પ્રકરણ 5

યુક્લિડની ભૂમિતિનો પરિચય

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- બિંદુ, રેખા, સમતલ અથવા પૃષ્ઠ, સ્વયંસિદ્ધ સત્ય, પૂર્વધારણા અને પ્રમેય, '*Elements*', પ્રાચીન ભારતમાં અગ્નિકુંડો અને વેદીઓના આકાર, યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો, સ્વયંસિદ્ધ સત્યોના માળખાની સુસંગતતા.

પ્રાચીન ભારત

- વૈદિકકાળમાં ભૂમિતિનો ઉદ્‌ભવ પૂજા માટેની આવશ્યક વિવિધ પ્રકારની વેદીઓ અને અગ્નિકુંડોના નિર્માણ કાર્યથી થયો હતો. ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે ચોરસ અને વર્તુળાકાર વેદીઓનો ઉપયોગ થતો હતો. જાહેર પૂજા સ્થળો માટે લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબ ચતુષ્કોણના સંયોજનથી બનતા આકારના પ્રયોગ કરવા આવશ્યક હતા.

ઈજિપ્ત, બેબીલોનિયા અને ગ્રીસ

- ઈજિપ્તના નાગરિકોએ ક્ષેત્રફળની ગણતરી માટેના સરળ નિયમો તેમજ સરળ રચના કરવા માટે ભૌમિતિક તક્‌નીક વિકસાવી. બેબીલોન અને ઈજિપ્તવાસીઓએ ભૂમિતિનો ઉપયોગ મોટાભાગે વ્યાવહારિક કાર્ય માટે જ કર્યો તથા તેને એક ક્રમબદ્ધ વિજ્ઞાનના રૂપમાં વિકસિત કરવા માટે ખૂબ જ ઓછું કામ કર્યું. ગ્રીસવાસીઓની રુચિ અનુમાનિત તર્કનો ઉપયોગ કરીને તેમણે સ્થાપિત કરેલાં વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસવામાં હતી. સૌપ્રથમ જ્ઞાત સાબિતી આપવાનો શ્રેય ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી **થેલ્સ (Thales)** ને જાય છે.

યુક્લિડનું એલિમેન્ટસ (Euclid's Elements)

ઈ. પૂ. 300ની આસપાસ ***યુક્લિડે*** એ સમય સુધી જાણીતા ગણિતના બધા જ જ્ઞાનને એકત્રિત કર્યું અને **'Elements'** નામના તેમના પ્રસિદ્ધ ગ્રંથના રૂપમાં તેને વ્યવસ્થિત કર્યું. યુક્લિડે કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિત કર્યા વગર સત્ય વિધાન માનવાની કલ્પના કરી. આ કલ્પનાઓ વાસ્તવમાં 'સ્પષ્ટપણે વૈશ્વિક સત્ય' હતી. તેમણે તેને બે ભાગમાં વિભાજિત કર્યા.

સ્વયંસિદ્ધ સત્યો

1. એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.
2. સમાનમાં સમાન ઉમેરીએ તો પરિણામ સમાન રહે.
3. સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ તો શેષફળ સમાન રહે.
4. એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન રહે.
5. આખું તેના ભાગ કરતા મોટું હોય છે.
6. સમાન વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.
7. એક જ વસ્તુઓના અડધાં એકબીજાને સમાન થાય.

પૂર્વધારણા :

1. એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી થઈને પસાર થતી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.
2. સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.
3. કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈ પણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.
4. બધા જ કાટખૂણા એકબીજાને સમાન થાય.
5. જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતા તે એકબીજીને છેદે છે.

   યુક્લિડે પૂર્વધારણા શબ્દનો ઉપયોગ વિશિષ્ટ રીતે ભૂમિતિથી સંબંધિત હોય એવી સંકલ્પનાઓ માટે કર્યો. તે સિવાયની સંકલ્પનાઓ ને તેણે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો કહ્યા. આનુમાનિક તર્ક દ્વારા જેની સત્યાર્થતા સ્થાપિત થયેલ હોય તેવા ગાણિતિક વિધાનને **પ્રમેય** કહે છે.

