ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ / 1211 / 414 / છ, તા. 11-4-2011 - થી મંજૂર

ભૌતિકવિજ્ઞાન

ધોરણ 11

(સિમેસ્ટર I)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382 010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે.
આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

લેખન
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર (કન્વીનર)
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. એ. પી. પટેલ
ડૉ. ડી. એચ. ગદાણી
શ્રી પંકજ જે. ચાવડા

અનુવાદ
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. એ. પી. પટેલ
ડૉ. ડી. એચ. ગદાણી
શ્રી પંકજ જે. ચાવડા

સમીક્ષા
શ્રી જયેશ જી. ત્રિવેદી
શ્રી મુકેશ એસ. ભટ્ટ
શ્રી દિનેશભાઈ વી. સુથાર
શ્રી રજનીકાન્ત એન. ચૌધરી
શ્રી જયેન્દ્રકુમાર પી. જોષી
શ્રી એસ. જી. પટેલ
શ્રી વાસુદેવ બી. રાવલ
શ્રી મયૂરભાઈ એમ. રાવલ
શ્રી જયંતિભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી જયેશ ડી. દરજીવાલા. વી. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી ઓ. બી. દવે

ચિત્રાંકન
શ્રી જી. વી. મેવાડા

સંયોજન
શ્રી ચિરાગ એચ. પટેલ
(વિષય-સંયોજક : ભૌતિકવિજ્ઞાન)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

કૉર-કરિક્યુલમ અને એન. સી. ઈ. આર. ટી. દ્વારા એન. સી. એફ. 2005 મુજબ તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બૉર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11** ના **સિમેસ્ટર I** ના **ભૌતિકવિજ્ઞાન** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

આ મૂળ અંગ્રેજીમાં લખાયેલ પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતી અનુવાદ છે. ગુજરાતી અનુવાદની વિષય અને ભાષાના નિષ્ણાતો દ્વારા સમીક્ષા કરવામાં આવી છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે; તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત
નિયામક
તા.3-3-2015

ડૉ. નીતિન પેથાણી
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2011, પુનઃમુદ્રણ : 2011, 2012, 2013, 2014
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી **ડૉ. ભરત પંડિત**, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

* ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

1. ભૌતિક જગત 1-10

2. માપન તથા એકમપદ્ધતિ 11-33

3. સુરેખપથ પર ગતિ 34-65

4. સમતલમાં ગતિ 66-99

5. ગતિના નિયમો 100-130

6. કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર 131-149

7. ઉષ્મા-પ્રસરણ 150-165

8. વાયુનો ગતિવાદ 166-180

- ઉકેલ 181-194
- પરિશિષ્ટ 195-198
  - પરિશિષ્ટ 1 : ગ્રીક મૂળાક્ષરો
  - પરિશિષ્ટ 2 : કેટલાક અગત્યના અચળાંકો
  - પરિશિષ્ટ 3 : ત્રિકોણમિતિ
  - ભૌમિતિક સૂત્રો 199
- સંદર્ભ ગ્રંથો 200
- લઘુગુણકો 201-204

પ્રકરણ 1

ભૌતિક જગત

1.1 પ્રસ્તાવના

1.2 ભૌતિકવિજ્ઞાન - કાર્યક્ષેત્ર અને ઉત્તેજના

1.3 ભૌતિક વિજ્ઞાન, ટેક્નોલૉજી અને સમાજ

1.4 કુદરતમાં મૂળભૂત બળો

1.5 ભૌતિકવિજ્ઞાનના નિયમોની પ્રકૃતિ

- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

1.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, ભૌતિકવિજ્ઞાનના આ પ્રથમ તાસમાં આપ સર્વેનું સ્વાગત છે. ધોરણ 10 સુધીના વિજ્ઞાન વિષય અંતર્ગત તમે પ્રકાશ, વિદ્યુત, ચુંબકત્વ, ગતિ, બળ, ગુરુત્વાકર્ષણ, ઉષ્મા, ઊર્જા, તરંગ, ધ્વનિ, બ્રહ્માંડ વગેરે વિશે પ્રાથમિક ખ્યાલ મેળવ્યો. આ વિષયવસ્તુઓનો સમાવેશ ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં થાય છે.

હવે તમને પ્રશ્ન એ ઉદ્ભવે કે **ભૌતિક વિજ્ઞાન એટલે શું ?** વિદ્યાર્થીમિત્રો ભૌતિકવિજ્ઞાન એ પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાનોની શ્રેણીનો પાયાનો વિષય છે. ભૌતિક વિજ્ઞાન એ કુદરતને સમજવાનું વિજ્ઞાન છે. સંસ્કૃત શબ્દ **'ભૌતિકી'** પરથી ભૌતિક જગતને લગતા વિજ્ઞાન માટે **'ભૌતિક વિજ્ઞાન'** શબ્દનો ઉપયોગ થયો. કુદરતના મૂળભૂત નિયમોના અભ્યાસ તથા વિવિધ પ્રાકૃતિક ઘટનાઓમાં તેની અભિવ્યક્તિ રજૂ કરતું વિજ્ઞાન એટલે ભૌતિક વિજ્ઞાન. આપણી આસપાસના વિશ્વને જાણવાની જિજ્ઞાસા આપણામાં સદાયથી રહેલી છે. આ જ જિજ્ઞાસા અને કુતૂહલથી માનવીએ ભૌતિક પર્યાવરણને સાવધાનીપૂર્વક અવલોકિત કર્યું, પ્રાકૃતિક ઘટનાઓમાં અર્થપૂર્ણ વ્યવસ્થા અને સંબંધ શોધ્યા તથા હજી પણ તેમાં ખેડાણ ચાલુ જ રાખ્યું. આ સર્વે પ્રયાસોનાં તારણો, તથ્યો, સિદ્ધાંતો વગેરેથી સભર છે ભૌતિક વિજ્ઞાન. તમને અહીં એ પણ જણાવીએ કે અંગ્રેજીમાં ભૌતિક વિજ્ઞાન માટે વપરાતો શબ્દ **'Physics' (ફિઝિક્સ)** એ 'પ્રકૃતિ' એવો અર્થ ધરાવતા ગ્રીક શબ્દ **'Physics'** પરથી આવ્યો છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં ગણિતનો બહોળો ઉપયોગ થાય છે. ગાણિતીક સિદ્ધાંતો, સૂત્રો કે ગાણિતીક રચનાઓ એ ભૌતિક વિજ્ઞાનનું અભિન્ન અંગ છે. એક પ્રચલિત ઉક્તિ પ્રમાણે **"ભૌતિક વિજ્ઞાન એ વિજ્ઞાનનો રાજા છે, જ્યારે ગણિત એ રાણી છે" (Physics is a king of science while mathematics is a queen).** કોઈ ભૌતિક ઘટના અંગે મેળવેલ ગાણિતિય નિરૂપણો એ માત્ર તે ભૌતિક ઘટના તર્કબદ્ધ સમજાવે છે તેટલું જ નથી, પરંતુ આવી ઘટનાઓ પરથી બીજી ઘણી બાબતોનું ભવિષ્યકથન પણ કરી શકાય છે. માનવીની ઉત્પત્તિથી અત્યાર સુધીની આપણી ભૌતિક સુવિધાઓ પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનને આભારી છે.

1.2 ભૌતિક વિજ્ઞાન-કાર્યક્ષેત્ર અને ઉત્તેજના (Physics - Scope and Excitement)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, વર્ગખંડમાં શિક્ષક બોલે છે અને તમને સંભળાય છે. શું તમે આ ઘટનાનું વિશ્લેષણ કોઈ વાર કર્યું છે ખરું ?

શિક્ષક જ્યારે બોલે છે ત્યારે ધ્વનિ કેવી રીતે ઉત્પન્ન થાય છે ?

ઉત્પન્ન થયેલ ધ્વનિ વર્ગખંડમાં કેવી રીતે પ્રસરે છે ?

પ્રસરણ પામેલ ધ્વનિ આપના કાન દ્વારા કેવી રીતે ઝિલાય છે ?

તે જ રીતે ઋતુચક્રો, ગ્રહણો, ભરતી-ઓટ, દિવસ-રાત્રિનું નિયમિત પુનરાવર્તન, રાત્રે આકાશમાં ચમકતા ખગોળીય પદાર્થો વગેરે વિશે પણ કોઈ વાર વિચાર કર્યો છે ?

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં (i) આપણે કુદરતમાં બનતી કે રોજિંદા જીવનમાં બનતી આવી ઘટનાઓ માત્ર નિહાળતા જ નથી પણ સુનિયોજિત, શ્રેણીબદ્ધ અવલોકનોમાંથી મળતી કોઈ ચોક્કસ વ્યવસ્થા શોધવાની છે.

(ii) આવી ઘટનાઓમાં સંકળાયેલી રાશિઓને સુસ્પષ્ટ અને અર્થસભર રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવાની છે.

(iii) આવા અભ્યાસોમાંથી કુદરતના નિયમો કે સિદ્ધાંતોને તારવવાના છે અને

(iv) આમ તારવેલા નિયમો કે સિદ્ધાંતોને વ્યાપક ફલક પર ચકાસવાના છે.

બ્રહ્માંડના બે મૂળભૂત ઘટકો એવા **દ્રવ્ય (Matter) અને વિકિરણ (Radiation)**નો અભ્યાસ, દ્રવ્ય અને વિકિરણના મૂળભૂત કણોની ઉત્પત્તિ, તેમની વચ્ચેની રસપ્રદ આંતરક્રિયાઓ, તેમની સાથે સંકળાયેલ કુદરતના નિયમો વગેરેનો અભ્યાસનો સમાવેશ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં થાય છે.

આ સૂક્ષ્માતિસૂક્ષ્મ કણોથી આગળ વધીએ, તો પરમાણુના ન્યુક્લિયસની વાતો આવે. અહીં ન્યુટ્રૉન, પ્રોટૉન, મેસોન ક્વાક, ગ્લુઓન વગેરે સાથે કામ લેવું પડે છે.તેમના કારણે રચાતા આશરે 10^{-14}m ત્રિજ્યાના ન્યુક્લિયસની ઊર્જાઓ, ન્યુક્લિયસમાં થતી સંક્રાંતિઓ, તેમને કારણે મળતાં વિકિરણો વગેરે ન્યુક્લિયર ભૌતિક વિજ્ઞાનને લગતી બાબતો છે.

ન્યુક્લિયસની આસપાસ કંઈક અંશે 10^{-10}mના ક્રમની ત્રિજ્યા ધરાવતી નિયત કક્ષામાં, નિયત સંખ્યા સાથે ઘૂમતા ઇલેક્ટ્રૉનનો, ઇલેક્ટ્રૉનની સંરચનાઓ, તેમની સંક્રાંતિઓ, તેમની આંતરક્રિયાઓ, તેમના વડે પરમાણુઓને મળતા વિશિષ્ટ ગુણધર્મો વગેરે બાબતોનો પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં સમાવેશ થાય છે.

પરમાણુઓ (Atoms) પણ પરસ્પર આંતરક્રિયાઓ કરે છે અને અણુઓની (Molecues) રચના કરે છે. આ પરમાણુઓ અણુમાં શાંત ન રહેતાં, તેઓ દોલનો કે ભ્રમણો કરતાં હોય છે. અણુઓ અને પરમાણુઓમાંથી ઉત્સર્જાતાં વિકિરણોના અભ્યાસ થકી આપણને તેમના બંધારણની સમજણ મળે છે. આવા ભૌતિક વિજ્ઞાન થકી રસાયણવિજ્ઞાનની પણ ઘણી બધી બાબતો સમજવા મળે છે.

અણુઓ અને પરમાણુઓ 'જથ્થાબંધ' રીતે ભેગા મળીને ભૌતિક પરિસ્થિતિ અનુસાર **વાયુ (Gas), પ્રવાહી (Liquid)** કે **ઘન (Solid)** પદાર્થ બનાવે છે. વળી, તાપમાન અને બીજી પરિસ્થિતિઓ અનુસાર દ્રવ્યનું ચોથું સ્વરૂપ **પ્લાઝ્મા (Plasma)** પણ મળે છે.ખૂબ જ ઉચ્ચ તાપમાને મળતી દ્રવ્યની પ્લાઝ્મા અવસ્થાએ માનવજાત માટે ઊર્જાના અખૂટ સ્રોતની આશા જન્માવી છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં પદાર્થોના યાંત્રિક, ઉષ્મીય, વિદ્યુતીય, ચુંબકીય અને પ્રકાશીય ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. વિદ્યાર્થીમિત્રો, તમે હવે સમજી શકશો કે આવા વિવિધ ગુણધર્મો જાણવા અને સમજવા યંત્રશાસ્ત્ર (Mechanics), થર્મોડાઇનેમિક્સ (Thermodynamics - ઉષ્માગતિકી), વિદ્યુત-ચુંબકીય (Electromagnetic), પ્રકાશશાસ્ત્ર (Optics), ઇલેક્ટ્રૉડાઇનામિક્સ (Electrodynamics - વિદ્યુતગતિકિ) જેવી ભૌતિક વિજ્ઞાનની શાખાઓ વિકસી.

યંત્રશાસ્ત્ર ન્યૂટનના ગતિના નિયમો નિયમ પર આધારિત છે. જે કણો, દૃઢ તથા વિરૂપણશીલ પદાર્થ વગેરેની ગતિ (Motion), બળ (Force), કાર્ય (Work) વગેરે સાથે સંબંધિત છે. ઇલેક્ટ્રૉડાઇનેમિક્સ એ વિદ્યુતભાર અને ચુંબકીય પદાર્થ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત અને ચુંબકિય ઘટનાઓ સાથે સંબંધિત છે. કુલંબ, ઑર્સ્ટેડ, ઍમ્પિયર, ફેરેડે, મેક્સવેલ જેવા ભૌતિકશાસ્ત્રીઓનું યોગદાન અહીં કેમ વિસરી જવાય !!!

ઑપ્ટિકલ ફાઇબર, ટેલિસ્કોપ અને માઇક્રોસ્કોપની કાર્ય પદ્ધતિ; પાતળા સ્તરથી પ્રદર્શિત થતાં રંગો, મેઘધનુષ્ય, મરીચિકા, અરીસા અને લેન્સથી રચાતાં પ્રતિબિંબો વગેરે જેવી ઘટનાઓની સમજૂતી પ્રકાશશાસ્ત્રમાં આવે છે.

થર્મોડાઇનામિક્સમાં બાહ્ય કાર્ય તથા ઉષ્મા પ્રસારણ વડે પ્રણાલીની આંતરિક ઊર્જા, તાપમાન, એન્ટ્રોપી વગેરેમાં થતાં ફેરફારનો સમાવેશ થાય છે. ઉષ્માયંત્રો અને રેફ્રિજરેટરની કાર્યદક્ષતા, ભૌતિક અને રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓની દિશા વગેરે નો અભ્યાસ થર્મોડાઇનામિક્સમાં કરવામાં આવે છે.

અનંત પરિમાણવાળા અવકાશની વાત પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં આવે. આવા અવકાશમાં ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સના ગાણિતીય કારકો અને તેમના સદિશો પરનાં ઑપરેશન અને તેમાંથી ફલિત થતી વાસ્તવિકતાઓ તો ખૂબ જ રસપ્રદ છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાન આટલેથી પૂરું થઈ જતું નથી. સૂર્ય અને તેના ગ્રહમંડળને લગતા અભ્યાસનો સમાવેશ પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં કરવામાં આવે છે. તારાવિશ્વો (Galaxies) અને તેના બંધારણો, તેમની વચ્ચેનાં અબજો પ્રકાશવર્ષોનાં અંતરો, તેમના

અબજો કિલોગ્રામ દ્રવ્યનાં વિતરણો, તારાવિશ્વો વચ્ચેના અવકાશો, જુદા-જુદા તારાઓની જીવનલીલાઓનો અભ્યાસ પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનની એક શાખા ખગોળશાસ્ત્ર (astrophysics-ઍસ્ટ્રોફિઝિક્સ) અંતર્ગત કરવામાં આવે છે.

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આમ આપણે જોયું કે ભૌતિક વિજ્ઞાનનો વિસ્તાર લગભગ 'શૂન્ય'થી 'અનંત' સુધીનો છે. ભૌતિક વિજ્ઞાન તો શૂન્ય અવકાશને પણ એક ચોક્કસ 'અવસ્થા' ગણાવે છે.

આમ, ભૌતિક વિજ્ઞાનનું કાર્યક્ષેત્ર લંબાઈના અતિસૂક્ષ્મ 10^{-14} m (ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા)થી લઈ 10^{26} m (તારાવિશ્વની લંબાઈ)ના માપક્રમ સુધી વિસ્તરેલું છે. આમ, લંબાઈના માપક્રમનો ગુણોત્તર 10^{40} ના ક્રમનો થાય.

લંબાઈના માપક્રમને પ્રકાશના વેગથી ભાગતાં સમયના માપક્રમનો વિસ્તાર 10^{-22} s થી 10^{18} s જેટલો મળે છે.

દ્રવ્યમાનનો વિસ્તાર 10^{-30} kg (ઇલેક્ટ્રૉનનું દ્રવ્યમાન)થી 10^{55} kg (અવલોકિત વિશ્વનું દ્રવ્યમાન) જેટલો છે.

ટેબલ 1.1 થી ટેબલ 1.3 મૂળભૂત ભૌતિક રાશિઓ લંબાઈ, સમય અને દ્રવ્યમાનના વિસ્તારનો ખ્યાલ દર્શાવે છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાનનું કાર્યક્ષેત્ર મૂળરૂપે સ્થૂળ (Macroscopic)

ટેબલ 1.1 : વિવિધ પદાર્થની લંબાઈનો માપક્રમ (માત્ર જાણકારી માટે)

પદાર્થનું કદ કે અંતર	લંબાઈનો માપક્રમ (m)
પ્રોટોનની ત્રિજ્યા	10^{-15}
પરમાણુના ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા	10^{-14}
હાઇડ્રોજન પરમાણુની ત્રિજ્યા	10^{-10}
કાગળની જાડાઈ	10^{-4}
માનવીની ઊંચાઈ	10^{0}
માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ (સમુદ્રની સરેરાશ સપાટીથી)	10^{4}
પૃથ્વીની ત્રિજ્યા	10^{7}
સૂર્યનું પૃથ્વીથી અંતર	10^{11}
આકાશગંગાનો વિસ્તાર	10^{21}
દેખીતા વિશ્વની પરિસીમા સુધીનું અંતર	10^{24} 10^{-25}

ટેબલ 1.2 : વિવિધ ઘટનાઓના સમય-અંતરાલનો માપક્રમ (માત્ર જાણકારી માટે)

ઘટના	સમય અંતરાલનો માપક્રમ (s)
અધિક અસ્થાયી કણનો જીવનકાળ	10^{-24}
પ્રકાશ દ્વારા ન્યૂક્લિયસનું અંતર કાપવા લાગતો સમય	10^{-22}
અણુઓમાં અને ઘન પદાર્થોમાં પરમાણુઓના દોલનનો આવર્તકાળ	10^{-15}
ધ્વનિતરંગનો આવર્તકાળ	10^{-3}
આંખના પલકારાનો સમય	10^{-1}
માનવહૃદયના ક્રમિક ધબકારા વચ્ચેનો સમય	10^{0}
પૃથ્વીનો ઘૂર્ણનકાળ	10^{5}
પૃથ્વીનો પરિક્રમણકાળ	10^{7}
માનવીનો સરેરાશ જીવનકાળ	10^{9}
બ્રહ્માંડની ઉંમર	10^{17}

ટેબલ 1.3 : વિવિધ પદાર્થોના દ્રવ્યમાનનો માપક્રમ (માત્ર જાણકારી માટે)

પદાર્થ	દ્રવ્યમાનનો માપક્રમ (kg)
ઇલેક્ટ્રૉન	10^{-30}
પ્રોટૉન	10^{-27}
રજકણ	10^{-9}
મચ્છર	10^{-5}
દ્રાક્ષ	10^{-3}
માનવી	10^{2}
પૃથ્વી	10^{25}
સૂર્ય	10^{30}
આકાશગંગા-મંદાકિની	10^{41}
દેખીતું વિશ્વ	10^{55}

અને સૂક્ષ્મ (Microscopic) એમ બે રસપ્રદ પ્રભાવક્ષેત્રો (Domains) સુધી વિસ્તરેલ છે. આ ઉપરાંત તે સ્થિત (Static) અને ચલિત (Dynamic) પ્રણાલી સાથે પણ સંલગ્ન છે. આમ, ભૌતિક વિજ્ઞાન એ સમય, દ્રવ્ય અને ઊર્જા સાથે પણ સંકળાયેલ છે.

વિદ્યાર્થીમિત્રો, મુક્તપતન કરતા દઢ પદાર્થનું જમીન પર પડવું અને હલકા વાયુ ભરેલા ફુગ્ગાનું જમીનથી ઉપર ઊડવું, ટાંકણી કે સોયનું પાણીમાં ડૂબી જવું, જ્યારે મોટાં-મોટાં વહાણોનું પાણી પર તરવું, વગેરે સામાન્ય દેખાતી ઘટનાઓ કે પછી લાર્જ હેડ્રોન કોલાઇડર (LHC), ઇન્ટરનેશનલ થર્મોન્યુક્લિયર એક્સપરિમેન્ટલ રિએક્ટર (ઇટર-ITER) તથા ચંદ્રયાન જેવા અત્યાધુનિક પ્રોજેક્ટ્સ આપણને જરૂરથી ભૌતિક વિજ્ઞાનના અભ્યાસ તરફ આકર્ષિત કરે.

આંતરરાષ્ટ્રીય ક્ષેત્રે ખ્યાતી પ્રાપ્ત કરનાર ભારતના સી. વી. રામન, જે. સી. બોઝ, એમ. એન. સહા, હોમી ભાભા, એસ. એન. બોઝ, વિક્રમ સારાભાઈ, એસ. ચંદ્રશેખર વગેરે ભૌતિકશાસ્ત્રીઓના નામોથી આપ પરિચિત જ હશો. આપણા દેશમાં ભૌતિક વિજ્ઞાન ક્ષેત્રે સંશોધનમાં કાર્યરત કેટલીક સંસ્થાઓની યાદી ટેબલ 1.4માં આપની માહિતી માટે આપેલ છે.

ટેબલ 1.4 : ભૌતિક વિજ્ઞાનના સંશોધનમાં કાર્યરત ભારતની કેટલીક સંસ્થાઓની યાદી (માત્ર જાણકારી માટે)

સંસ્થાનું નામ	સ્થળ
ભાભા ઍટોમિક રિસર્ચ સેન્ટર (BARC)	મુંબઈ
ફિઝિકલ રિસર્ચ લૅબોરેટરી (PRL)	અમદાવાદ
ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ફોર પ્લાઝ્મા રિસર્ચ (IPR)	ગાંધીનગર
ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ફિઝિક્સ (IOP)	ભૂવનેશ્વર
નેશનલ ફિઝિકલ લૅબોરેટરી (NPL)	દિલ્લી
ઈન્ટર યુનિવર્સિટી કન્સોર્ટિયમ ફૉર ઍસ્ટ્રોનોમી ઍન્ડ ઍસ્ટ્રોફિઝિક્સ (IUCAA)	પૂના
ઇન્ડિયન ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ સાયન્સ (IISc)	બૅંગ્લોર
રામન રિસર્ચ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ (RRI)	બૅંગ્લોર
ટાટા ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ફન્ડામેન્ટલ રિસર્ચ (TIFR)	મુંબઈ
સેન્ટર ફોર એડવાન્સ ટેક્નોલૉજી (CAT)	ઇન્દોર
ન્યુક્લિયર સાયન્સ સેન્ટર (NSC)	દિલ્લી
ઇન્દિરા ગાંધી સેન્ટર ફોર ઍટોમિક રિસર્ચ (IGCAR)	કલ્પકમ
સહા ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ન્યુક્લિયર ફિઝિક્સ (SINP)	કોલકાતા
રિજિયોનલ રિસર્ચ લેબોરેટરી (RRL)	ભોપાલ
ઇન્ટર યુનિવર્સિટી એસિલરેટર સેન્ટર (IUAC)	ન્યુ દિલ્લી
વેરિયેબલ ઍનર્જી સાયક્લોટ્રૉન સેન્ટર (VECC)	કોલકાતા
વિક્રમ સારાભાઈ સ્પેસ સેન્ટર (VSSC)	બૅંગ્લોર
ઇન્ડિયન ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ઍસ્ટ્રોફિઝિક્સ (IIA)	મુંબઈ
ઇન્ડિયન ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ જીઓમૅગ્નેટિઝમ (IIG)	મુંબઈ
ઇન્ડિયન સ્પેશ રિસર્ચ ઑર્ગેનાઇઝેશન (ISRO)	ભારતમાં વિવિધ જગ્યાએ
સ્પેસ એપ્લિકેશન સેન્ટર (SAC)	ભારતમાં વિવિધ જગ્યાએ
ઇન્ડિયન ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ટેક્નોલૉજી (IIT)	ભારતમાં વિવિધ જગ્યાએ
નેશનલ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ટેક્નોલૉજી (NIT)	ભારતમાં વિવિધ જગ્યાએ
વિશ્વવિદ્યાલયો	ભારતમાં વિવિધ જગ્યાએ

1.3 ભૌતિક વિજ્ઞાન, ટેક્નોલૉજી અને સમાજ (Physics, Technology and Society)

આજ વિશ્વના કોઈ પણ ખૂણે આપણે થોડાક જ કલાકોમાં પહોંચી શકે છે. થોડીક જ સેકન્ડ્સમાં વિશ્વના કોઈ પણ ખૂણામાં રહેલ અન્ય વ્યક્તિ સાથે વાતચીત કરી શકે છે. દુનિયાના અન્ય ભાગોમાં બનતી ઘટનાઓ કે રમતોનું જીવંત પ્રસારણ ઘરે બેઠાં જોઈ શકાય છે. આપણા સૂર્યમંડળ તથા તારાવિશ્વોની તસ્વીરો મેળવી શકીએ છીએ. આ બધું શક્ય બન્યું છે ભૌતિક વિજ્ઞાન થકી.

બળદગાડા, સાઇકલ, મોટરસાઈકલ, કાર, હવાઈજહાજ, વહાણ જેવાં વાહનવ્યવહારનાં સાધનોનો થયેલો વિકાસ; સંદેશાવ્યવહારમાં વપરાતાં તાર, ટેલિફોન, મોબાઇલ, સેટેલાઇટ ફોન; મનોરંજનમાં ઉપયોગી એવા રેડિયો, ટેપરેકોર્ડર, ટેલિવિઝન; રસોડામાં વપરાતાં કેરોસીન સ્ટવ, ગૅસસ્ટવ, માઇક્રોવેવઓવન વગેરે ભૌતિક વિજ્ઞાનના નિયમો કે સિદ્ધાંતનું ટેક્નોલૉજીમાં યોગ્ય ઉપયોગ થકી શક્ય બન્યું છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાને આપણને વિકિરણની ઓળખ આપી, વિદ્યુતભારિત કણોને પ્રવેગિત કરવાનું શીખવ્યું. અલ્ટ્રાસોનિક અને ઑપ્ટિકલ ફાઇબર આધારિત સાધનો આપ્યાં. X-Ray, સોનોગ્રાફી, ઇલેક્ટ્રૉકાર્ડિયોગ્રાફ (ECG), ઇલેક્ટ્રૉન સ્પીન, રેઝોનન્સ (ESR), ન્યુક્લિયર મેગ્નેટીક રેઝોનન્સ (NMR), એન્ડોસ્કોપી વગેરે બહુઉપયોગી મેડિકલ ટેકનોલૉજી પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનને આભારી છે.

સૂક્ષ્મદર્શકયંત્ર, ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપ (EM), ઍટોમિક ફોર્સ માઇક્રોસ્કૉપ (AFM) જેવાં સાધનોએ મટીરિયલ ટેક્નોલૉજી, નેનો ટેક્નોલૉજી અને બાયોટેક્નોલૉજીના વિકાસમાં અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો છે.

સ્પેસ ટેક્નોલૉજીથી પણ તમે અજાણ નહિ હો. રૉકેટ, મિસાઇલ, અવકાશયાન, કૃત્રિમ ઉપગ્રહ, રિમોટ સેન્સિંગ વગેરે શબ્દો તો હવે રોજિંદા થઈ ગયા છે. લેસર, રડાર અને માઇક્રોવેવ વિશે પણ તમે સાંભળ્યું જ હશે.

ભૌતિક વિજ્ઞાને આપણને અતિનીચાં તાપમાનો મેળવવાની પદ્ધતિઓ શીખવી, જેના પરિણામે ક્રાયોજેનિક્સનો વિકાસ થયો. ઇલેક્ટ્રૉનિક્સ અને કમ્યુનિકેશન, કમ્પ્યૂટર ટેક્નોલૉજી, ઇન્ફોર્મેશન ટેક્નોલૉજી વગેરે વિષયોની જનેતા પણ ભૌતિક વિજ્ઞાન છે.

