દ્ર અને કોઈપણ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરી શકાય છે.

આ વિધાનો સંપૂર્ણ સત્ય જોવા મળે છે અને યુક્લિડે તેમને સાચાં માની લીધાં હતાં. શા માટે ?

તેમણે તેને સત્ય એટલા માટે માની લીધાં કે આપણે દરેક હકીકતને સાબિત કરી શકતા નથી અને આપણે કયાંક ને ક્યાંકથી શરૂઆત તો કરવી જ પડે છે. તેના માટે આપણે જેને સત્ય માની લઈએ એવાં કેટલાંક વિધાનોની જરૂરિયાત હોય છે અને ફરી આ સ્વયં સિદ્ધ સત્યો પર આધારિત રહીને આપણે આપણા જ્ઞાનનું નિર્માણ કરી શકીએ છીએ.

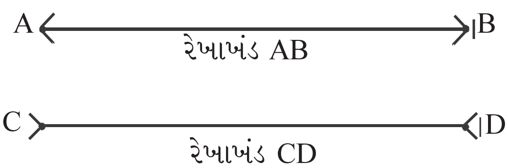
તમને એ જાણીને આશ્ચર્ય થઈ શકે છે કે તો પછી આપણે આ બધાં વિધાનોનો સ્વીકાર કેમ નથી કરી લેતાં. તેનાં અનેક કારણ છે. ઘણી વાર આપણી અંતઃસ્ફુરણા ખોટી સાબિત થઈ શકે છે; ચિત્ર કે નમૂનાનું માળખું આપણને દગો દઈ શકે છે અને ફરી આપણી સામે માત્ર એક જ વિકલ્પ બચે છે કે આપેલ હકીકતોને સત્ય સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ તરીકે આપણામાંથી અનેક વ્યક્તિ એ વિશ્વાસ કરે છે કે જો એક સંખ્યાને અન્ય સંખ્યાથી ગુણીએ તો પ્રાપ્ત પરિણામ બંને સંખ્યાઓથી મોટું હશે. પરંતુ આપણે એ જાણીએ છીએ કે એ હંમેશાં સત્ય નથી હોતું.

ઉદાહરણ તરીકે $5 \times 0.2 = 1$ છે. આ પરિણામ 5 થી નાનું છે.

હવે તમે નીચે આપેલ આકૃતિ A1.3 જુઓ. કયો રેખાખંડ વધુ લાંબો છે.

AB કે CD ?



ઉદાહરણ A1.3

AB ની લંબાઈ ટૂંકી દેખાવા છતાં પણ બંનેની લંબાઈ સમાન છે.

તમને નવાઈ લાગશે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો આપણી અંતઃસ્ફુરણાના આધારે પસંદ કરાયા છે અને તે સ્વયં પુરાવા રૂપ દૃષ્ટિમાન થાય છે માટે, આપણે તેમને સત્ય માનીએ છીએ. જો કે, તે શક્ય છે કે પાછળથી એવું પરિણામ મેળવી શકાય કે કોઈ ચોક્કસ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એ સત્ય નથી ! આવી શક્યતા સામે શું રક્ષણ છે? આપણે નીચેનાં સોપાનો લઈએ :

(i) સ્વયંસિદ્ધ સત્યોને ખૂબ જ ન્યૂનતમ રાખવાં. ઉદાહરણ તરીકે માત્ર સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને યુક્લિડની પાંચ પૂર્વધારણાઓને આધારે આપણે સેંકડો પ્રમેય તારવી શકીએ છીએ.

(ii) સુનિશ્ચિત કરો કે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો સુસંગત છે.

જો આપણે એક સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ બીજું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ખરું નથી તે બતાવવા માટે કરી શકીએ તો આપણે કહી શકીએ કે સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો સમૂહ વિસંગત છે. ઉદાહરણ તરીકે, નીચેનાં બે વિધાનોનો વિચાર કરો. આપણે સાબિત કરીશું કે તેઓ સુસંગત નથી.

વિધાન 1: કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા તેની ક્રમિક સંખ્યાને સમાન નથી.

વિધાન 2: પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ભાગતાં પૂર્ણ સંખ્યા મળે.

(યાદ રાખો : શૂન્ય વડે ભાગાકાર અવ્યાખ્યાયિત છે. પરંતુ ક્ષણિક એવું માનીએ કે તે શક્ય છે અને જોઈએ કે શું થાય છે.)

વિધાન 2, પરથી આપણે $\frac{1}{0} = a$, મેળવીએ, જ્યાં a કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા છે, અને તે દર્શાવે છે કે $1 = 0$. પરંતુ આ વિધાન 1 ને અસત્ય ઠેરવે છે. તે દર્શાવે છે કે કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા તેની ક્રમિક સંખ્યાને સમાન નથી.

(iii) અસત્ય હોય તેવું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય, વહેલું કે મોડું એક વિરોધાભાસમાં પરિણમે છે. *જ્યારે આપણે એક એવું વિધાન મેળવીએ જેનાં બંને પરિણામો એટલે કે વિધાન અને પ્રતિવિધાન સત્ય હોય, ત્યારે એક વિરોધાભાસ મળે છે.* ઉપરનાં વિધાન 1 અને વિધાન 2 નો વિચાર કરો.

વિધાન 1 પરથી આપણે $2 \neq 1$ પરિણામ તારવી શકીએ.

હવે $x^2 - x^2$ નો વિચાર કરો. આપણે તેના અવયવ નીચે દર્શાવેલ બે જુદી જુદી રીતે મેળવીશું :

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ અને

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

આથી, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

વિધાન 2 પરથી આપણે બંને બાજુએથી $(x - x)$ દૂર કરીએ.

આપણને $x = 2x$ મળશે તે $2 = 1$ માં રૂપાંતરિત થાય.

તેથી બંને વિધાન $2 \neq 1$ અને તેનું પ્રતીપ $2 = 1$ બંને સત્ય છે. આ વિરોધાભાસ છે. આ વિરોધાભાસ ઊભું થવાનું કારણ એ છે કે કોઈ પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ભાગતા પૂર્ણ સંખ્યા મળે તે સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ખોટું છે.

આથી, જે વિધાનોને આપણે સ્વયંસિદ્ધ સત્ય તરીકે પસંદ કરીએ છીએ તેમાં ખૂબ જ વિચાર અને સૂઝની જરૂર છે. આપણે ખાતરી કરવી જોઈએ કે તે વિધાનો વિસંગતતાઓ કે તાર્કિક વિરોધાભાસ તરફ દોરી જતા ન હોવા જોઈએ. વધુમાં, સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની પસંદગી જ જાતે ક્યારેક નવી શોધ તરફ દોરી જાય છે. પ્રકરણ 5 પરથી તમે યુક્લિડની પાંચમી

પૂર્વધારણા અને બિનયુક્લિડિયન ભૂમિતિની શોધથી પરિચિત છો જ. તમે જોયું કે ગણિતશાસ્ત્રીઓ એવું માને છે કે પાંચમી પૂર્વધારણાને પૂર્વધારણા કહેવાની જરૂર નથી અને હકીકતમાં એ જેને ચાર પૂર્વધારણાઓની મદદથી સાબિત કરી શકાય એવું પ્રમેય છે. આશ્ચર્યજનક રીતે આ પ્રયત્નો બિનયુક્લિડિયન ભૂમિતિની શોધ તરફ દોરી જાય છે.

આપણે પ્રમેય, સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને અટકળ વચ્ચેના તફાવતને યાદ કરીને આ વિભાગને સમાપ્ત કરીએ. સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એવું વિધાન છે જેને સાબિતી વગર સત્ય ધારી લેવામાં આવે છે. અટકળ એ એવું ગાણિતિક વિધાન છે જેની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હજુ પ્રસ્થાપિત થયેલ નથી અને પ્રમેય એ એવું ગાણિતિક વિધાન છે જેનું સત્ય તાર્કિક રીતે પ્રસ્થાપિત કરેલું છે.

સ્વાધ્યાય A1.3

1. કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓ લો અને તેના ગુણાકાર શોધો. ઉદાહરણ તરીકે $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધો. આ ગુણાકાર માટે ત્રણ ગાણિતિક અટકળો કરો.

2. પાસ્કલ ત્રિકોણ બનાવો.

હરોળ 1 : 1 $= 11^0$

હરોળ 2 : 1 1 $= 11^1$

હરોળ 3 : 1 2 1 $= 11^2$

હરોળ: 4 અને હરોળ 5 માટે ગાણિતિક અટકળ કરો. શું તમારી ગાણિતિક અટકળ યોગ્ય છે? તમારી અટકળ હરોળ : 6 માટે પણ સાચી છે ?

3. ચાલો ફરીથી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ જુઓ. (જુઓ આકૃતિ A1.2) ક્રમિક બે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ ઉમેરો. ઉદાહરણ તરીકે $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$.

તો $T_4 + T_5$ વિશે શું કહી શકાય ? $T_{n-1} + T_n$ માટેની ગાણિતિક અટકળ કરો.

4. નીચે દર્શાવેલ તરાહ જુઓ :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

નીચે દર્શાવેલ દરેક માટે ગાણિતિક અટકળ કરીએ :

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

ચકાસો કે તમારી ગાણિતિક અટકળ સાચી છે.

5. આ પુસ્તકમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ પાંચ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની (પૂર્વધારણાઓ) યાદી બનાવો.

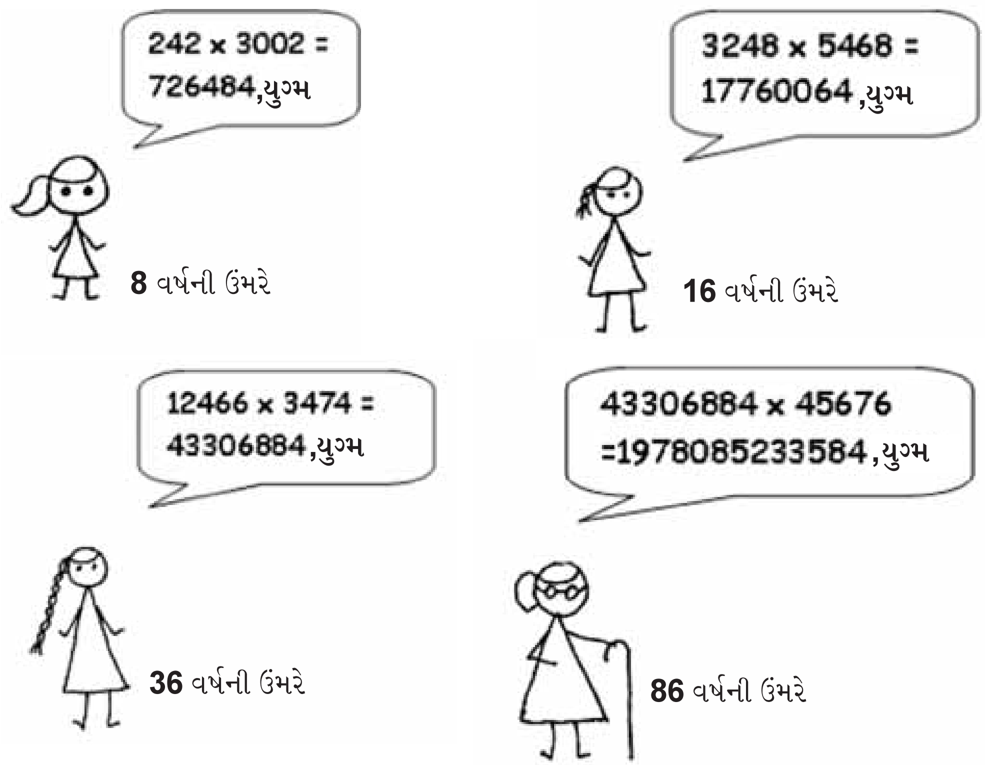
A1.5 ગાણિતિક સાબિતી શું છે ?

ચાલો હવે આપણે સાબિતીનાં વિવિધ પાસાઓ જોઈએ. આપણે ચકાસણી અને સાબિતી વચ્ચેના તફાવતની સમજ સાથે પ્રારંભ કરીએ. ગણિતમાં સાબિતીનો અભ્યાસ કર્યો. એ પહેલાં મુખ્યત્વે તમને વિધાન ચકાસવાનું કહેવામાં આવતું હતું.

ઉદાહરણ તરીકે તમને બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ સંખ્યા હોય તેવા ઉદાહરણને ચકાસવાનું કહેવામાં આવે અને તમે બે યાદચ્છિક યુગ્મ સંખ્યાઓ જેમકે 24 અને 2006 લો અને ચકાસો કે $24 \times 2006 = 48144$ પણ યુગ્મ છે. તમે કદાચ બીજા ઘણાં બધાં ઉદાહરણો લઈ શકો.

વળી, તમને એક પ્રવૃત્તિરૂપે વર્ગમાં વિવિધ ત્રિકોણો દોરવાનું અને તેના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો કરવાનું પૂછી શકાય. માપની ભૂલને અવગણી એ તો તમો જોઈ શકો કે ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો $180°$ થાય છે.

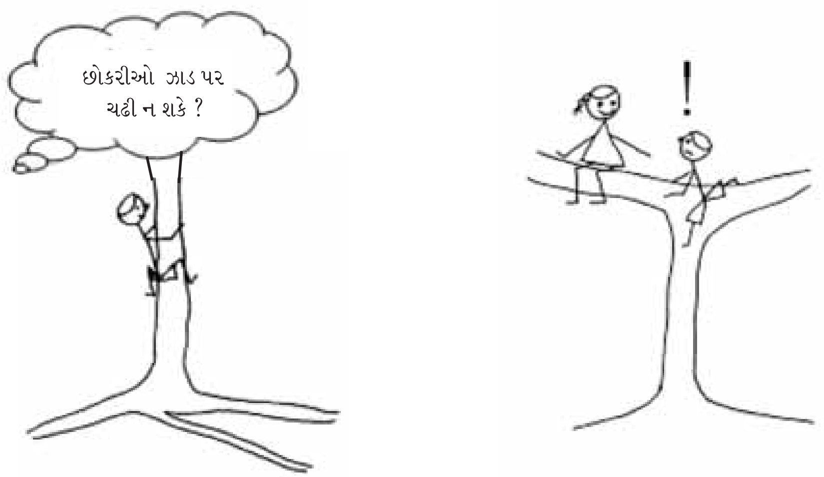
આ પદ્ધતિમાં શું ખામી છે? ચકાસવાની પ્રક્રિયામાં કેટલીક સમસ્યાઓ છે. તમે કોઈ વિધાન કરો અને તે સત્ય છે તેમ માનો તો તમો ચોકકસપણે એવું ન કહી શકો કે તે વિધાન બધા કિસ્સામાં સત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે યુગ્મ સંખ્યાઓની કેટલીક જોડનો ગુણાકાર યુગ્મ સંખ્યા જ હોય. તમે જાતે બધી જ શક્ય યુગ્મ સંખ્યાઓની જોડના ગુણાકાર ચકાસી ન શકો. જો તમે તેવું કરો તો ચિત્રમાં દર્શાવેલી છોકરીની માફક, તમારી બાકીની જિંદગીમાં શક્ય બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓની જોડના ગુણાકાર કર્યા કરો. આ જ પ્રમાણે હજુ સુધી કેટલાક ત્રિકોણ એવા હોઈ શકે, કે જેમના અંતઃકોણોનો સરવાળો $180°$ જેટલો નથી. આપણે શક્ય બધા જ ત્રિકોણના આંતરિક ખૂણાઓ માપી શકતા નથી.



વધુમાં ચકાસણી ઘણી વાર ગેરમાર્ગે દોરનાર બની શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે તમો પાસ્કલના ત્રિકોણ આધારિત અગાઉની ચકાસણીના આધારે $11^5 = 15101051$ મેળવવા કદાચ પ્રેરાઈ શકો. (સ્વાધ્યાય A1.3 નો દાખલા નં.2) પરંતુ હકીકતમાં $11^5 = 161051$ થાય.

આથી, કેટલાક કિસ્સાઓમાં ચકાસણી આધારિત ન હોય તેવા બીજા અભિગમની તમારે જરૂર પડે. અહીં બીજા અભિગમનું નામ છે વિધાન સાબિત કરવું. સંપૂર્ણપણે તાર્કિક દલીલો આધારિત જે પ્રક્રિયા ગાણિતિક વિધાનની સત્યાર્થતા પુરવાર કરે છે તેને ગાણિતિક સાબિતી કહે છે.

વિભાગ A1.2 ના ઉદાહરણ 2 માં તમે જોયું કે ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે તે પ્રસ્થાપિત કરવા માટે એક જ પ્રતિઉદાહરણ સર્જવું પૂરતું છે. આથી કોઈ ગાણિતિક-વિધાનની યથાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે હજારો કિસ્સાઓની જરૂર નથી; માત્ર એક પ્રતિઉદાહરણ તેને અમાન્ય વિધાન કરવા માટે પૂરતું જ છે. (જેમ કે તે દર્શાવવા માટે કે કંઈક અસત્ય છે.)