વર્તમાન ભૂમિતિ :

- પૂર્વધારણાઓ, વ્યાખ્યાઓ અને અવ્યાખ્યાયિત પદોનું બનેલું ગાણિતિક માળખું.
- બિંદુ, રેખા અને સમતલને અવ્યાખ્યાયિત પદોના રૂપમાં લેવામાં આવે છે.
- જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને તેના પરથી સાબિત કરેલા પ્રમેયો પરસ્પર વિરોધાભાસી ના હોય તો સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખું સુસંગત કહેવાય.
- આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય રેખા હોય છે.
- બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ સામાન્ય બિંદુ ન હોઈ શકે.
- **પ્લેફેર (playfair)** ની પૂર્વધારણા (યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાન)

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 6 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : યુક્લિડનું બીજું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (ધોરણ-IX ના પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલ ક્રમ અનુસાર)

(A) એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.

(B) સમાનમાં સમાન ઉમેરીએ તો શેષફળ સમાન રહે.

(C) સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ તો શેષફળ સમાન રહે.

(D) એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન રહે.

ઉકેલ : જવાબ (B)

ઉદાહરણ 2 : યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા કઈ છે ?

(A) આખું તેના ભાગ કરતા મોટું હોય છે.

(B) કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈ પણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.

(C) બધા જ કાટખૂણા એકબીજાને સમાન થાય.

(D) જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતાં તે એકબીજીને છેદે છે.

ઉકેલ : જવાબ (D)

ઉદાહરણ 3 : સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને .... હોય છે.

(A) સમાન (B) અસમાન

(C) સમાન વસ્તુઓના અડધા (D) સમાન વસ્તુઓના બમણાં

ઉકેલ : જવાબ (A)

ઉદાહરણ 4 : સ્વયંસિદ્ધ સત્યો .... સંકલ્પનાઓ છે.

(A) ગણિતશાસ્ત્રની બધી જ શાખાઓ માટે વૈશ્વિક સત્ય (B) ફક્ત ભૂમિતિ માટે વૈશ્વિક સત્ય

(C) પ્રમેયો (D) વ્યાખ્યાઓ

ઉકેલ : જવાબ (A)

ઉદાહરણ 5 : જ્હોનની ઉંમર અને મોહનની ઉંમર સમાન છે. રામની ઉંમર પણ મોહનની ઉંમર જેટલી જ છે. જ્હોન અને રામની ઉંમર વચ્ચેનો સંબંધ સ્પષ્ટ કરતું યુક્લિડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય કયું છે ?

(A) પહેલું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (B) બીજું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (C) ત્રીજું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (D) ચોથું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય

ઉકેલ : જવાબ (A)

ઉદાહરણ 6 : બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા એવી રીતે છેદે છે જેથી આ છેદિકા રેખાની કોઈ એક બાજુ તરફના અંતઃકોણોનો સરવાળો 120° થાય તો પ્રથમ બે રેખાઓને અનંત સુધી લંબાવતાં તેઓ ત્રીજી રેખાની એ બાજુ તરફ પરસ્પર છેદશે જ્યાં અંતઃકોણોનો સરવાળો .... હોય.

(A) 120° થી ઓછો (B) 120° થી મોટો (C) 120° (D) 180° થી મોટો

ઉકેલ : જવાબ (C)

સ્વાધ્યાય 5.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 22 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

1. ઘન પદાર્થથી બિંદુઓ સુધીનાં ત્રણ ચરણ .... છે.

(A) ઘન પદાર્થ - સમતલ - રેખાઓ - બિંદુઓ (B) ઘન પદાર્થ - રેખાઓ - સમતલ - બિંદુઓ

(C) રેખાઓ - બિંદુઓ - સમતલ - ઘન પદાર્થ (D) રેખાઓ - સમતલ - બિંદુઓ - ઘન પદાર્થ

2. ઘન પદાર્થનું પરિમાણ .... હોય છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

3. સમતલનું પરિમાણ .... હોય છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

4. બિંદુનું પરિમાણ .... હોય છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. યુક્લિડે તેના પ્રસિદ્ધ ગ્રંથ '*Elements*' નું .... માં વિભાજન કર્યું.

(A) 13 પ્રકરણ (B) 12 પ્રકરણ (C) 11 પ્રકરણ (D) 9 પ્રકરણ

6. '*Elements*' માં અનુમાનિત સાધ્યની કુલ સંખ્યા .... છે.

(A) 465 (B) 460 (C) 13 (D) 55

7. ઘન પદાર્થની સીમાઓને .... કહે છે.

(A) પૃષ્ઠ (B) વક્ર (C) રેખા (D) બિંદુ

8. પૃષ્ઠની સીમાને .... કહે છે.