ભૌતિકશાસ્ત્રના આટલા બહોળા વિકાસ પછી પણ આપણે કહી શકતા નથી કે કુદરતને આપણે પૂરી સમજી શક્યા છીએ. અનેક પ્રશ્નો હજી ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ સામે ઊભા છે. જેમ કે, શું બ્રહ્માંડના અસ્તિત્વમાં કોઈ એકાકી પાયો છે ખરો ? શું આ સઘળું દ્રવ્ય અને વિકિરણ કોઈ એક જ 'વસ્તુ'માંથી ઉદ્ભવેલ છે ? વિશ્વમાં પ્રવર્તતાં વિવિધ પ્રકારનાં બળો શું કોઈ એક જ પ્રકારના બળનાં વિવિધ સ્વરૂપો છે ? બ્રહ્માંડનું ભવિષ્ય શું છે ?

આવા પાયાના અનેક પ્રશ્નો સાથે ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ આજે પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનના બે પ્રમુખ વિચારો : **એકીકીકરણ (unification)** અને **ન્યુનીકરણ (reduction)** ઉપર મથામણ કરી રહ્યાં છે.

1.4 કુદરતમાં મૂળભૂત બળો (Fundamental Forces in Nature)

વ્હાલા વિદ્યાર્થીઓ, જો આપણે એક દડાને સપાટી પર ગબડાવવો હોય, તો દડાને ગતિ આપવા બળ આપવું પડે છે. દડો સપાટી પર અમુક અંતર કાપ્યા પછી અટકી જાય છે. કારણ કે દડાની સપાટી પર ઘર્ષણબળ લાગે છે. સપાટી પરથી દડાને ઉપાડવા પણ આપણે બળ વાપરવું પડે છે. અરે કોઈ આપણને ખેંચે કે ધક્કો મારે ત્યારે પણ આપણે બળનો અનુભવ કરીએ છીએ. આમ, રોજ-બ-રોજના વ્યવહારમાં આપણે બળનો વિવિધ રીતે અનુભવ કરીએ છીએ. બળના આવા પ્રાથમિક ખ્યાલો પરથી બળના વૈજ્ઞાનિક ખ્યાલો સમજીશું.

બળ અંગેનો સાચો ખ્યાલ સૌપ્રથમ આઇઝેક ન્યૂટને ગતિના પ્રખ્યાત નિયમો દ્વારા આપ્યો. સાથેસાથે તેણે ગુરુત્વાકર્ષણ બળનો સાર્વત્રિક નિયમ પણ આપ્યો.

સ્થૂળ પ્રભાવક્ષેત્રોમાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ઉપરાંત, પદાર્થોની સંપર્કસપાટીઓ વચ્ચે લાગતું ઘર્ષણબળ, ખેંચાયેલી કે દબાયેલી સ્પ્રિંગમાં ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ, દોરીમાં ઉદ્ભવતું તણાવ બળ, પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીને સમાંતર લાગતું પૃષ્ઠતાણ, તરલ માધ્યમમાં ઉદ્ભવતું શ્યાનતાબળ વગેરેનો આપણને અનુભવ તો છે જ. આ ઉપરાંત વિદ્યુતભારિત અને ચુંબકીય વસ્તુઓને કારણે પણ બળ ઉદ્ભવે છે. વિદ્યુત અને ચુંબકીય બળો, ન્યુક્લિયર બળો, આંતર પરમાણ્વીય અને આંતરઆણ્વીય બળો વગેરે સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રોમાંનાં બળોનાં ઉદાહરણો છે.

હાલમાં કુદરતમાં ચાર પ્રકારનાં મૂળભૂત બળો હોવાનું મનાય છે, જેનો ગુણાત્મક પરિચય હવે મેળવીશું.

1.4.1 ગુરુત્વાકર્ષી બળ (Gravitational Force)

ગુરુત્વાકર્ષી બળ એ સાર્વત્રિક છે અને બ્રહ્માંડમાં રહેલ બધા જ પદાર્થો આ બળ વડે એકબીજા સાથે આંતરક્રિયા કરે છે. વિશ્વમાં પ્રત્યેક કણ કોઈ પણ કણ પર આકર્ષણબળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ અનુસાર વિશ્વમાં **કોઈપણ બે કણો વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ તે બે કણોના દ્રવ્યમાનના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.** ગુરુત્વાકર્ષી બળ એ પદાર્થોના દળના કારણે ઉદ્ભવતું આકર્ષણબળ છે તથા તે ગુરુઅંતરીય છે. આ બળ લાગવા માટે બે પદાર્થો વચ્ચે કોઈ માધ્યમની જરૂર હોતી

નથી. ગુરુત્વાકર્ષણ બળ બે પદાર્થો વચ્ચે લાગતું માત્ર આકર્ષણ બળ છે. અન્ય મૂળભૂત બળોની સરખામણીમાં ગુરુત્વાકર્ષી બળ એ સૌથી નબળું બળ છે, છતાં બ્રહ્માંડમાં પ્રવર્તતાં બીજાં બળો સમજવા માટે તેનું મૂલ્ય ઓછું આંકી શકાય નહિ. ગુરુત્વાકર્ષણ બળની મદદથી જ આપણે પૃથ્વી ઉપર ઊભા રહી શકીએ છીએ, હવામાં ઉપર ઉછાળેલ દડો પાછો નીચે આવે છે. દરિયામાં આવતી ભરતી-ઓટમાં પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચે લાગતાં ગુરુત્વાકર્ષી બળનો પ્રભાવ માનવામાં આવે છે. પૃથ્વીની આસપાસ ફરતા ઉપગ્રહોની ગતિ, સૂર્યમંડળમાં ગ્રહોની ગતિ, બ્રહ્માંડની ઉત્પત્તિ, તારા અને તારાવિશ્વોની ઉત્પત્તિ તથા તેનો વિકાસ વગેરે બાબતોમાં ગુરુત્વાકર્ષી બળ જ સૌથી અગત્યનું પરિબળ છે.

1.4.2 વિદ્યુતચુંબકીય બળ (Electromagnetic Force)

વીજભારિત કણો વચ્ચે લાગતાં બળને વિદ્યુતચુંબકીય બળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સાદા કિસ્સામાં, જ્યારે વિદ્યુતભારો સ્થિર સ્થિતિમાં રહેલા હોય ત્યારે તેમની વચ્ચેના બળને સ્થિત વિદ્યુતબળ કહે છે. આ વિદ્યુતબળનું મૂલ્ય કુલંબના વ્યસ્ત વર્ગના નિયમને અનુસરે છે. આમ, આવા **બે વિદ્યુતભારો પર લાગતું વિદ્યુતબળ બે વિદ્યુતભારોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને વિદ્યુતભારિત કણો વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે.** સજાતીય વિદ્યુતભારો વચ્ચે આ બળ અપાકર્ષી, જ્યારે વિજાતીય વીજભારો વચ્ચે આ બળ આકર્ષી હોય છે.

જ્યારે વિદ્યુતભારો ગતિમાં હોય, ત્યારે તે ચુંબકીય અસરો પણ ઉપજાવે છે. આ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ગતિમાં રહેલા વિદ્યુતભારો પર બળ લગાડે છે. ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતામાં વિદ્યુભારની ગતિને કારણે ફેરફાર થાય છે. વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રની આ સંયુક્ત અસર અલગ ન પાડી શકાય તેવી હોય છે. આથી જ, સંયુક્ત રીતે ઉદ્ભવતી બળની આ અસરો વિદ્યુતચુંબકીય બળ તરીકે ઓળખાય છે. બે પદાર્થો વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતચુંબકીય બળ તેમની વચ્ચેના માધ્યમ પર પણ આધાર રાખે છે. ગુરુત્વાકર્ષી બળની જેમજ વિદ્યુતચુંબકીય બળ પણ ગુરુઅંતરીય છે અને તે લાગવા માટે કોઈ માધ્યમની જરૂર પડતી નથી. આ બળ ગુરુત્વાકર્ષી બળની સરખામણીમાં વધારે પ્રબળ હોય છે. કોઈ નિશ્ચિત અંતરે રહેલા બે પ્રોટોન વચ્ચે લાગતા ગુરુત્વાકર્ષી બળ કરતાં તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતીય બળ 10^{36} ગણું વધારે હોય છે.

આકાશમાં ચમકતી વીજળી, વિદ્યુત ઘંટડી વગેરેમાં વિદ્યુત ચુંબકીય બળની અસર જોવા મળે છે.

1.4.3 સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ (Strong Nuclear Force)

આપણે જાણીએ છીએ કે ન્યુક્લિયસમાં પ્રોટોન્સ અને ન્યુટ્રૉન રહેલા હોય છે. પ્રોટોન ધન વિદ્યુતભારિત કણો છે. જ્યારે ન્યુટ્રૉન વિદ્યુભાર રહિતના કણો છે. જો કુલંબના નિયમ પ્રમાણે વિચારીએ તો સજાતિય વિદ્યુતભાર ધરાવતા પ્રોટોન-પ્રોટોન વચ્ચે અપાકર્ષીય બળ લાગે અને જો આમ થાય તો ન્યુક્લિયસ અસ્થિર બને. જે સૂચવે છે કે ન્યુક્લિયસમાં પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉનને જકડી રાખતું જવાબદાર બળ પ્રબળ આકર્ષીય બળ છે. પ્રોટોન-પ્રોટોન, ન્યુટ્રૉન-ન્યુટ્રૉન અને પ્રોટોન-ન્યુટ્રૉન વચ્ચે ન્યુક્લિયસમાં લાગતા વીજભારથી સ્વતંત્ર એવા આ બળને સ્ટ્રૉંગ ન્યક્લિયર બળ કહે છે. આ બળ ફક્ત ન્યુક્લિયસમાં જ લાગતું હોવાથી તે લઘુઅંતરીય (10^{-15}m) છે. બધાં જ મૂળભૂત બળો કરતાં સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ સૌથી વધારે પ્રબળ હોય છે.

ન્યુટ્રૉન અને પ્રોટોન 'ક્વાર્કસ' તરીકે ઓળખાતા મૂળ કણોના બનેલા માનવામાં આવે છે. તેથી હાલનાં સંશોધનો પ્રમાણે આ બળ ક્વાર્ક-ક્વાર્ક બળને આભારી છે. તેમ માનવામાં આવે છે.

વિદ્યાર્થીમિત્રો, અહીં એ નોંધવું ઘટે કે ઇલેક્ટ્રૉન ન્યુક્લિયસની બહાર હોવાથી તેના પર સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ લાગતું નથી.

1.4.4. વીક ન્યુક્લિયર બળ (Weak Nuclear Force)

વીક ન્યુક્લિયર બળ એ માત્ર નિશ્ચિત ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયાઓ જેવી કે ન્યુક્લિયસમાંથી β-કણોના ઉત્સર્જનમાં જોવા મળે છે. β-કણના ઉત્સર્જન દરમ્યાન ન્યુક્લિયસ ઇલેક્ટ્રૉન અને વિદ્યુતભારવિહીન એવા ન્યુટ્રિનો કણોનું ઉત્સર્જન કરે છે. વીક ન્યુક્લિયર બળ એ ન્યુટ્રૉનોની બીજા કોઈ કણોની (માત્ર ફર્મિયોન) સાથેની આંતરક્રિયા દરમિયાન ઉદ્ભવે છે. વીક ન્યુક્લિયર બળ એ ગુરુત્વાકર્ષી બળ કરતાં પ્રબળ પરંતું સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ અને વિદ્યુતચુંબકીય બળ કરતાં નબળું હોય છે. વીક ન્યુક્લિયર બળની અવધી 10^{-15}m થી 10^{-15} m ના વિસ્તારના ક્રમની હોય છે.

1.4.5 બળોના એકીકીકરણ તરફ (Towards Unification of Forces)

ટેબલ 1.5માં કુદરતમાં મૂળભૂત બળો, તેની અવધિ, તેનું સાપેક્ષ મૂલ્ય દર્શાવેલ છે. ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ વર્ષોથી એ પ્રશ્ન ઉપર વિચાર કરે છે કે, શું આ બધાં મૂળભૂત બળો કોઈ એક જ બળનાં વિવિધ સ્વરૂપ ન હોઈ શકે ? બળના કોઈ એક જ 'ખ્યાલ'થી વિવિધ પ્રકારનાં બળોને સમજાવી ના શકાય ? આવા વિચારોને પરિપૂર્ણ કરવાના પ્રયાસોએ બળોના એકીકીકરણ તરફનાં દ્વાર ખોલ્યાં.

ટેબલ 1.5 : કુદરતમાં મૂળભૂત બળો

નામ	સાપેક્ષ મૂલ્ય	અવધિ	કોની-કોની વચ્ચે ઉદ્ભવે છે ?
ગુરુત્વાકર્ષી બળ	10^{-38}	અનંત (ન્યુક્લિયસમાંના બે ન્યુક્લિયોન વચ્ચે)	બ્રહ્માંડમાં રહેલા દરેક પદાર્થો વચ્ચે
વીક ન્યુક્લિયર બળ	10^{-13}	અતિ સૂક્ષ્મ (માત્ર ન્યુક્લિયસના અંદરના વિસ્તારમાં 10^{-15}m)	પ્રાથમિક કણો (ન્યુટ્રિનો અને બીજા ફર્મિયોન) વચ્ચે
વિદ્યુતચુંબકીય બળ	10^{-2}	અનંત	વિદ્યુતભારિત કણો વચ્ચે
સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ	1	અતિ સૂક્ષ્મ (માત્ર ન્યુક્લિયસના અંદરના વિસ્તારમાં 10^{-15}m)	ન્યુક્લિઓન્સ (પ્રોટોન-પ્રોટોન, ન્યુટ્રૉન-ન્યુટ્રૉન અને પ્રોટોન-ન્યુટ્રૉન) વચ્ચે

ન્યૂટને ભૂલોક (Terrestrial) અને ખગોળીય (celestial) પ્રભાવક્ષેત્રોને ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ નીચે એકત્રિત કર્યા.

ઑર્સ્ટેડ અને ફેરેડેએ બતાવ્યું કે, વિદ્યુત અને ચુંબકીય ઘટનાઓ એકબીજાથી અલગ પાડી શકાય નહીં.

મેક્સવેલની 'પ્રકાશ એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ છે' શોધથી તેને વિદ્યુત ચુંબકીય અને પ્રકાશશાસ્ત્રને એકત્રિત કર્યા.

આઈન્સ્ટાઇન ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને વિદ્યુતચુંબકીય બળને એકીકીકરણ કરવા પ્રયત્નો કર્યા જેમાં તેમને સફળતા ન મળી.

ગ્લેશોવ, સલામ અને વેઈનબર્ગે બતાવ્યું કે, વીક ન્યુક્લિયર બળ અને વિદ્યુતચુંબકીય બળ એ બન્ને એક જ મૂળભૂત બળ 'ઈલેક્ટ્રો-વિક ઈન્ટરેક્સન'નાં જ વિવિધ પાસાંઓ છે.

મૂળભૂત બળોના એકીકીકરણ તરફના પ્રયત્નો હાલ પણ ચાલુ છે. ટેબલ 1.6 માં બળોના એકીકીકરણ તરફના પ્રયાસોની ઝાંખી આપેલ છે.

1.5 ભૌતિકશાસ્ત્રના નિયમોની પ્રકૃતિ (Nature of Physical Laws)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, વિભિન્ન બળો દ્વારા નિયંત્રિત ઘટનામાંથી કેટલીક ભૌતિક રાશિઓ સમય સાથે બદલાતી હોય છે. જ્યારે કેટલીક વિશિષ્ટ ભૌતિક રાશિઓ સમયની સાથે અચળ રહે છે.

ટેબલ 1.6 : કુદરતનાં વિભિન્ન બળોના એકીકીકરણ તરફના પ્રયાસો (માત્ર જાણકારી માટે)

ભૌતિકશાસ્ત્રી	વર્ષ	એકીકીકરણ તરફની ઉપલબ્ધિ
આઈઝેક ન્યૂટન	1687	ભૂલોક અને ખગોળીય યંત્રશાસ્ત્રનું એકીકીકરણ ગતિના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમો સમાન રીતે બન્ને પ્રભાવક્ષેત્રોમાં લાગુ પડે છે તેમ બતાવ્યું.
હંસ ક્રિશ્ચિયન ઑર્સ્ટેડ માઇકલ ફેરેડે	1820 1830	વિદ્યુત અને ચુંબકીય ઘટનાઓ કોઈ એક જ પ્રભાવક્ષેત્ર - વિદ્યુતચુંબકીય ક્ષેત્રની દેન છે.
જેમ્સ ક્લાર્ક મેક્સવેલ	1873	વિદ્યુત, ચુંબકીય અને પ્રકાશનું એકીકીકરણ. પ્રકાશ એ વિદ્યુત- ચુંબકીય તરંગ છે, તેમ બતાવ્યું.
શૈલ્ડન ગ્લેશોવ, અબ્દુસ સલામ, સ્ટીવન વીનબર્ગ	1979	વિદ્યુતચુંબકીય બળ અને વીક ન્યુક્લિયર બળ એ ઈલેક્ટ્રૉ-વીક બળનાં જ બે પાસાં છે તેમ બતાવ્યું.
કાર્લો રૂબિયા, સાઈમન વાંડર મિર	1984	ઈલેક્ટ્રૉ-વીક બળના સિદ્ધાંતનાં અનુમાનોની પ્રાયોગિક ચકાસણી કરી.

સમય સાથે અચળ રહેતી ભૌતિક રાશિઓને તેનું સંરક્ષણ થયું તેમ કહેવાય. આમ, કોઈ પણ રાશિનું સંરક્ષણ થવું, એટલે તે રાશિનું સમય સાથે ન બદલાવવું.

ઊર્જા, વિદ્યુતભાર, રેખીય વેગમાન તથા કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમોને ભૌતિક વિજ્ઞાનના મૂળભૂત નિયમો ગણવામાં આવે છે. સંરક્ષણના આ નિયમો ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ખૂબ જ અગત્યનો અને પાયાનો ભાગ ભજવે છે. આ નિયમો નીચે મુજબ છે :

ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Energy) : વિશ્વમાં રહેલી કુલ ઊર્જાનો જથ્થો અચળ રહે છે. ઊર્જાનો નાશ શક્ય નથી કે નવી ઊર્જાનું સર્જન કરવું પણ શક્ય નથી. ઊર્જાના એક સ્વરૂપનું બીજા સ્વરૂપમાં માત્ર રૂપાંતરણ થાય છે.

વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Charge) : વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલા તંત્રમાં થતી કોઈ પણ પ્રક્રિયામાં વિદ્યુતભારોનો બૈજિક સરવાળો અચળ રહે છે.

રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Linear Momentum) : જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે.

કોણીય વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Angular Momentum) : જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.

ભવિષ્યમાં તમે આ નિયમોનો વિગતવાર અભ્યાસ કરશો.

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આ ચાર નિયમો સિવાય પણ સ્પિન, બેરયોન સંખ્યા,સ્ટ્રેંજનેસ, હાઇપર ચાર્જ વગેરેના સંરક્ષણના નિયમો ન્યુક્લિર અને પાર્ટિકલ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં જોવા મળે છે, જેનો અભ્યાસ અહીં કરવાના નથી.

હવે પ્રશ્ન એ ઉપસ્થિત થાય કે આવા સંરક્ષણના નિયમોના અસ્તિત્વ પાછળ પ્રકૃતિનું ક્યું ગહન સ્વરૂપ જવાબદાર છે ?

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં અવકાશ (space) અને સમય (time) બન્નેનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રમાં અવકાશ અને સમયને એકબીજાથી સ્વતંત્ર ગણવામાં આવે છે. જ્યારે આઇન્સ્ટાઇનના સાપેક્ષવાદ અનુસાર અવકાશ અને સમય એકબીજા સાથે સંકળાયેલ છે. અવકાશ એ સમાંગ (homogeneus) અને સમદિગ્ધર્મી (isotropic) છે, આવા પરિણામસ્વરૂપે આપણને અનુક્રમે રેખીય વેગમાનનો સંરક્ષણનો નિયમ અને કોણીય વેગમાનનો સંરક્ષણનો નિયમ મળે છે. આ જ રીતે સમય પણ સમાંગ અને સમદિગ્ધર્મી છે. સમય એ સમાંગ હોવાને કારણે આપણને ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ મળે છે અને સમયના સમદિગ્ધર્મીપણાને લીધે શું પરિણામ સંભવી શકે એ હજુ પણ ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ જાણી શક્યા નથી. 20મી સદીના મહાન સૈદ્ધાંતિક ભૌતિકશાસ્ત્રી ડીરાક એવું માનતા હતા કે કદાચ વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ એ સમયના સમદિગ્ધર્મી હોવાનું પરિણામ હોઈ શકે. બીજી રીતે કહીએ, તો રેખીય વેગમાન, કોણીય વેગમાન અને ઊર્જાસંરક્ષણના નિયમોના અસ્તિત્વ પાછળનાં મૂળભૂત કારણો આપણે જાણી ચૂક્યાં છીએ, પરંતુ આજ દિવસ સુધી વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ એ પ્રકૃતિના કયા ગૂઢ રહસ્યને રજૂ કરે છે, તે જાણવા માટે ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ હજુ પણ મથામણ કરી રહ્યા છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં આવતા અનેક રસપ્રદ વણઊકલ્યા કોયડાઓના ઉકેલ શોધવાનું કામ આપના માટે બાકી છે !

સારાંશ

1. સંસ્કૃત શબ્દ 'ભૌતિક' પરથી ભૌતિકજગતને લગતા વિજ્ઞાન માટે 'ભૌતિક વિજ્ઞાન' શબ્દનો ઉપયોગ થયો.
2. અંગ્રેજીમાં ભૌતિક વિજ્ઞાન માટે વપરાતો શબ્દ Physics (ફિઝીક્સ) એ પ્રકૃતિ એવો અર્થ ધરાવતા ગ્રીક શબ્દ પરથી આવ્યો.
3. દ્રવ્યઊર્જાને લગતા પ્રકૃતિના મૂળભૂત નિયમોનો અભ્યાસ તથા વિવિધ પ્રાકૃતિક ઘટનાઓમાં તેની અભિવ્યક્તિ રજૂ કરતું વિજ્ઞાન એટલે ભૌતિક વિજ્ઞાન.
4. ભૌતિક વિજ્ઞાનનું કાર્યક્ષેત્ર મૂળરૂપે સ્થૂળ અને સૂક્ષ્મ એમ બે રસપ્રદ પ્રભાવક્ષેત્રો સુધી વિસ્તરેલ છે. ઉપરાંત તે સ્થિત અને ચલિત પ્રણાલી સાથે પણ સંલગ્ન છે.
5. ભૌતિક વિજ્ઞાનના મૂળ નિયમો સાર્વત્રિક છે. જેનો પ્રયોગ વિવિધ સંદર્ભો તથા પરિસ્થિતિ અનુસાર થાય છે.
6. ગુરુત્વાકર્ષણ બળ, વિદ્યુતચુંબકીય બળ, સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ તથા વીક ન્યુક્લિયર બળ એ પ્રકૃતિનાં ચાર મૂળભૂત બળો છે. આ બળોના એકીકીરણ તરફના પ્રયત્નો ચાલુ છે.
7. કોઈ પણ ભૌતિક રાશિનું સંરક્ષણ થવું એટલે તે રાશિનું સમય સાથે ન બદલાવવું.
8. ઊર્જા, વિદ્યુતભાર, રેખીય વેગમાન અને કોણીય વેગમાનના નિયમોને ભૌતિક વિજ્ઞાનના મૂળભૂત નિયમો ગણવામાં આવે છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. .... બ્રહ્માંડના બે મૂળભૂત ઘટકો છે.
   (A) દ્રવ્ય અને વિકિરણ (B) ઉષ્મા અને પ્રકાશ
   (C) અણુ અને પરમાણુ (D) ઈલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન
2. .... એ દ્રવ્યનું ચોથું સ્વરૂપ છે.
   (A) ઘન (B) પ્રવાહી
   (C) વાયુ (D) પ્લાઝ્મા
3. પરમાણુનું ન્યુક્લિયસ કયા મૂળભૂત ઘટકોનું બનેલું છે ?
   (A) ઈલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન (B) ઈલેક્ટ્રૉન અને ન્યુટ્રૉન
   (C) પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન (D) ફક્ત ઈલેક્ટ્રૉન
4. ECG નું પૂરું નામ આપો.
   (A) ઈલેક્ટ્રૉન કાર્ડિયોગ્રામ (B) ઈલેક્ટ્રૉન કલર ગ્રાફ
   (C) ઈલેક્ટ્રો કાર્ડિયોગ્રાફ (D) ઈલેક્ટ્રિક કાર્ડિયોગ્રામ
5. NMRનું પૂરું નામ શું છે ?
   (A) ન્યુટ્રૉન મૅગ્નેટિક રેઝોનન્સ (B) ન્યુક્લિયર મૅગ્નેટિક રેઝોનન્સ
   (C) ન્યૂટ્રિનો મૅગ્નેટિક રેઝોનન્સ (D) ન્યુક્લિયર મોશન રેઝોનન્સ
6. ESRનું પૂરું નામ શું છે ?
   (A) ઈલેક્ટ્રિક સ્પિન રેઝોનન્સ (B) ઈલેક્ટ્રૉન સ્પિન રેઝોનન્સ
   (C) ઈલેક્ટ્રૉન સ્પિન રડાર (D) ઈલેક્ટ્રિક સ્પેસ રડાર
7. ન્યુક્લિયસમાં ન્યુટ્રૉન અને પ્રોટોન વચ્ચે લાગતું બળ એ
   (A) ગુરુત્વાકર્ષીય બળ છે. (B) વિદ્યુતચુંબકીય બળ છે.
   (C) સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ છે. (D) વીક ન્યુક્લિયર બળ છે.
8. ન્યુક્લિયસમાંથી β-કણના ઉત્સર્જન દરમિયાન કયા કણોનું ઉત્સર્જન થાય છે ?
   (A) ન્યુટ્રૉન અને પ્રોટોન (B) ઈલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન
   (C) ઈલેક્ટ્રૉન અને ન્યુટ્રૉન (D) ઈલેક્ટ્રૉન અને ન્યૂટ્રિનો
9. અવકાશ એ સમદિગ્ધર્મી છે, જેના પરિણામસ્વરૂપે સંરક્ષણનો કયો નિયમ મળે છે ?
   (A) ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ (B) વિદ્યુતભાર સંરક્ષણનો નિયમ
   (C) રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (D) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ
10. અવકાશ એ સમાંગ છે, જેના પરિણામસ્વરૂપે સંરક્ષણનો કયો નિયમ મળે છે ?
   (A) ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ (B) વિદ્યુતભાર સંરક્ષણનો નિયમ
   (C) રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (D) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ
11. સમય એ સમાંગ છે, જેના પરિણામસ્વરૂપે સંરક્ષણનો કયો નિયમ મળે છે ?
   (A) ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ (B) વિદ્યુતભાર સંરક્ષણનો નિયમ
   (C) રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (D) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ

12. કયા સંરક્ષણના નિયમ પાછળનું મૂળભૂત કારણ હજી અજાણ છે ?
(A) ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ
(B) વિદ્યુતભાર સંરક્ષણનો નિયમ
(C) રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ
(D) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ

જવાબો

1. (A)	**2.** (D)	**3.** (C)	**4.** (C)	**5.** (B)	**6.** (B)
7. (C)	**8.** (D)	**9.** (D)	**10.** (C)	**11.** (A)	**12.** (B).

નીચે આપેલ પ્રશ્નોનો જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. કુદરતમાં કયાં-કયાં બળોને મૂળભૂત બળો ગણવામાં આવે છે ?

2. બળોનું એકીકીકરણ એટલે શું ?

3. ઊર્જાસંરક્ષણનો નિયમ લખો.

4. વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.

5. રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.

6. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.

7. ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં કયા-કયા સંરક્ષણના નિયમો છે ?

8. કયાં બે મૂળભૂત બળો ઇલેક્ટ્રૉવિક ઇન્ટરેક્શનનાં વિવિધ પાસાંઓ છે ?

9. પ્લાઝ્મા કોને કહેવાય ?

10. ક્રાયોજેનિક્સ એટલે શું ?

11. ગુરુત્વાકર્ષી બળ સમજાવો.

12. વિદ્યુતચુંબકીય બળ એટલે શું ?

13. સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયર બળ સમજાવો.

14. વીક ન્યુક્લિયર બળ એટલે શું ?

•

પ્રકરણ 2

માપન તથા એકમપદ્ધતિ

2.1 પ્રસ્તાવના

2.2 ભૌતિક રાશિનો એકમ કેવો હોવો જોઈએ ?