કોઈ ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે. તેમ બતાવવા માટે પ્રતિઉદાહરણ શોધવું પર્યાપ્ત છે.

આમ, $7 + 5 = 12$ એ બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો અયુગ્મ હોય તેનું પ્રતિઉદાહરણ છે.

(i) પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આપણી પાસે કેવી રીતે આગળ વધવું. તેનો આછેરો ખ્યાલ હોવો જોઈએ.

(ii) પ્રમેયમાં અગાઉથી જ અપાયેલ માહિતી સ્પષ્ટ પણે સમજવી અને ઉપયોગમાં લેવી.

ઉદાહરણ તરીકે, પ્રમેય A1.2 દર્શાવે છે કે બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય. આપણને બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ આપેલી છે. આથી, આપણે તેના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી શકીએ. અવયવ પ્રમેયમાં (પ્રકરણ 2) તમને બહુપદી $p(x)$ આપેલી હતી અને $p(a) = 0$ એવું કહેવામાં આવ્યું હતું. $(x - a)$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે તે બતાવવા તમારે તેનો ઉપયોગ કરવો પડે. તેવી જ રીતે અવયવ પ્રમેયના પ્રતીપ માટે $(x - a)$ એ $p(x)$નો અવયવ છે તેવું આપેલું છે અને તમારે આ ઉત્કલ્પનાનો ઉપયોગ કરી $p(a) = 0$ સાબિત કરવાનું છે.

તમે પ્રમેય સાબિત કરવાની પ્રક્રિયામાં રચનાનો પણ ઉપયોગ કરી શકો છો. ઉદાહરણ તરીકે, ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° સાબિત કરવા માટે, આપણે કોઈ એક બાજુને સમાંતર રેખા તે બાજુની સામેનાં શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તેવી દોરીએ અને સમાંતર રેખાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

(iii) સાબિતી એ ગાણિતિક વિધાનોની ક્રમિક હારમાળાથી બનેલી હોય છે. સાબિતીનું પ્રત્યેક વિધાન સાબિતીના અગાઉના વિધાન અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય અથવા પૂર્વધારણા કે આપણી ઉત્કલ્પના પરથી તાર્કિક રીતે અનુમાનિત કરેલ હોય છે.

(iv) ગાણિતિક રીતે સત્ય વિધાનોની હારમાળા આપણે શું સાબિત કરવા ઈચ્છીએ છીએ કે શું પ્રમેયનો દાવો છે તેને તાર્કિક રીતે સાચા ક્રમમાં સમાપન તરફ દોરી જાય છે.

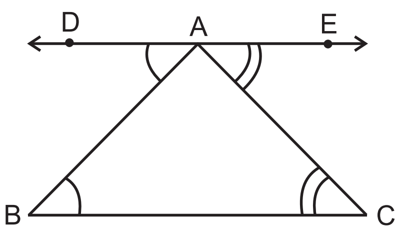
આ ઘટકો સમજવા માટે આપણે પ્રમેય A1.1 અને તેની સાબિતીનું પૃથક્કરણ કરીએ. તમે પ્રકરણ 6 માં આ પ્રમેયનો અભ્યાસ કરી ચૂકયાં છો. પરંતુ સૌપ્રથમ, ભૂમિતિમાં સાબિતી પર કેટલીક ટિપ્પણી કરીએ. આપણે મોટે ભાગે પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આકૃતિઓનો સહારો લેતા હોઈએ છીએ અને તે ખૂબ જ અગત્યનું છે. જો કે સાબિતીના દરેક વિધાન માત્ર તર્કનો ઉપયોગ કરી પ્રસ્થાપિત કરવામાં આવેલા હોય છે. વારંવાર આપણે વિદ્યાર્થીઓને એવું કહેતા સાંભળીએ છીએ કે ''આપેલા બે ખૂણાઓ સમાન છે. કારણ કે ચિત્રમાં તે સમાન લાગે છે. ''અથવા'' તે ખૂણો 90^0 જ હોવો જોઈએ કારણ કે બે રેખાઓ એકબીજીને લંબ હોય તેવું દેખાય છે.'' તમે જે જુઓ છો તેનાથી છેતરાવાથી બચો. (આકૃતિ A1.3 યાદ કરો.)

આથી હવે આપણે પ્રમેય A1.1 જોઈએ.

પ્રમેય A1.1 : ત્રિકોણોના અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° થાય.

સાબિતી : ત્રિકોણ ABC નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ A1.4).

આપણે $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ સાબિત કરવાનું છે. (1)



આકૃતિ A1.4

A માંથી પસાર થતી અને BC ને સમાંતર રેખા DE રચો. (2)

DE એ BC ને સમાંતર છે અને AB તેની છેદિકા છે.

આથી, $\angle DAB$ અને $\angle ABC$ એ યુગ્મકોણો છે. માટે પ્રકરણ 6 ના પ્રમેય 6.2 અનુસાર તેઓ સમાન છે એટલે કે

$\angle DAB = \angle ABC$ (3)

આ જ પ્રમાણે $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

માટે $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

પરંતુ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$, કારણ કે તેઓ સરળકોણ બનાવે છે. (6)

તેથી, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$. ■ (7)

હવે, આપણે સાબિતીના દરેક સોપાન પર ટિપ્પણ કરીએ.

સોપાન 1 : આપણું પ્રમેય ત્રિકોણના ગુણધર્મો આધારિત છે. આથી આપણે ત્રિકોણથી શરૂઆત કરીએ.

સોપાન 2 : આ ચાવી રૂપ વિચાર છે કે પ્રમેય સાબિત કરવા માટે સાહજિક કૂદકો કે કેવી રીતે આગળ વધવું તેની સમજ

હોવી જરૂરી છે. ભૌમિતિક સાબિતીઓમાં રચનાની આવશ્યકતા હોઈ શકે.

સોપાન 3 અને 4 : DE એ BC ને સમાંતર છે(રચના) એ સત્યનો ઉપયોગ કરી અને બે સમાંતર રેખાની છેદિકાથી બનતા યુગ્મકોણ સમાન હોય છે તેવા પહેલા સાબિત કરેલા પ્રમેય 6.2 પરથી આપણે $\angle$ DAE = $\angle$ ABC અને $\angle$ CAE = $\angle$ ACB મેળવીને સમાપન કરીએ છીએ.

સોપાન 5 : અહીં આપણે યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરીએ. (જુઓ પ્રકરણ 5.) એ દર્શાવે છે કે "જો સમાનમાં સમાનને ઉમેરીએ તો કુલ સમાન થાય" આ રીતે સમજાવી શકાય.

$\angle$ ABC + $\angle$ BAC+ $\angle$ ACB = $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE

આમ, ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો એ સીધી રેખા પર મળતા ખૂણાઓના સરવાળાને સમાન થાય છે.

સોપાન 6:અહીં આપણે પ્રકરણ 6 ની રૈખિક જોડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ઉપયોગ લીધેલું છે. તે દર્શાવે છે કે સીધી રેખા પરના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય. આ પરથી દર્શાવી શકાય $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE = 180°.

સોપાન 7 : આપણે યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરીએ. તે દર્શાવે છે કે "જે બાબતો સમાન હોય તે એકબીજાને સમાન હોય" પરથી કહી શકાય કે $\angle$ ABC + $\angle$ BAC + $\angle$ ACB = $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE = 180°. સોપાન 7 એ પ્રમેય દ્વારા રજૂ થતું વિધાન આપણે સાબિત કર્યું એવો દાવો છે. હવે આપણે પ્રમેય A1.2 અને A1.3 નું પૃથક્કરણ કર્યા વગર સાબિત કરીશું.

પ્રમેય A1.2 : બે પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.

સાબિતી : ધારો કે x અને y કોઈપણ બે પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

આપણે xy એ યુગ્મ છે તે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ.

x અને y યુગ્મ હોવાથી તે 2 વડે વિભાજ્ય છે અને તેથી કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $x = 2m$ અને કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $y = 2n$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

પરિણામે $xy = 4\,mn$ અહીં $4\,mn$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી xy પણ 2 વડે વિભાજ્ય થાય.

માટે, xy એ યુગ્મ સંખ્યા છે. ■

પ્રમેય A1.3 : ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ (કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે) $2n$, $2n + 2$ અને $2n + 4$ સ્વરૂપે હોય આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે તેનો ગુણાકાર $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય હોય.

હવે, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n +1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$.

હવે, આપણી પાસે બે વિકલ્પ છે. n એ કાં તો અયુગ્મ અથવા યુગ્મ સંખ્યા છે. ચાલો આપણે દરેક વિકલ્પ ચકાસીએ. ધારો કે n એ યુગ્મ છે તો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $n = 2m$ લખી શકીએ.

અને ત્યાર બાદ $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$.

માટે $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, ધારો કે n એ અયુગ્મ સંખ્યા છે. માટે $n + 1$ એ યુગ્મ સંખ્યા થાય અને આપણે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા r માટે $n + 1 = 2r$ લઈ શકીએ.

હવે આપણી પાસે : $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$

$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

માટે, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય થાય.

માટે, બંને કિસ્સાઓમાં આપણે દર્શાવ્યું કે ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય છે. ■

ગણિતશાસ્ત્રીઓ કેવી રીતે પરિણામ મેળવે અને કેવી રીતે પરંપરાગત કઠિન સાબિતીઓ લખાય છે તેની વચ્ચેના તફાવતની કેટલીક નોંધ સાથે આપણે આ પ્રકરણનું સમાપન કરીએ. અગાઉ દર્શાવ્યું એ પ્રમાણે પ્રત્યેક સાબિતીમાં મુખ્ય એક સાહજિક વિચાર (ક્યારેક એક કરતાં વધુ) હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓ જે રીતે વિચારે છે અને પરિણામો તારવે છે તેમાં અંતઃપ્રેરણા કેન્દ્રમાં હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રી ભાગ્યે જ કોઈ પ્રમેયની સાબિતી અસ્પષ્ટ આપે છે.

ગણિતશાસ્ત્રીઓ ખરો ઉકેલ કે સાબિતી આપતાં પહેલાં મોટે ભાગે વિવિધ માર્ગે વિચાર કરે અને તર્ક લગાવે અને ઉદાહરણો દ્વારા પ્રયોગ કરે છે. યોગ્ય સાબિતી મેળવવા માટે રચનાત્મક તબકકો આવ્યા બાદ બધી દલીલોની સંખ્યા ઘટાડી શકાય છે.

અહીં ભારતના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી રામાનુજનનો વિચાર કરવો જોઈએ. તેમણે ઉચ્ચ કક્ષાની અંતઃપ્રેરણા દ્વારા ઘણાંબધાં વિધાનો તારવ્યાં હતાં. તે સાચાં હોવાનો તેમણે દાવો કર્યો હતો. તેમાંનાં ઘણાં બધાં સત્ય પુરવાર થયાં અને તે પ્રસિદ્ધ પ્રમેયો છે. જોકે આજે પણ વિશ્વના ગણિતશાસ્ત્રીઓ તેમના દાવા (ધારણાઓ)ને સાબિત કરવા (કે નકારવા) સંઘર્ષ કરી રહ્યા છે.

શ્રીનિવાસ રામાનુજન
(1887–1920)
આકૃતિ A1.5

સ્વાધ્યાય A1.4

1. નીચે દર્શાવેલાં વિધાનો માટે પ્રતિઉદાહરણ આપીને ચકાસો :

(i) જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો આ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય.

(ii) બધી જ બાજુઓ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ એક ચોરસ હોય.

(iii) બધા જ ખૂણાઓ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ એક ચોરસ હોય.

(iv) પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(v) બધી જ પૂર્ણ સંખ્યાઓ n માટે $2n^2 + 11$ એ અવિભાજ્ય છે.

(vi) બધા જ ધન પૂર્ણાંકો n માટે $n^2 - n + 41$ એ અવિભાજ્ય છે.

2. તમારી મનપસંદ સાબિતી લો અને વિભાગ A1.5 માં આપેલ ક્રમિક પગલાઓમાં પૃથક્કરણ કરી દરેક સોપાનની ચર્ચા કરો. (શું આપ્યું છે. શું સાબિત કરવાનું છે. કયાં પ્રમેય અને સ્વયંસિદ્ધ સત્ય વપરાય છે અને બીજું બધું.)

3. સાબિત કરો કે બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ સંખ્યા થાય.

4. સાબિત કરો કે બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર અયુગ્મ સંખ્યા થાય.

5. સાબિત કરો કે ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 વડે વિભાજ્ય હોય.

6. સાબિત કરો કે $y = 2x$ સમીકરણવાળી રેખા પર અનંત બિંદુઓ આવેલાં છે.

(**સૂચન :** પૂર્ણાંક n માટે બિંદુ $(n, 2n)$ નો વિચાર કરો.)

7. તમારો મિત્ર તમને એક સંખ્યા ધારવાનું કહે છે અને તેના પર વિવિધ પ્રક્રિયા કરવાનું કહે છે અને બાદમાં મૂળ સંખ્યા જાણ્યા વગર, તમને આ પ્રક્રિયા કઈ સંખ્યા સાથે પૂર્ણ થાય છે તે જણાવવાનું કહે છે.

   (i) એક સંખ્યા પસંદ કરો. તેના બે ગણા કરો. તેમાં નવ ઉમેરો. તેમાં તમારી મૂળ સંખ્યા ઉમેરો. તેને ત્રણ વડે ભાગો. તેમાં ચાર ઉમેરો. તેમાંથી મૂળ સંખ્યા બાદ કરો. તમારું પરિણામ 7 છે.

   (ii) ત્રણ આંકડાની એક સંખ્યા લખો. (ઉદાહરણ તરીકે 425). આ જ ક્રમમાં પુનરાવર્તન કરી 6 અંકની સંખ્યા બનાવો (425425). તમારી નવી સંખ્યા 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય હશે.

A1.6 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખી ગયાં :

1. ગણિતમાં હંમેશા સત્ય કે અસત્ય હોય તેવું વિધાન સ્વીકાર્ય છે.
2. ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે તે દર્શાવવા માટે તેનું પ્રતિઉદાહરણ શોધીએ તે પર્યાપ્ત છે.
3. જે સાબિતી વગર સત્ય છે તેમ ધારવામાં આવે છે એવાં વિધાનો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો છે.
4. જેને આપણી ગાણિતિક અંતઃપ્રેરણાના આધારે સત્ય માનીએ છીએ એવું વિધાન અટકળ છે, પરંતુ તે આપણે હજુ સાબિત કરવાનું છે.
5. જેની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત (સાબિત) થઈ છે તેવા ગાણિતિક વિધાનને પ્રમેય કહે છે.
6. ગાણિતિક વિધાનોને સાબિત કરવાનું મુખ્ય તાર્કિક સાધન એ અનુમાનિક તર્ક છે.
7. સાબિતી એ ક્રમિક ગાણિતિક વિધાનોની શ્રૃંખલા છે. સાબિતીનું પ્રત્યેક વિધાન સાબિતીના અગાઉના વિધાન અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય અથવા પૂર્વધારણા કે આપણી ઉત્કલ્પના પરથી તાર્કિક રીતે અનુમાનિત કરેલ હોય છે.

પરિશિષ્ટ 2

ગાણિતિક મોડેલનો પરિચય

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં ધોરણોથી તમે તમારી આસપાસ રહેલા વાસ્તવિક જગતના કૂટપ્રશ્નો ઉકેલતાં આવ્યાં છો. ઉદાહરણ તરીકે તમે સાદા વ્યાજને લગતાં કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ તેનું સૂત્ર વાપરી મેળવ્યા છે. સૂત્ર (અથવા સમીકરણ)એ વ્યાજ અને તેની સાથે સંકળાયેલ બીજી ત્રણ રાશિઓ, મુદલ, વ્યાજનો દર અને સમયગાળા વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. આ સૂત્ર એ ગાણિતિક મોડેલનું ઉદાહરણ છે.

ગાણિતિક મોડેલ એ કેટલીક વ્યવહારુ પરિસ્થિતિ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ દર્શાવે છે.

ગાણિતિક મોડેલ જીવનની ઘણીબધી વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓ ઉકેલવામાં ઉપયોગી છે, જેવી કે...

- ઉપગ્રહનું પ્રક્ષેપણ કરવામાં
- ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવા માટે
- વાહનો દ્વારા થતા પ્રદૂષણનું નિયંત્રણ કરવા માટે
- મોટાં શહેરોમાં સ્થગિત વાહનવ્યવહારની સ્થગિતતા ઘટાડવા માટે

આ પ્રકરણમાં ગાણિતિક મોડેલની રચના કરવાનાં સોપાનોની સમજ તમને આપીશું. તે ગાણિતિક મોડેલિંગ તરીકે ઓળખાય છે. ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે જગતની વાસ્તવિક સમસ્યા લઈશું અને તેને ગાણિતિક કોયડાની જેમ જ લખીશું. આપણે તેને ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નોની જેમ ઉકેલીશું અને આ ઉકેલનું અર્થઘટન જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાના સંદર્ભે કરીશું. આથી ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સૂત્ર બનાવવું, ઉકેલ, અર્થઘટન અને યથાર્થતા જેવાં સોપાનોનો સમાવેશ થાય છે.

