1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + p, & x \le 1 \\ qx + 2, & x > 1 \end{cases}$ **જો $f(x)$ એ $x = 1$ માટે વિકલનીય હોય તો p તથા q મેળવો.**

➡ અહીં, $f(x)$ એ $x = 1$ માટે વિકલનીય છે.

$\therefore$ $f(x)$ એ $x = 1$ માટે સતત પણ હોય.

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

હવે $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + 3x + p$

$= 1 + 3 + p$

$= 4 + p$ ....(i)

અને $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 9x + 2$

$= 9 + 2$ ....(ii)

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

$\therefore 4 + p = q + 2$

$\therefore p - q + 2 = 0$ ....(A)

અહીં, $f(x)$ એ $x = 1$ માટે વિકલનીય છે.

$\therefore$ જ.બા.નું વિકલિત = ડા.બા.નું વિકલિત

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{qx - 2 - (4 + p)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 3x + p - (4 + p)}{x - 1}$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{qx - (2 + p)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{qx - a}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x + 4)(x - 1)}{x - 1}$ ($\because$ પરિણામ (i) પરથી $2 + p = q$ થાય.)

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{q(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} x + 4$

$\therefore q = 1 + 4$

$\therefore q = 5$

પરિણામ (i) માં $q = 5$ મૂકતાં $p = 3$ મળે.

$\therefore p = 3$ અને $q = 5$ જરૂરી મૂલ્યો છે.

2. **જો $x^m \cdot y^n = (x + y)^{m+n}$ હોય તો સાબિત કરો કે, (i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ અને (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$.**

➡ (i) $x^m \cdot y^n = (x + y)^{m+n}$

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\log(x^m \cdot y^n) = \log(x + y)^{m+n}$

$\therefore \log x^m + \log y^n = (m + n) \log(x + y)$

$\therefore m \log x + n \log y = (m + n) \log(x + y)$ (લઘુગુણકના કાર્યનિયમ મુજબ)

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{m+n}{x+y}\right)\left(\frac{d}{dx}(x+y)\right)$$

$$= \frac{m+n}{x+y}\left(1 + \frac{d}{dx}\right)$$

$$= \frac{m+n}{x+y} + \left(\frac{m+n}{x+y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \left(\frac{n}{y} - \frac{m+n}{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y} - \frac{m}{x}$$

$$\therefore \left(\frac{nx+ny-my-ny}{(x+y)y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{mx+nx-mx-my}{x(x+y)}$$

$$\therefore \left(\frac{nx-my}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{nx-my}{x} \qquad \text{.........(i)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

જે માગેલ પરિણામ છે.

➡ **(i)** $x^m \cdot y^n = (x+y)^{m+n}$

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\log(x^m \cdot y^n) = \log(x+y)^{m+n}$

$\therefore \log x^m + \log y^n = (m+n)\log(x+y)$

$\therefore m\log x + n\log y = (m+n)\log(x+y)$ (લઘુગુણકના કાર્યનિયમ મુજબ)

હવે બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{m}{x} + \frac{n}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{m+n}{x+y}\right)\left(\frac{d}{dx}(x+y)\right)$$

$$= \frac{m+n}{x+y}\left(1 + \frac{d}{dx}\right)$$

$$= \frac{m+n}{x+y} + \left(\frac{m+n}{x+y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \left(\frac{n}{y} - \frac{m+n}{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y} - \frac{m}{x}$$

$$\therefore \left(\frac{nx+ny-my-ny}{(x+y)y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{mx+nx-mx-my}{x(x+y)}$$

$$\therefore \left(\frac{nx-my}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{nx-my}{x} \qquad \text{.........(i)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

જે માગેલ પરિણામ છે.

3. જો $y = \sin pt,\ x = \sin t$ તો સાબિત કરો કે $(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0$

➡ $y = \sin pt$ અને $x = \sin t$

$\therefore \dfrac{dy}{dt} = p\cdot\cos(pt)$ અને $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$

$\therefore \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ (પ્રાચલ વિધેયનું વિકલન માટેનો નિયમ)

$$y_1 = \frac{p\cos(pt)}{\cos t}$$

$\therefore y_1\cos t = p\cos pt$

$\therefore y_1\sqrt{1-\sin^2 t} = p\sqrt{1-\sin^2(pt)}$

$\therefore\ y_1\sqrt{1-x^2} = p\sqrt{1-y^2}$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં, $y_1^2(1 - x^2) = p^2(1 - y^2)$

ફરીવાર x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore\ (1 - x^2)\cdot 2y_1y_2 - y_1^2\cdot 2x = p^2(-2yy_1)$

$\therefore\ 2y_1\ [(1 - x^2)y_2 - y_1x] = -p^2y\cdot 2y_1$

$\therefore\ (1 - x^2)y_2 - xy_1 = -p^2y$

4. $y = x^{\tan x} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$ **માટે** $\dfrac{dy}{dx}$ **મેળવો.**

➡ $y = x^{\tan x} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$

$\therefore\ y = u + v$ લેતાં,

જ્યાં $u = x^{\tan x}$ અને $v = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$ ....(i)

$\therefore\ u = x^{\tan x}$

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\therefore\ \log u = \log (x^{\tan x})$

$\therefore\ \log u = \tan x \cdot \log x$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore\ \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \log x$

$\therefore\ \dfrac{du}{dx} = u\left(\dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \log x\right)$

$\therefore\ \dfrac{du}{dx} = x^{\tan x}\left(\dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \log x\right)$ ....(ii)

તેમજ $v = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$

$\therefore\ v^2 = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$

➡ $y = x^{\tan x} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$

$\therefore\ y = u + v$ લેતાં,

જ્યાં $u = x^{\tan x}$ અને $v = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$ ....(i)

$\therefore\ u = x^{\tan x}$

બંને બાજુ e ના આધારનો log લેતાં,

$\therefore\ \log u = \log (x^{\tan x})$

$\therefore\ \log u = \tan x \cdot \log x$

હવે x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\therefore\ \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \log x$

$\therefore\ \dfrac{du}{dx} = u\left(\dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \log x\right)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = x^{\tan x}\left(\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \log x\right) \quad \text{........(ii)}$$

તેમજ $v = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{2}}$

$$\therefore v^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$