2.3 ભૌતિક રાશિના એકમો અને એકમ-પદ્ધતિઓ

2.4 SI એકમપદ્ધતિ

2.5 લંબાઈનું માપન

2.6 દળનું માપન

2.7 સમયનું માપન

2.8 માપનમાં ચોકસાઈ અને સચોટતા

2.9 માપનમાં ઉદ્ભવતી ત્રુટિઓ

2.10 સાર્થકઅંકો

2.11 પરિમાણો અને પારિમાણિક સૂત્રો

• સારાંશ

• સ્વાધ્યાય

2.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

આપણે આપણી આસપાસ ઘણી ઘટનાઓ જોઈએ છીએ. આમાંની કેટલીક ઘટનાઓ કુદરતી તથા કેટલીક માનવસર્જિત હોય છે. તેનું સચોટ વર્ણન કરવા તેની સાથે સંકળાયેલ જુદી-જુદી ભૌતિક રાશિઓનું માપન ચોકસાઈપૂર્વક કરવું પડે છે. દા.ત., ઝાડ પરથી ફળ નીચે પડે છે. આ કુદરતી ઘટના સમજવા માટે આપણે જાણવું જરૂરી છે કે ફળ કેટલી ઊંચાઈએથી પડે છે ? ફળને જમીન પર પડતાં કેટલો સમય લાગે છે ? ફળ કેટલી ઝડપથી પડે છે ? આવા અનેક પ્રશ્નોના જવાબ આપવા માટે આપણે અંતર, સમય, દળ વિગેરે જેવી ભૌતિક રાશિઓનું ચોકસાઈપૂર્વક માપન કરવું પડે. આ ભૌતિક રાશિઓનું સ્પષ્ટ સંખ્યાત્મક નિરૂપણ કરવા માટે તેમને અનુરૂપ એકમો નક્કી કરવા જરૂરી છે. તો, રાશિઓનાં માપન કેવી રીતે થતાં હશે અને રાશિઓને અનુરૂપ વિવિધ એકમો કઈ રીતે નક્કી થતાં હશે ? આ રાશિઓના માપનમાં ઉદ્ભવતી જુદા-જુદા પ્રકારની ત્રુટિઓ વગેરે અંગેની વિગતો પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં જોઈશું.

2.2 ભૌતિક રાશિનો એકમ કેવો હોવો જોઈએ ? (How a Unit of a Physical Quality should be ?)

કોઈ રાશિના પ્રમાણિત માપને તે ભૌતિક રાશિનો એકમ (Unit) કહે છે.

(1) એકમનું માપ નિશ્ચિત અને સ્પષ્ટ હોવું જોઈએ.

(2) એકમ તેના માપમાં ફેરફાર ન થાય તેવો હોવો જોઈએ તેમજ તેને વ્યાખ્યાયિત કરતી ઘટના (જો હોય તો) કાયમી હોવી જોઈએ.

(3) એકમની પ્રતિકૃતિ (Replica) સહેલાઈથી થઈ શકે અને સહજ રીતે પ્રાપ્ત થઈ શકે તેવી હોવી જોઈએ.

2.3 ભૌતિક રાશિના એકમો અને એકમપદ્ધતિઓ (Units of Physical Quantities and Systems of Units)

વ્યવહારમાં જોવા મળતી અનેક ભૌતિક રાશિઓ પૈકી, અમુક ઓછામાં ઓછી સંખ્યાની ભૌતિક રાશિઓના એકમો નક્કી કરવાથી, બાકીની બધી જ ભૌતિક રાશિઓના એકમો નક્કી કરી શકાય છે. આ ભૌતિક રાશિઓને, **મૂળભૂત ભૌતિક રાશિઓ** (Fundamental Physical Quantities) અને તેમના એકમોને **મૂળભૂત એકમો** કહે છે. તેમના ઉપરથી મેળવેલ બાકીની ભૌતિક રાશિઓને **સાધિત ભૌતિક રાશિઓ** (Derived Physical Quantities) અને

તેમના એકમોને **સાધિત એકમો (Derived Units)** કહે છે. આ મૂળભૂત ભૌતિક એકમોનાં માપ અને તેમની જરૂર મુજબની લઘુતમ સંખ્યાના સંદર્ભમાં જુદી જુદી એકમપદ્ધતિઓ સમયાંતરે અમલમાં આવી છે. જેમ કે,

(1) બ્રિટિશ પદ્ધતિ (FPS) (ફૂટ, પાઉન્ડ, સેકન્ડ પદ્ધતિ)

(2) CGS પદ્ધતિ (સેન્ટિમીટર, ગ્રામ, સેકન્ડ પદ્ધતિ)

(3) MKS પદ્ધતિ (મીટર, કિલોગ્રામ, સેકન્ડ પદ્ધતિ)

(4) MKSA પદ્ધતિ
(મીટર, કિલોગ્રામ, સેકન્ડ, ઍમ્પિયર પદ્ધતિ)

(5) SI પદ્ધતિ (સાત મૂળભૂત એકમો)

2.4 SI એકમપદ્ધતિ (Systeme International)

ફ્રાન્સમાં પૅરિસ ખાતેની સંસ્થા 'International Bureau of Weights and Measures'ના નેજા હેઠળ ઈ.સ. 1971 માં બોલાવાયેલ 14મી બેઠક 'General Conference on Weights and Measures'માં આંતરરાષ્ટ્રીય એકમપદ્ધતિ સ્વીકારવામાં આવી, જેને SI એકમપદ્ધતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. SI એકમપદ્ધતિમાં સાત રાશિઓને મૂળભૂત રાશિ તરીકે સ્વીકારવામાં આવેલ છે. SI એકમપદ્ધતિની મૂળભૂત રાશિઓ, તેના મૂળભૂત એકમો, સંજ્ઞાઓ તથા વ્યાખ્યાઓ નીચે મુજબ છે :

ટેબલ 2.1 : SI એકમો

મૂળભૂત ભૌતિક રાશિ	એકમનું નામ	સંજ્ઞા	વ્યાખ્યા
લંબાઈ	મીટર	m	શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશે 1/299,792,458 સેકન્ડમાં કાપેલા અંતરને 1 મીટર કહે છે. (1983થી માન્ય)
દળ	કિલોગ્રામ	kg	International Bureau of Weights and Measuresમાં રાખેલ પ્લેટિનમ-ઈરિડિયમ મિશ્રધાતુમાંથી બનાવેલ નળાકારના દળને 1 kg કહે છે. (1889થી માન્ય)
સમય	સેકન્ડ	s	સિઝિયમ-133 પરમાણુની ધરાસ્થિતિના બે અતિસૂક્ષ્મ ઊર્જાના સ્તરો વચ્ચેની ઇલેક્ટ્રૉનની સંક્રાંતિને અનુલક્ષીને ઉત્સર્જિત વિકિરણનાં 9,192,631,770 દોલનો માટેના સમયગાળાને એક સેકન્ડ કહે છે. (1967થી માન્ય)
વિદ્યુતપ્રવાહ	ઍમ્પિયર	A	અનંત લંબાઈ ધરાવતા તેમજ અવગણ્ય આડછેદવાળા બે સરેખ પુરસ્પર સમાંતર તારને શૂન્યાવકાશમાં એકબીજાથી 1 m અંતરે રાખી દરેક તારમાંથી સમાન વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં તેમની 1 m લંબાઈદીઠ તેમની વચ્ચે પરસ્પર 2×10^{-7}N બળ લાગે, તો દરેક તારમાં વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહના મૂલ્યને એક ઍમ્પિયર કહે છે. (1948થી માન્ય)
થર્મોડાઇનેમિક તાપમાન	કેલ્વિન	K	પાણીના ટ્રીપલ પૉઇન્ટના તાપમાનના 1/273.16માં ભાગને થર્મોડાઇનેમિક માપક્રમ પર એક કૅલ્વિન કહેવામાં આવે છે. (1967થી માન્ય)
જ્યોતિ તીવ્રતા	કેન્ડેલા	cd	આપેલ દિશામાં 540×10^{12} Hz આવૃત્તિ ધરાવતા ઉત્સર્જિત એક રંગી વિકિરણ અને તે જ દિશામાં 1/683 W/sr જેટલી વિકિરણતીવ્રતા ધરાવતાં ઉદ્‌ગમની જ્યોતિ તીવ્રતાને કેન્ડેલા કહે છે. (1979થી માન્ય)
દ્રવ્યનો જથ્થો	મોલ	mol	0.012 kg દળ ધરાવતા કાર્બન (C^{12})માં જેટલા પરમાણુ છે, તેટલા જ ઘટકકણ ધરાવતા દ્રવ્યના જથ્થાને મોલ કહે છે. (1971થી માન્ય)

નોંધ : (1) ઉપર્યુક્ત ટેબલમાં આપેલી વ્યાખ્યાઓ માત્ર જાણકારી પૂરતી છે.

(2) મોલએકમ સાથે કયા કણોની વાત કરીએ છીએ, તે સ્પષ્ટ કરવું જોઈએ. દા.ત., પરમાણુનો મોલ કે અણુનો મોલ કે આયનોનો મોલ કે ઇલેક્ટ્રૉનનો મોલ.

2.4.1 સાધિત એકમો (Derived Units)

સાત મૂળભૂત SI એકમો પરથી જુદી-જુદી ભૌતિક રાશિઓ માટે ઉપજાવેલા એકમોને મૂળભૂત એકમોના રૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. તેમને સાધિત એકમો કહે છે.

દા.ત., પ્રવેગનો SI પદ્ધતિમાં એકમ

$$= \frac{\text{અંતરનો એકમ}}{(\text{સમયનો એકમ})^2} = \frac{m}{s^2} = m\ s^{-2}$$

કાર્યનો એકમ= (બળનો એકમ) × (સ્થાનાંતરનો એકમ)

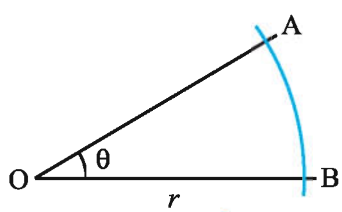
$$= \frac{kg\ m}{s^2} \times (m) = kg\ m^2\ s^{-2}$$

2.4.2 પૂરક એકમો (Supplementary Units)

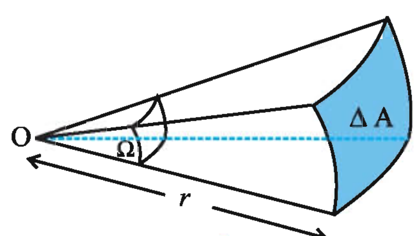
એકમપદ્ધતિની પૂરક ભૌતિક રાશિઓ, એકમો અને સંજ્ઞા ટેબલ 2.2 માં દર્શાવેલ છે.

ટેબલ 2.2 : પૂરક એકમો

ક્રમ	પૂરક ભૌતિક રાશિ	SI એકમ	સંજ્ઞા	સમજૂતી
1.	સમતલકોણ (θ) (Plane angle)	રેડિયન	rad	વર્તુળ પરના ચાપ અને ત્રિજ્યાના ગુણોત્તરને સમતલકોણ (θ) કહે છે. (θ) $= \frac{\text{ચાપ}}{\text{ત્રિજ્યા}} = \frac{AB}{r}$ (જુઓ આકૃતિ 2.1 (a). ત્રિજ્યા જેટલી લંબાઈના વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર સાથે આંતરેલા સમતલકોણને 1 રેડિયન કહે છે. ($1^\circ = \pi/180$ rad)
2.	ઘનકોણ (Ω) (Solid angle)	સ્ટીરેડિયન	sr	ગોળાના પૃષ્ઠ પરના ક્ષેત્રફળ (ΔA) એ ગોળાના કેન્દ્ર સાથે આંતરેલ કોણને ઘનકોણ (Ω) કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 2.1 (b)). વ્યાખ્યા અનુસાર, $\Omega = \frac{\text{ક્ષેત્રફળ}(\Delta A)}{(\text{ત્રિજ્યા})^2} = \frac{\Delta A}{r^2}$ જ્યારે $\Delta A = 1m^2$, $r = 1m$, હોય તો $\Omega = 1$ સ્ટીરેડિયન



(a) સમતલ કોણ



(b) ઘનકોણ

આકૃતિ 2.1

2.4.3 SI પદ્ધતિના ઉપયોગ માટેના વ્યાવહારિક નિયમો (Practical norms for the use of SI system)

(1) દરેક ભૌતિક રાશિનો એકમ તેના સંકેત મુજબ જ દર્શાવવો જોઈએ.

(2) એકમના સંકેતાક્ષરોની વચ્ચે કે અંતે પૂર્ણવિરામ મૂકવું નહિ. દા.ત., કિલોગ્રામ માટે k.g. કે kg. લખી શકાય નહિ, પણ kg લખાય.

(3) જ્યારે બહુવચનમાં એકમનો ઉપયોગ કરવાનો થાય ત્યારે સંજ્ઞામાં ફેરફાર થવો જોઈએ નહિ, દા.ત., અનેક મીટર દર્શાવવા માટેની સંજ્ઞા પણ m જ છે.

(4) અંશ અને છેદમાં રહેલી ભૌતિક રાશિઓને એક જ ગુણોત્તર વડે દર્શાવવી જોઈએ. દા.ત., પ્રવેગનો એકમ SI પદ્ધતિમાં m/s^2 અથવા $m\ s^{-2}$; લખવો પરંતુ m/s/s ન લખવો.

(5) જો કોઈ એકમ વિજ્ઞાનીના નામે હોય અને તે એકમ આખો લખવો હોય તો પ્રથમ અક્ષર કૅપિટલ લખવો નહિ, પરંતુ તે એકમને સંકેત રૂપે લખવો હોય, તો પ્રથમ અક્ષર કેપિટલ જ રાખવો. જેમકે બળ માટે આખો એકમ લખવો હોય તો newton લખવું પરંતુ સંકેત રૂપે લખવો હોય તો માત્ર N લખવું. દબાણના એકમને pascal અને સંકેતમાં Pa લખાય.

2.5 લંબાઈનું માપન (Measurement of Length)

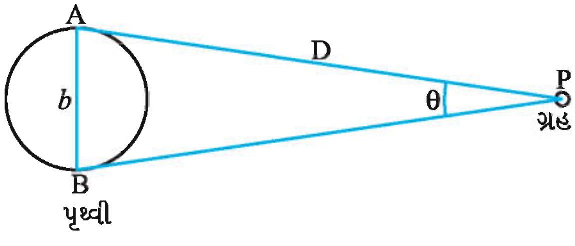
લંબાઈના સીધા (પ્રત્યક્ષ) માપનની અમુક રીતથી તો તમે સૌ માહિતગાર છો જ અને અમુક રીતો તમે પ્રયોગશાળામાં શીખશો. જેમકે 10^{-3} m થી 10^2 m ક્રમના માપન માટે મીટરપટ્ટીનો ઉપયોગ થાય છે. જ્યારે 10^{-4} m ના ક્રમનું ચોકસાઈપૂર્વકનું માપન કરવા માટે વર્નિયર કેલિપર્સનો ઉપયોગ થાય છે. જ્યારે 10^{-5} m ના ક્રમના માપન માટે સ્ક્રૂ-ગેજ અને સ્ફેરોમીટરનો ઉપયોગ થાય છે.

ખૂબ જ મોટાં અંતરોના તથા અવકાશીય અંતરોના માપન માટે અમુક પરોક્ષ રીતોનો ઉપયોગ થાય છે. તેમાંની અમુક રીતો આપણે અભ્યાસ કરીશું.

2.5.1 મોટા અંતરના માપન માટેની દૃષ્ટિસ્થાનભેદની રીત (Parallax Method)

મોટા અંતરના માપન માટે દૃષ્ટિસ્થાનભેદ (Parallax) ની રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય છે.

આ રીતમાં પૃથ્વી પરનાં કોઈ બે સ્થળો A અને B પરથી એકસાથે, પૃથ્વીથી D જેટલા અંતરે આવેલ ગ્રહનું નિરીક્ષણ કરી, અતિ દૂરના તારાઓના સંદર્ભમાં નિરીક્ષણ-દિશાઓ નક્કી કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ 2.2

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે આકૃતિ (2.2)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ ગ્રહ Pનું પૃથ્વીના કોઈ વ્યાસાંતે આવેલાં સ્થળો A અને B પરથી એકસાથે અવલોકનો કરતાં અવલોકન-દિશાઓ AP અને BP મળે છે.

હવે પૃથ્વીથી ગ્રહનું અંતર પૃથ્વીના વ્યાસ કે પૃથ્વી પરનાં કોઈ બે અવલોકનસ્થાનો વચ્ચેના અંતરની સરખામણીમાં ઘણું જ મોટું હોવાથી ખૂણો θ અત્યંત નાનો હોય છે. (ખૂણો θએ દૃષ્ટિસ્થાનભેદકોણ કહેવાય છે.) તેથી, ખૂણાની રેડિયનમાં વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\theta = \frac{\text{ચાપ}}{\text{ત્રિજ્યા}} = \frac{AB}{AP}$$

$$= \frac{\text{બે અવલોકન સ્થાન વચ્ચેનું અંતર } b}{\text{પૃથ્વીથી ગ્રહનું અંતર D}}$$

$$\therefore D = \frac{b}{\theta} \qquad (2.5.1)$$

ઉદાહરણ 1 : પૃથ્વીના વ્યાસાંતે આવેલાં A અને B પરથી એકસાથે ચંદ્રનું અવલોકન કરવામાં આવે છે. બે અવલોકનદિશાઓ વચ્ચેનો કોણ $1°54'$ મળે છે. જો પૃથ્વીનો વ્યાસ 1.276×10^7m, લઈએ, તો પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : $D = \frac{b}{\theta}$

$$\theta = 1°54' = 60' + 54' = 114'$$

$$= \frac{114'}{60} \text{ ડીગ્રી}$$

$$= \frac{114}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\therefore \theta = 3.32 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

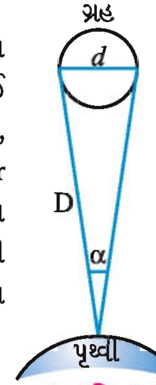
$$b = 1.276 \times 10^7 \text{m}$$

$$\therefore D = \frac{1.276 \times 10^7}{3.32 \times 10^{-2}}$$

$$= 3.84 \times 10^8 \text{m}$$

2.5.2 ગ્રહ કે તારાના પરિમાણનું માપન (Measurement of the Size of a Planet or a Star)

જો ગ્રહનો વ્યાસ d હોય અને આ વ્યાસ વડે પૃથ્વી પરના કોઈ અવલોકનસ્થળે આંતરાતો કોણ α હોય, તો α ને ગ્રહનો કોણીય વ્યાસ (angular diameter) કહે છે. આપેલા અવલોકનસ્થળે ટેલિસ્કોપને વારાફરતી ગ્રહના વ્યાસાંતે ગોઠવવાથી α નું માપન થઈ શકે છે.



આકૃતિ 2.3

$$\alpha = \frac{d}{D} \text{ (in rad)} \qquad (2.5.2)$$

*ફૂટનોટ : 1° (અંશ-ડિગ્રી) = 60′ (મિનિટ)
= 3600″ (સેકન્ડ)

જો પૃથ્વીથી ગ્રહનું અંતર D જાણીતું હોય તો, સમીકરણ (2.5.2) નો ઉપયોગ કરીને d શોધી શકાય છે.

વ્યવહારમાં ખૂણો α ઘણો નાનો હોય છે.

ઉદાહરણ 2 : સૂર્યના કોણીય વ્યાસનું માપન 1920″ છે. જો પૃથ્વીનું સૂર્યથી અંતર 1.496×10^{11} m હોય, તો સૂર્યનો વ્યાસ શોધો. ($1'' = 4.85 \times 10^{-6}$ rad)

ઉકેલ : $\alpha = 1920''$, $D = 1.496 \times 10^{11}$ m

$\alpha = \frac{d}{D}$ પરથી,

$$d = \alpha D$$

$$= (1920)(4.85)(10^{-6})(1.496 \times 10^{11})$$

$$= 1.393 \times 10^{9} \text{ m}$$

2.5.3 ખૂબ જ સૂક્ષ્મઅંતરોનું માપન, અણુનું કદ (Measurement of Very Small Distances, Size of Molecule)

ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતરો, જેમકે અણુનું કદ (10^{-8}m થી 10^{-10} m), ના માપન માટે આપણે વર્નિયર કેલિપર્સ અથવા માઇક્રોમીટર સ્ક્રૂ-ગેજ કે તેના જેવા માપનના બીજા સાધનનો ઉપયોગ કરી શકીએ નહિ. આ માટે આપણે કોઈ ખાસ રીતને અપનાવવી પડે. ઑપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કોપ એ દૃશ્યપ્રકાશના તરંગોનો ઉપયોગ કરે છે. દૃશ્યપ્રકાશની તરંગલંબાઈ 4000 Å થી 8000 Å (1 Å = 10^{-10}m) જેટલી છે. આથી, તેની મદદથી આ અંતર કરતાં નાના કણોનાં કદ જોઈ કે માપી શકાતાં નથી. ત્યારબાદ વિકસાવવામાં આવેલ ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કોપમાં દૃશ્યપ્રકાશને બદલે ઇલેક્ટ્રૉન બીમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ માઇક્રોસ્કોપનું વિભેદન 0.6 Å જેટલું હોય છે. આથી તેની મદદથી દ્રવ્યમાં રહેલા અણુ-પરમાણુઓને જોઈ શકાય છે. (તમને આશ્ચર્ય થશે કે આવા માઇક્રોસ્કોપમાં ઇલેક્ટ્રૉન કણ તરીકે નહિ પરંતુ તરંગ તરીકે વર્તે છે !) હાલમાં નેનોટેક્નોલૉજીના અભ્યાસ માટે વિકસાવવામાં આવેલ સ્કેનિંગ ટનલિંગ માઇક્રોસ્કોપની (STM) વિભેદનશક્તિ એટલી ઊંચી છે કે જેની મદદથી પરમાણુંની સાઇઝનો અંદાજ મેળવવો શક્ય બન્યો છે.

અણુનો વિસ્તાર માપવાની એક રીતમાં આણ્વિક સ્તર (Monomolecular Layer)ની રીત જાણીતી છે. આ રીતમાં આણ્વિક સ્તરની જાડાઈ શોધવામાં આવે છે. તેના પરથી અણુવિસ્તાર જાણી શકાય છે. જેમકે, સ્ટિયરિક એસિડનું સ્તર અમુક જાડાઈ કરતાં વધુ પાતળું બની શકતું નથી. આ સ્થિતિમાં સ્ટિયરિક એસિડના અણુઓનો વ્યાસ સ્તરની જાડાઈ બરાબર હોય છે.

ભૌતિકશાસ્ત્રમાં આપણે ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતર અને ખૂબ જ મોટા અંતરો સાથે કામ લેવાનું હોય છે. દા.ત., ન્યુક્લિયસની સાઈઝ 10^{-14}m ના ક્રમની છે જ્યારે ગેલેક્સીની સાઈઝ 10^{21}m છે. આથી, સૂક્ષ્મ તેમજ મોટા અંતરો માટે અંતરના કેટલાક ખાસ એકમો વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યા છે જે નીચે મુજબ છે.

1 ફર્મી = 1fm = 10^{-15}m

1 ઍંગ્સ્ટ્રોમ = 1 Å = 10^{-10}m

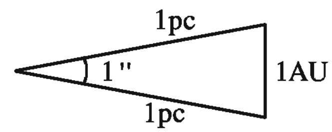
1 એસ્ટ્રોનોમિકલ યુનિટ = 1 AU = 1.496×10^{11}m

(સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેના સરેરાશ અંતરને 1 AU કહે છે.)

1 પ્રકાશ વર્ષ = 1 ly = 9.46×10^{15}m

1 પાર્સેક = 3.08×10^{16}m

1 AU જેટલી લંબાઈ વડે જે અંતરે 1″ જેટલો કોણ આંતરાતો હોય તે અંતરને 1 પાર્સેક (pc) કહે છે.



આકૃતિ 2.4

$$r = \frac{l}{\theta} = \frac{1 \text{ AU}}{1''}$$

$$= \frac{1.496 \times 10^{11}}{\frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180}} = 3.08 \times 10^{16}\text{m}$$

$$\therefore \ 1\text{pc} = 3.08 \times 10^{16}\text{m}$$

2.6 દળનું માપન (Measurement of Mass)

પદાર્થમાં રહેલા દ્રવ્યના જથ્થાને દળ (Mass) કહે છે. દળ એ દ્રવ્યનો આંતરિક ગુણધર્મ હોઈ તેનું મૂલ્ય સામાન્ય સંજોગોમાં કોઈ બાહ્ય પરિબળો જેવાં કે તાપમાન, દબાણ પર આધાર રાખતું નથી.

કોઈ પણ પદાર્થના દળનું માપન સામાન્ય રીતે સાદી તુલા વડે કરવામાં આવે છે. આ રીતમાં આપણે પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વીય બળ (mg)ને કોઈ પ્રમાણભૂત પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વીય બળ સાથે સરખાવવામાં આવે છે. યાદ રાખો કે ગુરુત્વીય બળ mgમાં જે દળ ભાગ ભજવે છે, તેને ગુરુત્વીય દળ કહે છે. આ જ તુલા વડે મપાતું દળ ગુરુત્વીય દળ છે તેમ કહેવાય. આપેલા પદાર્થનું ગુરુત્વીય દળ બધાં જ સ્થળોએ સમાન હોય છે.

પદાર્થ પર લાગતા પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (mg)ને પદાર્થનું વજન (Weight) કહે છે. આ પરથી કહી શકાય કે પદાર્થનું વજન એ તે સ્થળના ગુરુત્વપ્રવેગ પર આધારિત હોય છે. જેમકે કોઈ પદાર્થને પૃથ્વી પરથી ચંદ્ર પર લઈ જવામાં આવે, તો પૃથ્વી પરના તેના વજન કરતાં ચંદ્ર પર તેનું વજન જુદું હશે.

વળી, જ્યારે અણુ કે પરમાણુના દળની વાત કરીએ,

તો તે કિલોગ્રામમાં માપવું સગવડભર્યું ન ગણાય. આથી, તે atomic mass unit માં નક્કી થાય છે.

અનુત્તેજિત C^{12}ના પરમાણુદળના બારમા ભાગને 1 amu દળ કહે છે. $1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg. તેને 1u વડે પણ દર્શાવવામાં આવે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે 10^{-30} kg થી 10^{55} kg ક્રમના દ્રવ્યમાન સાથે કામ લેવાનું આવે છે.

ગ્રહો, તારાઓ જેવા મોટા પદાર્થોનાં દળ ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ પરથી નક્કી કરી શકાય છે. સૂક્ષ્મ કણોના દળ Mass Spectrographની રીતથી શોધી શકાય છે. (આ રીતમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરતાં કણના ગતિપથની ત્રિજ્યા તેના દળના સમપ્રમાણમાં હોય છે.)

2.7 સમયનું માપન (Measurement of Time)

પ્રાચીન સમયમાં સૂર્યના પ્રકાશમાં પડતા પડછાયાના માપ પરથી સમયનું અનુમાન કરવામાં આવતું. ત્યાર બાદ લોલકની શોધ પછી ઉત્તરોત્તર સમયમાપનમાં ઘણો જ વિકાસ થયો છે. હવે તો આપણે સમયગાળાનું માપન કરવા ઘડિયાળનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. આજે તો વધારે ચોકસાઈપૂર્વક અને સૂક્ષ્મ સમયમાપન માટે ઍટોમિક ક્લોક પણ શોધાઈ ચૂકી છે. આ ઉપરાંત સૂક્ષ્મ સમયના માપન માટે કૅમેરા, મલ્ટીફ્લેશ ફોટોગ્રાફી વગેરેનો પણ ઉપયોગ થાય છે.

2.8 માપનમાં ચોકસાઈ અને સચોટતા (Accuracy and Precision in Measurement)

સૌપ્રથમ આપણે ચોક્સાઈ (Accuracy) અને સચોટતા (Precision) વચ્ચેનો ભેદ સમજીએ. **કોઈ રાશિના માપનનું મૂલ્ય તે રાશિના સાચા મૂલ્યની કેટલી નજીક છે, તેને ચોકસાઈ (Accuracy) કહે છે. આ માપન કેટલાં વિભેદન (Resolution) અથવા સીમા (Limit) સુધી કરવામાં આવ્યું છે. તેને સચોટતા (Precision) કહે છે.** દા.ત., તમારી ડિજિટલ ઘડિયાળ 10:11:12 AMનો સમય દર્શાવે છે. ઘડિયાળનું લઘુતમ માપ 1 સેકન્ડ છે. એટલે કે સમયના આ માપનમાં સચોટતા વધુ છે. ધારો કે તમારા દાદાની ઘડિયાળમાં સેકન્ડ કાંટો નથી. તે 10:13 AM સમય દર્શાવે છે. આ ઘડિયાળનું લઘુતમ માપ 1 min હોવાથી તેના માપનમાં સચોટતા ઓછી છે. તેમ કહેવાય. પરંતુ જો ડિજિટલ ઘડિયાળ ધીમી ચાલતી હોય અને દાદાની ઘડિયાળ સમયસર ચાલતી હોય તો ડિજિટલ ઘડિયાળથી માપેલ સમયમાં ચોકસાઈ ઓછી અને દાદાની ઘડિયાળ વધુ ચોક્કસ છે. તેમ કહેવાય.