A2.2. વિભાગમાં આપણે આપેલા શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટે હાથ ધરાતી પ્રક્રિયાને નિહાળીને પ્રારંભ કરીશું. અહીં

આપણે તમે અગાઉના ધોરણમાં ઉકેલ્યા હોય એવા કેટલાક શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું. આપણે આગળ એ પણ જોઈશું કે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટેનાં જે સોપાનો છે તેમાંનાં કેટલાંક સોપાનો ગાણિતિક મોડેલિંગના ઉકેલમાં પણ વપરાય છે.

બીજો વિભાગ એટલે કે A2.3 માં આપણે કેટલાંક સાદાં મોડેલ્સની ચર્ચા કરીશું.

વિભાગ A2.4 માં આપણે મોડેલિંગની સમગ્ર પ્રક્રિયા, તેનાં ફાયદા અને કેટલીક મર્યાદાઓની ચર્ચા કરીશું..

A2.2 શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની સમીક્ષા

આ વિભાગમાં, આપણે અગાઉના ધોરણમાં ઉકેલ્યા હોય તેના જેવા કેટલાક શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું. ચાલો આપણે સમચલનના કૂટપ્રશ્નથી પ્રારંભ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : મેં મારી કારમાં 48 લિટર પેટ્રોલમાં 432 કિલોમીટરની મુસાફરી કરી. મારે મારી કાર દ્વારા 180 કિલોમીટર દૂર એક સ્થળે જવાનું છે. મારે કેટલા પેટ્રોલની જરૂર પડશે ?

ઉકેલ : આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલવા માટેનાં પગલાંઓની આપણે યાદી બનાવીએ.

સોપાન 1 : તમે જાણો છો કે જેમ વધુ મુસાફરી કરીશું તેમ વધારે પેટ્રોલની જરૂરિયાત થશે. એટલે કે પેટ્રોલનો જે જથ્થો જરૂરી છે તે કાપેલાં અંતરનાં સમપ્રમાણમાં છે.

432 કિમી મુસાફરી માટે જરૂરી પેટ્રોલ = 48 લિટર

180 કિમી મુસાફરી માટે જરૂરી પેટ્રોલ = ?

ગાણિતિક વર્ણન : ધારો કે

x = મેં કાપેલું અંતર

y = મારી પેટ્રોલની જરૂરિયાત

આથી, y એ x ના સમચલનમાં છે.

$y = kx$, જ્યાં k એ અચળાંક છે.

હું 432 કિલોમીટર મુસાફરી 48 લિટર પેટ્રોલમાં કરી શકું છું.

આથી, $y = 48,\ x = 432$

માટે, $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

પરંતુ, $y = kx$,

માટે, $y = \frac{1}{9}x$ (1)

સમીકરણ અથવા સૂત્ર (1) પેટ્રોલની જરૂરિયાત અને કાપેલ અંતર વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

સોપાન 2 : ઉકેલ **:** આપણે 180 કિલોમીટર મુસાફરી કરવા માટે કેટલું પેટ્રોલ જોઈએ તે શોધવા માંગીએ છીએ. જ્યારે $x = 180$ હોય ત્યારે y ની કિંમત આપણે શોધવી પડે. સમીકરણ (1) માં $x = 180$ મૂકતાં...

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $y = 20$

આથી, આપણને 180 કિલોમીટરની મુસાફરી કરવા માટે 20 લિટર પેટ્રોલની જરૂર પડે.

એવું બને કે તમે દરેક પરિસ્થિતિમાં સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ ન કરી શકો ? ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે 432 કિલોમીટરનો રસ્તો પહાડી માર્ગે હોય અને 180 કિલોમીટરનો રસ્તો સપાટ માર્ગ પર હોય. પ્રથમ માર્ગમાં કાર વધુ દરે પેટ્રોલનો ઉપયોગ કરે. આથી જ્યાં પેટ્રોલ અગાઉના માર્ગ કરતાં ઓછા દરે વપરાશે ત્યાં આપણે 180 કિલોમીટર માટે પણ તે જ દરે પેટ્રોલ ન વાપરી શકીએ. આથી સૂત્ર ત્યારે જ વપરાય કે આવી બધી જ પરિસ્થિતિઓ જે પેટ્રોલના વપરાશના દર પર અસર કરતી હોય તેવી બધી જ પરિસ્થિતિઓ બંને મુસાફરીમાં સમાન હોય અથવા જો પરિસ્થિતિઓમાં ફેરફાર હોય તો કારમાં વપરાતા પેટ્રોલ પર તે તફાવતની અસર ખૂબ જ ઓછી થતી હોય. આવી જ પરિસ્થિતિમાં વપરાતું પેટ્રોલ એ કાપેલા અંતરના સમચલનમાં હોય. આ કૂટપ્રશ્ન ઉકેલતી વખતે આપણે આવી ધારણા કરી હશે.

ઉદાહરણ 2 : ધારો કે સુધીરે વાર્ષિક 8 ટકાના સાદા વ્યાજે ₹ 15,000 નું રોકાણ કર્યું. આ રોકાણના વળતર સહિતની રકમમાંથી તે ₹ 19,000 ની કિંમતનું એક વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માગે છે. તો તેણે ₹ 15,000 કેટલી મુદત માટે રોકવા જોઈએ જેથી વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે પૂરતી રકમ મળી રહે ?

ઉકેલ : સોપાન 1 : કૂટપ્રશ્નનું નિર્માણ : અહીં, આપણે મુદત અને વ્યાજનો દર જાણીએ છીએ. સુધીરને ₹ 15,000 ઉપરાંત વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે જે રકમ જોઈએ છે તે વ્યાજની રકમ થાય. આપણે હવે વર્ષની સંખ્યા શોધવી પડે.

ગાણિતિક વર્ણન : સાદા વ્યાજ માટેનું સૂત્ર $I = \frac{Pnr}{100}$,

જ્યાં, P = મુદલ

n = વર્ષની સંખ્યા

$r\%$ = વ્યાજનો દર

I = મેળવેલ વ્યાજ

અહીં, મુદલ = ₹ 15,000

સુધીરને વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે જરૂરી રકમ = ₹ 19,000

આથી, મેળવવા પાત્ર વ્યાજ = ₹ (19,000 – 15,000)

= ₹ 4000

15,000 નું રોકાણ કરવા માટે જરૂરી મુદત = n

15,000 નું 8 ટકાના દરે n વર્ષ માટેનું વ્યાજ = I

આથી, $$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

માટે, $$I = 1200n \qquad (1)$$

આ સમીકરણ જો 15000 વાર્ષિક 8 ટકાના દરે રોક્યાં હોય, તો તે વર્ષની સંખ્યા અને વ્યાજ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

આપણે ₹ 4000 વ્યાજ થાય તે માટેનો સમયગાળો શોધવો પડે.

સમીકરણ (1) માં I = 4000 મૂકતાં આપણને નીચેનું પરિણામ મળે :

$$4000 = 1200n \qquad (2)$$

સોપાન 2 : કૂટપ્રશ્નનો ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને ઉકેલતાં આપણને

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $n = 3\frac{1}{3}$ મળે છે અને વર્ષનો એક તૃતીયાંશ ભાગ 4 માસ છે. આથી આથી સુધીર 3 વર્ષ અને 4 માસ બાદ વૉશીંગ મશીન ખરીદી શકશે.

તમે અનુમાન લગાવી શકો કે ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે શું ધારણા કરી છે ? આપણે જે સમયગાળા માટે વ્યાજની ગણતરી કરી તે ગાળામાં વ્યાજનો દર સમાન જ રહેશે તેવી ધારણા કરી છે. નહિ તો, $I = \frac{Pnr}{100}$ સૂત્ર માન્ય ગણાય નહિ. આપણે એ પણ ધારણા કરેલ છે જે સમયગાળામાં સુધીર નાણાં એકઠાં કરે છે તે દરમિયાન વૉશીંગ મશીનનો ભાવ પણ વધતો નથી.

ઉદાહરણ 3 : એક મોટરબૉટ નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં જઈ બે શહેરના નદીકિનારા વચ્ચેનું અંતર 6 કલાકમાં કાપે છે. આ બૉટ આટલું જ અંતર નદીના પ્રવાહની દિશામાં જઈ 5 કલાકમાં કાપે છે. જો નદીના પ્રવાહની ઝડપ 2 કિમી/કલાક હોય, તો મોટરબૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ શોધો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 : નિર્માણ: આપણે નદીના પ્રવાહની ઝડપ અને બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર કાપવા માટે બંને દિશામાં આવતાં-જતાં લીધેલો સમય જાણીએ છીએ. આપણે સ્થિર પાણીમાં બૉટની ઝડપ શોધવાની છે.

ગાણિતિક વર્ણન : ધારો કે બૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x , લીધેલ સમય માટે t અને કાપેલ અંતર માટે y લઈએ તો.

$$y = tx \qquad (1)$$

ધારો કે બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર d છે.

નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં જતા બૉટની ખરેખર ઝડપ

= સ્થિર પાણીમાં બૉટની ઝડપ – નદીના પ્રવાહની ઝડપ

કારણ કે બૉટ નદીના પ્રવાહની સામે મુસાફરી કરે છે.

આથી, નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં બૉટની ઝડપ = $(x - 2)$ કિમી/કલાક

નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં બે શહેર વચ્ચે અંતર કાપતાં 6 કલાક લાગે છે. આથી સમીકરણ (1) પરથી

$$d = 6(x - 2) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

પ્રવાહની દિશામાં જતાં બૉટની ઝડપમાં, નદીના પ્રવાહની ઝડપ ઉમેરાશે.

આથી, પ્રવાહની દિશામાં બૉટની ઝડપ = $(x + 2)$ કિમી/કલાક

પ્રવાહની દિશામાં તેટલું જ અંતર કાપવા માટે બોટને 5 કલાક લાગે છે.

$$d = 5(x + 2) \tag{3}$$

સમીકરણ (2) અને (3) પરથી આપણને નીચેનું સમીકરણ મળશે :

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \tag{4}$$

સોપાન 2 : ઉકેલ મેળવવો. સમીકરણ (4) પરથી x ની કિંમત મેળવતાં આપણને $x = 22$ મળશે.

સોપાન 3 : અર્થઘટન

$x = 22$ મળે છે.

આથી મોટર બૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ 22 કિમી/કલાક છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે જાણીએ છીએ કે નદીના પ્રવાહની ઝડપ દરેક જગ્યાએ સમાન હોતી નથી. તે કિનારાની નજીક ધીમે વહે છે અને મધ્ય ભાગમાં ઝડપી વહે છે. બૉટ કિનારાથી શરૂ થઈ નદીના મધ્ય ભાગ તરફ જાય છે. જ્યારે તે નિશ્ચિત સ્થળની નજીક હોય છે, ત્યારે તે ધીમી પડે છે અને કિનારાની નજીક જાય છે. આથી બોટની નદીના મધ્ય ભાગમાં અને કિનારાની નજીકના ભાગમાં ઝડપમાં થોડો તફાવત હોય છે. જોકે તે કિનારાની નજીક થોડા સમય માટે જ હોય. આ નદીની ઝડપનો તફાવત બોટની ઝડપ પર ટૂંકા સમય પૂરતો જ અસર કરે છે. આથી આપણે નદીની ઝડપના આ તફાવતને અવગણી શકીએ. વળી નદીના પ્રવાહની ઝડપ ઉપરાંત પાણી અને બોટની સપાટી વચ્ચેનું ઘર્ષણ પણ બોટની મૂળ ઝડપને અસર કરે છે. આપણે એવું સ્વીકારી લઈએ છીએ કે આ અસર પણ ખૂબ જ ઓછી છે.

આથી, આપણે એવું અનુમાન કરીએ કે,

1. નદીના પ્રવાહની ઝડપ અને બોટની ઝડપ દરેક સમયે અચળ રહે છે.

2. બોટ અને પાણી વચ્ચેના ઘર્ષણ તથા હવાને કારણે થતા ઘર્ષણની અસર અવગણ્ય છે.

આપણે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ ઉપર્યુક્ત ધારણાઓ (ઉત્કલ્પનાઓ)ના આધારે મેળવી છે.

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો માટે આપણે જોયું કે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટે ત્રણ સોપાનો જરૂરી છે. તે આ પ્રમાણે છે :

1. નિર્માણ : આપણે કૂટપ્રશ્નનું પૃથક્કરણ કર્યું અને જોયું કે કૂટપ્રશ્નના ઉકેલ પર કયા પરિબળોની મુખ્ય અસર છે. આ બધાં સંબંધિત પરિબળો છે. આપણા પ્રથમ ઉદાહરણમાં, કાપેલ અંતર અને વપરાયેલ પેટ્રોલ એ ***સંબંધિત પરિબળો*** છે. આપણે રસ્તાનો પ્રકાર, ડ્રાઈવિંગ ઝડપ વગેરે પરિબળોને અવગણ્યા. નહિ તો આ કૂટપ્રશ્ન ઉકેલવો વધુ કઠિન બની જાય. જે પરિબળોને આપણે અવગણ્યા તે બધાં ***અસંબંધિત પરિબળો*** છે.

ત્યાર બાદ આપણે કૂટપ્રશ્નને એક કે વધારે ગાણિતિક સમીકરણ દ્વારા ગાણિતિક સ્વરૂપે વર્ણવી શકીએ.

2. ઉકેલ : પ્રથમ સોપાનમાં મેળવેલ ગાણિતિક સમીકરણને યોગ્ય પદ્ધતિ વડે ઉકેલવાથી આપણને ઉકેલ મળશે.

3. અર્થઘટન : મૂળભૂત શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નના સંદર્ભ બીજા સોપાનમાં મળેલ ઉકેલનો અર્થ (મહત્ત્વ) આપણે જોઈ શકીએ છીએ.

અહીં તમારા માટે કેટલાક સ્વાધ્યાય છે. નીચેના કૂટપ્રશ્નો માટે ઉપર્યુક્ત ત્રણ સોપાનો વડે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં સંકળાયેલાં સોપાનો માટેની તમારી સમજની ચકાસણી થશે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નમાં સોપાન 1, 2 અને 3 દરમિયાન સંબંધિત અને અસંબંધિત પરિબળો સ્પષ્ટ દર્શાવો.

1. ધારો કે એક કંપનીને કેટલાક સમય માટે એક કમ્પ્યૂટરની આવશ્યકતા છે. કંપની કાં તો માસિક ₹ 2000 ના ભાડે કમ્પ્યૂટર લે અથવા ₹ 25,000 માં ખરીદે છે. જો કંપનીને કમ્પ્યૂટરનો લાંબા સમય માટે ઉપયોગ હોય તો કંપનીએ ખૂબ ઊંચું ભાડું ભરવું પડે. તેના કરતાં કમ્પ્યૂટર ખરીદવું વધારે સસ્તુ પડે. બીજી બાજુ જો કંપનીને કમ્પ્યૂટરનો ઉપયોગ એક માસ પૂરતો જ હોય તો કમ્પ્યૂટર ભાડે લેવું સસ્તું પડે. કેટલા મહિનાના ઉપયોગ બાદ કમ્પ્યૂટર ખરીદવું સસ્તું પડશે તે શોધો.

2. ધારો કે એક કાર સ્થળ A થી 40 કિમી/કલાકની ઝડપે સ્થળ B તરફ મુસાફરી કરે છે. તે જ સમયે બીજી કાર સ્થળ B થી 30 કિમી/કલાકની ઝડપે સ્થળ A તરફ મુસાફરી કરે છે. જો સ્થળ A અને સ્થળ B વચ્ચેનું અંતર 100 કિમી હોય, તો કેટલા સમય બાદ બંને કાર ભેગી થશે ?

3. ચંદ્ર આશરે પૃથ્વીથી 3,84,000 કિલોમીટર દૂર છે અને તેનો પૃથ્વી ફરતે ગતિમાર્ગ લગભગ વર્તુળાકાર છે. તે પૃથ્વીને ફરતે કઈ ઝડપે પરિભ્રમણ કરે છે? ધારો કે તેનો પૃથ્વીને ફરતે પરિભ્રમણનો સમય 24 કલાક છે. (π = 3.14 લો.)

4. એક કુટુંબ જે મહિનાઓ દરમિયાન વૉટર હીટર નથી વાપરતું, તેનું સરેરાશ માસિક વીજબિલ ₹ 1000 ભરે છે અને જે મહિનાઓ દરમિયાન વૉટર હીટર વાપરે તે દરમ્યાન તેનું સરેરાશ માસિક વીજબિલ ₹ 1240 ભરે છે. વૉટર હીટર વાપરવાનો ખર્ચ ₹ 8.00 પ્રતિ કલાક છે. દિવસ દરમિયાન સરેરાશ કેટલા કલાક વૉટર હીટર વપરાય છે તે શોધો.