(A) પૃષ્ઠ (B) વક્ર (C) રેખા (D) બિંદુ

9. સિંધુખીણની સંસ્કૃતિમાં (અંદાજે ઈ.પૂ. 3000) બાંધકામમાં ઉપયોગમાં લેવાતી ઈંટોનાં પરિમાણનો ગુણોત્તર .... હતો.

(A) 1 : 3 : 4 (B) 4 : 2 : 1 (C) 4 : 4 : 1 (D) 4 : 3 : 2

10. જેનો પાયો .... એવી એક ઘન આકૃતિ પેન્સિલ છે.

(A) માત્ર ત્રિકોણ (B) માત્ર ચોરસ (C) માત્ર લંબચોરસ (D) કોઈ પણ બહુકોણ

11. પિરામિડની બાજુની સપાટીઓ .... હોય છે.

(A) ત્રિકોણ (B) ચોરસ (C) બહુકોણ (D) સમલંબ

12. આપણે જાણીએ છીએ કે જો $x + y = 10$ હોય, તો $x + y + z = 10 + z$ થાય. યુક્લિડનું .... સ્વયંસિદ્ધ સત્ય આ વિધાનને દર્શાવે છે.

(A) પ્રથમ (B) દ્વિતીય (C) તૃતીય (D) ચતુર્થ

13. પ્રાચીન ભારતમાં ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે વપરાતી વેદીનો આકાર .... હતો.

(A) ચોરસ અને વર્તુળાકાર (B) ત્રિકોણ અને લંબચોરસ (C) સમલંબ અને પિરામિડ (D) લંબચોરસ અને ચોરસ

14. શ્રીયંત્ર (અથર્વવેદમાં આપેલ) એ અંદરોઅંદર ગૂંથાયેલા .... સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણોનું સંયોજન છે.

(A) સાત (B) આઠ (C) નવ (D) અગિયાર

15. ગ્રીસવાસીઓની રુચિ .... માં હતી.

(A) તાર્કિક તર્ક (B) અનુમાનિત તર્ક

(C) A અને B બંને (D) ભૂમિતિના વ્યાવહારિક ઉપયોગ

16. પ્રાચીન ભારતમાં લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબના સંયોજનથી બનાવવામાં આવેલ વેદી .... માટે વપરાતી હતી.

(A) જાહેર પૂજા (B) ગૃહસ્થ કર્મકાંડ

(C) A અને B બંને (D) A, B અને C માંથી એકપણ નહિ

17. યુક્લિડ .... દેશના હતા.

(A) બેબીલોનિયા (B) ઈજિપ્ત (C) ગ્રીસ (D) ભારત

18. થેલ્સ .... દેશના હતા.

(A) બેબીલોનિયા (B) ઈજિપ્ત (C) ગ્રીસ (D) રોમ

19. પાયથાગોરસ, ... ના વિદ્યાર્થી હતા.

(A) થેલ્સ (B) યુક્લિડ (C) A અને B બંને (D) આર્કિમીડીઝ

20. નીચેનામાંથી .... ને સાબિતીની જરૂર છે.

(A) પ્રમેય (B) સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (C) વ્યાખ્યા (D) પૂર્વધારણા

21. યુક્લિડ .... સ્વરૂપમાં કહ્યું કે બધા કાટખૂણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

(A) સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (B) વ્યાખ્યા (C) પૂર્વધારણા (D) સાબિતી

22. 'છેદતી ન હોય તેવી રેખાઓ સમાંતર હોય છે' આ વિધાન ...... સ્વરૂપમાં છે.

(A) સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (B) વ્યાખ્યા (C) પૂર્વધારણા (D) સાબિતી

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

(i) પિરામિડ એક ઘન આકૃતિ છે. તેનો પાયો ત્રિકોણ, ચોરસ કે અન્ય બહુકોણ હોય છે અને તેની બાજુની સપાટીઓ ઉપરનું કોઈ એક બિંદુ શિરોબિંદુ હોય, તેવા સમબાજુ ત્રિકોણો બનાવે છે.

(ii) વૈદિક કાળમાં ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે ચોરસ અને વર્તુળાકાર વેદીઓનો ઉપયોગ થતો હતો અને જાહેર પૂજા સ્થળો માટે લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબ ચતુષ્કોણના સંયોજનથી બનતા આકારની વેદીઓ વપરાતી હતી.