ભૌતિક રાશિના માપનમાં વધુમાં વધુ ચોકસાઈ અને વધુમાં વધુ સચોટતા હોવી જરૂરી છે. સચોટતા સાધનની લઘુતમ માપશક્તિ પર આધાર રાખે છે. વર્નિયર કેલિપર્સ કરતાં માઈક્રોમીટર સ્ક્રૂ-ગેજથી માપેલ ગોળાની ત્રિજ્યાના માપનમાં સચોટતા વધુ હોય છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ભૌતિક રાશિનું મૂલ્ય પ્રાયોગિક રીતે ચોકસાઈપૂર્વક માપવા માટે કેટલીક બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જરૂરી છે. જેમકે,

(1) પ્રયોગકર્તાની કુશળતા

(2) પ્રયોગના સાધનની ગુણવત્તા

(3) પ્રયોગમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલી પદ્ધતિ

(4) પ્રયોગના પરિણામ પર અસર કરતાં બાહ્ય અને આંતરિક પરિબળો

2.9 માપનમાં ઉદ્‌ભવતી ત્રુટિઓ (Errors in Measurement)

પ્રયોગશાળામાં જુદાં-જુદાં ઉપકરણોની મદદથી જુદી-જુદી ભૌતિક રાશિઓનું માપન કરવામાં આવે ત્યારે ભૌતિક રાશિના માપનના પરિણામમાં કેટલી અચોકસાઈ રહેલી છે તે પણ દર્શાવવું જોઈએ. આવી **અચોકસાઈના માપને આપણે ત્રુટિ તરીકે ઓળખીએ છીએ.**

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં માપનમાં ઉદ્‌ભવતી ત્રુટિઓને બે પ્રકારમાં વહેંચી શકાય :

(1) વ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Systematic Error)

(2) અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Random Error)

(1) વ્યવસ્થિત ત્રુટિ : વ્યવસ્થિત ત્રુટિઓ આપેલા પ્રયોગ દરમિયાન એક જ દિશામાં એટલે કે ધન અથવા ઋણ જ હોય છે. આવી ત્રુટિઓ ધન અને ઋણ એમ એકીસાથે ન હોઈ શકે. આ ત્રુટિના અમુક ઉદ્‌ગમો નીચે મુજબ છે :

(a) સાધનની ત્રુટિ (Instrumental Error) : આ પ્રકારની ત્રુટિ સાધનમાં રહેલી કોઈ ક્ષતિ કે સાધનમાં સ્કેલના ખામીયુક્ત કેલિબ્રેશન (અંકન)ને કારણે ઉદ્‌ભવે છે. દા.ત., સ્પ્રિંગકાંટા પર પદાર્થ લટકાવ્યો ન હોય ત્યારે દર્શક શૂન્ય પર રહેવાને બદલે 0.1 ગ્રામ પર રહેતો હોય તો દરેક અવલોકનમાં નિયમિત રીતે 0.1 ગ્રામ જેટલી ત્રુટિ ઉદ્‌ભવે છે.

(b) પ્રયોગપદ્ધતિને કારણે ઉદ્‌ભવતી ત્રુટિ (Error due to Imperfection in Experimental Technique or Procedure) : ઉદાહરણ તરીકે થર્મોમીટરની મદદથી શરીરનું તાપમાન માપવામાં આવે છે. ત્યારે થર્મોમીટરના શક્યતઃ અપૂર્ણ સંપર્કને કારણે શરીરનું સંપૂર્ણ સાચું તાપમાન મપાતું નથી. પ્રયોગ દરમિયાન બાહ્ય પરિબળો જેમકે તાપમાન, દબાણ, હવામાં રહેલો ભેજ વિગેરે પણ માપનમાં વ્યવસ્થિત ત્રુટિ ઉત્પન્ન કરી શકે છે.

(c) વ્યક્તિગત ત્રુટિ (Personal Error) : પ્રયોગ દરમિયાન અવલોકન લેનાર વ્યક્તિની અવલોકન લેવાની ખાસિયત, પદ્ધતિ, અવલોકન લેવામાં બેકાળજી અથવા સાધનોની અયોગ્ય ગોઠવણીને કારણે આ પ્રકારની ત્રુટિ ઉદ્‌ભવે છે.

પ્રયોગપદ્ધતિમાં સુધારો કરી, સારી ગુણવત્તાવાળાં સાધનો વાપરી તેમજ વ્યક્તિગત નબળાઈઓ દૂર કરી માપનમાં ઉદ્‌ભવતી વ્યવસ્થિત ત્રુટિ ઓછી કરી શકાય છે.

(2) અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Random Error) : પ્રયોગ દરમિયાનનાં અસરકર્તા પરિબળોમાં અનિયમિત ફેરફારોના કારણે અને આગાહી ન કરી શકાય તેવાં પરિબળોને કારણે અવલોકનમાં જે ત્રુટિ ઉદ્‌ભવે છે, તેને અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ કહે છે. પ્રયોગ દરમિયાન કોઈ વ્યક્તિ કોઈ ભૌતિક રાશિનું વારંવાર માપન (અવલોકન) કરશે તો તે દરેક વખતે અવલોકન સમાન મળશે નહિ.

આ ત્રુટિઓ ધન અને ઋણ બંને પ્રકારની હોઈ શકે છે. ઘણાં બધાં અવલોકનોની સરેરાશ લઈ (સાર્થકઅંકો ધ્યાનમાં રાખી) આ પ્રકારની ત્રુટિનો અંદાજ કાઢી શકાય છે.

2.9.1 ત્રુટિઓનો અંદાજ (Estimation of Errors)

(1) નિરપેક્ષ ત્રુટિ અને સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ (Absolute Error and Average Absolute Error) : કોઈ ભૌતિકરાશિના સાચા મૂલ્ય (સરેરાશ મૂલ્ય) અવલોકન (પ્રાયોગિક મૂલ્ય)ના ધન તફાવતને તે અવલોકનની નિરપેક્ષ ત્રુટિ કહે છે.

આપણે સાચું મૂલ્ય જાણતાં ન હોઈએ ત્યારે સરેરાશ માપનના સાચા મૂલ્ય તરીકે લેવામાં આવે છે.

ધારો કે કોઈ ભૌતિક રાશિ a ના અવલોકનો a_1, a_2, a_3,...., a_n છે. તેનું સરેરાશ મૂલ્ય $\overline{a}$ હોય, તો

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

તેથી પ્રત્યેક અવલોકન માટે મળતી નિરપેક્ષ ત્રુટિ,

$$\Delta a_1 = |\overline{a} - a_1|$$
$$\Delta a_2 = |\overline{a} - a_2|$$
...
...
$$\Delta a_n = |\overline{a} - a_n|$$

Δa_1, Δa_2.... Δa_n ને દરેક અવલોકનની નિરપેક્ષ ત્રુટિ કહે છે, જે ધન અને તેમની સરેરાશને **સરેરાશ નિરપેક્ષ** ત્રુટિ કહે છે.

સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ,

$$\Delta\overline{a} = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2 + ... + \Delta a_n}{n}$$ અથવા

$$\Delta\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i$$

આમ, કોઈ ભૌતિક રાશિ a નું માપન નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$$a = \overline{a} \pm \Delta\overline{a}$$

આનો અર્થ એવો થાય કે ભૌતિક રાશિ 'a' નું મૂલ્ય ($\overline{a} + \Delta\overline{a}$) અને ($\overline{a} - \Delta\overline{a}$) ની વચ્ચે હોવાની મહત્તમ સંભાવના છે.

(2) સાપેક્ષ કે આંશિક ત્રુટિ (Relative or Fractional Error) : પ્રયોગ દરમિયાન મળેલ સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ $\Delta\overline{a}$ અને $\overline{a}$ના ગુણોત્તરને સાપેક્ષ ત્રુટિ (δa) કહે છે.

$$\therefore \delta a = \frac{\Delta\overline{a}}{\overline{a}}$$

(3) પ્રતિશત ત્રુટિ (Percentage Error) : સાપેક્ષ ત્રુટિને ટકામાં દર્શાવવામાં આવે, તો તેને પ્રતિશત ત્રુટિ કહે છે.

$$\text{પ્રતિશત ત્રુટિ} = \delta a \times 100\ \%$$
$$= \frac{\Delta\overline{a}}{\overline{a}} \times 100\ \%$$

ઉદાહરણ 3 : કાચનો વક્રીભવનાંક શોધવાના પ્રયોગમાં વક્રીભવનાંકનાં મૂલ્યો 1.54, 1.53, 1.44, 1.54, 1.56 અને 1.45 મળે છે. તો (1) સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ (2) સાપેક્ષ ત્રુટિ તથા (3) પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો. કાચના વક્રીભવનાંકનું મૂલ્ય નિરપેક્ષ ત્રુટિ સહિત અને પ્રતિશત ત્રુટિ સહિત દર્શાવો.

ઉકેલ :

(1) સરેરાશ વક્રીભવનાંક,

$$\overline{n} = \frac{1{\cdot}54 + 1{\cdot}53 + 1{\cdot}44 + 1{\cdot}54 + 1{\cdot}56 + 1{\cdot}45}{6}$$
$$= 1{\cdot}51$$

આ સરેરાશ વક્રીભવનાંકના આધારે દરેક અવલોકનની નિરપેક્ષ ત્રુટિ નીચે મુજબ મળશે.

$$\Delta n_1 = |1{\cdot}51| - |1{\cdot}54| = |-0{\cdot}03| \qquad \Delta n_4 = |1{\cdot}51| - |1{\cdot}54| = |-0{\cdot}03|$$
$$\Delta n_2 = |1{\cdot}51| - |1{\cdot}53| = |-0{\cdot}02| \qquad \Delta n_5 = |1{\cdot}51| - |1{\cdot}56| = |-0{\cdot}05|$$
$$\Delta n_3 = |1{\cdot}51| - |1{\cdot}44| = |+0{\cdot}07| \qquad \Delta n_6 = |1{\cdot}51| - |1{\cdot}45| = |+0{\cdot}06|$$

નિરપેક્ષ ત્રુટિની સરેરાશ કિંમત મેળવવા માત્ર મૂલ્યોને ધ્યાનમાં લેતાં,

$$\Delta\overline{n} = \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2 + ... + \Delta n_6}{6}$$

$$= \frac{|-0{\cdot}03| + |-0{\cdot}02| + |+0{\cdot}07| + |-0{\cdot}03| + |-0{\cdot}05| + |+0{\cdot}06|}{6}$$

$$\Delta\overline{n} = \frac{0{\cdot}26}{6} = 0{\cdot}043 \approx 0{\cdot}04$$

અહીં કાચના વક્રીભવનાંકનું મૂલ્ય નિરપેક્ષ ત્રુટિ સહિત દર્શાવતાં, $n = 1{\cdot}51 \pm 0{\cdot}04$ એટલે કે વક્રીભવનાંકનું મૂલ્ય 1·55 અને 1·47ની વચ્ચે હશે.

(2) સાપેક્ષ ત્રુટિ $= \dfrac{\Delta \overline{n}}{\overline{n}} = \dfrac{0{\cdot}04}{1{\cdot}51}$

$= 0{\cdot}02649 = 0{\cdot}03$

(3) પ્રતિશત ત્રુટિ $= 0{\cdot}03 \times 100 = 3\%$

વક્રીભવનાંકનું મૂલ્ય પ્રતિશત ત્રુટિ સહિત દર્શાવતાં $n = 1{\cdot}51 \pm 3\%$

2.9.2 ત્રુટિઓનું સંયોજન (Combination of Errors)

પ્રયોગમાં જ્યારે ઘણાં બધાં અવલોકનો લેવામાં આવે, ત્યારે આ ત્રુટિઓનું સંયોજન કઈ રીતે થાય છે તે જાણવું જરૂરી છે. દા.ત., ઘનતા નક્કી કરવાના પ્રયોગમાં પદાર્થનાં દળ અને કદ બંને માપવા પડે અને તે બંનેમાં કંઈક ત્રુટિ ઉદ્ભવશે. આ ત્રુટિઓની અસર ઘનતાના મૂલ્યમાં કેટલી હશે તે જાણવું જરૂરી બને છે.

(1) સરવાળા અને બાદબાકીમાં ત્રુટિ (Errors in Sum and in Difference) : ધારો કે બે ભૌતિક રાશિ A અને B નું માપન કર્યું છે અને તેમનાં પ્રાયોગિક મૂલ્યો $A \pm \Delta A$ અને $B \pm \Delta B$ છે, જ્યાં ΔA અને ΔB તે ભૌતિક રાશિની સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ છે, તો આ ભૌતિક રાશિઓના સરવાળામાં મળતી નિરપેક્ષ ત્રુટિ ΔZ હોય તો,

$Z = A + B$ (સરવાળા માટે)

$\therefore Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B)$

$= (A + B) \pm (\Delta A + \Delta B)$

$\therefore$ Zમાં ઉત્પન્ન થતી મહત્તમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$

જ્યારે બાદબાકી માટે,

$Z = A - B$

$\therefore Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$

$= (A - B) \pm \Delta A \mp \Delta B$

$\therefore \pm \Delta Z = \pm \Delta A \mp \Delta B$

એટલે કે ΔZનાં ચાર સંભવિત મૂલ્યો $(+\Delta A - \Delta B)$, $(+\Delta A + \Delta B)$, $(-\Delta A - \Delta B)$, $(-\Delta A + \Delta B)$ થશે, જેમાં $(+\Delta A + \Delta B)$ એ મહત્તમ મૂલ્ય છે. આ રીતે, Zમાં મળતી મહત્તમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ પણ $(\Delta A + \Delta B)$ છે.

આથી કહી શકાય કે, **'જ્યારે બે ભૌતિક રાશિઓનો સરવાળો કે બાદબાકી કરવામાં આવે, ત્યારે તેના અંતિમ પરિણામમાં મળતી મહત્તમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ દરેક ભૌતિક રાશિમાં મળતી નિરપેક્ષ ત્રુટિના સરવાળા બરાબર હોય છે.'**

ઉદાહરણ 4 : અવરોધ $R_1 = 100 \pm 3\Omega$ અને અવરોધ $R_2 = 200 \pm 4\Omega$ ને શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે, તો સમતુલ્ય અવરોધમાં રહેલી મહત્તમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ શોધો. આ સમતુલ્ય અવરોધને પ્રતિશત ત્રુટિ સાથે દર્શાવો.

ઉકેલ :

$R \pm \Delta R = R_1 + R_2$

$= (100 \pm 3) + (200 \pm 4)$

$= 300 \pm 7\Omega$

$\therefore$ મહત્તમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ $= 7\Omega$

હવે, પ્રતિશત ત્રુટિ $= \dfrac{\Delta R}{R} \times 100$

$= \dfrac{7}{300} \times 100$

$= 2.3\ \%$

$\therefore$ સમતુલ્ય અવરોધને પ્રતિશત ત્રુટિ સાથે દર્શાવતાં $R = 300 \pm 2.3\ \%$

(2) ગુણાકાર અને ભાગાકારમાં ત્રુટિ (Errors in Product and in Division) :

જો $Z = AB$ હોય A અને B નાં પ્રાયોગિક મૂલ્યો અનુક્રમે $A \pm \Delta A$ તથા $B \pm \Delta B$ હોય તો,

$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B)$

$= AB \pm A\Delta B \pm B\Delta A \pm \Delta A\Delta B$

સમીકરણની ડાબી બાજુ Z વડે તથા જમણી બાજુ AB વડે ભાગતાં,

$$1 \pm \frac{\Delta Z}{Z} = 1 \pm \frac{\Delta A}{A} \pm \frac{\Delta B}{B} \pm \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\Delta B}{B}$$

અહીં $\dfrac{\Delta A}{A}$ અને $\dfrac{\Delta B}{B}$ ખૂબ જ નાના હોવાથી તેમનો ગુણાકાર અવગણતાં Z માં આંશિક ત્રુટિ,

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

આ જ રીતે ભાગાકાર માટે આ જ પરિણામ મેળવી શકાય છે.

આથી કહી શકાય કે, **'જ્યારે બે ભૌતિક રાશિઓનો ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરવામાં આવે ત્યારે અંતિમ પરિણામમાં મળતી મહત્તમ સાપેક્ષ ત્રુટિ (અથવા આંશિક ત્રુટિ) પ્રત્યેક ભૌતિક રાશિમાં મળતી સાપેક્ષ ત્રુટિ (આંશિક ત્રુટિ)ના સરવાળા બરાબર હોય છે.**

ઉદાહરણ 5 : પદાર્થની ઘનતા માપવાના પ્રયોગમાં પદાર્થનું દળ, $m = (3 \pm 0.12)$kg અને $V = (10 \pm 1)m^3$ નોંધવામાં આવ્યું છે. તો ઘનતા ($\rho = \frac{m}{V}$)ના માપનમાં આંશિક ત્રુટિ તથા પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ : $\rho = \frac{m}{V}$

∴ ઘનતાના માપનમાં આંશિક ત્રુટિ $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$

$$= \frac{0.12}{3} + \frac{1}{10}$$

$$= 0.14$$

પ્રતિશત ત્રુટિ $= 0.14 \times 100 = 14\ \%$

(3) ઘાતાંકવાળાં પદોના કિસ્સામાં ત્રુટિ (Error Due to the Power (Index) of a Measure Quantity) :

ધારો કે $Z = A^2 = A \cdot A$

જ્યારે, $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta A}{A}$

$$= 2\frac{\Delta A}{A}$$

આથી $Z = A^2$માં ઉદ્ભવતી ત્રુટિ, Aમાં મળતી આંશિક ત્રુટિથી બે ગણી થાય છે.

આ જ રીતે, જો, $Z=A^n$ હોય, તો $\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$ થાય.

વ્યાપક રીતે લખતાં, જો $Z = \frac{A^p B^q}{C^r}$ હોય તો

$$\frac{\Delta Z}{Z} = p\frac{\Delta A}{A} + q\frac{\Delta B}{B} + r\frac{\Delta C}{C}$$

નોંધ : ભૌતિક રાશિની ઘાત જેમ મોટી તેમ તેની ત્રુટિ મોટી બને છે, તેથી તેનું મૂલ્ય ખૂબ જ ચોકસાઈપૂર્વક માપવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : ગોળાના દ્રવ્યમાનની ઘનતા શોધવાના પ્રયોગમાં mના માપન પ્રતિશત ત્રુટિ 0.26 % છે. અને rના માપનમાં પ્રતિશત ત્રુટિ 0.38 % છે. તો ઘનતામાં પ્રતિશત ત્રુટિ કેટલી ?

ઉકેલ : $\frac{\Delta m}{m} \times 100 = 0.26\ \%$;

$\frac{\Delta r}{r} \times 100 = 0.38\ \%$

ગોળાના દ્રવ્યમાનની ઘનતા $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

∴ ઘનતામાં ત્રુટિ $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta r}{r}$

ઘનતામાં પ્રતિશત ત્રુટિ $= 0.26\ \% + 3\ (0.38\ \%)$

$= 1.40\ \%$

ઉદાહરણ 7 : ભૌતિક રાશિનું સૂત્ર $W = \frac{a^4 b^3}{c^{\frac{1}{3}}\sqrt{d}}$ હોય તથા, a, b, c અને d ના માપનમાં પ્રતિશત ત્રુટિ 1%, 3%, 3% અને 4% હોય, તો Wમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ : $W = \frac{a^4 b^3}{c^{\frac{1}{3}}\sqrt{d}}$

∴ Wમાં પ્રતિશત ત્રુટિ

$$\frac{\Delta W}{W} \times 100 = \left(4\frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{3}\frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{2}\frac{\Delta d}{d}\right) \times 100$$

$$= 4\ (1\%) + 3(3\%)$$

$$+ \frac{1}{3}(3\%) + \frac{1}{2}\ (4\%)$$

$$= 16\ \%$$

ઉદાહરણ 8 : સાદા લોલકના આવર્તકાળનું સૂત્ર $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ છે. લોલકની લંબાઈ 1mm ની ચોકસાઈથી માપતાં તે 10 cm મળે છે. લોલકનો આવર્તકાળ 0.5 s છે. 1 s નું વિભેદન (Resolution) ધરાવતી ઘડિયાળથી નો સમય આ લોલકનાં 100 દોલનો માપવામાં આવે છે. g ના માપનમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ∴ $T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}$

અથવા, $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$

$\therefore \dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\Delta l}{l} + 2\dfrac{\Delta T}{T}$

હવે, Δl = 1mm = 0.1cm, l = 10cm,

કુલ સમય $t = n$T = 0.5 × 100 = 50 s થશે Δt = 1 s છે.

હવે, $T = \dfrac{t}{n}$ અને $\Delta T = \dfrac{\Delta t}{n}$ હોવાથી $\dfrac{\Delta T}{T}$

$= \dfrac{\Delta t}{t}$ થશે.

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta t}{t}$$

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} = \frac{0.1}{10} + 2 \times \frac{1}{50} = 0.05$$

∴ gના માપનમાં પ્રતિશત ત્રુટિ = 0.05 × 100 = 5%.

2.10 સાર્થકઅંકો (Significant Figures)

દરેક માપનની ચોકસાઈને કેટલીક મર્યાદા હોય છે. આ મર્યાદા, માપન માટે ઉપયોગમાં લીધેલા સાધનના લઘુતમ માપ પર આધાર રાખે છે. દા.ત., સેકન્ડ-કાંટો ધરાવતી ઘડિયાળથી એક સેકન્ડ સુધી ચોકસાઈપૂર્વક સમયનું માપન થઈ શકે છે.

ધારો કે મીટરપટ્ટીની મદદથી તમે પેન્સિલની લંબાઈ માપી રહ્યા છો. પેન્સિલનો એક છેડો મીટરપટ્ટીના શૂન્ય પર રાખતાં તેનો બીજો છેડો 12.3 cm અને 12.4 cmની વચ્ચે માલૂમ પડે છે. મીટરપટ્ટીનું લઘુતમ માપ 0.1cm હોવાથી 12.3 cm અને 12.4 cm વચ્ચે કોઈ અંકન હોતું નથી, આથી આપણે અનુમાન લગાવીએ છીએ કે તેની લંબાઈ 12.38 cm છે. અહીં આપણે અંકો 1, 2 અને 3 માટે ચોક્કસ છીએ, પરંતુ છેલ્લા અંક 8 માટે આપણે અચોક્કસ છીએ.

માપ દર્શાવતી કોઈ એક સંખ્યામાં ચોકસાઈપૂર્વકના અંકો ઉપરાંત એક અચોક્કસ છતાં અર્થપૂર્ણ એવા છેલ્લા અંક સાથે લખાતી સંખ્યાને સાર્થક સંખ્યા કહે છે અને તેના અંકોને સાર્થક અંક કહે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં 1, 2, 3 અને 8 એમ ચાર સાર્થક અંકો છે.

માપનમાં જેમ સાર્થક અંકોની સંખ્યા વધારે તેમ તે વધુ ચોકસાઈપૂર્વકનું માપન કહેવાય. સાર્થક અંકોની સંખ્યા, માપન માટે ઉપયોગમાં લેવાયેલા સાધનના લઘુતમ માપ પર આધાર રાખે છે. દા.ત., વર્નિયર કેલિપર્સથી માપેલ કોઈ સળિયાની ત્રિજ્યા r = 0.25 cm છે. આ જ સળિયાની ત્રિજ્યા માઇક્રોમીટર સ્ક્રૂ ગેજ વડે માપતાં તે 0.254 cm છે. પહેલા કિસ્સામાં સાર્થકઅંકો બે (2 અને 5) છે, જ્યારે બીજા કિસ્સામાં સાર્થક અંકો ત્રણ (2, 5 અને 4) છે. જે વધુ સચોટતાપૂર્વક (Precise)નું માપન દર્શાવે છે.

ગણિતમાં તો બધી જ સંખ્યાઓ નિશ્ચિત સંખ્યાઓ જ કહેવાય. પરંતુ જ્યારે કોઈ સંખ્યા ભૌતિક રાશિના માપનને રજૂ કરતી હોય ત્યારે જ તેની સાર્થકતાનો પ્રશ્ન ઉદ્ભવે છે.

2.10.1 સાર્થક અંકોની સંખ્યા નક્કી કરવાના નિયમો (Rules for Determining Number of Significant Digits)

(1) બધા જ શૂન્યેતર (શૂન્ય સિવાયના) અંકો સાર્થક અંક છે. દા.ત., 125.63 g નું માપ દર્શાવતા અવલોકનમાં 1, 2, 5, 6 અને 3 એમ પાંચ સાર્થક અંકો છે.

(2) બે શૂન્યેતર અંકોની વચ્ચેના બધા શૂન્યાંકો પણ સાર્થક અંકો છે. (દશાંશચિહ્નવાળી અને દશાંશચિહ્ન સિવાયની બંને પ્રકારની સંખ્યા માટે આ નિયમ છે.)

દા.ત., 125.004cm સાર્થક સંખ્યામાં 6 સાર્થક અંકો છે.

(3) જો સંખ્યા 1 કરતાં નાની હોય, તો દશાંશચિહ્નની જમણી તરફના, પરંતુ પ્રથમ શૂન્યેતર અંકની ડાબી તરફના અંકો સાર્થક અંકો નથી. દા.ત., <u>0.00</u>1507, સંખ્યામાં લીટી દોરેલાં શૂન્યો સાર્થક અંકો નથી. અહીં સાર્થક અંકોની સંખ્યા 4 છે.

(4) દશાંશચિહ્ન સિવાયની સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યેતર અંકની જમણી તરફના શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.

દા.ત., 132m = 13200cm = 132000mm. અહીં ત્રણેય કિસ્સામાં સાર્થક અંકો (1, 3 અને 2) છે. અહીં સંખ્યામાં શૂન્યો ફક્ત સ્થાનમૂલ્યો જ દર્શાવે છે. એટલે કે જો એકમો બદલી શૂન્યો વધારવામાં આવે, તો સાર્થક અંકોની સંખ્યા બદલાતી નથી.

(5) દશાંશ ચિહ્નવાળી સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યેતર અંક પછીના બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંકો છે.

દા.ત., <u>7.900</u> અને 0.0<u>7</u> <u>9</u> <u>0</u> <u>0</u> બંને સંખ્યામાં 7, 9, 0, 0 એમ ચાર સાર્થક અંકો છે.

ઉદાહરણ 9 : નીચે આપેલ સંખ્યામાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા જણાવો :

(1) 0.003 m^2

(2) 0.1570 g cm^{-2}

(3) 2.64 × 10^{24} kg

(4) 7.590 J

(5) 6.032 Nm^{-2}

(6) 3.012 × 10^{-4} m^2

ઉકેલ :

(1) 0.003 m^2માં સાર્થક અંકો ફક્ત એક (3) છે.

(2) 0.1570 g cm^{-2}માં સાર્થક અંકો ચાર (1, 5, 7 અને 0) છે.

(3) 2.64×10^{24}kgમાં સાર્થક અંકો ત્રણ (2, 6 અને 4) છે.

(4) 7.590 Jમાં સાર્થક અંકો (7, 5, 9 અને 0) છે.

(5) 6.032 Nm^{-2}માં સાર્થક અંકો ચાર (6, 0, 3 અને 2) છે.

(6) 3.012×10^{-4} m^2માં સાર્થક અંકો ચાર (3, 0, 1 અને 2) છે.

2.10.2 સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારમાં સાર્થક અંકો (Significant Figures in Addition, Subtraction, Multiplication and Division)

પ્રયોગશાળામાં પ્રયોગ કરવા માટે આપણે ઘણાં બધાં માપન કરતાં હોઈએ છીએ. દરેક માપનને ચોકસાઈની મર્યાદા હોય છે. દરેક માપનમાં રહેલા સાર્થક અંકોની સંખ્યા સાધનના લઘુતમ માપ પર આધારિત હોય છે. ધારો કે જુદા-જુદા લઘુતમ માપ ધરાવતાં મીટરો (ઓહમ મીટર)ની મદદથી માપેલા જુદા-જુદા અવરોધોનાં મૂલ્યો $R_1 = 5.67\,\Omega$, $R_2 = 12.345\,\Omega$ અને $R_3 = 0.7\,\Omega$ છે. હવે તમારે કુલ અવરોધ ગણવો છે. આથી,

$$R = 5.67\,\Omega + 12.345\,\Omega + 0.7\,\Omega = 18.715\,\Omega$$

હવે પ્રશ્ન એ થાય કે શું સરવાળો આ રીતે દર્શાવી શકાય ? R_1 (= $5.67\,\Omega$)માં દશાંશસ્થાન પછીના ત્રીજા અંક વિશે માહિતી નથી અને R_3 ના મૂલ્યમાં દશાંશસ્થાન પછીના બીજા અને ત્રીજા અંક વિશે માહિતી નથી. અહીં R_3 નું મૂલ્ય દશાંશસ્થાન પછી એક જ અંક ધરાવે છે, જે દર્શાવે છે કે તેના માપનમાં સચોટતા (Precision) બીજા બે અવરોધોનાં માપન કરતાં ઓછી છે. આથી, આવા સરવાળામાં (એટલે કે $18.715\,\Omega$) દશાંશસ્થાન પછીના બીજા અને ત્રીજા અંકો (1 અને 5) અચોક્કસ અને અર્થવિહીન બને છે. આથી અંતિમ પરિણામને દશાંશસ્થાન પછીના એક અંક સુધી દર્શાવવું જોઈએ.