A2.3 કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલ

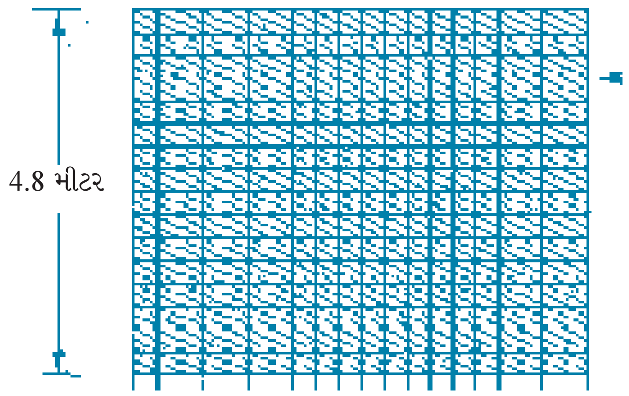
હજી સુધી આપણી ચર્ચામાં કાંઈ જ નવું નથી. આ વિભાગમાં આપણે અગાઉ જેની ચર્ચા કરેલી તે ત્રણ સોપાનોમાં એક બીજું સોપાન ઉમેરવા જઈ રહ્યાં છીએ. આ સોપાનને યથાર્થતા કહે છે. *યથાર્થતા* એટલે શું ? ચાલો આપણે જોઈએ, જીવનની વ્યવહારુ પરિસ્થિતિમાં, આપણે એવું મોડેલ ન સ્વીકારી શકીએ કે જે માત્ર ઉકેલ આપતું હોય અને તે વાસ્તવિકતાને અનુરૂપ ન હોય. વાસ્તવિકતાની સાપેક્ષ ઉકેલને ચકાસવાની પ્રક્રિયા અને જો જરૂરી હોય તો ગાણિતિક વર્ણનમાં સુધારા-વધારા કરવાની ક્રિયાને *યથાર્થતા* કહે છે. મોડેલિંગનું આ અગત્યનું સોપાન છે. આ વિભાગમાં તમને આ સોપાનનો પરિચય કરાવીશું.

પ્રથમ, જેમાં *યથાર્થતા* બાદ આપણા મોડેલને સુધારવું નહિ પડે એવું સ્વીકારીશું. ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે તમારી પાસે 6 મીટર લંબાઈ અને 5 મીટર પહોળાઈનો એક ઓરડો છે. તમે આ રૂમના ભોયતળિયાને 30 સેમી લંબાઈની ચોરસ લાદીથી ઢાંકવાનો છે. તો કેટલી લાદી જોઈએ ? ગાણિતિક મોડેલ રચી આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલો.

ઉકેલ : નિર્માણ : આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલવા માટે આપણે ઓરડાનું ક્ષેત્રફળ અને એક લાદીનું ક્ષેત્રફળ ધ્યાનમાં લેવું પડશે.

લાદીની બાજુનું માપ 0.3 મીટર છે. ઓરડાની લંબાઈ 6 મીટર હોવાથી, આપણે $\frac{6}{0.3}$ = 20 લાદીઓ લંબાઈની એક હારમાં ગોઠવી શકાય. (જુઓ આકૃતિ A2.1.)



આકૃતિ A2.1

ઓરડાની પહોળાઈ 5 મીટર હોવાથી આપણને $\frac{5}{0.3}$ = 16.67 મળે. આથી આપણે એક સ્તંભમાં (ઊભી હારમાં) 16 લાદીઓ ગોઠવી શકીએ. જોકે $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ મીટર પહોળાઈવાળો ભાગ લાદીઓથી ઢંકાશે નહિ. આ ભાગને આપણે બીજી લાદીઓ કાપીને ઢાંકવો પડશે, ભોયતળિયાની પહોળાઈનો 0.2 મીટર ભાગ ઢાંક્યા વગરનો રહી ગયો અને તે લાદીની લંબાઈ 0.3 મીટરના અડધા કરતા વધારે છે. આથી આપણે લાદીને બે સમાન ટુકડામાં તોડી શકીશું નહિ અને તેના બંને ટુકડાઓનો બાકી રહેતો ભાગ ઢાંકવામાં ઉપયોગ કરી શકીશું નહિ.

ગાણિતિક વર્ણન : આપણી પાસે

જરૂરી લાદીઓની કુલ સંખ્યા = (લંબાઈમાં રહેલી લાદીઓની સંખ્યા × પહોળાઈમાં રહેલી લાદીઓની સંખ્યા)

\+ બાકીના ખુલ્લા ભાગમાં જરૂરી લાદીઓની સંખ્યા (1)

ઉકેલ : આપણે આગળ કહ્યું એ પ્રમાણે, લંબાઈમાં વપરાતી લાદીઓની સંખ્યા 20 અને પહોળાઈમાં વપરાતી લાદીઓની સંખ્યા 16 છે. છેલ્લી હાર માટે આપણે વધુ 20 લાદીઓની જરૂર પડશે. આ કિંમતો પરિણામ (1)માં મૂકતાં આપણને $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$ મળશે.

અર્થઘટન : ભોયતળિયું ઢાંકવા માટે આપણને 340 લાદીઓની જરૂર પડશે.

યથાર્થતા : વ્યવહારુ જીવનમાં તમારો કડિયો તમને કેટલીક વધારે લાદીઓ લાવવાનું કહેશે. કારણ કે લાદીઓની તેમના માપમાં કાપવા જતાં કેટલીક લાદીઓ તૂટી જશે (નુકસાન થશે) અને આ સંખ્યા તમારા કડિયાની આવડત પર નિર્ભર છે. પરંતુ, આ માટે આપણે સમીકરણ (1)માં સુધારો કરવાની જરૂર નથી. આ સમીકરણ આપણને કેટલી લાદીઓની જરૂર પડશે તેનો અંદાજિત ખ્યાલ આપે છે. આથી આપણે અહીં અટકીએ.

ચાલો, આપણે એક બીજી પરિસ્થિતિ જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : વર્ષ 2000 માં યુ.એસ.ના 191 સભ્યદેશોએ એક જાહેરનામા પર હસ્તાક્ષર કર્યા. આ જાહેરનામામાં, વર્ષ 2015 સુધીમાં વિકાસના ચોક્કસ ધ્યેયને પહોંચવા આ દેશો સહમત થયા. તેને સહસ્રાબ્દિ વિકાસ ધ્યેયો (*Millenium Development Goals*) કહે છે. એમાંનો એક ધ્યેય જાતીય સમાનતા છે. આ ધ્યેય સિદ્ધ થયો છે કે નહિ તે માટેનો એક

સંકેત પ્રાથમિક, માધ્યમિક અને તૃતીય શિક્ષણમાં રહેલા કુમારો અને કન્યાઓનો ગુણોત્તર છે. ભારતે પણ જાહેરનામામાં હસ્તાક્ષર કરેલા હોવાથી તે આ ગુણોત્તર વધારવા માટે પ્રતિબદ્ધ છે. પ્રાથમિક શાળાઓમાં નોંધાયેલી કન્યાઓની ટકાવારી નીચે કોષ્ટક A2.1 માં આપેલી છે :

કોષ્ટક A2.1

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

મૂળ : શૈક્ષણિક આંકડાશાસ્ત્ર, શિક્ષણવિભાગનું વૅબ પેજ, GOI.

* આ માહિતી કામચલાઉ છે.

આ માહિતીનો ઉપયોગ કરીને ગાણિતિક રીતે વર્ણવો કે કયા દરે કન્યાઓનો પ્રાથમિક શાળામાં નોંધણીનો ગુણોત્તર વધી રહ્યો છે. વળી કયા વર્ષમાં કન્યાઓનો નોંધણી ગુણોત્તર 50 ટકાએ પહોંચશે તેનો અંદાજ લગાવો.

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ આ સમસ્યાને ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નમાં રૂપાંતરિત કરીએ.

સોપાન 1 : નિર્માણ : કોષ્ટક A2.1 વર્ષ 1991-92, 1992-93 વગેરેમાં થયેલ નોંધણી દર્શાવે છે. વિદ્યાર્થીઓ શૈક્ષણિક વર્ષની શરૂઆતમાં જોડાયા હોવાથી આપણે વર્ષોને 1991, 1992 વગેરે લઈ શકીએ. ચાલો આપણે ધારીએ કે પ્રાથમિક શાળામાં જોડાતી કન્યાઓની ટકાવારી કોષ્ટક A2.1 માં દર્શાવેલ દરે જ સતત વધતી જાય છે. આથી વર્ષોની સંખ્યા અગત્યની છે, નહિ કે ચોક્કસ વર્ષ. (આવી સમાન પરિસ્થિતિ વિચારીએ. જ્યારે ₹ 1500 નું 8 ટકાના દરે ત્રણ વર્ષ માટે સાદુ વ્યાજ શોધીએ ત્યારે તે ત્રણ વર્ષનો ગાળો 1999 થી 2002 અથવા 2001 થી 2004 હોય તેનાથી કોઈ જ ફરક પડતો નથી. અગત્યનું શું છે, જે-તે વર્ષો માટે નક્કી કરેલ વ્યાજનો દર) અહીં પણ, આપણે જોઈએ 1991 બાદ નોંધણી વધતી જાય છે. જે 1991 બાદ પસાર થયેલા વર્ષોની સંખ્યા અને તેની નોંધણીની તુલના ચાલો આપણે 1991 ના વર્ષને 0 વર્ષ તરીકે લઈએ અને 1992 માટે 1 લખીએ. કારણ કે 1991 બાદ 1992 માં એક વર્ષ પસાર થયું હોય. આ જ પ્રમાણે આપણે 1993 માટે 2, 1994 માટે 3 વગેરે લખી શકીએ. કોષ્ટક A2.1 હવે કોષ્ટક A2.2 જેવું બની જશે.

કોષ્ટક A2.2

વર્ષ	નોંધાયેલ સંખ્યા (ટકામાં)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

નોંધણીમાં થયેલ વધારો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

કોષ્ટક A2.3

વર્ષ	નોંધાયેલ સંખ્યા (ટકામાં)	વધારો
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 થી 1992 ના એક વર્ષના સમયગાળાના અંતે નોંધણી 41.9 ટકાથી 42.6 % એટલે કે 0.7 % વધી. બીજા વર્ષના અંતે તે 42.6 ટકાથી 42.7 % એટલે કે 0.1 % વધી. ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે વર્ષોની સંખ્યા અને ટકાવારી વચ્ચે ચોક્કસ સંબંધ શોધી ન શકીએ, પરંતુ વધારો યોગ્ય રીતે સ્થિર છે. માત્ર પ્રથમ વર્ષ અને દસ વર્ષમાં કૂદકો જોવા મળે છે.

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

આપણે ધારી શકીએ કે નોંધણીનો દર સ્થાયી રીતે 0.22 ટકા વધી રહ્યો છે.

ગાણિતિક વર્ણન : આપણે એવું ધાર્યું કે નોંધણીનો દર સ્થાયી રીતે 0.22 % પ્રતિવર્ષ વધી રહ્યો છે. આથી, નોંધણીની ટકાવારી પ્રથમ વર્ષમાં $= 41.9 + 0.22$

નોંધણીની ટકાવારી બીજા વર્ષે $= 41.9 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 2 \times 0.22$

નોંધણીની ટકાવારી ત્રીજા વર્ષે $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22$

આથી, પ્રત્યેક $n \geqslant 1$ માં નોંધણીની ટકાવારી n માં વર્ષે $= 41.9 + 0.22n$, (1)

હવે, આપણે નોંધણી 50 ટકાએ પહોંચે તે વર્ષોની સંખ્યા શોધવાની છે.

માટે આપણે આ સમીકરણ કે સૂત્રમાં n ની કિંમત શોધવી પડશે.

$$50 = 41.9 + 0.22n \quad (2)$$

સોપાન 2 : ઉકેલ : સમીકરણ (2) n માટે ઉકેલતાં...

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} - \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન :

વર્ષોની સંખ્યા પૂર્ણાંક હોવાથી આપણે ત્યાર બાદનો ઉચ્ચતમ પૂર્ણાંક 37 લઈશું. આથી, નોંધણીની ટકાવારી 50 % $1991 + 37 = 2028$ માં થશે.

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નમાં સામાન્ય રીતે આપણે અહીં અટકી જઈએ. પરંતુ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યા સાથે કાર્ય કરીએ છીએ માટે આપણે જોવું જોઈએ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ કિંમત કેટલી મર્યાદામાં મેળવી શકાય.

સોપાન 4 : યથાર્થતા :

ચાલો ચકાસીએ કે સૂત્ર (1)એ વાસ્તવિકતાની કેટલું નજીક છે. ચાલો સૂત્ર (1)નો ઉપયોગ કરીને આપણે જે વર્ષો જાણીએ છીએ તે માટે કિંમત મેળવીએ અને તેની આપેલી કિંમતો સાથે તુલના કરી તફાવત શોધીએ. કોષ્ટક A2.4 માં આ કિંમતો આપેલી છે.

કોષ્ટક A2.4

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)	(1) દ્વારા મળતી કિંમત (ટકામાં)	તફાવત (ટકામાં)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

તમે જોઈ શકો છો કે સૂત્ર (1) દ્વારા મેળવેલ કેટલીક કિંમતો મૂળ કિંમત કરતાં 0.3 % અથવા 0.5 % થી પણ ઓછી છે. હકીકતે પ્રતિ વર્ષ વધારો 1 % થી 2 % હોવાથી આશરે 3 થી 5 વર્ષનો તફાવત વધી શકે છે. આપણે કદાચ એવું સૂત્ર (1) સ્વીકારીએ અને અટકીએ. આ વિકલ્પમાં (1) એ આપણું ગાણિતિક મોડેલ છે.

ધારો કે આપણે એવું નક્કી કરીએ કે આ ભૂલ ઘણી મોટી છે અને આપણે આ નમૂનો સુધારવો છે. તો આપણે સોપાન (1)ના નિર્માણમાં પાછા જવું જોઈએ. સમીકરણ (1) બદલવું જોઈએ. ચાલો આપણે તેમ કરીએ.

સોપાન 1 : પુનઃ નિર્માણ : આપણે એવું ધાર્યું હતું કે કિંમતો સ્થાયી રીતે 0.22 % વધે છે. પરંતુ, આપણે ત્રુટિ ઘટાડવા માટે સુધારણા પરિબળ રજૂ કરીશું. આ માટે આપણે બધી જ ત્રુટિઓની સરાસરી શોધીએ, આ પ્રમાણે

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

આપણે ત્રુટિઓની સરાસરી લઈએ અને આપણા સૂત્રને આ કિંમતથી સુધારીએ.

સુધારેલ ગાણિતિક વર્ણન : ચાલો હવે આપણે ત્રુટિઓની સરાસરીને આપણા નોંધણીની ટકાવારીના સૂત્ર જે (1) આપેલ છે તેમાં ઉમેરીએ. આથી, આપણું સુધારેલ સૂત્ર.

$n \geq 1$ માટે n માં વર્ષમાં નોંધણીની ટકાવારી $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$ (3)

આ જ પ્રમાણે આપણે સમીકરણ (2)ને પણ યોગ્ય રીતે સુધારીએ. આથી n માટેનું નવું સમીકરણ :

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad (4)$$

સોપાન 2 : સુધારેલો ઉકેલ : સમીકરણ (4)ને n માટે ઉકેલના આપણને

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$ મળશે.

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $n = 36$ માટે પ્રાથમિક શાળાઓમાં કન્યાઓની નોંધણી 50 % વર્ષ પછી એટલે કે 1991+36=2027 માં થશે.

સોપાન 4 : યથાર્થતા : ફરી વખત આપણે સૂત્ર (3)નો ઉપયોગ કરવાથી મળેલ કિંમતોની ખરેખર કિંમત સાથે તુલના કરીએ : કોષ્ટક A2.5 માં તુલના આપેલી છે.

કોષ્ટક A2.5

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)	આપેલ કિંમતો (1) દ્વારા	કિંમતોનો તફાવત	(3)દ્વારા મળતું મૂલ્ય	મૂલ્યોનો તફાવત
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

તમે જોઈ શકો છો કે સૂત્ર (4) દ્વારા મેળવેલ ઘણી બધી કિંમતો સૂત્ર (2) દ્વારા મેળવેલ કિંમત કરતાં વાસ્તવિક કિંમતની વધુ નજીક છે. આ કિસ્સામાં ત્રુટિઓની સરાસરી 0 છે.

આપણે આપણી પ્રક્રિયા અહીં અટકાવીશું. આથી સમીકરણ (4) આપણું ગાણિતિક મોડેલ છે. તે વર્ષો અને કુલ નોંધણીમાંથી કન્યાઓની નોંધણીની ટકાવારી વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ આપે છે.

આપણે વૃદ્ધિને દર્શાવતા ગાણિતિક મોડેલની રચના કરી છે.

ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિમાં જે પ્રક્રિયાને આપણે અનુસર્યા તેને ગાણિતિક મોડેલિંગ કહે છે.