(iii) ભૂમિતિમાં આપણે બિંદુ, રેખા અને સમતલને અવ્યાખ્યાયિત પદ તરીકે લઈએ છીએ.

(iv) જો એક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એક લંબચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય અને આ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કોઈ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પણ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય.

(v) યુક્લિડનું ચોથું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એવું બતાવે છે કે કોઈ પણ વસ્તુ પોતાને સમાન હોય છે.

(vi) યુક્લિડીય ભૂમિતિ માત્ર એક જ સમતલમાં બનતી આકૃતિઓ માટે જ માન્ય છે.

ઉકેલ :(i) અસત્ય : પિરામિડની બાજુની સપાટીઓ ત્રિકોણ હોય છે, પરંતુ તે સમબાજુ ત્રિકોણ જ હોય તે જરૂરી નથી.

(ii) સત્ય : વૈદિકકાળમાં ભૂમિતિનો ઉદ્ભવ પૂજા માટેની જરૂરી વિવિધ પ્રકારની વેદીઓ અને અગ્નિકુંડોના નિર્માણ કાર્યથી થયો હતો. પવિત્ર અગ્નિને વધુ પ્રભાવશાળી બનાવવા માટે તેના સ્થાન, આકાર અને ક્ષેત્રફળની બાબતમાં સ્પષ્ટ રીતે નક્કી થયેલ આદેશોનું પાલન થતું હતું.

(iii) સત્ય : ભૂમિતિમાં બિંદુ, રેખા અને સમતલને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે અનેક વસ્તુઓને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર પડે છે અને કોઈ અંત વગરની વ્યાખ્યાઓની લાંબી શૃંખલા પ્રાપ્ત થઈ શકે છે. આ કારણથી ગણિતશાસ્ત્રીઓને કેટલાંક ભૌમિતિક પદોને અવ્યાખ્યાયિત માની લેવામાં આવે એ સુવિધાજનક લાગ્યું.

(iv) સત્ય : એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય.

(v) સત્ય : આ એકબીજાની ઉપર મૂકવાના સિદ્ધાંતની તર્કસંગતતા પ્રગટ કરે છે.

(vi) સત્ય : વક્રસપાટીમાં તે નિષ્ફળ જાય છે. ઉદાહરણ તરીકે વક્ર સપાટી પર રહેલા ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો $180°$ થી વધુ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય 5.2

નીચે આપેલ વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

1. યુક્લિડીય ભૂમિતિ માત્ર વક્રસપાટી માટે જ માન્ય છે.

2. ઘન પદાર્થની સીમાઓ વક્ર હોય છે.

3. પૃષ્ઠની સીમાઓ વક્ર હોય છે.

4. સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

5. જો કોઈ રાશિ B કોઈ અન્ય રાશિ A નો એક ભાગ હોય, તો રાશિ A ને રાશિ B અને એક અન્ય રાશિ C ના સરવાળાના રૂપમાં લઈ શકાય છે.

6. સાબિત કરી શકાય તેવા વિધાનને પૂર્વધારણા કહે છે.

7. ''દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P માટે એક અનન્ય રેખા m એવી હોય છે જે P માંથી પસાર થાય છે અને l ને સમાંતર છે.'' આ વિધાન પ્લેફેરની પૂર્વધારણા તરીકે જાણીતું છે.

8. બે છેદતી ભિન્ન રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર ન હોઈ શકે.

9. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને અન્ય પૂર્વધારણાઓ અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની સહાયતાથી સાબિત કરવાના પ્રયત્નોને કારણે અન્ય ભૂમિતિઓની શોધ થઈ.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : રામ અને રવીનાં વજન સમાન છે. હવે, જો આ બંનેમાં પ્રત્યેકના વજનમાં 2 કિગ્રાનો વધારો થાય તો તેમનાં નવા વજનની સરખામણી કેવી રીતે થશે ?

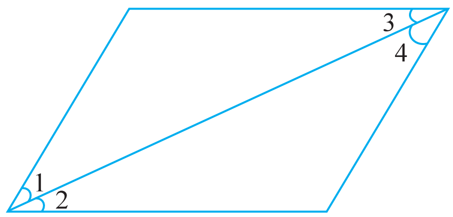
ઉકેલ : ધારો કે રામ અને રવી પ્રત્યેકનું વજન x કિગ્રા છે. હવે વજનમાં 2 કિગ્રાનો વધારો થતાં રામ અને રવી પ્રત્યેકનું વજન $(x + 2)$ થશે. હવે યુક્લિડના બીજા સ્વયંસિદ્ધ સત્ય પ્રમાણે, સરખામાં સરખું ઉમેરીએ તો પરિણામ સરખા રહે. આમ રામ અને રવીનાં વજન પુનઃ સમાન થાય.