આ રીતે પરિણામમાં મળતાં એક કરતાં વધુ અચોક્કસ અંકોને યોગ્ય સાર્થક અંકો સુધી **'Round off'** કરવાં જોઈએ. આ માટે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં લો :

(1) આપેલ સંખ્યામાંથી જે અંક કાઢી નાખવાનો હોય તે 5 કરતાં ઓછો હોય તો તેની પહેલાના અંકમાં કોઈ ફેરફાર કરવો નહિ. દા.ત., $l = 10.743$ cmને ત્રણ સાર્થક અંકો સુધી 'round off' કરતાં 10.7 cm લખાય.

(2) સંખ્યામાંથી જે અંક કાઢી નાખવાનો હોય તે 5 કરતાં વધુ હોય, તો તેની આગળના અંકમાં 1 ઉમેરવો.

દા.ત., $l = 10.6\underline{8}$ cm = 10.7 cm (ત્રણ સાર્થક અંક સુધી 'round off' કરતાં)

(3) સંખ્યામાંથી જે અંક કાઢી નાખવાનો હોય તે અંક 5 હોય તો તેની પહેલાનો અંક એકી હોય, તો તેમાં 1 ઉમેરવો અને જો બેકી હોય, તો તેમાં કંઈ ઉમેરવું નહિ.

દા.ત., $l = 10.4\underline{5}$cm = 10.4cm

$l = 10.5\underline{5}$cm = 10.6cm

સરવાળા-બાદબાકી : સાર્થક સંખ્યાનાં સરવાળા-બાકબાકી માટે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા :

(1) આપેલ સાર્થક સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય તો તેમનાં સરવાળા-બાકબાકી, સામાન્ય રીતે સરવાળા-બાદબાકી કરવાં જોઈએ.

(2) આપેલ સાર્થક સંખ્યાઓમાંથી જે સંખ્યામાં દશાંશસ્થાન પછી જેટલા લઘુતમ સાર્થક અંકો હોય તેટલા જ સાર્થક અંકો સરવાળા-બાકબાકીથી મળતાં પરિણામમાં દશાંશસ્થાન પછી દર્શાવવા. દા.ત., ઉપરના ઉદાહરણમાં આપેલ અવરોધો પૈકી $R_3 = 0.7\,\Omega$માં દશાંશસ્થાન પછી એક જ સાર્થક સંખ્યા છે. આથી કુલ અવરોધ $R = 18.715\,\Omega$ને બદલે તેને round off કરી $R = 18.7\,\Omega$ વડે દર્શાવવું જોઈએ.

ગુણાકાર-ભાગાકાર : અવલોકનોમાં દર્શાવેલ સૌથી છેલ્લો સાર્થક અંક અચોક્કસ હોય છે. કોઈ સંખ્યાનો અચોક્કસ સંખ્યા સાથેનો ગુણાકાર અચોક્કસ હોય છે, પરંતુ પરિણામમાં ફક્ત એક જ અચોક્કસ અંક રાખવામાં આવે છે, આથી સાર્થક સંખ્યાના ગુણાકાર-ભાગાકાર કરતી વખતે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં લેવા :

(1) આપેલ સંખ્યાઓમાંથી જે સંખ્યામાં લઘુતમ સાર્થક અંકો હોય તેટલા જ સાર્થક અંકો આ સંખ્યાઓના ગુણાકાર-ભાગાકારથી મળતા પરિણામમાં હોવા જોઈએ. દા.ત., (i) કોઈ તકતીની પહોળાઈ 2.613 cm અને લંબાઈ 1.2 cm છે. આથી આ તકતીનું ક્ષેત્રફળ

$$= 2.613 \text{ cm} \times 1.2 \text{ cm} = 3.1356 \text{ cm}^2$$

પરંતુ આપેલ સંખ્યાઓમાં લઘુતમ સાર્થક અંકો ધરાવતી સંખ્યા 1.2 cm છે. જેને બે સાર્થક અંકો છે.

આથી ક્ષેત્રફળ (= 3.1356 cm^2)ને બે અંકો સુધી round off કરી દર્શાવવું જોઈએ.

આથી, 2.613 cm × 1.2 cm = 3.1 cm^2

(ii) ધારો કે કોઈ પદાર્થનું દળ m = 3.523 g અને કદ V = 1.47 cm^3 છે. આ પદાર્થની ઘનતા

$$\rho = \frac{3.523g}{1.47cm^3} = 2.4296552 = 2.43g\ cm^{-3}$$ વડે

દર્શાવવી જોઈએ, કારણ કે, કદના માપનમાં ફક્ત ત્રણ સાર્થક અંકો છે.

(2) જે સંખ્યાઓને ગુણવાની-ભાગવાની હોય તેમાંની જે સંખ્યા માપન દર્શાવતી ન હોય, તો તે સંખ્યા ચોક્કસ હોય છે. ભૌતિક સમીકરણમાં આવતી પૂર્ણાંક અથવા અપૂર્ણાંક સંખ્યા પણ ચોક્કસ હોય છે. દા.ત., $v^2 - v_0^2 = 2ad$ સમીકરણમાં અંક 2 ચોક્કસ છે. તેને અનંત સાર્થક અંકો (2.000........) છે. આવા કિસ્સાઓમાં ગુણાકાર-ભાગાકાર કરતી વખતે ચોક્કસ સંખ્યાના સાર્થક અંકો ધ્યાનમાં લેવા નહિ.

ઉદાહરણ 10 : એક ગોળાનો વ્યાસ 4.24 cm છે. સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખી તેના પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ ગણો.

ઉકેલ : વ્યાસ D = 4.24 cm

ગોળાના પૃષ્ઠનું $= 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$

$$= 4 \times 3.14 \times \left(\frac{4.24}{2}\right)^2$$

$$= 56.478\ cm^2$$

$$= 56.5\ cm^2$$

(ઉપરના સમીકરણમાં 4 અને 2 ચોક્કસ સંખ્યાઓ છે, જ્યારે Dના માપનમાં ત્રણ સાર્થક અંકો છે. આથી, જવાબને ત્રણ સાર્થક અંકો સુધી round off કરેલ છે.)

2.11 પરિમાણો અને પારિમાણિક સૂત્રો (Dimensions and Dimensional Formulae)

કોઈ પણ ભૌતિક રાશિને (સાધિત ભૌતિક રાશિ) જ્ઞાત મૂળભૂત ભૌતિક રાશિનાં સંયોજનો વડે દર્શાવી શકાય છે. સરળતા ખાતર આ મૂળભૂત ભૌતિક રાશિઓને કોઈ સંજ્ઞા વડે દર્શાવી શકાય. સામાન્ય રીતે દળ માટે 'M', લંબાઈ માટે 'L', સમય માટે 'T' અને વિદ્યુતપ્રવાહ માટે 'A' સંજ્ઞા વપરાય છે. થર્મોડાઇનેમિક તાપમાન, જ્યોતિ તીવ્રતા અને દ્રવ્યના જથ્થાને અનુક્રમે 'K', 'cd' અને 'mol' જેવી સંજ્ઞા વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

જ્યારે કોઈ ભૌતિક રાશિને M, L, T, K, A ... ના યોગ્ય ઘાતાંકો સાથે લખવામાં આવે, ત્યારે M, L, T, ... ના સ્વરૂપમાં તૈયાર થતાં સૂત્રને આપેલ ભૌતિક રાશિનું **પારિમાણિક સૂત્ર** કહે છે. આ સૂત્રમાં આવતાં M, L, T, ... નાં ઘાતાંકોને આ રાશિનાં **પરિમાણ** કહે છે. જે ભૌતિકરાશિ માટે પારિમાણિક સૂત્ર લખવામાં આવ્યું હોય, તે રાશિની સંજ્ઞાને [ ]માં મૂકી દર્શાવવામાં આવે છે.

દા.ત., (i) વેગનું પારિમાણિક સૂત્ર નીચે મુજબ મળે છે :

$$\text{વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમય}}$$

$$\therefore [v] = \frac{\text{લંબાઈનું પરિમાણ}}{\text{સમયનું પરિમાણ}}$$

$$= \frac{L^1}{T^1}$$

$$= L^1\ T^{-1}$$

$$= M^0\ L^1\ T^{-1}$$

$M^0L^1T^{-1}$ ને વેગનું પારિમાણિક સૂત્ર કહે છે. અહીં વેગના પરિમાણમાં દળનું પરિમાણ 0, લંબાઈનું પરિમાણ 1 અને સમયનું પરિમાણ –1 છે.

(ii) ગતિ-ઊર્જાનું પારિમાણિક સૂત્ર નીચે મુજબ મળશે :

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$[K] = [m]\ [v]^2$ (અહીં $\frac{1}{2}$ અંક હોવાથી તેને કોઈ પરિમાણ હોતા નથી.)

$$= (M^1)\ (M^0\ L^1\ T^{-1})^2$$

$$[K] = M^1\ L^2\ T^{-2}$$

કેટલીક ભૌતિકરાશિઓના પારિમાણિક સૂત્રો ટેબલ 2.3 માં આપેલ છે.

2.11.1 પારિમાણિક વિશ્લેષણ (Dimensional Analysis)

પારિમાણિક સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને ભૌતિકવિજ્ઞાનના અમુક પ્રશ્નોનો ઉકેલ મેળવવાની પદ્ધતિને પારિમાણિક વિશ્લેષણ કહે છે.

પારિમાણિક વિશ્લેષણના ઉપયોગો :

(a) બે જુદીજુદી એકમપદ્ધતિના કોઈ ભૌતિક રાશિના એકમો વચ્ચેનો સંખ્યાત્મક સંબંધ મેળવવો.

(b) ભૌતિક રાશિઓને સાંકળતાં સમીકરણની યથાર્થતા પારિમાણિક વિશ્લેષણ વડે ચકાસવી.

(c) કોઈ ભૌતિક રાશિનું અન્ય ભૌતિક રાશિઓ સાથે સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ મેળવવું.

(a) બે જુદી-જુદી એકમપદ્ધતિના કોઈ ભૌતિક રાશિના એકમો વચ્ચેનો સંખ્યાત્મક સંબંધ મેળવવો :

MKS પદ્ધતિમાં કાર્યનો એકમ જૂલ (J) છે અને CGS પદ્ધતિમાં અર્ગ (erg) છે. તેમની વચ્ચેનો સંખ્યાત્મક સંબંધ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

કાર્યનું પારિમાણિક સૂત્ર $[W] = M^1 L^2 T^{-2}$ છે.

MKS પદ્ધતિમાં CGS પદ્ધતિમાં

$$M\ (kg) = 10^3\ M\ (g)$$

$$L\ (m) = 10^2\ L\ (cm)$$

$$T\ (s) = 10^0\ T\ (s)$$

$$\therefore M^1L^2T^{-2} = (10^3M)^1\ (10^2L)^2\ (10^0T)^{-2}$$

$$= 10^3(M^1)\ 10^4\ (L^2)\ (T^{-2})$$

$$= 10^7\ M^1L^2T^{-2}$$

કાર્યનો MKS પદ્ધતિમાં એકમ = $10^7 \times$ કાર્યનો CGS પદ્ધતિમાં એકમ

$\therefore$ 1 joule = 10^7 erg

(b) પારિમાણિક સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ભૌતિક વિજ્ઞાનના કોઈ સમીકરણની યથાર્થતા તપાસવી.

ભૌતિક રાશિઓને સાંકળતાં કોઈ પણ સમીકરણની બંને બાજુની પદાવલિઓનાં પરિમાણો સમાન હોય, તો તે ભૌતિક સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ યથાર્થ છે, તેમ કહેવાય,

ઉદાહરણ તરીકે, વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતાં પદાર્થ પર લાગતાં કેન્દ્રગામી બળ માટેના સમીકરણ

$F = \frac{mv^2}{r}$ ની યથાર્થતા તપાસીએ.

અહીં, m = પદાર્થનું દળ, v = પદાર્થનો વેગ અને r = વર્તુળાકાર માર્ગની ત્રિજ્યા છે.

સમીકરણની ડાબી બાજુ માટે

$[F] = M^1L^1T^{-2}$

સમીકરણની જમણી બાજુ માટે,

$$\left[\frac{mv^2}{r}\right] = \frac{[m][v]^2}{r}$$

$$= \frac{(M^1)(L^1T^{-1})^2}{(L^1)}$$

$$= \frac{(M^1)(L^2T^{-2})}{(L^1)}$$

$$= M^1L^1T^{-2}$$

આમ, $[F] = \left[\frac{mv^2}{r}\right]$ હોવાથી, આપેલ સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ યથાર્થ છે.

નોંધ : સમીકરણમાં આવતાં અચળાંકો જો પરિમાણરહિત ન હોય, તો તેની ચકાસણી થઈ શકતી નથી.

(c) કોઈ ભૌતિક રાશિનું અન્ય ભૌતિક રાશિઓ સાથે સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ મેળવવું :

ધારો કે સાદા લોલકના આવર્તકાળનું સમીકરણ મેળવવું છે. સાદા લોલકનો આવર્તકાળ (T) એ લોલકની લંબાઈ (l) લોલકના ગોળાના દળ (m) અને ગુરુત્વપ્રવેગ (g) પર આધારિત હોઈ શકે.

લોલકનો આવર્તકાળ $T \propto m^a$

$$\propto l^b$$

$$\propto g^c$$

$$T \propto m^a\ l^b\ g^c$$

$$\therefore T = k\ m^a\ l^b\ g^c \qquad (2.11.1)$$

જ્યાં, k સપ્રમાણતા-અંક છે. જે પરિમાણરહિત છે. $a, b, c \in R$ છે.

આ સમીકરણની બંને બાજુઓનાં પદોનાં પારિમાણિક સૂત્ર મૂકતાં,

$$(M^0L^0T^1) = (M^1)^a\ (L^1)^b\ (M^0L^1T^{-2})^c$$

$$= (M^a)\ (L^b)\ (M^0L^cT^{-2c})$$

$$M^0L^0T^1 = M^a\ L^{b+c}\ T^{-2c}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણની બંને બાજુઓના M, L અને T માં આવતાં પરિમાણો સરખાવતાં,

$a = 0 \qquad \therefore\ c = -\frac{1}{2}$

$b + c = 0 \qquad \therefore\ b = \frac{1}{2}$

$-2c = 1$

a, b અને cનાં મૂલ્યો સમીકરણ (2.11.1)માં મૂકતાં,

$$T = km^0 l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} \text{ અથવા } T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ઉપરના સમીકરણમાં પ્રાયોગિક રીતે $k = 2\pi$ મળે છે. તેથી,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

જે સાદા લોલકના આવર્તકાળનું સૂત્ર છે.

2.11.2 પારિમાણિક વિશ્લેષણની મર્યાદાઓ (Limitations of Dimensional Analysis)

(1) માત્ર M, L અને Tનો સમાવેશ કરતા પારિમાણિક સમીકરણમાં M, L અને Tના ઘાતાંકોની સરખામણી કરતાં વધુમાં વધુ ત્રણ સમીકરણો મળે છે. આથી કોઈ પણ ભૌતિક રાશિનું ત્રણ કરતાં વધારે રાશિ સાથેના સમીકરણનું નિશ્ચિત સ્વરૂપ મેળવી શકાતું નથી.

(2) ભૌતિક સમીકરણમાં આવતા પરિમાણરહિત અંક વિશે માહિતી મળતી નથી. દા.ત.,$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$ માં $k = 2\pi$નું મૂલ્ય ફક્ત પ્રાયોગિક રીતે નક્કી કરી શકાય છે.

(3) ચરઘાતાંકીય, ત્રિકોણમિતીય અને લોગવિધેય પર આધારિત સમીકરણો મેળવી શકાતાં નથી આવાં વિધેયો પરિમાણરહિત હોય છે. દા.ત., $\sin\omega t$ માં ωt અને e^{-kx} માં kx એ પરિમાણરહિત છે.

(4) જો સમીકરણમાં આવતો સપ્રમાણતા અચળાંક પરિમાણરહિત ન હોય, તો આ પદ્ધતિ ઉપયોગી નથી. દા.ત., $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ માં અચળાંક G ને $N\ m^2\ kg^{-2}$ એકમ હોવાથી આવાં સમીકરણો મેળવી શકાતાં નથી.

ઉદાહરણ 11 : પ્રકાશના વેગને વેગના એકમ તરીકે અને yearને સમયના એકમ તરીકે લેવામાં આવે, તો આ પદ્ધતિમાં અંતરનો એકમ શું થાય ? (પ્રકાશનો વેગ = $3 \times 10^8\ m\ s^{-1}$ લો.)

ઉકેલ :

અંતર = વેગ × સમય

અંતરનો એકમ = વેગનો એકમ × સમયનો એકમ

$= (3 \times 10^8 m\ s^{-1}) \times (1\ year)$

$= (3 \times 10^8 m\ s^{-1}) \times (365.25 \times 24 \times 3600\ s)$

$= 9.468 \times 10^{15} m$

અંતરના આ નવા એકમને **પ્રકાશવર્ષ** કહે છે.

ઉદાહરણ 12 : એક નવી એકમપદ્ધતિમાં અંતર, દળ અને સમયના એકમો અનુક્રમો 10 cm, 10g અને 0.1s તરીકે સ્વીકારવામાં આવે, તો આ એકમપદ્ધતિમાં બળનો નવો એકમ કેટલા newton બરાબર થાય ?

ઉકેલ :

બળનું પારિમાણિક સૂત્ર $[F] = M^1L^1T^{-2}$

નવી એકમ પદ્ધતિમાં બળનો એકમ

$= [(10g)^1\ (10cm)^1\ (0.1s)^{-2}]$

$= (10^{-2}kg)^1\ (10^{-1}m)^1\ (10^2 s^{-2})$

$= 10^{-1} kg\ m\ s^{-2}$

$= 0.1$ newton

ઉદાહરણ 13 : ઉષ્માનું વહન કરતો કોઈ સળિયો જ્યારે સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં રહેલો હોય છે, ત્યારે તેમાં પસાર થતી ઉષ્મા $Q = \frac{kA(T_1 - T_2)t}{L}$ હોય છે, જ્યાં k = સળિયાના દ્રવ્યની ઉષ્માવાહકતા, A = સળિયાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ, T_1 અને T_2 અનુક્રમે સળિયાના ગરમ અને ઠંડા છેડાનાં તાપમાન દર્શાવે છે, t = સમય તથા L = સળિયાની લંબાઈ છે. ઉષ્માવાહકતા kનું પારિમાણિક સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ :

$$Q = \frac{kA(T_1 - T_2)t}{L}$$

$$\therefore\ k = \frac{QL}{A(T_1 - T_2)t} \qquad (1)$$

જ્યાં ઉષ્મા-ઊર્જા, $[Q] = M^1L^2T^{-2}$

લંબાઈ, $[L] = L^1$

ક્ષેત્રફળ, $[A] = L^2$

તાપમાનનો ફેરફાર, $(T_1 - T_2) = [\Delta T] = K^1$

સમય, $[t] = T^1$

અત્રે, આપણે M, L અને Tની સાથે K (તાપમાન માટે)નો સમાવેશ કર્યો છે. ઉપર્યુક્ત પરિમાણ, સૂત્રો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$[k] = \frac{M^1L^2T^{-2}L^1}{L^2K^1T^1} = M^1L^1T^{-3}K^{-1}$$

નોંધ : ઘણાં પુસ્તકોમાં Kને બદલે θ સંજ્ઞાનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેની ભૌતિક રાશિનાં પારિમાણિક સૂત્રો મેળવો :

(i) વિદ્યુતભાર (Q) (ii) વિદ્યુતસ્થિતિમાન (V) (iii) કૅપેસિટન્સ (C) (iv) અવરોધ (R)

ઉકેલ : ઉપરની ભૌતિક રાશિઓને સાંકળતાં સૂત્રો નીચે મુજબ છે :

$Q = It$, $W = VIt$, $Q = CV$, $V = IR$, જ્યાં I = વિદ્યુતપ્રવાહ, t = સમય, W = ઊર્જા છે.

(i) $Q = It$

$\therefore [Q] = M^0L^0A^1T^1$

A એ વિદ્યુતપ્રવાહના એકમનો સંકેત છે. તેનો પણ હવે M, L, T સાથે સમાવેશ કરવામાં આવ્યો છે.

(ii) $W = VIt$

$$\therefore [V] = \frac{M^1L^2T^{-2}}{AT^1}$$

$$= M^1L^2T^{-3}A^{-1}$$

(iii) $Q = CV$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$= \frac{It}{W/It}$$

$$\therefore C = \frac{I^2t^2}{W} \Rightarrow [C] = \frac{A^2T^2}{M^1L^2T^{-2}}$$

$$\therefore [C] = M^{-1}L^{-2}T^4A^2$$

(iv) $V = IR$

$$\therefore R = \frac{V}{I} = \frac{W/It}{I} = \frac{W}{I^2t}$$

$$[R] = \frac{M^1L^2T^{-2}}{A^2T^1}$$

$$\therefore [R] = M^1L^2T^{-3}A^{-2}$$

ઉદાહરણ 15 : જો વેગ, સમય અને બળને મૂળભૂત ભૌતિક રાશિઓ તરીકે લઈએ, તો દળનું પારિમાણિક સૂત્ર શોધો. (જ્યારે બળ, સમય અને વેગને મૂળભૂત ભૌતિક રાશિઓ તરીકે લઈએ, ત્યારે બળ માટે F, સમય માટે T અને વેગ માટે v સંજ્ઞાનો ઉપયોગ કરવો.)

ઉકેલ :

બળ = દળ × પ્રવેગ

$$= \text{દળ} \times \frac{\text{વેગ}}{\text{સમય}}$$

$$\therefore \text{દળ} = \frac{\text{બળ} \times \text{સમય}}{\text{વેગ}}$$

$$\therefore [m] = \frac{F^1T^1}{v^1}$$

$$\therefore [m] = F^1T^1v^{-1}$$

ઉદાહરણ 16 : સુવાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં ઉદ્ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા તારમાંથી પસાર થતા વિદ્યુપ્રવાહ I, તારના અવરોધ R અને વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થવાના સમય t પર આધાર રાખે છે. આ હકીકતનો ઉપયોગ કરી ઉષ્મા-ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે ઉષ્મા-ઊર્જા $H \propto I^a R^b t^c$

$$\therefore H = k\, I^a R^b t^c \quad (1)$$

(જ્યાં $a, b, c \in$ R તથા k પરિમાણરહિત અચળાંક છે.)

સમીકરણ (1)માંની ભૌતિક રાશિઓનાં પારિમાણિક સૂત્રો લખતાં,

$$M^1L^2T^{-2} = (A)^a (M^1L^2T^{-3}A^{-2})^b (T)^c$$

$$= A^{a-2b} M^b L^{2b} T^{c-3b} \quad (2)$$

સમીકરણ (2)ની બંને બાજુની ઘાતો સરખાવતાં,

$$a - 2b = 0,\ b = 1,\ -3b + c = -2$$

તેથી, $a = 2$ અને $c = 1$

હવે સમીકરણ (1)માં a, b અને cની કિંમતો મૂકતાં,

$$\therefore H = kI^2Rt$$

પ્રાયોગિક રીતે $k = 1$ મળે છે.

$$\therefore H = I^2Rt$$

ટેબલ 2.3 : કેટલીક ભૌતિક રાશિઓનાં SI એકમો અને પારિમાણિક સૂત્રો

નં.	ભૌતિક રાશિ	બીજી ભૌતિક રાશિ સાથેનો સંબંધ	પારિમાણિક સૂત્ર	SI પદ્ધતિમાં એકમ
1.	અંતર (*d*)	–	$M^0L^1T^0$	m
2.	દળ (*m*)	–	$M^1L^0T^0$	kg
3.	સમય (T)	–	$M^0L^0T^1$	s
4.	સમતલ કોણ (θ)	ચાપ / ત્રિજ્યા	$M^0L^0T^0$	rad
5.	ઘનકોણ (Ω)	ક્ષેત્રફળ / (ત્રિજ્યા)^2	$M^0L^0T^0$	sr
6.	ક્ષેત્રફળ (A)	લંબાઈ × પહોળાઈ	$M^0L^2T^0$	m^2
7.	કદ (V)	લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ	$M^0L^3T^0$	m^3
8.	ઘનતા (ρ)	દળ / કદ	$M^1L^{-3}T^0$	kg m^{-3}
9.	ઝડપ/વેગ (v)	અંતર / સમય	$M^0L^1T^{-1}$	m s^{-1}
10.	પ્રવેગ (*a*)	વેગમાં ફેરફાર / સમય	$M^0L^1T^{-2}$	m s^{-2}
11.	બળ (F)	દળ × પ્રવેગ	$M^1L^1T^{-2}$	kg m s^{-2} (newton)
12.	કાર્ય (W)	બળ × અંતર	$M^1L^2T^{-2}$	joule, (J)
13.	પાવર (P)	કાર્ય / સમય	$M^1L^2T^{-3}$	J/s, watt
14.	ઊર્જા (ગતિ ઊર્જા, સ્થિતિ ઊર્જા, ઊષ્મા ઊર્જા)	કાર્ય	$M^1L^2T^{-2}$	joule (J)
15.	વેગમાન (*p*)	દળ × વેગ	$M^1L^1T^{-1}$	kg ms^{-1}
16.	દબાણ (P)	બળ / ક્ષેત્રફળ	$M^1L^{-1}T^{-2}$	Nm^{-2}, P*a*
17.	આવર્તકાળ (T)	સમય	$M^0L^0T^1$	s
18.	આવૃત્તિ (*f*)	1 / આવર્તકાળ	$M^0L^0T^{-1}$	s^{-1}, Hz
19.	કોણીય સ્થાનાંતર (θ)	ચાપ / ત્રિજ્યા	$M^0L^0T^0$	rad
20.	કોણીય વેગ (ω)	કોણીય સ્થાનાંતર / સમય	$M^0L^0T^{-1}$	rad s^{-1}
21.	કોણીય પ્રવેગ (∝)	કોણીય વેગ / સમય	$M^0L^0T^{-2}$	rad s^{-2}
22.	જડત્વની ચાકમાત્રા (I)	દળ × (અંતર)^2	$M^1L^2T^0$	kg m^2
23.	ટૉર્ક (τ)	બળ × ⊥ અંતર	$M^1L^2T^{-2}$	Nm
24.	બળનો આઘાત	બળ × સમય	$M^1L^1T^{-1}$	Ns^{-1}
25.	પૃષ્ઠતાણ (T)	બળ / અંતર	$M^1L^0T^{-2}$	Nm^{-1}

26.	વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C)	$\frac{\text{ઉષ્મા-ઊર્જા}}{\text{દળ} \times \text{તાપમાન}}$	$M^0L^2T^{-2}K^{-1}$	$J\ kg^{-1}K^{-1}$
27.	ઉષ્માવાહકતા (k)	$\frac{\text{ઉષ્મા-ઊર્જા} \times \text{જાડાઈ}}{\text{ક્ષેત્રફળ} \times \text{તાપમાન} \times \text{સમય}}$	$M^1L^1T^{-3}K^{-1}$	$Jm^{-1}s^{-1}K^{-1}$
28.	વિદ્યુતપ્રવાહ (I)	–	$M^0L^0T^0A^1$	A
29.	વિદ્યુતભાર (Q)	વિદ્યુતપ્રવાહ × સમય	$M^0L^0T^1A^1$	C (કુલંબ)
30.	વિદ્યુત સ્થિતિમાન (V)	કાર્ય / વિદ્યુતભાર	$M^1L^2T^{-3}A^{-1}$	V (વોલ્ટ)
31.	અવરોધ (R)	$\frac{\text{વિદ્યુતસ્થિતિમાન}}{\text{પ્રવાહ}}$	$M^1L^2T^{-3}A^{-2}$	Ω (ઓહ્મ)
32.	કેપેસિટન્સ (C)	વિદ્યુતભાર / વિદ્યુત સ્થિતિમાન	$M^{-1}L^{-2}T^4A^2$	F (ફેરાડે)
33.	બેકવેરેલ (B/q)	વિભંજન / સેકન્ડ	$M^0L^0T^{-1}$	B/q

ટેબલ 2.4 : SI એકમોના દશાંશગુણકો અને ઉપગુણકો

ગુણકો

મૂલ્ય	પૂર્વગ	સંજ્ઞા
10^{18}	એક્સા	E
10^{15}	પેટા	P
10^{12}	ટેરા	T
10^{9}	ગીગા	G
10^{6}	મેગા	M
10^{3}	કિલો	k
10^{2}	હેક્ટો	h
10	ડેકા	da

ઉપગુણકો

મૂલ્ય	પૂર્વગ	સંજ્ઞા
10^{-1}	ડેસિ	d
10^{-2}	સેન્ટિ	c
10^{-3}	મિલિ	m
10^{-6}	માઈક્રો	μ
10^{-9}	નેનો	n
10^{-12}	પીકો	p
10^{-15}	ફેમ્ટો	f
10^{-18}	એટો	a

સારાંશ

1. કોઈ રાશિના પ્રમાણિત માપને તે ભૌતિક રાશિનો એકમ કહે છે.
2. અનેક રાશિઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી એવી ભૌતિક રાશિઓ પસંદ કરવામાં આવે છે કે જેમની મદદથી બીજી ભૌતિક રાશિઓ ઉપજાવી શકાય. આવી રાશિઓને મૂળભૂત રાશિઓ કહે છે. મૂળભૂત રાશિઓ પરથી મેળવેલ ભૌતિક રાશિને સાધિત ભૌતિક રાશિ કહે છે.
3. SI પદ્ધતિમાં સાત મૂળભૂત ભૌતિક રાશિઓ છે : લંબાઈ, દળ, સમય, વિદ્યુતપ્રવાહ, થર્મોડાઇનેમિક તાપમાન, જ્યોતિ તીવ્રતા, દ્રવ્યનો જથ્થો.
4. SI પદ્ધતિમાં બે પૂરક ભૌતિક રાશિઓ છે. સમતલકોણ (θ) અને ઘનકોણ (Ω). તેમના એકમો અનુક્રમે (rad) અને સ્ટીરેડિયન (sr) છે.