આપણી પાસે રહેલા ગાણિતિક સિદ્ધાંતોની મદદથી આપણે ગાણિતિક મોડેલની રચના કરવા આપણે પ્રયાસ કર્યો. આપણી

પાસે રહેલ માહિતી પરથી અનુમાન લગાવવા માટે વધુ સારા ગાણિતિક સિદ્ધાંતો ઘણા છે. પરંતુ તે બધા આ અભ્યાસક્રમના ક્ષેત્રથી પર છે. આ મોડેલ રચવાનો આપણો ધ્યેય તમને મોડેલિંગ પ્રક્રિયા સમજાવવાનો હતો, નહિ કે આ તબક્કે ચોક્કસ અનુમાન લગાવતા શીખવવાનો.

હવે તમને જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિઓમાં જે સમજ આપણી ચર્ચામાં આપી તે ચકાસવી ગમશે. અહીં તમારા પ્રયત્ન માટે સ્વાધ્યાય આપેલ છે.

સ્વાધ્યાય A2.2

1. 400 મીટરની રેસ ઓલિમ્પિકમાં ઉમેરાઈ છે ત્યારથી ગોલ્ડ મૅડલ મેળવનારાઓના સમય નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલા છે. વર્ષ અને સમય વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું ગાણિતિક મોડેલ તૈયાર કરો. આગામી ઓલિમ્પિક માટેના સમયના અંદાજ માટે તેનો ઉપયોગ કરો.

કોષ્ઠક A2.6

વર્ષ	સમય(સેકન્ડમાં)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 મોડેલિંગની પ્રક્રિયા, તેના ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ

ચાલો આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગના જે ઉદાહરણોની ચર્ચા કરી તેના પાસાઓની સાથે આપણી ચર્ચા હવે પૂર્ણ કરીએ. અગાઉના વિભાગોના આધારે આપણે હવે મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ સોપાનોની સંક્ષિપ્ત રૂપરેખા આપવાની સ્થિતિમાં છીએ.

સોપાન 1 : નિર્માણ : તમે વિભાગ A2.2 ના ઉદાહરણ (1)ના નિર્માણનો ભાગ અને A2.3 નું મોડેલ જેની આપણે ચર્ચા કરી તેના નિર્માણના ભાગ વચ્ચેનો તફાવત નોંધ્યો હશે. ઉદાહરણ (1)ની બધી જ માહિતી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા તૈયાર સ્વરૂપમાં છે, પરંતુ A2.3 માં આપેલ મોડેલમાં આવું ન હતું. વધુમાં તે આપણને ક્યારેક ગાણિતિક વર્ણન શોધવા તરફ દોરી જાય. આપણે આપણું પ્રથમ સૂત્ર ચકાસ્યું અને મેળવ્યું કે તે બીજા સૂત્ર જેટલું સારુ ન હતું. આ સામાન્ય રીતે વ્યાપક સ્વરૂપે સત્ય છે. જેમકે જ્યારે વ્યવહારુ જીવનની પરિસ્થિતિના મોડેલ લઈએ ત્યારે પ્રથમ મોડેલમાં મોટે ભાગે પરિવર્તન કરવું પડે. જ્યારે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યા ઉકેલવાની હોય ત્યારે નિર્માણમાં ઘણો સમય લાગે છે. ઉદાહરણ તરીકે ન્યૂટનના ગતિના ત્રણ

નિયમો; જે ગતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે તેને સરળતાથી દર્શાવી શકાય પરંતુ ન્યૂટને ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં માહિતી અને અગાઉના વૈજ્ઞાનિકોએ કરેલાં કાર્યોનો અભ્યાસ કરી નિયમો મેળવ્યા હતા.

નિર્માણમાં નીચેનાં ત્રણ સોપાનો સંકળાયેલાં છે :

(i) સમસ્યા કથન : મોટે ભાગે સમસ્યા અસ્પષ્ટ રીતે રજૂ થતી હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે કુમાર અને કન્યાઓની નોંધણી સમાન થાય તેની ખાતરી કરવી તે વિશાળ ધ્યેય છે. આનો અર્થ કદાચ એ થાય કે શાળાએ જવાની ઉંમરના 50% કુમારો અને શાળાએ જવાની ઉંમરની 50% કન્યાઓની નોંધણી થવી જોઈએ. બીજી રીતે કહીયે તો શાળાએ જતા બાળકોમાં 50% કન્યાઓ હોય. આપણી સમસ્યામાં આપણે બીજો અભિગમ અપનાવેલ છે.

(ii) સંબંધિત પરિબળોને ઓળખવા : નક્કી કરો કે કયા જથ્થાઓ અને સંબંધો આપણી સમસ્યા માટે અગત્યના છે અને જેને અવગણી શકાય તેવા કયા અગત્યના નથી. ઉદાહરણ તરીકે પ્રાથમિક શાળામાં નોંધણી બાબતમાં આપણી સમસ્યામાં ગત વર્ષે નોંધાયેલ કન્યાઓની ટકાવારીની ચાલુ વર્ષે નોંધાનાર કન્યાઓની ટકાવારી પર અસર પડે છે, કારણ કે જેમ વધુ ને વધુ કન્યાઓ શાળામાં નોંધાય છે તેમ વાલીઓ એવું મહેસૂસ કરે છે કે પોતાની દીકરીઓને પણ શાળામાં મૂકવી જોઈએ. પરંતુ આપણે આ પરિબળને અવગણ્યું છે. કારણ કે આ કદાચ ત્યારે જ ઉપયોગી બને જ્યારે નોંધણી ચોક્કસ ટકાવારી કરતાં વધી જાય. વળી, આ પરિબળને ઉમેરતાં આપણો નમૂનો વધારે જટિલ બની જાય.

(iii) ગાણિતિક વર્ણન : હવે ધારો કે સમસ્યા શું છે તે બાબતે આપણે સ્પષ્ટ છીએ અને કયા પાસાઓ બીજા પાસાઓ કરતાં વધુ સંબંધિત છે, તો આપણે જે પાસાઓ સંબંધિત છે તેમની વચ્ચેનો સંબંધ સમીકરણ, આલેખ કે બીજા કોઈ યોગ્ય ગાણિતિક વર્ણન દ્વારા શોધવો પડે. અને જો તે સમીકરણ હોય, તો બધા જ અગત્યનાં પાસાઓને ગાણિતિક સમીકરણમાં ચલ તરીકે દર્શાવવાં જોઈએ.

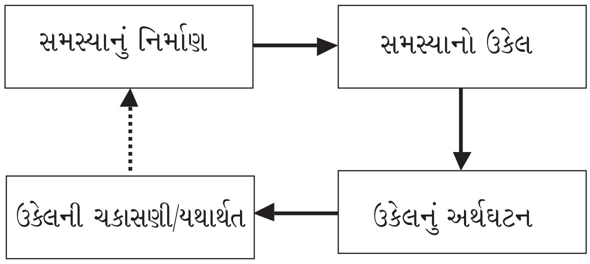
સોપાન 2 : ઉકેલ મેળવવો : ગાણિતિક નિર્માણ કંઈ ઉકેલ આપતા નથી. આપણે આ કૂટપ્રશ્નને સમકક્ષ ગાણિતિક રીતે ઉકેલવો પડશે. અહીં તમારું ગાણિતિક જ્ઞાન ઉપયોગી થશે.

સોપાન 3 : ઉકેલનું અર્થઘટન : ગાણિતિક ઉકેલ એ નમૂનામાં કેટલાક ચલની કિંમત કે કિંમતો દર્શાવે છે. આપણે જીવનના વાસ્તવિક કોયડાઓમાં જઈએ અને જોઈએ કે આ કિંમતોનો શો અર્થ થાય છે.

સોપાન 4 : ઉકેલની યથાર્થતા : આપણે A2.3 માં જોયું કે ઉકેલ મેળવ્યા બાદ તે વાસ્તવિકતાને અનુરૂપ છે કે નહિ તે આપણે ચકાસવું જોઈએ. જો તે અનુરૂપ હોય તો ગાણિતિક મોડેલ સ્વીકાર્ય છે. જો ગાણિતિક ઉકેલ અનુરૂપ ન હોય, તો આપણે ફરી નિર્માણના સોપાનમાં જઈ આપણું મોડેલ સુધારવા પ્રયત્ન કરવો જોઈએ.

પ્રક્રિયાનું આ સોપાન એ શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો અને ગાણિતિક મોડેલિંગ વચ્ચેનો મહત્ત્વનો તફાવત છે. આ મોડેલિંગનું ખૂબ જ અગત્યનાં સોપાનો પૈકીનું એક છે. તે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોમાં જોવા મળતું નથી. જોકે કેટલાક વ્યવહારુ જીવનની પરિસ્થિતિઓમાં સમસ્યા સરળ હોય તો સાચો ઉકેલ સીધો મળી જાય ત્યારે યથાર્થતાની જરૂર પડતી નથી. આપણે A2.3 ના પ્રથમ મોડેલમાં આ વિચાર્યું હતું.

પૃષ્ઠ 287 પર દર્શાવેલ આકૃતિ A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગના સોપાનોનો ક્રમ દર્શાવતો સારાંશ આપેલ છે. યથાર્થતાના સોપાનથી નિર્માણના સોપાન તરફથી ગતિને ત્રૂટક તીર વડે દર્શાવેલ છે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, આ સોપાનો દરેક વખતે ફરી કરવાની જરૂર હોતી નથી.



આકૃતિ A2.2

હવે તમે ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ તબક્કાઓનો અભ્યાસ કર્યો. ચાલો આપણે તેનાં કેટલાક પાસાઓની ચર્ચા કરીએ.

ગાણિતિક મોડેલિંગનો ધ્યેય એ છે કે વ્યવહારુ જીવનની સમસ્યા વિશેની કેટલીક અગત્યની માહિતી મેળવવી અને તેનું ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નમાં રૂપાંતર કરવું. તે ખાસ કરીને જ્યારે સીધા અવલોકન અથવા પ્રયોગો કરીને આ માહિતી મેળવવી શક્ય ન હોય અથવા વિધિ ખૂબ જ ખર્ચાળ હોય ત્યારે ઉપયોગી નીવડે છે.

તમને નવાઈ પણ લાગશે કે શા માટે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ હાથ ધરીએ છીએ ? ચાલો આપણે મોડેલિંગના કેટલાક ફાયદાઓ જોઈએ. ધારો કે આપણે મથુરા રિફાઈનરીમાંથી વિસર્જિત થતા પ્રદુષિત પદાર્થોની તાજમહેલ પર થતા ખવાણની અસરનો અભ્યાસ કરવો છે. આપણે તાજમહેલ પર સીધા પ્રયોગ હાથ ન ધરી શકીએ, કે તેમ કરવું કદાચ સલામત પણ નથી. આપણે પ્રમાણિત કરેલું ભૌતિક મોડેલ વાપરી શકીએ પરંતુ આ માટે આપણને કદાચ ખાસ સુવિધાઓની જરૂર પડે. તે ખર્ચાળ હોઈ શકે. અહીં ગાણિતિક નમૂનો ખૂબ જ ઉપયોગી થાય.

ધારો કે પાંચ વર્ષ બાદ આપણને કેટલી પ્રાથમિક શાળાઓની જરૂર પડશે તે જાણવા માંગીએ તો આપણે આ સમસ્યાને માત્ર ગાણિતિક નમૂનાનો ઉપયોગ કરી ઉકેલી શકીએ. આ જ પ્રમાણે, વૈજ્ઞાનિકો કેટલીક અસાધારણ ઘટનાઓનું અસ્તિત્વ પણ માત્ર મોડેલિંગથી વર્ણવવા સમર્થ છે.

તમે A2.3 વિભાગમાં જોયું કે, બીજા ઉદાહરણમાં વધુ સારી પદ્ધતિથી ઉકેલને સુધારવા આપણે પ્રયત્ન કર્યો. પરંતુ આપણે અટકી ગયા કારણ કે આપણી પાસે ગાણિતિક ઉપકરણો નથી. વ્યવહારુ જીવનમાં પણ આવું અવારનવાર બને છે કે આપણી પાસે ગાણિતિક ઉપકરણો પ્રાપ્ય ન હોવાથી અંદાજિત ઉકેલોથી સંતુષ્ટ થવું પડે છે. ચોક્કસ ઉકેલ આપતાં ગાણિતિક ઉપકરણો પ્રાપ્ય ન હોવાથી મોડેલિંગમાં ખૂબ જ જટિલ હોય તેવાં નમૂનારૂપ સમીકરણો વપરાય છે.

તમને થશે કે કઈ સીમા સુધી આપણે આપણો મોડેલિંગ સુધારવું જોઈએ. આ માટે આપણે વધુ પરિબળોને ધ્યાનમાં લેવા જરૂરી છે. જ્યારે આપણે તેવું કરીએ તો આપણે આપણાં ગાણિતિક સમીકરણોમાં વધુ ચલ ઉમેરવા પડે - જો આપણે તે ઉમેરીએ તો તે વધુ જટિલ નમૂનો બની જાય કે જેથી તેનો ઉપયોગ કરવો મુશ્કેલ થાય. મોડેલિંગ ઉપયોગમાં સરળ હોય તેવું જ હોવું જોઈએ. સારું મોડેલ બે બાબતોને સમતોલ રાખે છે :

1. ચોકસાઈ એટલે કે વાસ્તવિકતાની કેટલી નજીક છે.
2. સરળતાથી ઉપયોગ કરી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે ન્યૂટનના ગતિના નિયમો ખૂબ જ સરળ છે એટલું જ નહિ ઘણીબધી ભૌતિક પરિસ્થિતિઓમાં મોડેલિંગ માટે પૂરતા સક્ષમ છે.

આથી, શું ગાણિતિક મોડેલિંગ આપણી બધી જ સમસ્યાઓના ઉકેલ આપે છે ? તદ્દન નહિ, તેને પણ પોતાની મર્યાદાઓ છે.

આથી, આપણે ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ મોડેલ એ જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાઓનું માત્ર સરળીકરણ છે અને તે બન્ને (મોડેલ અને જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાઓ) સમાન નથી. આ કોઈ રાષ્ટ્ર અને તે રાષ્ટ્રની લાક્ષણિકતાઓ દર્શાવતા નકશા વચ્ચેના તફાવત જેવું થયું. આપણે નકશા પરથી કોઈ પ્લેનની દરિયાની સપાટીથી ઊંચાઈ શોધી શકીએ. પરંતુ ત્યાંના લોકોની લાક્ષણિકતાઓ શોધી ન શકીએ. આથી આપણે મોડેલ જે હેતુ માટે તૈયાર થયો હોય તે પૂરતો ઉપયોગ કરી શકીએ. તેને રચવા દરમિયાન અવગણેલા તમામ ઘટકો યાદ રાખવા પડે. આપણે મોડેલ જ્યાં લાગુ પાડી શકાય તે મર્યાદામાં જ તેનો ઉપયોગ કરી શકીએ. આગળના ધોરણમાં આપણે આ પાસા પર વધુ ચર્ચા કરીશું.

સ્વાધ્યાય A2.3

1. પાઠ્યપુસ્તકમાં આવતા શાબ્દિક કોયડાઓના ઉકેલ ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાથી કેમ અલગ છે ?

2. ધારો કે તમે ચાર રસ્તા પાસેના ટ્રાફિક જંક્શન પર વાહનોનો પ્રતીક્ષા સમય લઘુતમ કરવા ઈચ્છો છો. આમાંથી કયાં પરિબળો અગત્યના છે અને કયાં પરિબળો અગત્યના નથી ?

(i) પેટ્રોલની કિંમત

(ii) ચાર અલગ અલગ માર્ગેથી આવતાં વાહનોનો દર

(iii) સાઈકલ અને રિક્ષા જેવા ધીમે ચાલતાં વાહનો તથા કાર અને સ્કૂટર જેવા ઝડપી ચાલતાં વાહનોનો ગુણોત્તર

A2.5 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નીચેના મુદાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં સમાવિષ્ટ સોપાનો

2. કેટલાક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ (રચના)

3. ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો નીચેના ખાનામાં દર્શાવેલ છે :

1. નિર્માણ : (i) સમસ્યાને દર્શાવવી
   (ii) સંબંધિત પરિબળોને ઓળખવાં
   (iii) ગાણિતિક વર્ણન
2. ઉકેલ શોધવો.
3. જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાના સંદર્ભે ઉકેલનું અર્થઘટન કરવું.
4. અભ્યાસ કરેલ સમસ્યાઓ માટે કઈ સીમા સુધી પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે તે ચકાસવું / માન્ય કરવું.
5. ગાણિતિક મોડેલિંગના હેતુઓ, ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ

જવાબો / સૂચનો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. હા, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ વગેરે... છેદ q ને ઋણ પૂર્ણાંક પણ લઈ શકાય છે.

2. સંખ્યાઓ 3 અને 4 ની વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોઈ શકે છે. તેને મેળવવાની એક રીત આ પણ છે.

$3 = \frac{21}{6+1}$, $4 = \frac{28}{6+1}$ લેતાં આપણને $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$ એ 6 સંખ્યાઓ મળશે

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$. તેથી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$.