ઉદાહરણ 2 : સમીકરણ $a - 15 = 25$ નો ઉકેલ મેળવો અને કહો કે આ ઉકેલ મેળવવા કયા સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ થયો.

ઉકેલ : $a - 15 = 25$. બંને બાજુ 15 ઉમેરતાં, આપણને $a - 15 + 15 = 25 + 15 = 40$ મળે (યુક્લિડનાં બીજા સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરતાં)

અથવા $a = 40$

ઉદાહરણ 3 : આપેલ આકૃતિ 5.1 માં $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ અને $\angle 3 = \angle 4$ હોય તો યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરી $\angle 1$ અને $\angle 2$ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવો.

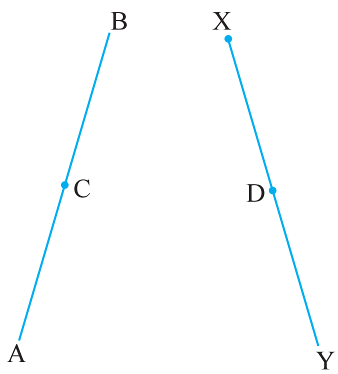


આકૃતિ 5.1

ઉકેલ : અહીં, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 3$ અને $\angle 2 = \angle 4$ આપેલ છે. યુક્લિડના પહેલા સ્વયંસિદ્ધ સત્ય પ્રમાણે એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય.

માટે $\angle 1 = \angle 2$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 5.2 માં AC = XD આપેલ છે. બિંદુ C એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને બિંદુ D, XY નું મધ્યબિંદુ છે. યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે AB = XY થાય.



આકૃતિ 5.2

ઉકેલ : AB = 2 AC (બિંદુ C, AB નું મધ્યબિંદુ છે.)

XY = 2 XD (બિંદુ D, XY નું મધ્યબિંદુ છે.)

અને AC = XD (આપેલ છે.)

માટે AB = XY કારણ કે સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

સ્વાધ્યાય 5.3

યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનો ઉપયોગ કરી નીચે આપેલ પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવો :

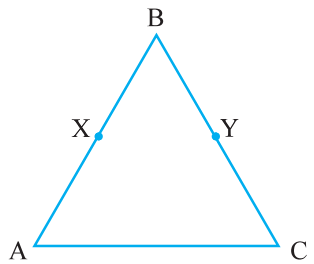
1. બે સેલ્સમેનનું ઓગસ્ટ માસનું વેચાણ સમાન હતું. સપ્ટેમ્બર માસમાં પ્રત્યેક સેલ્સમેને તેમનું વેચાણ તેમના ઓગસ્ટ માસના વેચાણ કરતાં બમણું કર્યું. સપ્ટેમ્બર માસમાં તેમણે કરેલા વેચાણની સરખામણી કરો.

2. જો $x + y = 10$ અને $x = z$ આપેલ હોય, તો સાબિત કરો કે $z + y = 10$.

3. આકૃતિ 5.3 જુઓ અને સાબિત કરો કે AH > AB + BC + CD

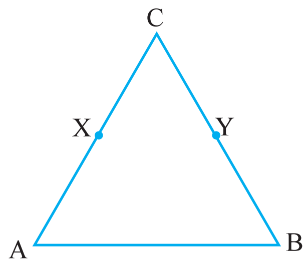
આકૃતિ 5.3

4. આકૃતિ 5.4 માં, AB = BC તથા BX = BY આપેલ છે, તો સાબિત કરો કે AX = CY



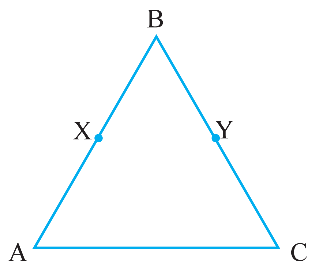
આકૃતિ 5.4

5. આકૃતિ 5.5 માં, X અને Y અનુક્રમે AC અને BC નાં મધ્યબિંદુઓ છે અને AX = CY, તો સાબિત કરો કે AC = BC.