5. લંબાઈના નાના માપનો મીટરપટ્ટી, વર્નિયર કેલિપર્સ અને માઈક્રોમીટર સ્ક્રૂ-ગેજથી થાય છે. 10^{-5}mના ક્રમના માપન માટે માઈક્રોમીટર સ્ક્રૂ-ગેજનો ઉપયોગ થાય છે. ખૂબ જ મોટાં અંતરોના તથા અવકાશીય અંતરોના માપન માટે પરોક્ષ રીતોનો ઉપયોગ થાય છે. દા.ત., દષ્ટિસ્થાનભેદની રીત.
6. **દળ અને વજન :** પદાર્થમાં રહેલા દ્રવ્યના જથ્થાને દળ (m) કહે છે, તે પદાર્થનો આંતરિક ગુણધર્મ છે. પદાર્થ પર લાગતા પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ બળને પદાર્થનું વજન (W) કહે છે.
7. કોઈ રાશિના માપનનું મૂલ્ય તે રાશિના સાચા મૂલ્યની કેટલી નજીક છે. તેને ચોકસાઈ કહે છે. આ માપન કેટલા વિભેદન અથવા સીમા સુધી માપવામાં આવ્યું છે. તેને સચોટતા કહે છે.
8. **ત્રુટિ :** ભૌતિક રાશિના માપનમાં રહેલી અચોકસાઈને ત્રુટિ કહે છે. ત્રુટિ બે પ્રકારની છે : (i) વ્યવસ્થિત ત્રુટિ (ii) અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ.
9. કોઈ પણ ભૌતિક રાશિના સાચા મૂલ્ય અને પ્રાયોગિક મૂલ્ય વચ્ચેના તફાવતને નિરપેક્ષ ત્રુટિ કહે છે.
10. સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ અને સરેરાશ મૂલ્યના ગુણોત્તરને સાપેક્ષ ત્રુટિ અથવા આંશિક ત્રુટિ કહે છે. સાપેક્ષ ત્રુટિને ટકામાં દર્શાવવામાં આવે, તો તેને પ્રતિશત ત્રુટિ કહે છે.
11. **ત્રુટિઓનું સંયોજન :** જ્યારે એક કરતાં વધુ ભૌતિક રાશિઓનું માપન કરવામાં આવે, ત્યારે પરિણામમાં ઉદ્‌ભવતી મહત્તમ ત્રુટિ નીચે મુજબ ગણી શકાય :

ક્રમ	ગાણિતીક સૂત્ર	ત્રુટિ
1.	સરવાળો : $Z = A + B$	$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$
2.	બાદબાકી : $Z = A - B$	$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$
3.	ભાગાકાર : $Z = \frac{A}{B}$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
4.	ગુણાકાર : $Z = A \cdot B$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
5.	ઘાતાંક : $Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$

12. માપ દર્શાવતી કોઈ એક સંખ્યામાં ચોકસાઈપૂર્વકના અંકો ઉપરાંત એક અચોક્કસ છતાં અર્થપૂર્ણ એવા છેલ્લા અંક સાથે લખાતી સંખ્યાને સાર્થક સંખ્યા કહે છે અને તેના અંકોને સાર્થક અંકો કહે છે. જે માપનમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા વધુ તે વધુ ચોકસાઈપૂર્વકનું માપન કહેવાય છે..
13. જ્યારે કોઈ ભૌતિક રાશિને M, L, T, K, A....ના યોગ્ય ઘાતાંકો સાથે લખવામાં આવે ત્યારે M, L, T....ના સ્વરૂપમાં તૈયાર થતાં સૂત્રને તે ભૌતિક રાશિનું પારિમાણિક સૂત્ર કહે છે.
14. પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી બે જુદી-જુદી એકમપદ્ધતિ વચ્ચેના એકમો વચ્ચે સંબંધ મેળવી શકાય છે, સમીકરણની પારિમાણિક યથાર્થતા ચકાસી શકાય છે તેમજ કોઈ ભૌતિક રાશિનું અન્ય ભૌતિક રાશિઓ સાથે સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ મેળવી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. નીચેનામાંથી કઈ ભૌતિક રાશિ સાધિત છે ?

   (A) દળ (B) બળ (C) સમતલ કોણ (D) સમય

2. નીચેનામાંથી કઈ રાશિ SI પદ્ધતિમાં મૂળભૂત ભૌતિક રાશિ નથી ?

   (A) જ્યોતિ તીવ્રતા (B) વિદ્યુતપ્રવાહ (C) ઘનકોણ (D) દ્રવ્યનો જથ્થો

3. $\frac{1\mu m}{1fm}$ = ...

   (A) 10^9 (B) 10^{-9} (C) 10^{15} (D) 10^6

4. SI પદ્ધતિમાં સમતલકોણનો એકમ .... છે.

   (A) ડિગ્રી (B) રેડિયન (C) સ્ટીરેડિયન (D) કેન્ડેલા

5. 125.0 ± 0.5 cm અંતરમાં પ્રતિશત ત્રુટિ .... છે.

   (A) 4 % (B) 0.04 % (C) 0.4 % (D) 40 %

6. કોઈ સમઘનની ઘનતા માપવાના પ્રયોગમાં દળના માપનમાં આવતી પ્રતિશત ત્રુટિ 0.26 % અને લંબાઈના માપનમાં આવતી પ્રતિશત ત્રુટિ 0.38 % હોય, તો તેની ઘનતાના માપનમાં આવતી પ્રતિશત ત્રુટિ કેટલી થાય ?

   (A) 14 % (B) 1.40 % (C) 1.04 % (D) 1.44 %

7. જો $Z = A^3$ હોય, તો Z માં ઉદ્‌ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ ....

   (A) $(\Delta A)^3$ (B) $\frac{(\Delta A)^3}{A}$ (C) $3\frac{\Delta A}{A}$ (D) $\frac{\Delta A}{A}$

8. જો $x = ab^{-1}$ હોય અને Δa અને Δb અનુક્રમે a અને b ના માપનમાં રહેલ ત્રુટિ દર્શાવતા હોય, તો xના માપનમાં મહત્તમ પ્રતિશત ત્રુટિ ....

   (A) $\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) \times 100$ (B) $\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right) \times 100$

   (C) $\left(\frac{\Delta a}{a-b} + \frac{\Delta b}{a-b}\right) \times 100$ (D) $\left(\frac{\Delta a}{a-b} - \frac{\Delta b}{a-b}\right) \times 100$

9. ભૌતિક રાશિ Zનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^aL^bT^{-c}$ છે. તેના દળ, લંબાઈ અને સમયના માપનમાં પ્રતિશત ત્રુટિ અનુક્રમે α %, β % અને γ % હોય, તો ભૌતિક રાશિ Z ના માનમાં પ્રતિશત ત્રુટિ .... હશે.

   (A) $(\alpha + \beta + \gamma)$ % (B) $(\alpha + \beta - \gamma)$ %

   (C) $(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ % (D) $(a\alpha + b\beta - c\gamma)$ %

10. વિદ્યાર્થી ગુરુત્વપ્રવેગ $g\left(= \frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)$ માપવાનો પ્રયોગ કરે છે. લંબાઈ lમાં ત્રુટિ Δl અને સમય Tમાં ત્રુટિ ΔT છે. n એ અવલોકનની સંખ્યા છે. gનું માપન કયા અવલોકન માટે વધુ ચોક્કસ હશે ?

	Δl	ΔT	n
(A)	5mm	0.2s	10
(B)	5mm	0.2s	20
(C)	5mm	0.1s	10
(D)	1mm	0.1s	50

11. જ્યારે (2.5 ± 0.5) Aનો વિદ્યુતપ્રવાહ તારમાંથી પસાર થાય છે, ત્યારે (20 ± 1)Vનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત ઉદ્ભવે છે. તારનો અવરોધ .... છે.

(A) $(8 \pm 2)\Omega$ (B) $(8 \pm 1.5)\Omega$
(C) $(8 \pm 0.5)\Omega$ (D) $(8 \pm 3)\Omega$

12. સાર્થકસંખ્યા 5.055 અને 0.005055માં સાર્થક અંકોની સંખ્યા અનુક્રમે .... છે.

(A) 4 અને 3 (B) 3 અને 3 (C) 4 અને 4 (D) 4 અને 6

13. 0.0060માં સાર્થક અંકોની સંખ્યા .... છે.

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

14. r અંતરે રહેલાં બે m_1 અને m_2 દળ વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ છે, જ્યાં G એ ગુરુત્વાકર્ષી સાર્વત્રિક અચળાંક છે. Gનું પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

(A) $M^{-1}L^3T^{-2}$ (B) $M^1L^3T^{-2}$ (C) $M^1L^3T^{-3}$ (D) $M^{-1}L^2T^{-3}$

15. ક્વૉન્ટમશાસ્ત્ર મુજબ, f આવૃત્તિ ધરાવતા ફોટોનની ઊર્જા $E = hf$ છે, જ્યાં h એ પ્લાન્ક અચળાંક છે, તો પ્લાન્ક-અચળાંકનું પારિમાણિક સૂત્ર લખો.

(A) $M^1L^2T^{-2}$ (B) $M^1L^2T^{-1}$ (C) $M^1L^2T^1$ (D) $M^1L^2T^2$

16. 'પ્રકાશવર્ષ'નું પારિમાણિક સૂત્ર ....

(A) L^{-1} (B) T^{-1} (C) L^1 (D) T^1

17. ઘનકોણનું પારિમાણિક સૂત્ર કયું છે ?

(A) $M^1L^1T^1$ (B) $M^0L^0T^1$ (C) $M^1L^0T^{-2}$ (D) $M^0L^0T^0$

18. સમય પર આધારિત ભૌતિક રાશિ P નું સમીકરણ $P = P_0 \exp(-\alpha t^2)$. જ્યાં α એ અચળાંક અને t એ સમય દર્શાવે છે. P એ દબાણ છે. αનું પારિમાણિક સૂત્ર ....

(A) $M^0L^0T^{-2}$ (B) $M^0L^0T^2$
(C) $M^0L^0T^0$ (D) $M^1L^{-1}T^{-2}$

19. ઊર્જા (E), વેગમાન (p) અને બળ (F)ને મૂળભૂત એકમો તરીકે સ્વીકારવામાં આવે, તો નવી એકમપદ્ધતિમાં દળનું પારિમાણિક સૂત્ર શું થાય ?

(A) $E^{-1}P^2F^0$ (B) $E^1P^{-2}F^0$
(C) $E^{-1}P^2F^{-2}$ (D) $E^{-2}P^1F^2$

20. X–અક્ષને લંબ એવા એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી એકમ સમયમાં પસાર થતાં કણોની સંખ્યા નીચેના સૂત્રથી અપાય છે.

$n = -D\left(\frac{n_2 - n_1}{x_2 - x_1}\right)$ જ્યાં n_1 અને n_2 અનુક્રમે $x = x_1$ અને $x = x_2$ આગળ એકમકદમાં રહેલા કણોની સંખ્યા છે. D એ ડિફ્યુઝન-અચળાંક છે. D નું પારિમાણિક સૂત્ર ....

(A) $M^0L^1T^{-2}$ (B) $M^0L^2T^{-4}$ (C) $M^0L^1T^{-3}$ (D) $M^0L^2T^{-1}$

21. ગુરુત્વીય તરંગો (gravity waves)નો પાણીમાં વેગ એ $\lambda^{\alpha}\ \rho^{\beta}\ g^{\gamma}$ ને સમપ્રમાણમાં છે. જ્યાં λ એ તરંગલંબાઈ ρ એ પાણીની ઘનતા અને g એ ગુરુત્વીય પ્રવેગ છે ? નીચે દર્શાવેલ કયો સંબંધ સાચો છે ?

(A) $\alpha = \beta = \gamma$ (B) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$

(C) $\alpha \neq \gamma = \beta$ (D) $\alpha = \gamma \neq \beta$

22. બે વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $2a$ હોય, તો આ તંત્રની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $p = (2a)q$ સૂત્રથી અપાય છે. q એ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય છે. p નું પારિમાણિક સૂત્ર ....

(A) $M^0L^{-1}T^1A^1$ (B) $M^0L^1T^{-1}A^{-1}$ (C) $M^0L^1T^{-1}A^1$ (D) $M^0L^1T^1A^1$

23. જો $1\ g\ cm\ s^{-1} = x\ Ns$ હોય તો $x =$ ....

(A) 1×10^{-1} (B) 3.6×10^{-3} (C) 1×10^{-5} (D) 6×10^{-4}

24. સમીકરણ $y = 2A sin\ kx\ coswt$ (મીટરમાં) છે, જ્યાં A અને x મીટરમાં છે. ω એ કોણીય આવૃત્તિ છે. A/kનું પારિમાણિક સૂત્ર .... થશે.

(A) $M^0L^0T^0$ (B) $M^0L^{-2}T^0$ (C) $M^0L^{-1}T^1$ (D) $M^0L^2T^0$

25. $\left(P + \dfrac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ સમીકરણમાં $\frac{a}{b}$ નું પારિમાણિક સૂત્ર .... છે. જ્યાં, P = દબાણ, V = કદ અને T એ તાપમાન છે.

(A) $M^1L^2T^{-2}$ (B) $M^1L^2T^{-2}K^1$ (C) $M^1L^{-2}T^2$ (D) $M^1L^2T^{-2}K^{-1}$

જવાબો

1. (B)	2. (C)	3. (A)	4. (B)	5. (C)	6. (B)	
7. (C)	8. (A)	9. (C)	10. (D)	11. (A)	12. (C)	
13. (C)	14. (A)	15. (B)	16. (C)	17. (D)	18. (A)	
19. (A)	20. (D)	21. (D)	22. (D)	23. (C)	24. (D)	25. (A)

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. એકમ એટલે શું ? સાધિત એકમો કોને કહેવાય ?
2. SI પદ્ધતિના પૂરક એકમો કયા-કયા છે ?
3. પારિમાણિક સૂત્ર એટલે શું ?
4. *amu* કઈ ભૌતિક રાશિનો એકમ છે ?
5. $1 g/cm^3$ = ... kg/m^3
6. પ્રયોગમાં મોટી ઘાત સાથે આવતી રાશિઓનાં માપ બહુ જ ચોકસાઈથી લેવાં જોઈએ. શા માટે ?
7. એક પદાર્થનું દળ $225 \pm 0.05 g$ છે. આ માપમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.
8. કેપેસિટન્સનું પારિમાણિક સૂત્ર લખો.
9. ચોકસાઈ અને સચોટતા વચ્ચેનો ભેદ જણાવો.
10. જો $\theta_1 = 25.5 \pm 0.1\ ^{\circ}C$ અને $\theta_2 = 35.3 \pm 0.1\ ^{\circ}C$ હોય, તો $\theta_1 - \theta_2$ શોધો.
11. સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખી બાદબાકી કરો : $3.9 \times 10^5 - 2.5 \times 10^4$

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

1. SI એકમપદ્ધતિની મૂળભૂત અને પૂરક ભૌતિક રાશિઓ કઈ-કઈ છે ? તેમના એકમો, સંજ્ઞાઓ સહિત જણાવો.
2. પૃથ્વીથી ગ્રહના અંતરમાપન માટે દષ્ટિસ્થાનભેદની રીતનું વર્ણન કરો.
3. ભૌતિક રાશિના માપનમાં ઉદ્ભવતી જુદા-જુદા પ્રકારની ત્રુટિઓ સમજાવો.
4. નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સાપેક્ષ ત્રુટિ અને પ્રતિશત ત્રુટિ સમજાવો.
5. ભૌતિક સમીકરણની યથાર્થતા પારિમાણિક વિશ્લેષણથી કેવી રીતે ચકાસી શકાય ? સમજાવો.
6. પારિમાણિક વિશ્લેષણની મર્યાદાઓ જણાવો.

નીચેના દાખલાઓ ગણો :

1. ઓહ્મના નિયમના પ્રયોગમાં જુદાં-જુદાં અવલોકનો દરમિયાન એક અજ્ઞાત અવરોધનું મૂલ્ય 4.12Ω, 4.08Ω, 4.22Ω તથા 4.14Ω મળે છે, તો આ અવલોકનોમાં નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સાપેક્ષ ત્રુટિ અને પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

   [જવાબ : 0.04, 0.0096, 0.96 %]

2. એક નળાકારની લંબાઈ $l = (4.00 \pm 0.01)$cm, ત્રિજ્યા $r = (0.250 \pm 0.001)$cm છે અને દળ $m = 6.25 \pm 0.01$g છે. નળાકારના દ્રવ્યની ઘનતામાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

   [જવાબ : 1.21 %]

3. સાદા લોલકથી ગુરુત્વપ્રવેગ (g) માપવાના પ્રયોગમાં સાદા લોલકની લંબાઈ $l = (100 \pm 0.1)$cm અને આવર્તકાળ $T = (2 \pm 0.01)$s માલૂમ પડે છે. ગુરુત્વપ્રવેગ g માં મહત્તમ પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

   [જવાબ : 1.1 %]

4. ધાતુના પતરાની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ અનુક્રમે 4.234m, 1.005m અને 2.01cm છે. યોગ્ય સાર્થક અંકો લઈ આ પતરાનું કુલ ક્ષેત્રફળ અને કદ ગણો.

   [જવાબ : $8.72\ m^2$, $0.086\ m^3$]

5. બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતીય બળ $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\ q_2}{r^2}$ સૂત્રથી અપાય છે, જ્યાં r એ બે વિદ્યુભારો q_1 અને q_2 વચ્ચેનું અંતર છે, તો ε_0 નો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

   [જવાબ : $N^{-1}C^2\ m^{-2}$; $M^{-1}L^{-3}T^4A^2$]

6. પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી નીચેનાં સમીકરણોની યથાર્થતા ચકાસો :

   (1) દબાણ $P = \rho gh$

   ρ = દ્રવ્યની ઘનતા, g = ગુરુત્વપ્રવેગ, h = ઊંચાઈ છે.

   (2) $Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

   જ્યાં, F = બળ, s = સ્થાનાંતર, m = દળ, v = અંતિમ વેગ અને v_0 = પ્રારંભિક વેગ છે.

   (3) $s = v_0t + \frac{1}{2}(at)^2$

   s = સ્થાનાંતર, v_0= પ્રારંભિક વેગ, a = પ્રવેગ અને t = સમય

(4) $F = \dfrac{m \times a \times s}{t}$,

જ્યાં m = દળ, a = પ્રવેગ, s = અંતર અને t = સમય

[જવાબ : (i) અને (ii) યથાર્થ છે (iii) અને (iv) યથાર્થ નથી.]

7. પ્રકાશનો વેગ, ગુરુત્વપ્રવેગ અને સામાન્ય વાતાવરણ દબાણને મૂળભૂત ભૌતિક રાશિ તરીકે લેવામાં આવે, તો દળ, લંબાઈ અને સમયના એકમો શોધો.

પ્રકાશનો વેગ $c = 3 \times 10^8 m\ s^{-1}$, $g = 10 m\ s^{-1}$ અને વાતાવરણ દબાણ $P = 10^5 N/m^2$

[જવાબ : દળનો એકમ = 8.1×10^{35}kg, લંબાઈનો એકમ = 9×10^{15}m અને સમયનો એકમ = 3×10^7s]

8. $v = at + \dfrac{b}{t + c} + v_0$ સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ યથાર્થ છે. તો a, b અને cનું પારિમાણિક સૂત્ર મેળવો. જ્યાં, v વેગ, t સમય અને v_0 પ્રારંભિક વેગ દર્શાવે છે.

[જવાબ : $[a] = M^0L^1T^{-2}$, $[b] = M^0L^1T^0$, $[c] = M^0L^0T^1$]

9. ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે મુક્ત પતન કરતાં પદાર્થનો h મીટર અંતર કાપ્યા પછી વેગ v છે. જો વેગ v, ગુરુત્વપ્રવેગ g અને અંતર h પર આધાર રાખતો હોય, તો પારિમાણિક વિશ્લેષણની રીતે સાબિત કરો કે $v = k\sqrt{gh}$.

10. પાણીમાં વિસ્ફોટ થતાં ઉત્પન્ન થતાં વાયુના પરપોટાનો આવર્તકાળ $T \propto P^a \rho^b E^c$. જ્યાં P એ સ્થિત દબાણ, ρ એ પાણીની ઘનતા અને Eએ વિસ્ફોટની કુલ ઊર્જા છે. પારિમાણિક વિશ્લેષણની રીતે a, b અને cનાં મૂલ્યો મેળવો.

[જવાબ : $a = -\frac{5}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$]

પ્રકરણ 3

સુરેખપથ પર ગતિ

3.1 પ્રસ્તાવના

3.2 કાઈનેમેટિક્સ અને ડાઇનેમિક્સ

3.3 કણની સંકલ્પના

3.4 નિર્દેશફ્રેમ

3.5 સ્થાન, પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતર

3.6 સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગ

3.7 ગતિ માટે સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખો

3.8 તત્કાલીન (અથવા તાત્ક્ષણિક) વેગ અને તત્કાલીન ઝડપ

3.9 પ્રવેગ

3.10 પ્રવેગી ગતિ માટે $x - t$ અને $v - t$ ના આલેખો

3.11 નિયમિત પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો

3.12 સાપેક્ષ વેગ

- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

પરિશિષ્ટ 3.1 વિકલન

પરિશિષ્ટ 3.2 સંકલન

3.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિશ્વમાં ગતિનો ખ્યાલ એ સર્વસામાન્ય છે. રોજિંદા જીવનમાં જોવા મળતી ક્રિયાઓ જેવી કે ચાલવું, દોડવું, સાઇકલસવારી, શરીરમાં ભ્રમણ કરતું લોહી, નદીમાં વહેતું પાણી, આકાશમાં ઊડતાં પક્ષીઓ વિગેરે ગતિનાં ઉદાહરણો છે. કેટલીક ગતિ દશ્યમાન હોતી નથી. દા.ત., વાયુના અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ, વાહક તારમાં ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિ. સ્થિર લાગતી વસ્તુઓ જેમકે રસ્તાઓ, ઝાડ, મકાનો વિગેરે પૃથ્વીના ભ્રમણ સાથે, પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ અને સૂર્ય પોતે પણ આકાશગંગામાં ગતિમાન છે. વિશ્વમાં રહેલી બીજી ગેલેક્સીઓની સાપેક્ષે આકાશગંગા ગતિમાં છે. આમ, વિશ્વમાં રહેલી દરેક વસ્તુઓ ગતિમાન છે.

જ્યારે કોઈ પદાર્થ બીજા કોઈ પદાર્થની સાપેક્ષે સમય સાથે પોતાનું સ્થાન બદલે છે, ત્યારે તે પદાર્થ બીજા પદાર્થની સાપેક્ષમાં ગતિ કરે છે તેમ કહેવાય. ગતિ ઘણા પ્રકારની હોઈ શકે, જેમકે રેખીય ગતિ (Linear motion), ચાક-ગતિ (Rotational motion), દોલનગતિ (Oscillatory motion) વગેરે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે ગતિનો અભ્યાસ સુરેખપથ પર ગતિ કરતાં પદાર્થ, જેને સુરેખગતિ (Rectilinear motion) પણ કહે છે, તે પૂરતું સીમિત રાખીશું. આ માટે આપણે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ જેવી ભૌતિક રાશિઓનો ખ્યાલ મેળવીશું.

3.2 કાઈનેમેટિક્સ અને ડાઇનેમિક્સ (Kinematics and Dynamics)

ભૌતિકવિજ્ઞાનની જે શાખામાં ગતિની ચર્ચા, તે માટેનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય કરવામાં આવે છે, તેને **કાઈનેમેટિક્સ (શુદ્ધ ગતિશાસ્ત્ર)** કહે છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનની જે શાખામાં ગતિની ચર્ચા, તે માટેનાં કારણો તથા ગતિ કરતી વસ્તુના ગુણધર્મ સહિત કરવામાં આવે છે, તેને **ડાઇનેમિક્સ (ગતિશાસ્ત્ર)** કહે છે.

કાઈનેમેટિક્સ અને ડાઇનેમિક્સને સંયુક્ત રીતે **મિકેનિક્સ (Mechanics)** કહે છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત કાઈનેમેટિક્સનો અભ્યાસ કરીશું.

3.3 કણની સંકલ્પના (Concept of a Particle)

ગતિના અભ્યાસમાં ગતિમાન પદાર્થોને આપણે કણ તરીકે ધારીશું. **કણ એટલે દળ ધરાવતો બિંદુવત્ પદાર્થ.** વાસ્તવમાં આવો કોઈ પદાર્થ મળી શકે જ નહિ, કારણ કે પદાર્થને કંઈક ને કંઈક પરિમાણો તો હોવાનાં જ, પરંતુ અમુક સંજોગોમાં આપેલ પદાર્થને કણ તરીકે લઈ શકાય છે. આ સંજોગો નીચે મુજબ છે :

(i) માત્ર સુરેખગતિ કરતાં કોઈ પણ ઘનપદાર્થના બધા જ કણો સમાન સમયમાં સમાન અંતર કાપે છે, માટે આ પદાર્થની ગતિની ચર્ચા તેના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણની ગતિ પરથી કરી શકાય છે.

(ii) જ્યારે બે પદાર્થો વચ્ચેના અંતરની સરખામણીમાં તે પદાર્થોનાં પરિમાણો અવગણ્ય હોય, તે સંજોગોમાં તે પદાર્થોને કણ તરીકે ગણી શકાય. દા. ત., પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચે લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળની ગણતરી વખતે પૃથ્વી અને સૂર્ય એ બંનેને કણ તરીકે લઈ શકાય.

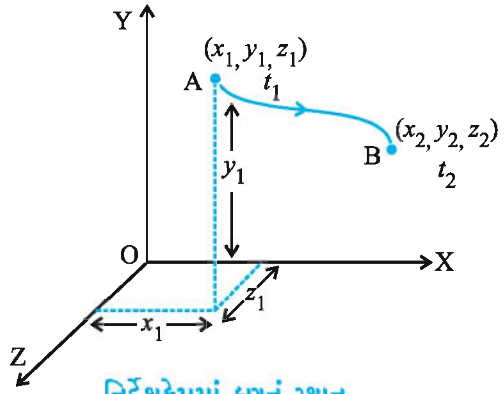
3.4 નિર્દેશફ્રેમ (Frame of Reference)

કોઈ પણ પદાર્થ ગતિ કરે છે કે તે સ્થિર છે, તે કઈ રીતે જાણી શકાય ? આ પ્રશ્નનો જવાબ આપણે એક ઉદાહરણ પરથી સમજીશું. અચળ વેગથી ગતિ કરતી તમારી ટ્રેનમાં રહેલી બૅગ તમને સ્થિર લાગશે. પરંતુ જો આ બૅગનું અવલોકન રોડ પર ઊભેલી વ્યક્તિ દ્વારા કરવામાં આવે, તો તેને તે જ બૅગ ગતિમાં દેખાશે. આમ, બૅગ તો તેની તે જ સ્થિતિમાં છે, પરંતુ જો તમે ટ્રેનમાંથી અવલોકન કરો, તો તે બૅગ સ્થિર જણાશે અને રસ્તા પરથી અવલોકન કરતાં બૅગ ગતિ કરતી જણાશે. રસ્તા પર આપણને દેખાતાં ઝાડ, મકાન વગેરે સ્થિર દેખાય છે, પરંતુ જો તેમનું ચંદ્ર પરથી અવલોકન કરવામાં આવે, તો તે ગતિમાન જણાશે. આમ, કોઈ પદાર્થની ગતિ એ તે પદાર્થ અને અવલોકનકારનો સંયુક્ત ગુણધર્મ છે અથવા બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો ગતિ એ સાપેક્ષ ખ્યાલ છે.

અવલોકનકાર જે સ્થળેથી જે પરિસ્થિતિમાંથી અવલોકન કરે છે, તેને નિર્દેશફ્રેમ કહે છે. ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં ટ્રેનમાં બેઠેલ વ્યક્તિ માટે અચળવેગી ટ્રેન એ નિર્દેશ ફ્રેમ છે, જ્યારે રોડ પર ઊભેલી વ્યક્તિ માટે 'સ્થિર' પૃથ્વી નિર્દેશફ્રેમ છે. નિર્દેશફ્રેમ બે પ્રકારની હોય છે : જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ (Inertial frame of reference) અને અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ (Non-inertial frame of reference). આ વિશે આપણે પ્રકરણ 5માં અભ્યાસ કરીશું.