4. (i) સત્ય, કારણ કે પૂર્ણ સંખ્યાના સંગ્રહમાં બધી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે.

(ii) અસત્ય, ઉદાહરણ તરીકે -2 એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

(iii) અસત્ય, ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે. પરંતુ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (i) સત્ય, કારણ કે વાસ્તવિક સંખ્યાનો સંગ્રહ એ સંમેય સંખ્યાઓ અને અસંમેય સંખ્યાઓથી બને છે.

(ii) અસત્ય, કારણ કે કોઈ પણ ઋણ સંખ્યા એ કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું વર્ગમૂળ નથી હોતી.

(iii) અસત્ય, ઉદાહરણ તરીકે 2 વાસ્તવિક સંખ્યા છે, પરંતુ અસંમેય નથી.

2. ના, ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt{4} = 2$ એક સંમેય સંખ્યા છે.

3. આકૃતિ 1.8 માં દર્શાવેલી પ્રક્રિયાનું કેટલીકવાર પુનરાવર્તન કરો. પહેલાં $\sqrt{4}$ મેળવો અને પછી $\sqrt{5}$ મેળવો.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (i) 0.36 સાન્ત (ii) $0.\overline{09}$ અનંત આવૃત (iii) 4.125, સાન્ત

(iv) $0.\overline{230769}$, અનંત આવૃત (v) $0.1\overline{8}$, અનંત આવૃત (vi) 0.8225, સાન્ત

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$

$\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$

$\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ (ધારો કે $x = 0.666...$ તેથી $10x = 6.666$, અથવા $10x = 6 + x$ અથવા $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 (ધારો કે $x = 0.9999...$ તેથી $10x = 9.999...$ તેથી $10x = 9 + x$ તેથી $x = 1$)

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ના અવિભાજ્ય અવયવો ફક્ત 2 ના ઘાત અથવા 5 ના ઘાત અથવા બંનેના ઘાત સ્વરૂપે હોય છે.

7. 0.01001000100001..., 0.202002000200002..., 0.003000300003...

8. 0.75075007500075000075..., 0.767076700767000..., 0.808008000800008...

9. (i) અને (v) અસંમેય સંખ્યા (ii), (iii) અને (iv) સંમેય

સ્વાધ્યાય 1.4

1. 2.665 માટે વિભાગ 1.4 માં દર્શાવેલ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરો.

2. ઉદાહરણ 11 મુજબ

સ્વાધ્યાય 1.5

1. (i) અસંમેય (ii) સંમેય (iii) સંમેય (iv) અસંમેય (v) અસંમેય

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. અહીં વિરોધાભાસ નથી. યાદ રાખો કે જ્યારે કોઈ પણ માપપટ્ટીથી કે અન્ય સાધનથી લંબાઈ માપો ત્યારે તમને ફક્ત સંમેય સંખ્યાનું એક આસન્ન મૂલ્ય મળશે. તેથી તમે એવું ન માનશો કે c અથવા d અસંમેય છે.

4. આકૃતિ 1.17 નો સંદર્ભ લો.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}$ $\left[(125)^{-\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (i) અને (ii) એક ચલ બહુપદીઓ છે. (v) ત્રિચલ બહુપદી છે. (iii), (iv) બહુપદીઓ નથી કારણ કે દરેકમાં ચલનો ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (તમે જુદા જુદા સહગુણકો ધરાવતી બીજી અન્ય વધારે બહુપદીઓ લખી શકો.)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) દ્વિઘાત (ii) ત્રિઘાત (iii) દ્વિઘાત (iv) સુરેખ (v) સુરેખ

(vi) દ્વિઘાત (vii) ત્રિઘાત

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) હા (ii) ના (iii) હા (iv) હા (v) હા

(vi) હા (vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ બહુપદીનું શૂન્ય છે પરંતુ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ એ શૂન્ય નથી (viii) ના

4. (i) –5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$

(v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$ **3.** ના, કારણ કે શેષ શૂન્ય નથી.

સ્વાધ્યાય 2.4

1. $(x + 1)$ એ (i) નો અવયવ છે પરંતુ (ii), (iii) અને (iv) નો અવયવ નથી.

2. (i) હા (ii) ના (iii) હા

3. (i) –2 (ii) $-\left(2 + \sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2} - 1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$ (iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$

5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

સ્વાધ્યાય 2.5

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-2x-80$ (iii) $9x^2-3x-20$ (iv) $y^4-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8xz$

(iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)$

6. (i) $8x^3+12x^2+6x+1$ (ii) $8a^3-27b^3-36a^2b+54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4}{3}xy^2$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$ (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$ (ii) $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

12. જમણી બાજુનું સાદુરૂપ આપો.

13. નિત્યસમ VIII માં $x+y+z=0$ મૂકો.

14. (i) -1260, $a=-12$, $b=7$, $c=5$ લો. અહીં $a+b+c=0$. પ્રશ્ન 13 માં આ પરિણામનો ઉપયોગ કરો.

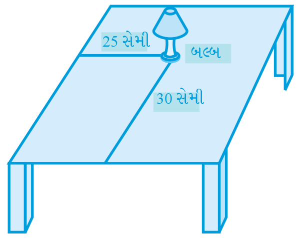
(ii) 16380

15. (i) લંબાઈ = $5a-3$, પહોળાઈ = $5a-4$ એ એક શક્ય જવાબ છે. (ii) લંબાઈ = $7y-3$, પહોળાઈ = $5y+4$ એ એક શક્ય જવાબ છે.

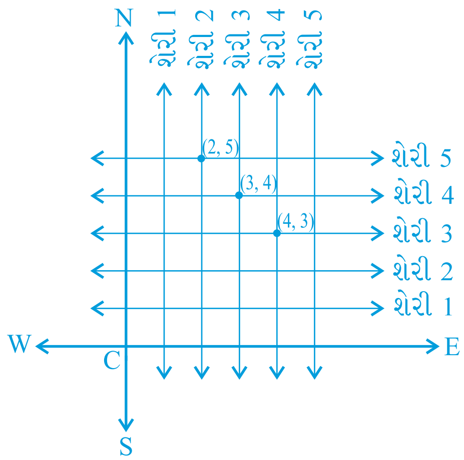
16. (i) એક શક્ય જવાબ $3, x$ અને $x-4$ છે. (ii) એક શક્ય જવાબ $4k$, $3y+5$ અને $y-1$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બલ્બને બિંદુ અને ટેબલને સમતલ તરીકે લો. ટેબલની કોઈ બે પરસ્પર લંબ ધાર પસંદ કરો. લાંબી ધારથી બલ્બનું અંતર માપો. ધારો કે તે 25 સેમી છે. ફરીથી ટૂંકી ધારથી બલ્બનું અંતર માપો. ધારો કે તે 30 સેમી છે. તમે બલ્બનું સ્થાન (30, 25) અથવા (25, 30) રીતે લખી શકો, જે તમે નક્કી કરેલા ક્રમ પર આધારિત છે.



2. શેરીનો નકશો બાજુમાં આપેલી આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. શેરીઓ જ્યાં ભેગી થાય તે બિંદુઓને આકૃતિમાં અંકિત કરેલ છે. તે અનન્ય મળશે, કારણ કે તેમને નિર્દેશિત કરવા માટે માટે આપણે બે સંબંધિત રેખાઓનો ઉપયોગ કર્યો છે.



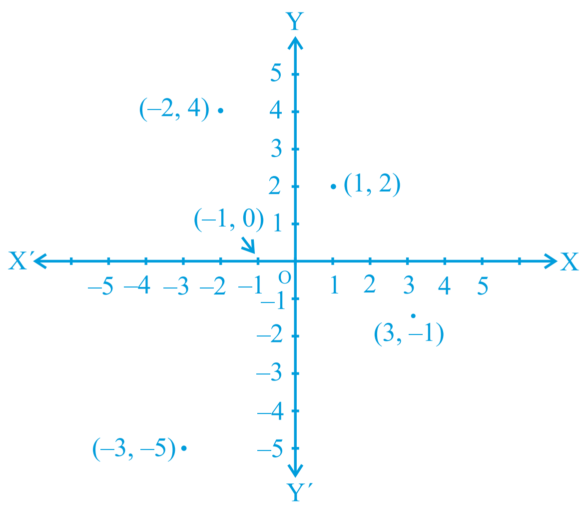
સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) x - અક્ષ y - અક્ષ (ii) ચરણ (iii) ઊગમબિંદુ

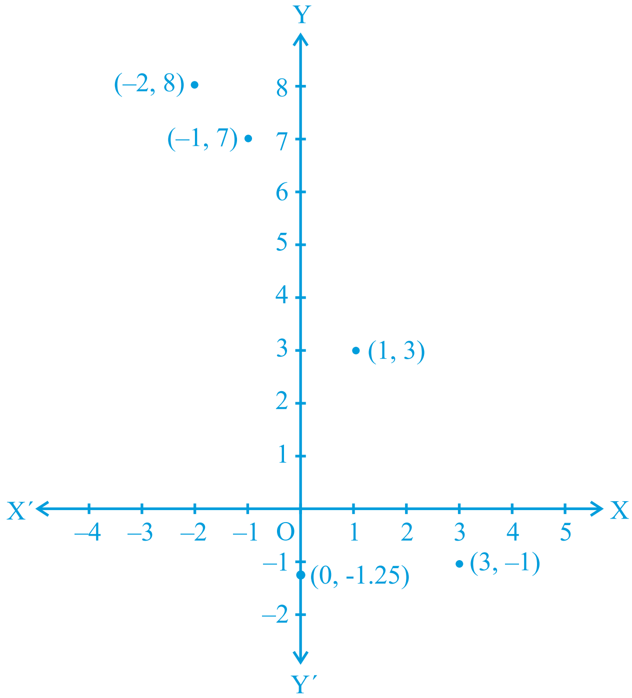
2. (i) (–5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) –3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

સ્વાધ્યાય 3.3

1. બિંદુ (–2, 4) દ્વિતિય ચરણમાં આવેલું છે. બિંદુ (3, –1) ચતુર્થ ચરણમાં આવેલું છે. બિંદુ (– 1, 0) ઋણ x - અક્ષ ઉપર, બિંદુ (1, 2) એ પ્રથમ ચરણમાં અને બિંદુ (–3, –5) તૃતિય ચરણમાં આવેલાં છે. બિંદુઓનાં સ્થાન બાજુમાં આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.



2. બિંદુઓનાં સ્થાન બાજુના આલેખમાં દર્શાવેલ છે.



સ્વાધ્યાય 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0; a = 2, b = 3, c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$

(iv) $1 \cdot x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$

(vi) $3x + 0 \cdot y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$

(vii) $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0 \cdot y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (iii) કારણ કે x ની પ્રત્યેક કિંમત માટે y ની અનુરૂપ કિંમત મળે અને y ની પ્રત્યેક કિંમત માટે અનુરૂપ x ની કિંમત મળે.

2. (i) $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, -1)$

(ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

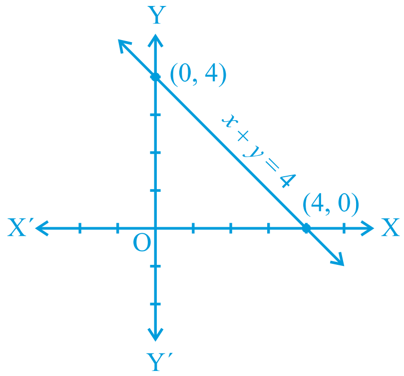
(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) ના (ii) ના (iii) હા (iv) ના (v) ના

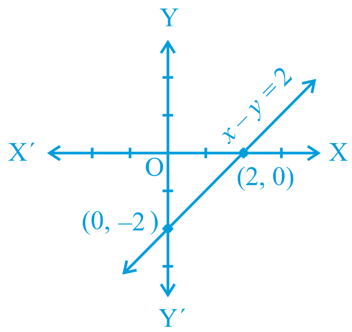
4. 7

સ્વાધ્યાય 4.3

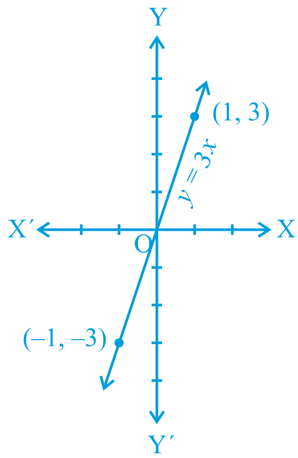
1. (i)



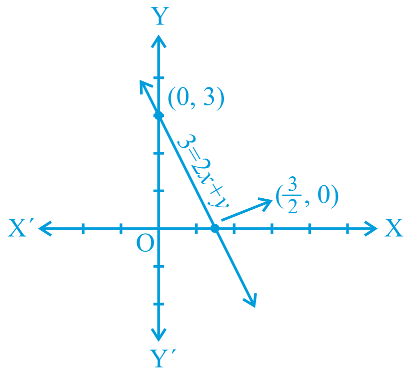
(ii)



(iii)



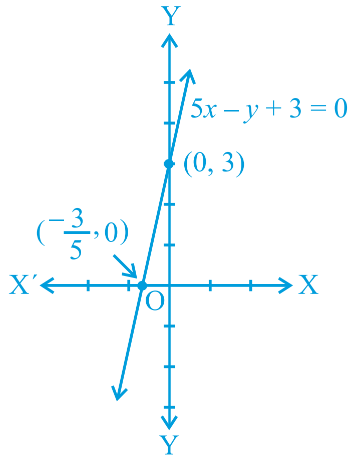
(iv)



2. $7x - y = 0$ અને $x + y = 16$; અનંત [એક બિંદુમાંથી અનંત રેખાઓ દોરી શકાય.]

3. $\frac{5}{3}$

4. $5x - y + 3 = 0$

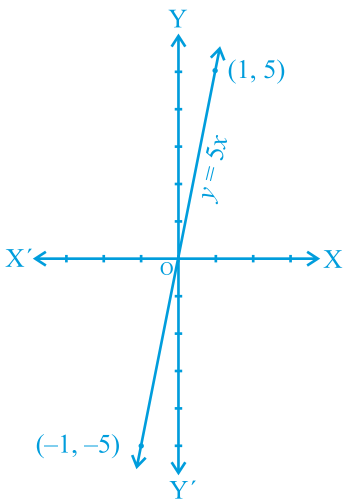


5. આકૃતિ 4.6 માટે $x + y = 0$ અને આકૃતિ 4.7 માટે $y = -x + 2$.

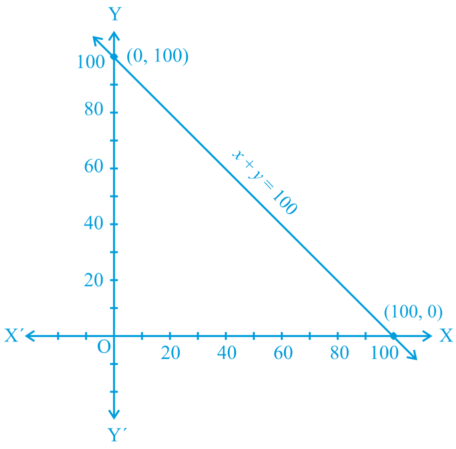
6. ધારો કે x એ અંતર છે અને y એ થયેલ કાર્ય છે. આથી કૂટ પ્રશ્ન પરથી સમીકરણ $y = 5x$ થશે.

(i) 10 એકમ

(ii) 0 એકમ



7. $x + y = 100$



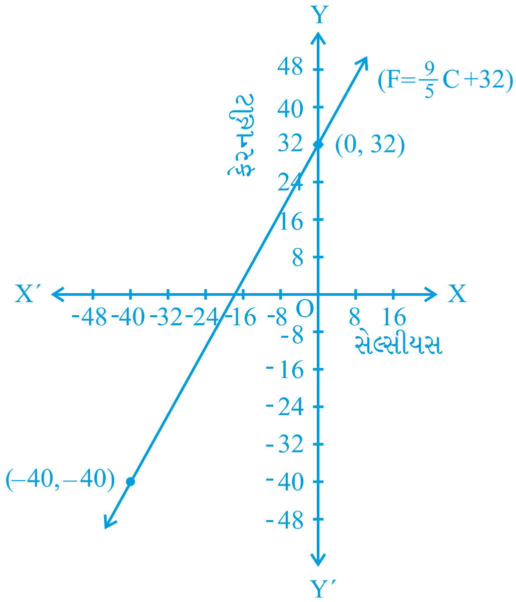
8. (i) બાજુની આકૃતિ જૂઓ

(ii) 86° F

(iii) 35° C

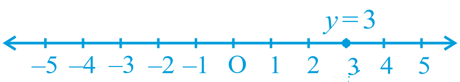
(iv) 32° F, –17.8° C (આસન્ન મૂલ્ય)

(v) Yes, – 40° (F અને C બંનેમાં)

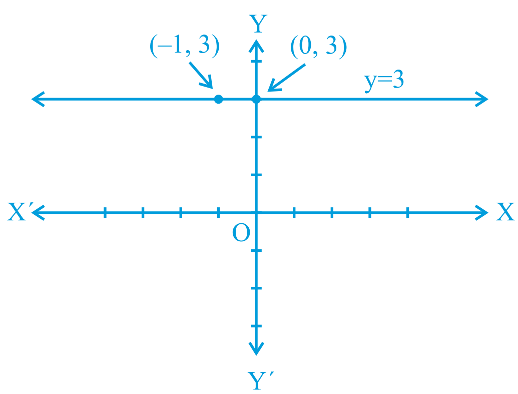


સ્વાધ્યાય 4.4

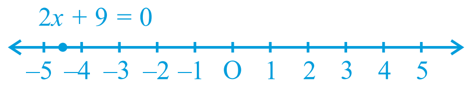
1. (i)



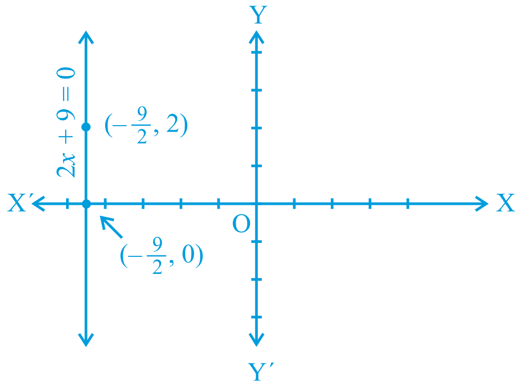
(ii)



2. (i)



(ii)



સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) અસત્ય, વિદ્યાર્થી જોઈને કહી શકશે.