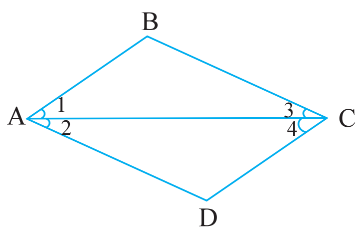
આકૃતિ 5.5

6. આકૃતિ 5.6 માં, BX = $\frac{1}{2}$ AB, BY = $\frac{1}{2}$ BC અને AB = BC આપેલ છે, તો સાબિત કરો કે BX = BY.



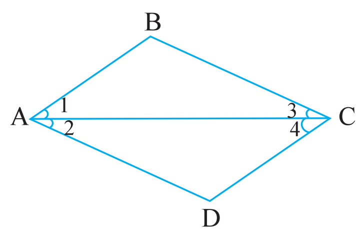
આકૃતિ 5.6

7. આકૃતિ 5.7 માં, ∠1 = ∠2, ∠2 = ∠3 આપેલ છે, તો સાબિત કરો કે ∠1 = ∠3



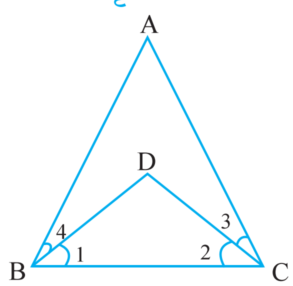
આકૃતિ 5.7

8. આકૃતિ 5.8 માં, ∠1 = ∠3 અને ∠2 = ∠4 આપેલ છે, તો સાબિત કરો કે ∠A = ∠C.



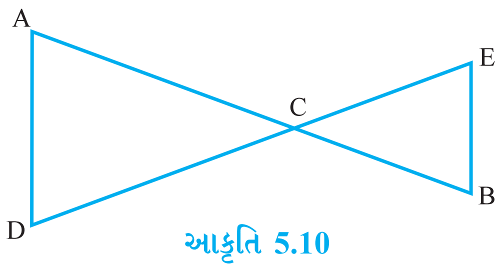
આકૃતિ 5.8

9. આકૃતિ 5.9 માં, ∠ABC = ∠ACB અને ∠3 = ∠4 આપેલ છે, તો સાબિત કરો કે ∠1 = ∠2.



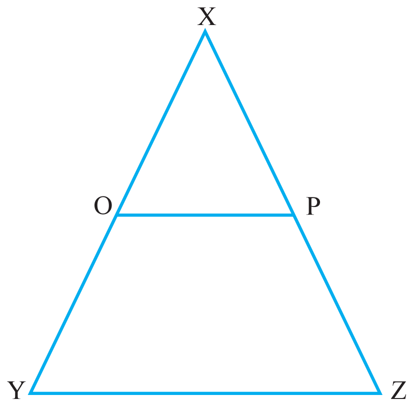
આકૃતિ 5.9

10. આકૃતિ 5.10 માં, AC = DC, CB = CE આપેલ છે, તો સાબિત કરો કે AB = DE.



આકૃતિ 5.10

11. આકૃતિ 5.11 માં, જો $OX = \frac{1}{2} XY$, $PX = \frac{1}{2} XZ$ અને OX = PX હોય, તો સાબિત કરો કે XY = XZ.

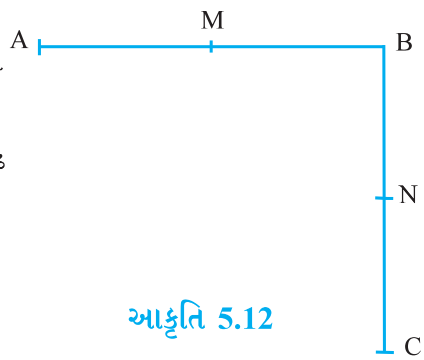


આકૃતિ 5.11

12. આકૃતિ 5.12 માં,

(i) જો AB = BC, બિંદુ M એ AB નું મધ્યબિંદુ હોય અને બિંદુ N એ BC નું મધ્યબિંદુ હોય, તો સાબિત કરો કે AM = NC.

(ii) જો BM = BN તથા બિંદુ M એ AB નું મધ્યબિંદુ હોય અને બિંદુ N એ BC નું મધ્યબિંદુ હોય, તો સાબિત કરો કે AB = BC.



આકૃતિ 5.12

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ વિધાનને વાંચો :

"ચોરસ, ચાર રેખાખંડોથી બનતો એવો બહુકોણ છે જેમાં ત્રણ રેખાખંડોની લંબાઈ ચોથા રેખાખંડની લંબાઈને સમાન હોય અને તેના બધા જ ખૂણા કાટખૂણા હોય."