3.5 સ્થાન, પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતર (Position, Pathlength and Displacement)

કોઈ પણ કણની ગતિનું વર્ણન કરવા માટે સમયની દરેક ક્ષણે તે કણનું સ્થાન જાણવું પડે. કણનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે નિર્દેશફ્રેમની જરૂર પડે છે. કઈ નિર્દેશફ્રેમ લેવી તે માટેના કોઈ જ નિયમો નથી. આપણને સરળ પડે તેવી કોઈ પણ નિર્દેશફ્રેમ લેવાની છૂટ છે. સામાન્ય રીતે, પરસ્પર લંબ હોય તેવી ત્રણ અક્ષો પસંદ કરી તેમને X, Y અને Z (અનુક્રમે વિષમ ઘડી દિશામાં) અક્ષ એવું નામ આપી શકાય. આ અક્ષોનું છેદનબિંદુ (ઊગમબિંદુ) O ને **સંદર્ભબિંદુ (Reference point)** તરીકે લઈ શકાય. આ ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે કણના યામો (x, y, z) તે કણનું, તે નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે સ્થાન દર્શાવે છે તેમ કહેવાય. સમય માપવા માટે આ યામપદ્ધતિમાં ઘડિયાળ ઉમેરી દઈએ.



નિર્દેશફ્રેમમાં કણનું સ્થાન

આકૃતિ 3.1

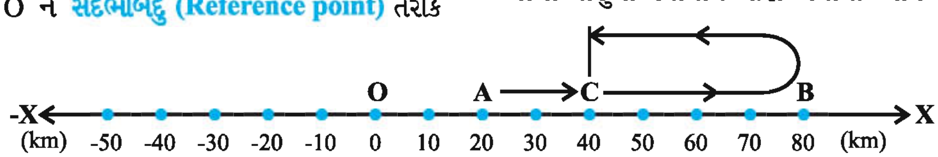
આકૃતિ 3.1માં t_1 સમયે ગતિમાન કણના સ્થાનયામ (x_1, y_1, z_1) છે અને t_2 સમયે સ્થાનયામ (x_2, y_2, z_2) છે, જે આપેલ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે સ્થાન દર્શાવે છે.

હવે જો સમય સાથે કણના બધા જ યામો અફર રહેતા હોય, તો તે નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે કણ સ્થિર છે, તેમ કહેવાય, અને જો તેમાંના કોઈ એક કે વધુ યામો બદલાતા હોય, તો તે કણ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષમાં ગતિ કરે છે, તેમ કહેવાય.

ગતિ કરતાં કણના સ્થાનના યામોમાં ફક્ત કોઈ એક યામ સમય સાથે બદલાતો હોય, તો તે કણની એક પારિમાણિક ગતિ અથવા સુરેખગતિ કહેવાય. દા. ત., ટાવરની ટોચ પરથી મુક્તપતન કરતો પદાર્થ, સીધી સડક પર ચાલતી કાર.

કણની ગતિ દરમિયાન તેના સ્થાનયામોમાંથી કોઈ પણ બે યામો સમય સાથે બદલાતા હોય, તો દ્વિ-પારિમાણિક અને ત્રણ યામો બદલાતા હોય, તો તેને ત્રિ-પારિમાણિક ગતિ કહે છે. સૂર્યની આસપાસ ભ્રમણ કરતી પૃથ્વી, કૅરમબોર્ડની કૂકરીની ગતિએ દ્વિ-પારિમાણિક ગતિ છે. જ્યારે બગીચામાં ઊડતા પતંગિયાં એ ત્રિ-પારિમાણિક ગતિનું ઉદાહરણ છે.

કણની સુરેખપથની ગતિ માટે આપણે અક્ષ (દા. ત., X–અક્ષ) એવી રીતે પસંદ કરી શકીએ, જેથી તે કણના પથ પર સંપાત થાય. આકૃતિ 3.2માં દર્શાવ્યા અનુસાર સરળતા ખાતર કણનું સ્થાન ધારો કે ઊગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે નક્કી કરવામાં આવે છે. બિંદુ Oની જમણી બાજુનાં સ્થાનો ધન અને ડાબી બાજુનાં સ્થાનોને ઋણ લેવામાં આવે છે.



કારની સુરેખપથ પર ગતિ

આકૃતિ 3.2

પથલંબાઈ (Pathlength) : કોઈ સમયગાળામાં કણે કાપેલા અંતરને પથલંબાઈ અથવા કુલ અંતર કહે છે.

સ્થાનાંતર (Displacement) : કોઈ સમયગાળામાં કણના સ્થાનમાં થતાં ફેરફારને સ્થાનાંતર કહે છે. જો t_1 સમયે પદાર્થનું પ્રારંભિક સ્થાન x_1 અને t_2 સમયે અંતિમ સ્થાન x_2 હોય, તો $\Delta t = t_2 - t_1$ સમયગાળામાં

સ્થાનાંતર = અંતિમસ્થાન – પ્રારંભિક સ્થાન

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરનો SI પદ્ધતિમાં એકમ મીટર (m) છે. હવે, આપણે આ બંને રાશિઓ વચ્ચેનો ભેદ નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ધારો કે એક કાર X-અક્ષની દિશામાં ગતિ કરે છે. આકૃતિ 3.2 માં દર્શાવ્યા મુજબ કાર t_1 સમયે A પર છે અને તે બિંદુ B પર જઈને સમય t_2 એ બિંદુ C પર આવે છે.

અહીં $\Delta t = t_2 - t_1$, જેટલા સમયગાળામાં,

પથલંબાઈ = AB + BC = (80 – 20) + (80 – 40) = +100 km

સ્થાનાંતર = અંતિમ સ્થાન – પ્રારંભિક સ્થાન

(બિંદુ C) (બિંદુ A)

= 40 – 20 = + 20 km

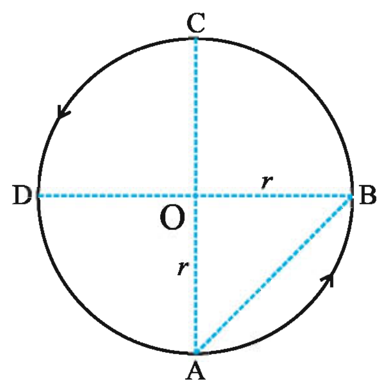
આ કિસ્સામાં પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતર બંને ધન છે.

સ્થાનાંતરની દિશા ધન X–અક્ષની દિશામાં છે. જો કાર B બિંદુએથી ગતિની શરૂઆત કરી C બિંદુએ આવે તો, પથલંબાઈ = 80 – 40 = 40 km થશે અને સ્થાનાંતર = 40 – 80 = –40 km થશે. આમ, સ્થાનાંતર ઋણ પણ હોઈ શકે. અહીં, કારનું સ્થાનાંતર X–અક્ષની દિશામાં છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં કાર A બિંદુએથી ગતિ કરી B બિંદુએ જઈ પાછી A બિંદુ પર આવે, તો પથલંબાઈ + 120 km પરંતુ કારે કરેલું સ્થાનાંતર શૂન્ય થશે. આ ઉદાહરણથી સ્પષ્ટ છે કે **પથલંબાઈ હંમેશાં ધન હોય છે, પરંતુ સ્થાનાંતર ધન, ઋણ કે શૂન્ય પણ હોઈ શકે છે.** સ્થાનાંતર પરથી કારની ગતિના ગતિપથની માહિતી મળતી નથી, તે તો કારની ગતિની માત્ર પરિણામી અસર દર્શાવે છે.

સ્થાનાંતરને મૂલ્ય અને દિશા બંને છે. આવી ભૌતિક રાશિઓનું નિરૂપણ સદિશો દ્વારા કરવામાં આવે છે. સદિશો વિશેનો અભ્યાસ આપણે પ્રકરણ 4માં કરીશું. એક પરિમાણમાં કણ ફક્ત બે દિશાઓ (આગળની તરફ અને પાછળની તરફ **અથવા** ઉપરની તરફ અને નીચેની તરફ)માં ગતિ કરી શકે છે. સરળતા ખાતર આ બંને દિશાઓને + અને – સંજ્ઞાઓ દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : એક કણ, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર પથ પર વિષમઘડી દિશામાં ગતિ કરે છે. આકૃતિ 3.3માં દર્શાવ્યા અનુસાર તે ગતિની શરૂઆત બિંદુ Aથી કરે છે. નીચે દર્શાવેલા કણની ગતિના કિસ્સાઓમાં કણે કાપેલું કુલ અંતર (પથલંબાઈ) અને કરેલ સ્થાનાંતરનું મૂલ્ય શોધો.

(i) Aથી B (ii) Aથી C (iii) Aથી D (iv) કણનું એક પરિભ્રમણ.



આકૃતિ 3.3

ઉકેલ :

(i) Aથી B સુધી કણે કાપેલ અંતર એ વર્તુળના પરિઘના ચોથા ભાગ જેટલું છે. આથી,

$$\text{પથલંબાઈ} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$$

$$\text{સ્થાનાંતર} = |AB| = \sqrt{OA^2 + OB^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\, r$$

(ii) Aથી C સુધી કણે કાપેલું કુલ અંતર.

$$\text{પથલંબાઈ} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

$$\text{સ્થાનાંતર} = |AC| = r + r = 2r$$

(iii) Aથી D સુધી કણે કાપેલું અંતર,

$$\text{પથલંબાઈ} = 2\pi r \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi r$$

$$\text{સ્થાનાંતર} = |AD| = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\, r$$

(iv) એક પરિભ્રમણ દરમિયાન કણે કાપેલું અંતર, વર્તુળના પરિઘ જેટલું હશે. આથી પથલંબાઈ = $2\pi r$

એક પરિભ્રમણ બાદ કણ મૂળ સ્થાન A પર પાછો આવતો હોવાથી સ્થાનાંતર શૂન્ય થશે.

3.6 સરેરાશ ઝડપ (Average Speed) અને સરેરાશ વેગ (Average Velocity)

જ્યારે કોઈ પદાર્થ ગતિ કરતો હોય, ત્યારે સમય સાથે તેનું સ્થાન સતત બદલાતું જતું હોય છે. ગતિનો અભ્યાસ કરવા માટે સૌપ્રથમ એ જાણવું જરૂર બને છે કે પદાર્થ સમય સાથે પોતાનું સ્થાન કેટલી ત્વરાથી બદલે છે. આ માટે સરેરાશ ઝડપ નામની રાશિ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

પદાર્થની પથલંબાઈ (એટલે કે કાપેલ કુલ અંતર) અને તે માટે લાગતા સમયના ગુણોત્તરને **સરેરાશ ઝડપ** કહે છે. તેને સંકેતમાં $< v >$ અથવા $\overline{v}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, આપેલ સમયગાળામાં,

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{પથ લંબાઈ}}{\text{સમય ગાળો}}$$

જો કોઈ પદાર્થ Δt જેટલા સમયગાળામાં Δx જેટલું અંતર કાપ્યું હોય તો આ સમયગાળામાં સરેરાશ ઝડપ,

$$< v > = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.6.1)$$

હવે, પ્રશ્ન એ ઉદ્ભવે કે, પદાર્થ કેટલી ત્વરાથી અને કઈ દિશામાં પોતાનું સ્થાન બદલે છે ? આ માટે આપણે સરેરાશ વેગ નામની ભૌતિક રાશિ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

પદાર્થના સ્થાનાંતર અને તે માટે લાગતા સમયના ગુણોત્તરને સરેરાશ વેગ કહે છે.

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}} \quad (3.6.2)$$

સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગનો SI એકમ ms^{-1} છે, વ્યવહાર ઉપયોગો માટે તેનો એકમ kmh^{-1} પણ વપરાય છે. સરેરાશ ઝડપમાં દિશાનું મહત્ત્વ નથી, પરંતુ સરેરાશ વેગમાં દિશાનું મહત્ત્વ છે. આગળ આપણે સ્પષ્ટ કરી ચૂક્યા છીએ કે સુરેખપથ પર ગતિની દિશા + અથવા – સંજ્ઞા વડે વ્યક્ત કરી શકાય છે. આથી પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે વેગ માટે સદિશ સંજ્ઞાનો ઉપયોગ કરીશું નહિ. આ હકીકત સમજવા માટે આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ. આકૃતિ 3.1માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે કાર $t = 0$, સમયે A પર છે અને તે બિંદુ B પર જઈને 2 કલાકમાં બિંદુ C પર આવે છે. આ સમયગાળા માટે કારની સરેરાશ ઝડપ,

$$\overline{v} = \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{100}{2} = +50 \text{ kmh}^{-1}$$

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$= \frac{40 - 20}{2} = +10 \text{ kmh}^{-1}$$

'+' સંજ્ઞા સૂચવે છે કે કારનો સરેરાશ વેગ ધન X દિશામાં છે.

હવે, જો કાર 3 કલાકમાં A–B–C–O માર્ગે ગતિ કરીને બિંદુ O પર આવે, તો

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{140}{3} = +46.6 \text{ kmh}^{-1}$$

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{0 - 20}{3} = -6.66 \text{ kmh}^{-1}$$

અહીં, કારનો સરેરાશ વેગ ઋણ X દિશામાં છે.

આમ, સરેરાશ વેગ ધન, ઋણ અથવા શૂન્ય હોઈ શકે છે, જે સ્થાનાંતરની સંજ્ઞા પર આધારિત છે. પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ, પદાર્થના સરેરાશ વેગના મૂલ્ય જેટલી અથવા તેના કરતાં વધુ હોય છે.

અહીં, સરેરાશ શબ્દ વાપરવા પાછળનું કારણ એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીશું. ધારો કે એક કાર અમદાવાદથી સવારે 10 વાગે ઊપડીને બપોરે 12 વાગે વડોદરા પહોંચે છે. અમદાવાદ અને વડોદરા વચ્ચેનું અંતર 100km છે. આ પરથી કારની સરેરાશ ઝડપ 50 kmh^{-1} થાય. આનો અર્થ એવો નથી કે અમદાવાદથી નીકળેલી કારની ઝડપ વડોદરા પહોંચે ત્યાં સુધી 50 kmh^{-1} રહી હશે. રસ્તો ખુલ્લો મળ્યો હોય, તો તેની ઝડપ 80 kmh^{-1} પણ થઈ હોય અને રેલવેનું ફાટક બંધ હોય, તો ઝડપ શૂન્ય પણ થશે. હવે સ્પષ્ટ થઈ ગયું હશે કે આ 50 kmh^{-1} એ તો કારની સરેરાશ ઝડપ થઈ.

ઉદાહરણ 2 : કોઈ એક વાહન જુદી-જુદી ઝડપોથી જુદાં-જુદાં અંતરો એક જ દિશામાં કાપે છે. આ વાહન માટે સરેરાશ ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે વાહન v_1, v_2, v_3, ... જેટલી ઝડપોથી અનુક્રમે d_1, d_2, d_3, ... અંતરો એક જ દિશામાં કાપે છે.

∴ વાહને કાપેલ કુલ અંતર

$$D = d_1 + d_2 + d_3 + ...$$

આ માટે લીધેલો કુલ સમય

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + ...$$

$$= \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3} + ...$$

$\therefore$ સરેરાશ ઝડપ $= \frac{D}{t}$

$$= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots\dots\dots}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3} + \dots\dots\dots}$$

ખાસ કિસ્સો : જો વાહન બે જુદી-જુદી ઝડપો v_1 અને v_2થી સમાન અંતરો ($d_1 = d_2 = d$) કાપે, તો

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{d + d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

ઉદાહરણ 3 : એક વ્યક્તિ પોતાને ચાલવાના કુલ અંતરમાંથી અડધું અંતર v_0, જેટલી ઝડપથી ચાલે છે. બાકીનું અડધું અંતર ચાલવા માટે લાગતા સમયના અડધા સમય દરમિયાન તેની ઝડપ v_1 અને તે પછીના અડધા સમય દરમિયાન તેની ઝડપ v_2 હોય, તો આટલું કુલ ચાલવા દરમિયાન વ્યક્તિની સરેરાશ ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ચાલવાનું કુલ અંતર d છે. પ્રથમ અડધું અંતર $\left(\frac{d}{2}\right)$ ચાલતાં લાગતો સમય $= t_1$ અને બાકીનું અડધું અંતર ચાલતાં લાગતો સમય $2t$ છે.

$\therefore$ કાપેલ અંતર = સરેરાશ ઝડપ × સમયનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{d}{2} = v_0t_1$ અને તેથી $t_1 = \left(\frac{d}{2v_0}\right)$

અને $\frac{d}{2} = v_1t + v_2t = (v_1 + v_2)t$

$$\therefore 2t = \left(\frac{d}{v_1 + v_2}\right)$$

આમ, d જેટલું કુલ અંતર કાપતાં લાગતો કુલ સમય $= t_1 + 2t$ થશે.

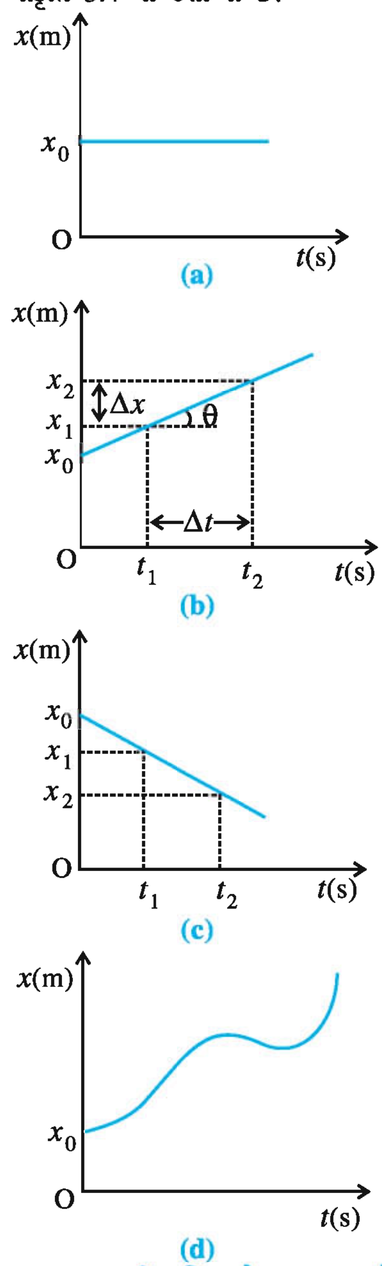
$$\therefore \text{વ્યક્તિની સરેરાશ ઝડપ } \langle v \rangle = \frac{d}{t_1 + 2t}$$

$$= \frac{d}{\left(\frac{d}{2v_0}\right) + \left(\frac{d}{v_1 + v_2}\right)}$$

$$= \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{v_1 + v_2 + 2v_0}$$

3.7 ગતિ માટે સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખો

આગળ આપણે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છીએ કે પદાર્થની ગતિ, સ્થાન-સમયના આલેખ દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય છે. આલેખ જેવા Powerful tool દ્વારા પદાર્થની ગતિનાં અલગ અલગ પાસાંઓનું નિરૂપણ તેમજ વિશ્લેષણ સરળતાથી કરી શકાય છે. પદાર્થની X–અક્ષ પરની ગતિ દરમિયાન સમયની સાથે ફક્ત x–યામ બદલાતો હોય છે. આ પરથી આપણને $x - t$ આલેખ મળે છે. આ **આલેખનો ઢાળ** $= \frac{\Delta x}{\Delta t} = tan\theta$ **આપેલા સમયગાળા માટે પદાર્થનો સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે.** જ્યાં, θ એ સમય-અક્ષ સાથે આલેખનો કોણ છે. જુદા-જુદા પ્રકારની ગતિ માટે x–t આલેખો આકૃતિ 3.4 માં દર્શાવ્યા છે.



જુદા-જુદા પ્રકારની ગતિ માટે $x - t$ આલેખો

આકૃતિ 3.4

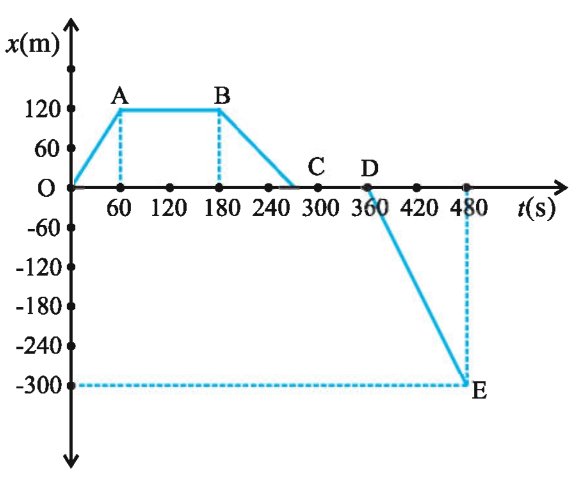
(i) જો $x-t$ આલેખ સમય-અક્ષને સમાંતર રેખા મળે, તો પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિમાં છે, તેમ કહેવાય. આકૃતિ 3.4(a), માં આલેખના ઢાળનું મૂલ્ય શૂન્ય મળતું હોવાથી પદાર્થ x_0 આગળ સ્થિર (વેગ શૂન્ય) છે.

(ii) સુરેખપથ પર ગતિ કરતો પદાર્થ, સમાન સમયગાળામાં સમાન અંતર કાપે, તો પદાર્થ પથ પર **નિયમિત ગતિ** (અચળવેગી) **(Uniform motion)** કરે છે તેમ કહેવાય. આ પ્રકારની ગતિ માટે આકૃતિ 3.4 (b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર સુરેખા મળે છે. આ સુરેખાનો ઢાળ $\left(=\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)$ ધન હોવાથી કહી શકાય કે પદાર્થનો સરેરાશ વેગ ધન છે અને તે + X દિશામાં ગતિ કરે છે. જો સુરેખાનો ઢાળ ઋણ મળે, તો પદાર્થનો સરેરાશ વેગ ઋણ થશે અને પદાર્થ ઋણ X દિશામાં ગતિ કરે છે, તેમ કહેવાય. (જુઓ આકૃતિ 3.4 (c),

(iii) જો $x - t$ આલેખ સળંગ રેખાને બદલે ચઢાવ-ઉતારવાળો કે વક્ર મળે તો પદાર્થ **અનિયમિત ગતિ (Non–uniform motion)** કરે છે, તેમ કહેવાય, (જુઓ આકૃતિ 3.4 (d)).

ઉદાહરણ : 4 એક મોટરસાઇકલસવાર તેના ઘરેથી નિયમિત ગતિથી પૂર્વ દિશામાં સીધી રેખા પર 120 m દૂર આવેલા પેટ્રોલ પંપ પર 60 s, માં પહોંચે છે. તે પેટ્રોલ પુરાવવા માટે 120 s ઊભો રહે છે. ત્યાર બાદ મોટરસાઇકલસવાર 90 s માં તે નિયમિત ગતિથી જ રસ્તે ઘરે આવે છે. 90 s બાદ તે મોટરસાયકલ પર ઘરેથી ઑફિસ જવા નીકળે છે. ઑફિસ તેના ઘરથી પશ્ચિમ દિશામાં સીધી રેખા પર 300 m ના અંતરે આવેલી છે. આ માટે તે 120 s જેટલો સમય લે છે. આ મોટરસાઇકલ માટે સ્થાન-સમયનો આલેખ દોરો અને તેના જુદા-જુદા સમયગાળા માટે સરેરાશ વેગ શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 3.5

ઘરને ઊગમબિંદુ (O) તરીકે લઈ, પૂર્વ દિશાનાં અંતરો ધન (+Yની દિશા) અને પશ્ચિમ દિશાનાં અંતરો ઋણ (–Y દિશા) લેતાં, મોટરસાઇકલ માટે સ્થાન-સમયનો આલેખ (આકૃતિ 3.5) માં દર્શાવ્યા મુજબ મળશે.

OA વિભાગમાં મોટરસાઇકલનો સરેરાશ વેગ

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{120 - 0}{60 - 0} = +2\text{m s}^{-1}$$

AB વિભાગમાં મોટરસાઇકલ પેટ્રોલપંપ આગળ સ્થિર છે. આથી આ સમયગાળામાં તેનો સરેરાશ વેગ શૂન્ય થશે.

BC વિભાગમાં સરેરાશ વેગ

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 120}{270 - 180} = -1.33\text{m s}^{-1}$$

CD વિભાગમાં મોટરસાઇકલ ઘરે હોવાથી તેનો વેગ શૂન્ય થશે.

DE વિભાગમાં સરેરાશ વેગ

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-300 - 0}{480 - 360} = -2.5\text{m s}^{-1}$$

અહીં, '+' અને '–' સંજ્ઞા દર્શાવે છે કે મોટરસાઇકલનો સરેરાશ વેગ અનુક્રમે પૂર્વ અને પશ્ચિમ દિશામાં છે.

3.8 તત્કાલીન (અથવા તાત્ક્ષણિક) વેગ અને તત્કાલીન ઝડપ (Instantaneous Velocity and Instantaneous Speed)

સરેરાશ વેગ (સરેરાશ ઝડપ)ની ચર્ચામાં આપણે જોઈ ગયા કે કોઈ પણ સમયગાળામાં મળતો વેગ ફક્ત એટલી માહિતી આપે છે કે તે સમયગાળામાં પદાર્થે કેટલી ઝડપથી ગતિ કરી. પરંતુ આ સમયગાળાની જુદી-જુદી ક્ષણે તેનો વેગ કેટલો છે, તે માહિતી તેના પરથી મળતી નથી.

ધારો કે એક-પારિમાણિક ગતિ કરતો કોઈ કણ t સમયે x અને $t + \Delta t$ સમયે $x + \Delta x$ પાસે છે. આ સંજોગોમાં સમીકરણ (3.6.2)માં દર્શાવ્યા મુજબ Δt સમયગાળા દરમિયાન તે કણનો વેગ મેળવી શકાય, પરંતુ આ બે ક્ષણો વચ્ચે આવેલી (સૈદ્ધાંતિક રીતે અનંત) ક્ષણો દરમિયાન કણના વેગમાં વધારો કે ઘટાડો થયો હોય તેની માહિતી મળતી નથી. પરંતુ એટલું તો સ્પષ્ટ છે કે કણને પોતાનો વેગ બદલવા માટે જેમ ઓછો ને ઓછો સમયગાળો Δt આપીએ તેમ તેના વેગ વિશે વધુ ને વધુ ચોક્કસ માહિતી મળતી જાય. આ હકીકત સ્પષ્ટ કરવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ સમજીએ.

ધારો કે કોઈ કાર સ્થિર સ્થિતિમાંથી $t = 0$ સમયે શરૂ કરી સુરેખપથ પર +X દિશામાં ગતિ કરે છે. કારનો વેગ સમય સાથે વધતો જાય છે. કારમાં બેઠેલી વ્યક્તિ દર

સેકન્ડે સ્પીડોમીટરનું અવલોકન અને કાપેલ અંતરનું અવલોકન નોંધતો જાય છે. સ્પીડોમીટર એ જે-તે ક્ષણે કારની ઝડપ દર્શાવે છે, પરંતુ આપણી કાર એક જ દિશામાં ગતિ કરતી હોવાથી ઝડપ અને વેગનાં મૂલ્યો સરખાં મળશે. સામાન્ય રીતે સ્પીડોમીટરનું અવલોકન kmh^{-1}માં હોય છે. પણ ધારો કે આપણી (કલ્પિત) કારમાં તે $m\ s^{-1}$માં છે. આ અવલોકનો ટેબલ 3.1 માં દર્શાવ્યા છે.

ટેબલ 3.1

સમય t(s)	ઉદ્‌ગમબિંદુથી સ્થાનાંતર x(m)	સ્પીડોમીટરનું અવલોકન v (ms^{-1})
0	0	0
1	1.5	3
2	6	6
3	13.5	9
4	24	12
5	37.5	15
6	54	18

ધારો કે આપણે $t = 3$ સેકન્ડે કારનો વેગ શોધવો છે. વેગની ગણતરી કરવા માટે કારે કરેલ સ્થાનાંતર અને આ સ્થાનાંતર માટે કંઈક સમય આપવો પડે. ધારો કે $t = 3$ s થી $t + \Delta t = 6$ s એટલે કે $\Delta t = 3$ s લઈએ, તો આ સમયગાળા દરમિયાન,

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{54 - 13.5}{3} = +13.5\text{m s}^{-1}$$

પરંતુ ટેબલ પરથી જોઈ શકાય છે કે, $t = 3$ s સેકન્ડે કારનું સ્પીડોમીટર 9m s^{-1} દર્શાવે છે. આ સમયગાળામાં મળતાં સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય સાચા મૂલ્ય કરતાં ઘણું દૂર છે.

હવે, આપણે સમયગાળો નાનો કરીને $\Delta t = 1$ s, લઈએ. આ સમયગાળામાં,

$$\text{સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય} = \frac{24 - 13.5}{4 - 3} = 10.5\text{m s}^{-1}$$

અહીં, કારની ગતિ સ્થાન સમીકરણ $x = 1.5t^2$. અનુસાર ગતિ કરે છે. આ પરથી $t = 3$ s અને $t = 3.1$ s સેકન્ડે કારનું સ્થાન અનુક્રમે $x = 13.5$m અને $x = 14.415$m મળશે. હવે, $\Delta t = 0.1$ s જેટલા નાના સમયગાળામાં સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય મેળવીએ તો,

$$\text{સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય} = \frac{14.415 - 13.5}{3.1 - 3}$$

$$= 9.15\text{m s}^{-1}$$

સમયગાળો હજુ નાનો $\Delta t = 0.05$ s, લેતાં સરેરાશ વેગ 9.07ms^{-1} છે.