(ii) અસત્ય, પૂર્વધારણા 5.1 સાથે વિરોધાભાસ.

(iii) સત્ય, (પૂર્વધારણા 2)

(iv) સત્ય, જો તમે એક વર્તુળના પ્રદેશને બીજા વર્તુળથી ઢાંકી દો તો તે સંપાતી થઈ જશે. તેથી તેમનાં કેન્દ્ર અને સીમાઓ એક બીજા પર આવી જશે. તેથી તેમની ત્રિજ્યાઓ એક જ થઇ જશે.

(v) સત્ય, યુક્લિડની પ્રથમ પૂર્વધારણા

3. તેમાં કેટલાંક અવ્યાખ્યાયિત પદો છે જેની યાદી વિદ્યાર્થીઓ બનાવશે. તે સુસંગત છે કારણ કે તે બે અલગ પરિસ્થિતિઓ સાથે સંકળાયેલ છે.

(i) પરથી કહી શકાય કે બે બિંદુઓ A અને B આપેલ હોય તો બિંદુ C રેખા પર તેમની વચ્ચે મળે.

(ii) પરથી કહી શકાય કે બે બિંદુઓ A અને B આપેલ હોય તો તમે બિંદુ C એવું લઇ શકો કે જે A અને B માંથી પસાર થતી રેખા પર ના હોય.

આ 'પૂર્વધારણાઓ' યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓને અનુસરતી નથી. આમ છતાં તે પૂર્વધારણા 5.1 (સ્વયંસિધ્ધ સત્ય 5.1)ને અનુસરે છે.

4. $AC = BC$

તેથી, $AC + AC = BC + AC$ (સમાનમાં સમાન ઉમેરતા)

એટલે કે, $2AC = AB$ $(BC + AC = AB)$

તેથી, $AC = \frac{1}{2}AB$

5. હંગામી ધોરણે ધારણા કરો કે ભિન્ન બિંદુઓ C અને D એ AB નાં મધ્ય બિંદુઓ છે. હવે તમે બતાવો કે બિંદુઓ C અને D ભિન્ન બિંદુઓ નથી.

6. $AC = BD$ (આપેલ છે) (1)

$AC = AB + BC$ (બિંદુ B, A અને C ની વચ્ચે આવેલ છે) (2)

$BD = BC + CD$ (બિંદુ C, B અને Dની વચ્ચે આવેલ છે) (3)

(2) અને (3) ની કિંમત (1) માં મૂકતા,

$AB + BC = BC + CD$

તેથી, $AB = CD$ (સમાનમાંથી સમાન બાદ કરતાં)

7. આ દુનિયાના કોઈ પણ ભાગમાં સત્ય હોવાથી, આ સનાતન સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. વિદ્યાર્થીએ આપેલ કોઈ સૂત્ર માટે વર્ગખંડમાં ચર્ચા થવી જોઈએ.

2. જો સીધી રેખા l બીજી બે રેખાઓ m અને n પર પડે(છેદે) જેથી રેખા lના એક તરફના અંતઃકોણનો સરવાળો બે કાટખૂણા થાય, ત્યારબાદ યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા દ્વારા રેખા l ની આ તરફ રેખાઓ મળશે નહિ. પછી તમે જાણો છો કે રેખા l ની બીજી તરફના અંતઃકોણોનો સરવાળો પણ બે કાટખૂણા થાય તેથી તે બીજી તરફ પણ મળશે નહિ તેથી રેખાઓ m અને n ક્યાકેય મળશે નહિ. તેથી તે સમાંતર છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. $30°, 250°$ **2.** $126°$ **4.** બિંદુ પરના બધા ખૂણાઓનો સરવાળો $= 360°$

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ અને $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. **6.** $122°, 302°$

સ્વાધ્યાય 6.2

1. $130°, 130°$ **2.** $126°$ **3.** $126°, 36°, 54°$ **4.** $60°$ **5.** $50°, 77°$

6. આપાતકોણ = પરાવર્તન કોણ

બિંદુ B પર $BE \perp PQ$ દોરો અને બિંદુ C પર $CF \perp RS$ દોરો.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. $65°$ **2.** $32°, 121°$ **3.** $92°$ **4.** $60°$ **5.** $37°, 53°$

6. ΔPQR ના ખૂણાઓનો સરવાળો $= \Delta QTR$ ના ખૂણાઓનો સરવાળો અને $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. તે સમાન છે. **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

સ્વાધ્યાય 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** દરેકનું માપ $45°$ થાય.

સ્વાધ્યાય 7.3

3. (i) પરથી (ii), $\angle ABM = \angle PQN$

સ્વાધ્યાય 7.4

4. BD જોડો અને $\angle B > \angle D$ બતાવો. AC જોડો અને $\angle A > \angle C$ બતાવો.

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$ વગેરે.

સ્વાધ્યાય 8.1

1. 36°, 60°, 108° અને 156°.

6. (i) Δ DAC અને Δ BCA પરથી, $\angle DAC = \angle BCA$ અને $\angle ACD = \angle CAB$ બતાવો, વગેરે.

(ii) પ્રમેય 8.4 નો ઉપયોગ કરીને બતાવો કે $\angle BAC = \angle BCA$.

સ્વાધ્યાય 8.2

2. PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તેમ બતાવો. PQ || AC અને PS || BD પણ બતાવો. તેથી $\angle P = 90°$.

5. AECF સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી AF || CE, વગેરે.

સ્વાધ્યાય 9.1

1. (i) આધાર DC, DC અને AB સમાંતર છે. (iii) આધાર QR, QR અને PS સમાંતર છે.

(v) આધાર AD, AD અને BQ સમાંતર છે.

સ્વાધ્યાય 9.2

1. 12.8 સેમી **2.** EG ને જોડો, ઉદાહરણ 2 ના પરિણામનો ઉપયોગ કરો.

6. Δ APQ માં ઘઉં અને અન્ય બે ત્રિકોણમાં દાળ અથવા Δ APQ માં દાળ અને અન્ય બે ત્રિકોણમાં ઘઉં.

સ્વાધ્યાય 9.3

4. $CM \perp AB$ દોરો અને $DN \perp AB$ દોરો, CM = DN સાબિત કરો. **12.** ઉદાહરણ 4 જુઓ.

સ્વાધ્યાય 9.4 (વૈકલ્પિક)

7. ઉદાહરણ 3 ના પરિણામનો પુનરાવર્તિત રીતે ઉપયોગ કરો.

સ્વાધ્યાય 10.1

1. (i) અંદરના ભાગમાં (ii) બહારના ભાગમાં (iii) વ્યાસ

(iv) અર્ધવર્તુળ (v) જીવા (vi) ત્રણ

2. (i) સત્ય (ii) અસત્ય (iii) અસત્ય

(iv) સત્ય (v) અસત્ય (vi) સત્ય

સ્વાધ્યાય 10.2

1. એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓનો વિચાર કરીને પ્રમેય 10.1 જેમ જ સાબિત કરો.

2. એકરૂપતા માટેની બાખૂબા પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરીને બે ત્રિકોણની એકરૂપતા બતાવો.

સ્વાધ્યાય 10.3

1. 0, 1, 2, બે **2.** ઉદાહરણ 1 પ્રમાણે કરો.

3. બે વર્તુળનાં કેન્દ્રો O અને O′ ને સામાન્ય જીવા AB ના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડો. ત્યારબાદ $\angle$ OMA = 90° અને $\angle$ O′MA = 90° બતાવો.

સ્વાધ્યાય 10.4

1. 6 સેમી. કેન્દ્રોને જોડતી રેખા નાના વર્તુળની ત્રિજ્યાને લંબ છે અને ત્યારબાદ સામાન્ય જીવા એ નાના વર્તુળનો વ્યાસ છે તેમ બતાવો.

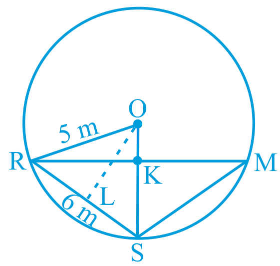
2. AB અને CD, O કેન્દ્રિત વર્તુળની સમાન જીવાઓ E માં છેદે, AB પર OM અને CD પર ON લંબ દોરો અને O, E જોડો. કાટકોણ ત્રિકોણ OME અને ONE એકરૂપ બતાવો.

3. ઉદાહરણ 2 પ્રમાણે ગણો. **4.** AD પર લંબ OM દોરો.

5. રેશમા, સલમા અને મનદીપને અનુક્રમે R, S અને M વડે દર્શાવો. ધારો કે KR = x મી(આકૃતિ જુઓ). Δ ORS નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}x \times 5$.

વળી, Δ ORS નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4$ પણ થાય.

x મેળવો તેથી RM મળે.



6. સમબાજુ ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો અને પાયથાગોરસ પ્રમેયનો પણ ઉપયોગ કરો.

સ્વાધ્યાય 10.5

1. 45° **2.** 150°, 30° **3.** 10° **4.** 80° **5.** 110°

6. $\angle$BCD = 80° અને $\angle$ECD = 50°

8. CD પર AM અને BN લંબ દોરો.(AB $\parallel$ CD અને AB < CD). ΔAMD $\cong$ ΔBNC બતાવો. તેના પરથી $\angle$C = $\angle$D મળે અને તેથી, $\angle$A + $\angle$C = 180°.

સ્વાધ્યાય 10.6 (વૈકલ્પિક)

2. ધારો કે O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે. ત્યાર બાદ બંને જીવાઓનો લંબદ્વિભાજક સમાન થશે અને O માંથી પસાર થશે. હવે r એ ત્રિજ્યા છે તેથી, $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$,

જ્યાં x એ 11 સેમી લંબાઈની જીવા પર O માંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ છે. આ પરથી $x = 1$ મળે. તેથી, $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ સેમી

3. 3 સેમી

4. ધારો કે $\angle AOC = x$ અને $\angle DOE = y$. ધારો કે $\angle AOD = z$ તો $\angle EOC = z$ અને $x + y + 2z = 360°$.

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$. વળી, $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$ થાય.

8. $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$.

તેથી, $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

9. પ્રશ્ન-1, સ્વાધ્યાય 10.2 અને પ્રમેય 10.8 નો ઉપયોગ કરો.

10. $\angle A$ નો દ્વિભાજક ΔABC ના પરિવૃત્તને D માં છેદે છે. DC અને DB ને જોડો. પછી $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ અને $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$. તેથી, $\angle BCD = \angle DBC$ અથવા, DB = DC. તેથી D એ BC ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900,3 સેમી^{2} **2.** ₹ 1650000 **3.** $20\sqrt{2}$ મી^{2}

4. $21\sqrt{11}$ સેમી^{2} **5.** 9000 સેમી^{2} **6.** $9\sqrt{15}$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.2

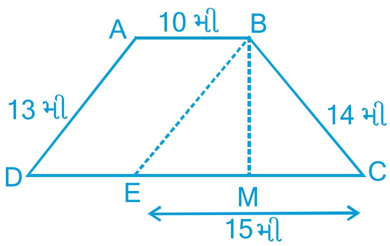
1. 65.5 મી^{2} (આશરે) **2.** 15.2 સેમી^{2} (આશરે) **3.** 19.4 સેમી^{2} (આશરે)

4. 12 સેમી **5.** 48 મી^{2} **6.** $1000\sqrt{6}$ સેમી^{2}, $1000\sqrt{6}$ સેમી^{2}

7. ઘેરાયેલા પ્રદેશ I નું ક્ષેત્રફળ = ઘેરાયેલા પ્રદેશ II નું ક્ષેત્રફળ = 256 સેમી^{2} અને ઘેરાયેલા પ્રદેશ III નું ક્ષેત્રફળ = 17.92 સેમી^{2}

8. ₹ 705.60 **9.** 196 મી^{2}

[આકૃતિ જુઓ. ΔBEC નું ક્ષેત્રફળ = 84 મી^{2} મેળવો. બાદમાં BM ની ઊંચાઈ શોધો.]



સ્વાધ્યાય 13.1

1. (i) 5.45 મી^{2} (ii) ₹ 109 2. ₹ 555 3. 6 મી 4. 100 ઈંટો

5. (i) ઘનાકાર પેટીની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 40 સેમી^{2} જેટલું વધારે છે.

(ii) લંબ ઘનાકાર પેટીની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ 10 સેમી^{2} જેટલું વધારે છે.

6. (i) 4250 સેમી^{2} કાચ (ii) 320 સેમી લાંબીટેપ [બધી ધારનો સરવાળો કરો. (કુલ 12 ધાર છે 4 લંબાઈ, 4 પહોળાઈ અને 4 ઊંચાઈ ધરાવે)].

7. ₹ 2184 8. 47 મી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

1. 2 સેમી 2. 7.48 મી^{2} 3. (i) 968 સેમી^{2} (ii) 1064.8 સેમી^{2} (iii) 2038.08 સેમી^{2}

[પાઈપની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + બે પાયાઓનું ક્ષેત્રફળ). દરેક પાયો એ આપેલ રીંગનું ક્ષેત્રફળ π $(R^2 - r^2)$ જ્યાં, R = બહારની ત્રિજ્યા અને r = અંદરની ત્રિજ્યા].

4. 1584 મી^{2} 5. ₹ 68.75 6. 1 મી

7. (i) 110 મી^{2} (ii) ₹ 4400 8. 4.4 મી^{2}

9. (i) 59.4 મી^{2} (ii) 95.04 મી^{2}

[ધારો કે ખરેખર વપરાયેલ સ્ટીલનું ક્ષેત્રફળ x મી^{2}. ખરેખર વપરાયેલ સ્ટીલનો $\frac{1}{12}$ મો ભાગ વેડફાઈ ગયો, ટાંકીમાં વપરાયેલ સ્ટીલનું ક્ષેત્રફળ = x ના $\frac{11}{12}$. આનો અર્થ એ થયો કે ખરેખર વપરાયેલ સ્ટીલનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{12}{11} \times 87.12$ મી^{2}]

10. 2200 સેમી^{2}; નળાકારની ઉંચાઈ (30 + 2.5 + 2.5) સેમી 11. 7920 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 165 સેમી^{2} 2. 1244.57 મી^{2} 3. (i) 7 સેમી (ii) 462 સેમી^{2}

4. (i) 26 મી (ii) ₹ 137280 5. 63 મી 6. ₹ 1155

7. 5500 સેમી^{2} 8. ₹ 384.34 (આશરે)

સ્વાધ્યાય 13.4

1. (i) 1386 સેમી^{2} (ii) 394.24 સેમી^{2} (iii) 2464 સેમી^{2}

2. (i) 616 સેમી^{2} (ii) 1386 સેમી^{2} (iii) 38.5 મી^{2}

3. 942 સેમી^{2} 4. 1 : 4 5. ₹ 27.72

6. 3.5 સેમી   7. 1 : 16   8. 173.25 સેમી^{2}

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

સ્વાધ્યાય 13.5

1. 180 સેમી^{3} 2. 135000 લિટર 3. 4.75 મી 4. ₹ 4320 5. 2 મી

6. 3 દિવસ 7. 16000 8. 6 સેમી, 4 : 1 9. 4000 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.6

1. 34.65 લિટર

2. 3.432 કિગ્રા [પાઈપનું ઘનફળ = $\pi h \times (R^2 - r^2)$, જ્યાં R એ બહારની ત્રિજ્યા અને r એ અંદરની ત્રિજ્યા].

3. નળાકારની ક્ષમતા 85 સેમી^{3} જેટલી વધારે છે.