ઉપરોક્ત વ્યાખ્યામાં તમને જરૂરી લાગતાં પદોને વ્યાખ્યાયિત કરો. શું તેમાં કોઈ અવ્યાખ્યાયિત પદો છે ? શું તમે ચકાસી શકશો કે ચોરસના બધા જ ખૂણા અને બાજુઓ સમાન હોય છે ?

ઉકેલ : વ્યાખ્યાયિત કરવા જરૂરી હોય તેવાં પદ :

બહુકોણ : ત્રણ અથવા વધુ રેખાખંડોથી બનતી સાદી બંધ આકૃતિ.

રેખાખંડ : બે અંત્યબિંદુ ધરાવતો રેખાનો એક ભાગ.

રેખા : અવ્યાખ્યાયિત પદ

બિંદુ : અવ્યાખ્યાયિત પદ

ખૂણો : સમાન ઉદ્‌ભવબિંદુ ધરાવતાં બે કિરણોથી બનતી આકૃતિ.

કિરણ : એક અંત્યબિંદુ ધરાવતો રેખાનો એક ભાગ.

કાટખૂણો : 90° માપનો ખૂણો.

ઉલ્લેખ થયેલ અવ્યાખ્યાયિત પદો : રેખા, બિંદુ

યુક્લિડની ચોથી પૂર્વધારણા પ્રમાણે ‘‘બધા જ કાટખૂણા એકબીજાને સમાન હોય છે.’’

ચોરસમાં બધા જ ખૂણા કાટખૂણા છે, માટે બધા જ ખૂણાઓ સમાન હોય છે. (યુક્લિડની પૂર્વધારણા 4 પરથી)

ત્રણ રેખાખંડોની લંબાઈ ચોથા રેખાખંડની લંબાઈને સમાન આપેલ છે. માટે, ચોરસની ચારેય બાજુઓ સમાન છે. (યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્ય-1 પ્રમાણે ‘‘એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.’’)

સ્વાધ્યાય 5.4

1. નીચે આપેલ વિધાન વાંચો :

‘‘સમબાજુ ત્રિકોણ ત્રણ રેખાખંડોથી બનતો એવો બહુકોણ છે જેમાં બે રેખાખંડોની લંબાઈ ત્રીજા રેખાખંડની લંબાઈ જેટલી હોય અને તેના બધા જ ખૂણાનું માપ 60° હોય.’’

ઉપરોક્ત વ્યાખ્યામાં ઉલ્લેખ થયેલ તમને જરૂરી લાગતાં પદોને વ્યાખ્યાયિત કરો. શું તેમાં કોઈ અવ્યાખ્યાયિત પદ છે ? તમે ચકાસી શકશો કે સમબાજુ ત્રિકોણના બધા જ ખૂણા અને બાજુઓ સમાન હોય છે ?

2. નીચે આપેલ વિધાનનો અભ્યાસ કરો :

સમતલમાં ‘‘બે છેદતી ભિન્ન રેખાઓ તે જ સમતલની એક જ રેખાને લંબ ન હોઈ શકે.’’ આપેલ વિધાન, યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાન છે કે નહિ તે ચકાસો. (**સૂચન :** ઉપરોક્ત વિધાનમાં બે છેદતી રેખાઓને l અને m તથા અન્ય એક રેખાને n તરીકે લો)

3. નીચે આપેલાં વિધાનો પૂર્વધારણાઓ તરીકે લો :

(i) જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો, અનુકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય તે જરૂરી નથી.

(ii) જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો, અંતઃયુગ્મકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.

શું આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખું સુસંગત છે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

4. નીચે આપેલ વિધાનોને પૂર્વધારણાઓ તરીકે લો :

(i) પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણોનાં માપ અસમાન હોય છે.

(ii) જે કિરણનું ઉદ્ભવબિંદુ રેખા પર હોય તે કિરણ અને રેખાથી બનતા બંને ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે. શું આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખું સુસંગત છે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

5. નીચેની પૂર્વધારણાઓ વાંચો :

(i) એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.

(ii) સમાનમાં સમાન ઉમેરીએ તો શેષફળ સમાન રહે.

(iii) સમાન વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખુ સુસંગત છે કે નહિ તે ચકાસો.