4. (i) 3 સેમી (ii) 141.3 સેમી^{3}

5. (i) 110 મી^{2} (ii) 1.75 મી (iii) 96.25 કિલોલિટર

6. 0.4708 મી^{2}

7. લાકડાનું ઘનફળ = 5.28 સેમી^{3}, ગ્રેફાઈટનું ઘનફળ = 0.11 સેમી^{3}.

8. 38500 સેમી^{3} અથવા 38.5 લિટર સૂપ

સ્વાધ્યાય 13.7

1. (i) 264 સેમી^{3} (ii) 154 સેમી^{3} 2. (i) 1.232 લિટર (ii) $\frac{11}{35}$ લિટર

3. 10 સેમી 4. 8 સેમી 5. 38.5 કિલોલિટર

6. (i) 48 સેમી (ii) 50 સેમી (iii) 2200 સેમી^{2} 7. 100π સેમી^{3} 8. 240π સેમી^{3}; 5 : 12

9. 86.625 મી^{3}, 99.825 મી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ સેમી^{3} (ii) 1.05 મી^{3} (આશરે)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ સેમી^{3} (ii) 0.004851 મી^{3} 3. 345.39 ગ્રામ (આશરે)   4. $\frac{1}{64}$

5. 0.303 લિટર (આશરે)   6. 0.06348 મી^{3} (આશરે)

7. $179\frac{2}{3}$ સેમી^{3} 8. (i) 249.48 મી^{2} (ii) 523.9 મી^{3} (આશરે)   9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 મીમી^{3} (આશરે)

સ્વાધ્યાય 13.9 (વૈકલ્પિક)

1. ₹ 6275

2. ₹ 2784.32 (આશરે) [સિલ્વર રંગની ગણતરી કરતી વખતે આધાર પર રાખેલ ગોળાના ભાગને બાદ કરવાનું યાદ રાખો.]

3. 43.75%

સ્વાધ્યાય 14.1

1. આપણા રોજિંદા જીવનમાંથી માહિતીના પાંચ ઉદાહરણ આપણે નીચે પ્રમાણે મેળવી શકીએ :

   (i) આપણા વર્ગમાં રહેલાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા

   (ii) આપણી શાળાના પંખાઓની સંખ્યા

   (iii) છેલ્લા બે વર્ષનાં આપણા ઘરનાં વિજળીનાં બીલ.

   (iv) ટેલીવિઝન અથવા વર્તમાન પત્રો દ્વારા મેળવેલાં ચૂંટણીનાં પરિણામો

   (v) શૈક્ષણિક મોજણી દ્વારા મળેલાં નિરક્ષરતા દરના આંકડા

   યાદ રાખો કે આ ઉપરાંત પણ આ પ્રશ્નના ઘણા બધા જુદા જુદા જવાબ હોઈ શકે.

2. (i), (ii) અને (iii) પ્રાથમિક માહિતી છે (iv) અને (v) ગૌણ માહિતી છે.

સ્વાધ્યાય 14.2

1.

રુધિર જૂથ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
A	9
B	6
O	12
AB	3
કુલ	30

સૌથી વધુ સામાન્ય – O, સૌથી ઓછું સામાન્ય – AB

2.

અંતર (કિમીમાં)	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸 𝍸 |	11
10 - 15	𝍸 𝍸 |	11
15 - 20	𝍸 ||||	9
20 - 25	|	1
25 - 30	|	1
30 - 35	||	2
કુલ		40

3. (i)

સાપેક્ષ ભેજ (%)	આવૃત્તિ
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
કુલ	30

(ii) માહિતીમાં સાપેક્ષ ભેજનું પ્રમાણ વધુ હોવાથી માહિતી વર્ષાઋતુની હોય તેમ લાગે છે.

(iii) વિસ્તાર $= 99.2 - 84.9 = 14.3$

4. (i)

ઊંચાઇ (સેમીમાં)	આવૃતિ
150 - 155	12
155 - 160	9
160 - 165	14
165 - 170	10
170 - 175	5
કુલ	50

(ii) ઉપરનાં કોષ્ટક પરથી આપણે તારણ કાઢી શકીએ કે 50% વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઇ 165 સેમી થી ઓછી છે.

5. (i)

સલ્ફર ડાયોકસાઈડની સાંદ્રતા (ppm માં)	આવૃતિ
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
કુલ	30

(ii) 8 દિવસ સુધી સલ્ફર ડાયોકસાઈડની સાંદ્રતા 0.11 ppm થી વધુ હતી.

6.

છાપની સંખ્યા	આવૃતિ
0	6
1	10
2	9
3	5
કુલ	30

7. (i)

અંક	આવૃતિ
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
કુલ	**50**

(ii) સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તિત થતા અંક 3 અને 9 છે. સૌથી ઓછી વખત 0 નું પુનરાવર્તિત થાય છે

8. (i)

કલાકની સંખ્યા	આવૃતિ
0 - 5	10
5 - 10	13
10 - 15	5
15 - 20	2
કુલ	**30**

(ii) 2 બાળક

9.

બેટરીનું આયુષ્ય (કલાકમાં)	આવૃત્તિ
2.0 - 2.5	2
2.5 - 3.0	6
3.0 - 3.5	14
3.5 - 4.0	11
4.0 - 4.5	4
4.5 - 5.0	3
કુલ	**40**

સ્વાધ્યાય 14.3

1. (ii) પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ

3. (ii) પક્ષ A 4. (ii) આવૃત્તિ બહુકોણ (iii) ના 5. (ii) 184

8.

ઉંમર (વર્ષમાં)	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

હવે, તમે આ લંબાઈનો ઉપયોગ કરી સ્તંભાલેખ દોરી શકો.

9. (i)

મૂળાક્ષરોની સંખ્યા	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

હવે સ્તંભાલેખ દોરો.

(ii) 6 - 8

સ્વાધ્યાય 14.4

1. મધ્યક = 2.8; મધ્યસ્થ = 3; બહુલક = 3

2. મધ્યક = 54.8; મધ્યસ્થ = 52; બહુલક = 52

3. $x = 62$ **4.** 14

5. 60 મજૂરોના પગારનો મધ્યક ₹ 5083.33.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. $\frac{24}{30}$, એટલે કે $\frac{4}{5}$ **2.**(i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ **3.** $\frac{3}{20}$ **4.** $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ **6.** (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ **8.** (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 **11.** $\frac{7}{11}$ **12.** $\frac{1}{15}$ **13.** $\frac{1}{10}$

સ્વાધ્યાય A1.1

1. (i) હંમેશાં અસત્ય, એક વર્ષમાં 12 મહિના હોય.

(ii) સંદિગ્ધ, આપેલ વર્ષમાં દિવાળી શુક્રવારે હોય અથવા ન પણ હોય.

(iii) સંદિગ્ધ, માગાડીનું તાપમાન કેટલીક વાર વર્ષમાં 26°C હોઇ શકે.

(iv) હંમેશાં સત્ય.

(v) હંમેશાં અસત્ય, કૂતરાઓ ઊડે નહિં.

(vi) સંદિગ્ધ, લીપ વર્ષમાં ફેબ્રુઆરીમાં 29 દિવસ હોય.

2. (i) અસત્ય, ચતુષ્કોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો 360° છે.

(ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) સત્ય

(v) અસત્ય, ઉદાહરણ $7 + 5 = 12$, આ અયુગ્મ સંખ્યા નથી.

3. (i) 2 કરતાં મોટી બધી અવિભાજય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે. (ii) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના બે વડે ગુણિત હંમેશા યુગ્મ છે.

(iii) પ્રત્યેક $x > 1$ માટે $3x + 1 > 4$. (iv) પ્રત્યેક $x \geq 0$ માટે $x^3 \geq 0$.

(v) સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગા એ ખૂણાનો દ્વિભાજક પણ છે.

સ્વાધ્યાય A1.2

1. (i) મનુષ્ય પૃષ્ઠવંશી છે. (ii) ના, દિનેશે તેના વાળ કોઇ બીજા દ્વારા પણ કપાવ્યા હોઈ શકે

(iii) ગુલગને લાલ જીભ (iv) અમે તારણ કાઢયું કે આવતીકાલે ગટર સાફ કરવી પડશે.

(v) પૂંછડીઓ ધરાવતા તમામ પ્રાણીઓ માટે કૂતરા હોવાની જરૂર નથી. ઉદાહરણ તરીકે, ભેંસ, વાંદરાઓ, બિલાડીઓ વગેરે જેવા પ્રાણીઓને પૂંછડી હોય છે, પરંતુ તેઓ કૂતરા નથી.

2. તમારે B અને 8 ઉલટાવવાની જરૂર છે. જો B ની પાછળની બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો પછી નિયમ તૂટી જાય. તેવી જ રીતે, જો 8 ની બીજી બાજુ વ્યંજન હોય, તો તે નિયમ તૂટી જાય.

સ્વાધ્યાય A1.3

1. ત્રણ શકય અનુમાન છે.

(i) કોઈપણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.

(ii) કોઈપણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 4 વડે વિભાજય છે.

(iii) કોઈપણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 6 વડે વિભાજય છે.

2. હરોળ 4: 1 3 3 1 $=11^3$; હરોળ 5: 1 4 6 4 1$=11^4$; હરોળ 4 અને હરોળ 5 માટે ધારણા યોગ્ય છે, પરંતુ $11^5 \neq 15101051$.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. વિદ્યાર્થીઓ જાતે જવાબ આપશે, ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓ છે.

સ્વાધ્યાય A1.4

1. (i) તમે સમાન ખૂણાવાળા પરંતુ બાજુઓ જુદી હોય તેવા બે ત્રિકોણ આપી શકો.

(ii) સમબાજુ ચતુષ્કોણને સમાન બાજુઓ છે પરંતુ તે ચોરસ ન હોય તે શક્ય છે.

(iii) લંબચોરસને સમાન ખૂણાઓ છે પણ તે ચોરસ ન હોય તે બની શકે.

(iv) $a = 3$ અને $b = 4$ માટે વિધાન સત્ય નથી.

(v) $n = 11$ માટે $2n^2 + 11 = 253$ અવિભાજ્ય નથી.

(vi) $n = 41$ માટે $n^2 - n + 41$ અવિભાજ્ય નથી.

2. વિદ્યાર્થીઓ જાતે જવાબ આપશે.

3. ધારો કે x અને y એ બે અયુગ્મ સંખ્યાઓ છે. પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $x = 2m + 1$ અને પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $y = 2n + 1$ છે.

$x + y = 2(m + n + 1)$. તેથી $x + y$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે માટે તે યુગ્મ છે.

4. જુઓ પ્રશ્ન 3. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

તેથી, xy એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી માટે તે અયુગ્મ છે.

5. ધારો કે $2n$, $2n + 2$ અને $2n + 4$ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓ છે. તેથી તેમનો સરવાળો $6(n + 1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

7. (i) ધારો કે મૂળ સંખ્યા n છે, આપણે નીચે મુજબ પ્રક્રિયા કરીશું:

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9 \rightarrow \frac{3n + 9}{3} = n + 3 \rightarrow n + 3 + 4 = n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7.$$

(ii) નોંધો કે $7 \times 11 \times 13 = 1001$. ત્રણ અંકોની સંખ્યા abc લો. જ્યાં $abc \times 1001 = abc\,abc$. તેથી આપણને છ અંકોની સંખ્યા $abcabc$ મળે જે 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય છે.

સ્વાધ્યાય A2.1

1. સોપાન **1:** નિર્માણ **:**

સંબંધિત પરિબળો આપણને આપેલ કમ્પ્યુટર ભાડે લીધેલ સમય અને બે કિંમતો તે થાય. આપણે ધારી લઈએ કે કમ્પ્યુટર ખરીદવાની કિંમત કે ભાડે લેવાની કિંમતમાં કોઈ નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો નથી. આથી આપણે આવા કોઈ ફેરફાર ને અસંબંધિત ગણીશું. આપણે કમ્પ્યુટરની બધી બ્રાંડ કે પેઢીઓને સમાન ગણીશું અને તેમાંના ફેરફારો તે પણ આપણે અસંબંધિત ગણીશું.

કમ્પ્યુટર x મહિના માટે ભાડે લેવાનો ખર્ચ ₹ $2000x$ થાય. જે તે કમ્પ્યુટરની ખરીદ કિંમત કરતાં વધારે થાય તો, આપણે કમ્પ્યુટર ખરીદીએ તે વધુ સારૂં ગણાય. આથી સમીકરણ

$$2000x = 25000 \qquad (1)$$

સોપાન **2 :** ઉકેલ **:** સમીકરણ (1), $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

સોપાન **3 :** અર્થઘટન **:** 12.5 માસ બાદ કમ્પ્યુટર ભાડે લેવાની કિંમત તેની ખરીદકિંમત કરતાં વધુ થતી હોવાથી કમ્પ્યુટર જો તમારે 12 માસથી વધુ ઉપયોગમાં લેવાનું હોય તો કમ્પ્યુટર ખરીદવું સસ્તુ પડે.

2. સોપાન **1 :** નિર્માણ **:** આપણે એવું ધારીએ કે મોટરગાડીઓ એકધારી (અચળ) ઝડપે ગતિ કરે છે. આથી તેની ઝડપના કોઈપણ ફેરફારને આપણે અસંબંધિત ગણીશું. જો બંને મોટર x કલાક બાદ મળે તો પ્રથમ મોટરે સ્થાન A થી $40x$ કિમી અંતર કાપ્યું હોય અને બીજી મોટરે $30x$ કિમી અંતર કાપ્યું હોય. આથી તે સ્થાન A થી $(100 - 30x)$ અંતરે હોય. આથી $40x = 100 - 30x$ સમીકરણ બનશે. માટે $70x = 100$ થાય.

સોપાન **2 :** ઉકેલ **:** સમીકરણ ઉકેલતા $x = \frac{100}{70}$ આપણને મળે.

સોપાન **3 :** અર્થઘટન **:** $\frac{100}{70}$ એ લગભગ 1.4 કલાક થાય. આથી બંન્ને મોટર 1.4 કલાક બાદ મળશે.

3. સોપાન **1 :** નિર્માણ **:** ચંદ્ર પૃથ્વીને પરિભ્રમણ કરે તે ઝડપ $= \frac{\text{પરિભ્રમણ કક્ષાની લંબાઈ}}{\text{લીધેલો સમય}}$

સોપાન **2 :** ઉકેલ **:** પરિભ્રમણ કક્ષા લગભગ વર્તુળાકાર હોવાથી

લંબાઈ $2 \times \pi \times 384000$ કિમી $= 2411520$ કિમી થાય.

ચંદ્રને એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરવા માટે 24 કલાક લાગે છે.

આથી ઝડપ $= \frac{2411520}{24} = 100480$ કિમી/કલાક.

સોપાન **3 :** અર્થઘટન **:** ઝડપ 100480 કિમી/કલાક.

4. અર્થઘટન **:** અહીં ધારણા એ થશે કે બીલમાં તફાવતનું એકમાત્ર કારણ એ વોટર હિટરનો ઉપયોગ છે.

ધારો કે વોટર હિટરનો ઉપયોગ થતો હોય તેવા સરેરાશ કલાકની સંખ્યા $= x$

પ્રતિમાસ વોટર હિટરના ઉપયોગથી તફાવત = ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240 થશે.

એક કલાક વોટર હિટર વાપરવાનો ખર્ચ = ₹ 8

આથી, 30 દિવસ વોટર હિટર વાપરવાનો ખર્ચ $= 8 \times 30 \times x$

વળી, 30 દિવસ વોટર હિટર વાપરવાનો ખર્ચ = વોટર હિટર વાપરવાથી થતો તફાવત. આથી, $240x = 240$

ઉકેલ **:** આ સમીકરણ પરથી $x = 1$ આપણને મળશે.

અર્થઘટન **:** $x = 1$ હોવાથી વોટર હિટર પ્રતિદિન સરેરાશ 1 કલાક વાપરવું જોઇએ.

સ્વાધ્યાય A2.2

1. અહીં આપણે કોઈ ચોકકસ ઉકેલની ચર્ચા નહીં કરીએ. તમે છેલ્લા ઉદાહરણમાં વાપરી હતી તે પધ્ધતિ અથવા બીજી કોઈ તમને યોગ્ય લાગતી પધ્ધતિ વાપરી શકશો.

સ્વાધ્યાય A2.3

1. આપણે દર્શાવ્યું કે વ્યવહારૂ જીવનની પરિસ્થિતિમાં નિર્માણનો ભાગ ખૂબ જ વિસ્તૃત હોય છે. વળી, શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોમાં ઉકેલની યથાર્થતા પણ હોતી નથી. આ ઉપરાંત શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોને ખરો ઉકેલ હોય છે. વ્યવહારૂ જીવનની પરિસ્થિતિના કિસ્સામાં આવી જરૂર હોતી નથી.

2. અગત્યના પરિબળો (ii) અને (iii) છે. અહીં (i) એ અગત્યનું પરિબળ નથી જો કે તેની કેટલા વાહનો વેચાયા તેની પર અસર હોય છે.