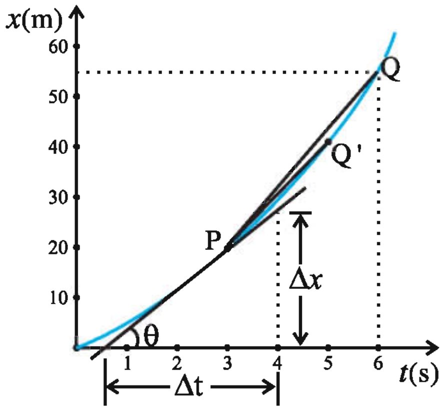
આમ, જેમજેમ આ સમયગાળો ઓછો ને ઓછો કરતાં જઈશું તેમતેમ મળતા સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય અને ખરેખર મૂલ્ય વચ્ચેનો તફાવત ઘટતો જશે. હવે પ્રશ્ન એ થાય કે કેટલા ઓછા સમયગાળાને પૂરતો ઓછો સમયગાળો ગણવો. તમે ધોરણ 12 માં ગણિતમાં ભણશો કે સમયગાળો શૂન્યવત્ નાનો (પણ શૂન્ય નહિ) લેવો હોય, તો તેની સંજ્ઞા $\lim_{\Delta t \to 0}$ છે. આનો અર્થ એ થાય કે t અને $t + \Delta t$ એ સમયની બે જુદી-જુદી ક્ષણો ન ગણતાં લગભગ એક જ ક્ષણ ગણી શકાય. આ સંજોગોમાં મેળવેલ સરેરાશ વેગના મૂલ્યને t સમયે તત્કાલીન વેગનું મૂલ્ય અથવા વેગનું મૂલ્ય કહે છે. આ હકીકતને સંકેતમાં નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય,

$$t \text{ સમયે તત્કાલીન વેગ } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (3.7.1)$$

અહીં, સંકેત $\frac{dx}{dt}$ને x નું t પ્રત્યે (કે tની સાપેક્ષમાં) વિકલિત કહે છે. જે સ્થાન x નો સમયની સાપેક્ષે બદલવાનો દર દર્શાવે છે. $\frac{dx}{dt}$ ને $\dot{x}$ વડે પણ દર્શાવાય છે. (વિકલનની સમજૂતી પ્રકરણના અંતમાં આપેલી છે.)

$x - t$ આલેખ પરથી તત્કાલીન વેગ

હવે, આપણે $x - t$ આલેખ પરથી તત્કાલીન વેગનું મૂલ્ય કઈ રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું. આ માટે આપણે ઉપર ચર્ચેલા ઉદાહરણ માટે સ્થાન-સમયનો આલેખ દોરીશું, જે આકૃતિ 3.6માં દર્શાવ્યા મુજબનો મળે છે.



કાર માટે x − t આલેખ
આકૃતિ 3.6

ધારો કે આપણે $t = 3$ સેકન્ડે આ કારનો તત્કાલીન વેગ મેળવવો છે. આ માટે આપણે સમયની બે ક્ષણો $t = 3$ s અને $t + \Delta t = 6$ s ને અનુરૂપ આલેખ પરનાં બિંદુઓ P અને Qને જોડતી રેખા PQનો ઢાળ શોધીએ, તો આ ઢાળનું મૂલ્ય $\Delta t = 6 - 3 = 3$ s દરમિયાન મળતા કારના સરેરાશ વેગ જેટલું હોય છે.

ત્યાર બાદ $t = 3$ s અને $t + \Delta t = 5$ s, એટલે કે $\Delta t = 2$ s દરમિયાન કારનો સરેરાશ વેગ PQ' ના ઢાળ પરથી મળશે. આ, રીતે $t = 3$ સેકન્ડ પછીનો સમયગાળો Δt નાનો ને નાનો કરતા જઈએ તેમ બિંદુ Pમાંથી પસાર થતી રેખા, બિંદુ P પાસે આલેખને દોરેલા સ્પર્શક તરફ ઢળતી જાય છે અને જ્યારે $\lim_{\Delta t \to 0}$ લઈએ, ત્યારે તે સ્પર્શક સાથે એકરાર થઈ જશે.

બિંદુ Pમાંથી પસાર થતી હોય તેવી અનેક રેખાઓ હોઈ શકે પરંતુ Pમાંથી પસારી થતી અને P પાસે આલેખને સ્પર્શક હોય તેવી એક અને માત્ર એક જ રેખા દોરી શકાય છે. આ સ્પર્શકનો ઢાળ $t = 3$ s કારનો (તત્કાલીન) વેગ આપે છે.

યાદ રાખો કે **નિયમિત ગતિ માટે $x - t$ આલેખ સુરેખા હોય છે આથી કોઈ પણ ક્ષણે વેગનું મૂલ્ય અને સરેરાશ વેગ સમાન હોય છે.**

તત્કાલીન ઝડપ અથવા **ઝડપ** એ ગતિમાન પદાર્થના વેગનું મૂલ્ય છે. દા.ત., $+5.0$ m s^{-1} તથા -5.0 m s^{-1} ના બંને વેગો માટે ઝડપ 5.0 m s^{-1} થશે. કારનું સ્પીડોમિટર એ જે-તે ક્ષણે કારની ઝડપ એટલે કે તત્કાલીન ઝડપ દર્શાવે છે. અહીં, ધ્યાન રાખવા જેવી બાબત એ છે કે નિશ્ચિત સમયગાળા પર મેળવેલ સરેરાશ ઝડપ, એ સરેરાશ વેગના મૂલ્ય કરતાં વધુ અથવા સમાન હોઈ શકે છે. પરંતુ, **કોઈ પણ ક્ષણે મેળવેલ તત્કાલીન ઝડપ અને તત્કાલીન વેગનાં મૂલ્યો સમાન હોય છે.**

ઉદાહરણ 5 : ગતિ કરતાં એક પદાર્થનું સ્થાનસૂત્ર $x(t) = (4.2t^2 + 2.6)$m વડે મળતું હોય, તો (*i*) $t = 0$ થી $t = 3$ સેકન્ડના ગાળા દરમિયાન તેનો સરેરાશ વેગ શોધો. તથા (*ii*) $t = 3$ સેકન્ડે તેનો તત્કાલીન વેગ શોધો. $\left[\frac{d(x^n)}{dt} = nx^{n-1}\right]$

ઉકેલ : (*i*) $x(t) = 4.2t^2 + 2.6$

$t = 0$ માટે પદાર્થનું સ્થાન

$x(0) = 4.2(0)^2 + 2.6$

$= 2.6$m (પ્રારંભિક સ્થાન)

$t = 3$s માટે પદાર્થનું સ્થાન

$x(3) = 4.2(3)^2 + 2.6$

$= 40.4$m (અંતિમ સ્થાન)

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{અંતિમ સ્થાન} - \text{પ્રારંભિક સ્થાન}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$= \frac{x(3) - x(0)}{3 - 0} = \frac{40.4 - 2.6}{3} = 12.6\text{m s}^{-1}$$

(*ii*) તત્કાલીન વેગ શોધવા માટે આપેલ સ્થાન સૂત્રનું 't' ની સાપેક્ષે વિકલન કરવું પડે.

$$\text{તત્કાલીન વેગ } v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4.2t^2 + 2.6)$$

$$\therefore v = 4.2\frac{d}{dt}(t^2) + \frac{d}{dt}(2.6)$$

$$= 4.2(2t) + 0$$

$$= 8.4t \text{ m s}^{-1}$$

હવે, આમાં $t = 3$s મૂકતાં,

$v = 8.4(3)$

$= 25.2\text{m s}^{-1}$

3.9 પ્રવેગ (Acceleration)

કણની ગતિ દરમિયાન જો તેનો વેગ સમયની સાથે અચળ રહેતો હોય, તો તેને અચળવેગી ગતિ કહે છે. પરંતુ, જો તેનો વેગ બદલાતો હોય તો કણ પ્રવેગી ગતિ કરે છે, તેમ કહેવાય **વેગમાં થતાં ફેરફારના સમયદરને પ્રવેગ કહે છે.**

ધારો કે સુરેખપથ પર ગતિ કરતાં કણનો t_1 સમયે વેગ v_1 અને t_2 સમયે વેગ v_2 છે. આથી, $\Delta t = t_2 - t_1$ સમયગાળામાં કણના વેગમાં થતો ફેરફાર $v_2 - v_1$ થશે. સરેરાશ પ્રવેગની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\text{સરેરાશ પ્રવેગ} = \frac{\text{વેગમાં થતો ફેરફાર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$< a > = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.9.1)$$

સરેરાશ પ્રવેગ એ સદિશ રાશિ છે. તેની દિશા વેગના ફેરફાર (Δv)ની દિશામાં હોય છે. તેનો SI એકમ m s^{-2} છે.

સરેરાશ પ્રવેગ જાણવાથી t_1 અને t_2 બે ક્ષણો વચ્ચેના પથ પર ક્ષણે-ક્ષણે વેગ કઈ રીતે બદલાય છે, તેની માહિતી મળતી નથી. સમીકરણ (3.9.1)માં $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં, t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ a મળે છે. તત્કાલીન પ્રવેગને વ્યવહારમાં પ્રવેગ પણ કહે છે. t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (3.9.2)$$

હવે, $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ છે.

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\therefore a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (3.9.3)$$

બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો કણનો કોઈ પણ ક્ષણે પ્રવેગ એટલે સ્થાન(x) નું સમય(t) ની સાપેક્ષે બે વાર વિકલન.

જો $\frac{dv}{dt}$ ધન હોય, તો કણના પ્રવેગની દિશા ધન X–અક્ષ અને જો $\frac{dv}{dt}$ ઋણ હોય, તો પ્રવેગ ઋણ X–અક્ષ તરફ હોય છે. જો વેગ અને પ્રવેગ બંને ધન અથવા બંને ઋણ હોય, તો કણની ઝડપમાં વધારો થાય છે. આવા કિસ્સામાં કણ પ્રવેગિત ગતિ કરે છે, તેમ કહેવાય. અહીં પ્રવેગની દિશા વેગની દિશામાં જ હોય છે. પરંતુ વેગ અને પ્રવેગ વિરુદ્ધ સંજ્ઞાના હોય, તો કણની ઝડપમાં ઘટાડો થાય છે. આવા કિસ્સામાં કણને પ્રતિપ્રવેગી ગતિ હોય છે. આ પ્રતિપ્રવેગ (Deceleration)ની દિશા વેગની દિશાથી વિરૂદ્ધ હોય છે, કોઈ પ્રવેગ પૂર્વ દિશામાં 2.5 m s^{-2} છે, તેને બદલે કણનો પ્રતિપ્રવેગ પશ્ચિમ દિશામાં 2.5 m s^{-2} છે તેમ પણ કહી શકાય. બંને બાબતો સમાન છે.

ઉદાહરણ 6 : સુરેખપથ પર ગતિ કરતાં કણ માટેનું સ્થાનસૂત્ર $x(t) = 2 - 5t + t^3$ છે. $t = 2$ સેકન્ડે કણનો પ્રવેગ શોધો. x મીટરમાં છે.

ઉકેલ : સ્થાનસૂત્ર, $x(t) = 2 - 5t + t^3$

સ્થાન પરથી પ્રવેગ મેળવવા માટે x નું tની સાપેક્ષે બે વાર વિકલન કરવું પડે.

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2 - 5t + t^3) = -5 + 3t^2$$

$\therefore$ t સમયે કણનો પ્રવેગ

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-5 + 3t^2) = 6t$$

$t = 2$ સેકન્ડ મૂકતાં, $a = 6(2) = 12\text{m s}^{-2}$

ઉદાહરણ 7 : એક ગતિમાન કણ માટે સમય અને સ્થાન વચ્ચેનો સંબંધ $t = Ax^2 + Bx$ છે, જ્યાં A અને B અચળાંકો છે. આ કણનો પ્રવેગ તેના વેગના વિધેય રૂપે મેળવો.

ઉકેલ : $t = Ax^2 + Bx$

$$\therefore \frac{dt}{dx} = 2Ax + B$$

$$\therefore v = \frac{dx}{dt} = (2Ax + B)^{-1} \quad (1)$$

$$\text{હવે પ્રવેગ } a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$= \left[\frac{d}{dx}(2Ax + B)^{-1}\right](v)$$

(સમી. (1) પરથી)

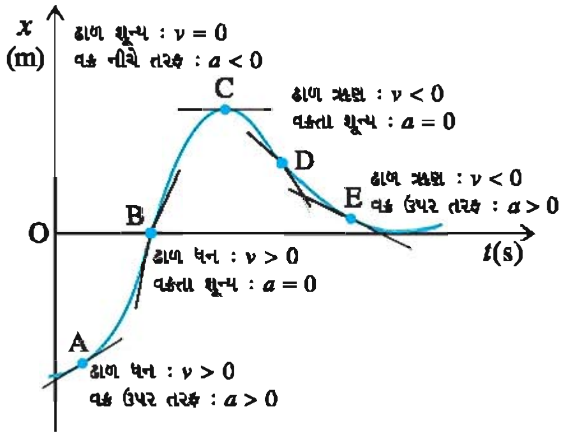
$$\therefore a = (-1)(2A)(2Ax + B)^{-2} \cdot v$$

$= -2Av^3$ (સમી. (1) પરથી)

3.10 પ્રવેગી ગતિ માટે $x - t$ અને $v - t$ ના આલેખો

સ્થાન (x)નું tની સાપેક્ષે દ્વિતીય વિકલન એટલે પ્રવેગ (a). કોઈ પણ વિધેયનું દ્વિતીય વિકલન તે વિધેયના આલેખની વક્રતા સાથે સીધો સંબંધ ધરાવે છે. $x - t$ આલેખના જે બિંદુ આગળ આલેખની વક્રતા વધુ હશે તે બિંદુએ $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ નું મૂલ્ય વધુ અને ઓછી વક્રતાવાળા બિંદુએ તે ઓછું હોય છે. $x - t$ આલેખમાં વક્ર જો ઉપરની તરફ અંતર્ગોળ આકાર (ઉપરની તરફ વક્ર) હોય, તો પ્રવેગ

ધન હોય છે અને તે સ્થાન આગળ કણનો વેગ વધતો હોય છે. જો વક્ર નીચેની તરફ અંતર્ગોળ આકારનો (નીચેની તરફ વક્રતા) હોય, તો પ્રવેગ ઋણ હોય છે. આ સ્થાન આગળ કણનો વેગ ઘટતો હોય છે. $x - t$ આલેખ સુરેખા અથવા જે બિંદુ આગળ વક્ર ન હોય તે સમયે અને તે સ્થાને કણનો પ્રવેગ શૂન્ય અને વેગ અચળ હોય છે. આકૃતિ 3.7માં આ ત્રણેય કિસ્સા દર્શાવ્યા છે.



ગતિમાન કણ માટેનો $x - t$ આલેખ

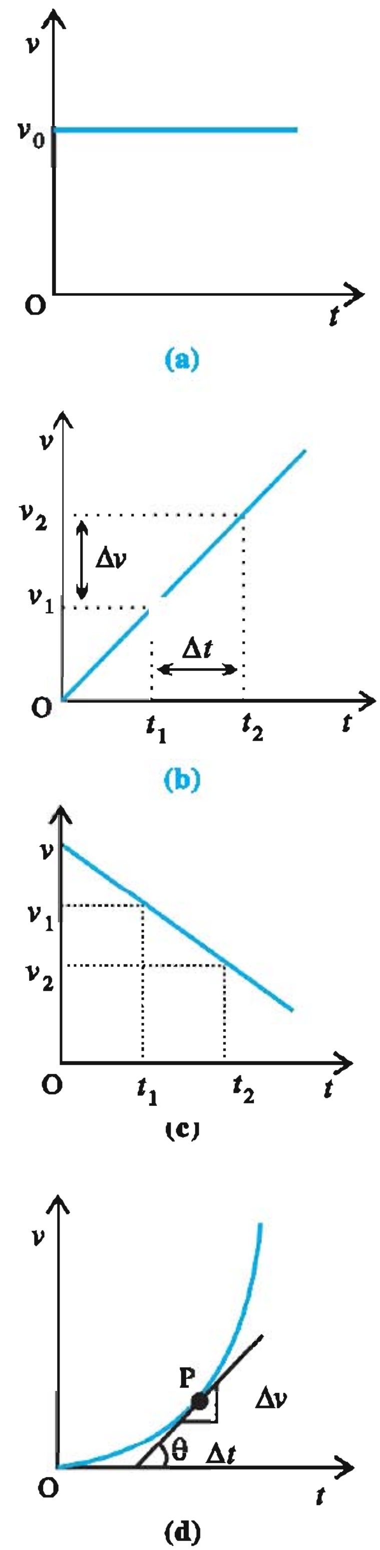
આકૃતિ 3.7

આમ, $x - t$ આલેખ પરથી પ્રવેગની સંજ્ઞા કે દિશા સરળતાથી નક્કી થઈ શકે છે, પરંતુ પ્રવેગનું મૂલ્ય સરળતાથી મેળવી શકાતું નથી. આ માટે કણની ગતિના તત્કાલીન વેગ વિરુદ્ધ સમય $v - t$ આલેખ ઉપયોગી છે.

$v - t$ આલેખ પરથી સરેરાશ પ્રવેગ અને તત્કાલીન પ્રવેગ મેળવી શકાય છે. આ આલેખનો ઢાળ $\left(= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ એ Δt સમયગાળા પર સરેરાશ પ્રવેગનું મૂલ્ય દર્શાવે છે. આલેખના કોઈ બિંદુ આગળ વક્રને દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણનો તત્કાલીન પ્રવેગ દર્શાવે છે.

(i) જો ગતિમાન કણનો $v - t$ આલેખ, સમય-અક્ષને સમાંતર સુરેખા હોય, તો આ આલેખ માટે ઢાળ શૂન્ય થશે. આથી તેનો પ્રવેગ પણ શૂન્ય થશે. એટલે કે કણ અચળ વેગથી ગતિ કરતો હશે. આવી ગતિને કણની નિયમિત ગતિ કહે છે, (જુઓ આકૃતિ 3.8 (a))

(ii) જો $v - t$ આલેખ સમય-અક્ષને સમાંતર સુરેખાને બદલે આકૃતિ 3.8 (b), (c) અને (d)માં દર્શાવ્યા મુજબ નો કે અન્ય કોઈ સ્વરૂપનો મળે, તો પદાર્થ અનિયમિત ગતિ (Non-uniform motion) કરે છે, તેમ કહેવાય. આકૃતિ 3.8 (b)માં દર્શાવેલ આલેખનો ઢાળ ધન મળશે, આથી કણનો પ્રવેગ પણ ધન થશે. આલેખ સુરેખા હોવાથી કોઈ પણ સમયગાળા પર મેળવેલ ઢાળ સમાન હોય છે. આવા પ્રકારની ગતિને **અચળપ્રવેગી ગતિ** અથવા **નિયમિતપ્રવેગી ગતિ** કહે છે. આવી ગતિ માટે કોઈ સમયગાળા પરનો સરેરાશ પ્રવેગ અને કોઈ ક્ષણે તત્કાલીન પ્રવેગ સમાન હોય છે.



ગતિમાન કણ માટે $v - t$ આલેખો

આકૃતિ 3.8

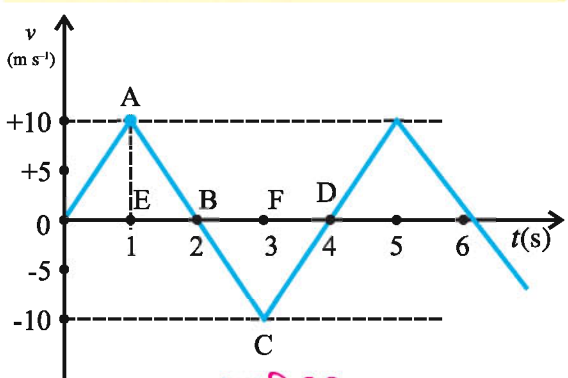
(iii) આકૃતિ 3.8 (c)માં દર્શાવેલ ગતિ માટે આલેખનો ઢાળ ઋણ હોવાથી કણ પ્રતિપ્રવેગી ગતિ કરે છે, તેમ કહેવાય. આ પણ અચળપ્રવેગી ગતિ છે.

(iv) જો કણનો વેગ આકૃતિ 3.8 (d)માં દર્શાવ્યા મુજબ સતત બદલાતો હોય, તો આલેખના જુદા-જુદા સમયગાળા પર ઢાળનું મૂલ્ય જુદું-જુદું મળવાથી તેનો સરેરાશ પ્રવેગ પણ જુદો-જુદો મળે છે આવી ગતિને અનિયમિત પ્રવેગી ગતિ કહે છે. આ પ્રકારના આલેખમાં કોઈ બિંદુ (P) આગળનો પ્રવેગ તે બિંદુ આગળ વક્રને દોરેલ સ્પર્શકના ઢાળ બરાબર હોય છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે અભ્યાસ અચળપ્રવેગી ગતિ પૂરતો સીમિત રાખીશું.

કોઈ ગતિમાન કણના વેગ વિરુદ્ધ સમયના આલેખ પરથી કોઈપણ સમયગાળામાં કણે કરેલું સ્થાનાંતર તેમજ કાપેલ અંતર શોધી શકાય છે. **કોઈ પણ સમયગાળામાં ગતિમાન કણે કરેલું સ્થાનાંતર તે સમયગાળામાં $v - t$ આલેખ નીચે ઘેરાતા પ્રદેશના ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે.** આ કથન કોઈ પણ પ્રકારની ગતિ માટે સત્ય છે. $v - t$ આલેખમાં X–અક્ષની ઉપરના ભાગનું ક્ષેત્રફળ ધન અને નીચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ ઋણ હોય છે. આથી, ચોખ્ખું (net) સ્થાનાંતર શોધવા માટે આ બંને ક્ષેત્રફળનો બૈજિક સરવાળો કરવો જોઈએ, પરંતુ કાપેલું અંતર શોધવા માટે ઋણ ક્ષેત્રફળને ધન ગણીને સરવાળો કરવો. આ બાબત આપણે નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 8 : સુરેખપથ પર ગતિ કરતાં એક કણ માટે v–t આલેખ આકૃતિ 3.9માં દર્શાવ્યો છે. (a) પહેલી બે સેકન્ડમાં કણે કાપેલ અંતર શોધો. (*b*) 0 થી 4 sના સમયગાળામાં કણે કરેલું સ્થાનાંતર અને કાપેલું કુલ અંતર શોધો. (c) t = 0.5 s અને t = 2 s આગળ કણનો પ્રવેગ શોધો.



આકૃતિ 3.9

ઉકેલ :

(a) 0થી 2 s સમયગાળામાં કણે કાપેલું અંતર

x_1 = ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2}$(AE) (OB)

$= \frac{1}{2}$(+10)(2) = 10 m

(b) 0થી 4 s સમયગાળામાં કણે કાપેલું અંતર

Δx = ΔOABનું ક્ષેત્રફળ + ΔBCD નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2}$(AE)(OB) + $\frac{1}{2}$(CF)(BD)

$= \frac{1}{2}(+10)(2) + \frac{1}{2}(-10)(2)$

= 10 − 10 = 0

0 થી 4 s, સમયગાળામાં કણે કાપેલું અંતર

= ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ + ΔBCD નું ક્ષેત્રફળ

= 10 + 10 (ΔBCDનું ક્ષેત્રફળ ધન લેતાં)

= 20 m

(c) t = 0.5 s આગળ કણનો પ્રવેગ,

a_1 = OA સુરેખાનો ઢાળ

$= \frac{10 - 0}{1 - 0} = 10 \text{m s}^{-2}$

t = 2 s, આગળ કણનો પ્રવેગ,

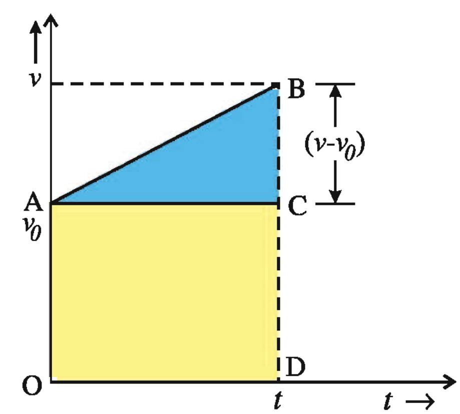
a_2 = AC સુરેખાનો ઢાળ

$= \frac{(-10) - (+10)}{3 - 1}$

$= -10 \text{m s}^{-2}$

3.11 નિયમિત પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો (આલેખની રીતે) (Kinematic Equation for Uniformly Accelerated Motion) (Graphical Method)

ધારો કે કોઈ કણ x–દિશામાં અચળ પ્રવેગ 'a' થી સુરેખ ગતિ કરે છે t = 0 સમયે તેનો વેગ v_0 અને $t = t$ સમયે વેગ v છે. આ ગતિ માટે નો $v - t$ આલેખ આકૃતિ 3.10માં દર્શાવ્યો છે.



અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણોની આલેખ પરથી તારવણી

આકૃતિ 3.10

પ્રવેગ અચળ હોવાથી કોઈ પણ સમયગાળામાં કણનો સરેરાશ પ્રવેગ અને પ્રવેગ સમાન હશે.

$\therefore$ પ્રવેગ a = રેખા ABનો ઢાળ

$$= \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\therefore at = v - v_0 \quad (3.11.1)$$

અથવા

$$\boxed{v = v_0 + at} \quad (3.11.2)$$

હવે, t સમયમાં કણે કરેલું સ્થાનાંતર, $v - t$ ના આલેખ નીચે દોરાતા પ્રદેશ OABCD જેટલું હોય.

$\therefore$ x = લંબચોરસ OACD નું ક્ષેત્રફળ + ΔACBનું ક્ષેત્રફળ

$$= v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t \quad (3.11.3)$$

$$\boxed{x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \quad (3.11.4)$$

(સમીકરણ (3.11.1) પરથી $v - v_0$ = at મૂકતાં)

સમીકરણ (3.11.3) પરથી,

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}v_0 t$$

$$x = \frac{v + v_0}{2}t = \bar{v}\, t \quad (3.11.5)$$

જ્યાં સરેરાશ વેગ = $\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$

(ફક્ત અચળ પ્રવેગ માટે)

સમીકરણ (3.11.5)માં સમીકરણ (3.11.1) પરથી

$t = \frac{v - v_0}{a}$ મૂકતાં

$$x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a}$$

$$\therefore \boxed{2ax = v^2 - {v_0}^2} \quad (3.11.6)$$

અહીં, સમીકરણ (3.11.2), (3.11.4) અને (3.11.6) અચળપ્રવેગી રેખીય ગતિનાં સમીકરણો છે.

ઉપરોક્ત સમીકરણો મેળવતી વખતે આપણે માની લીધું છે કે $t = 0$ સમયે કણ $x = 0$ સ્થાન પર છે, પરંતુ જો $t = 0$ સમયે કણ x_0 સ્થાન આગળ હોય તો આ સમીકરણોને વ્યાપક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય. (અહીં, x ને સ્થાને $x - x_0$ મૂકતાં)

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$2a(x - x_0) = v^2 + {v_0}^2$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણોમાં v_0, v અને aની સંજ્ઞાઓ તેઓ ગતિપથ પર ધન કે ઋણ દિશામાં છે, તે મુજબ લેવા જોઈએ.

ઉદાહરણ 9 : એક કણ v_0 જેટલા પ્રારંભિક વેગથી સુરેખપથ પર અચળપ્રવેગી ગતિ કરે છે. n મી સેકન્ડ દરમિયાન તેણે કાપેલું અંતર $v_0 + \frac{a}{2}(2n - 1)$ છે, તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : n મી સેકન્ડમાં કાપેલું અંતર

d = n સેકન્ડમાં કાપેલું અંતર – $(n - 1)$ સેકન્ડમાં કાપેલું અંતર

$$= (v_0 n + \frac{1}{2}an^2) - (v_0(n - 1) + \frac{1}{2}a\,(n - 1)^2)$$

$$= (v_0 n + \frac{1}{2}an^2) - (v_0 n - v_0 + \frac{a}{2}(n^2 - 2n + 1))$$

$$= (v_0 n - \frac{1}{2}an^2 - v_0 n + v_0 - \frac{1}{2}an^2 + an - \frac{a}{2})$$

$$= v_0 + an - \frac{a}{2}$$

$$= v_0 + \frac{a}{2}(2n - 1)$$

ઉદાહરણ 10 : અચળપ્રવેગી ગતિ કરતી એક ટ્રેનના બે છેડા કોઈ એક બિંદુ પાસેથી પસાર થાય છે, ત્યારે તેમની ઝડપ અનુક્રમે u અને v છે, તો આ જ બિંદુ પાસેથી પસાર થતી વખતે ટ્રેનના મધ્યબિંદુની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ટ્રેનની લંબાઈ l છે. હવે કોઈ એક બિંદુ પાસેથી પસાર થતી વખતે એન્જિનના આગળના બિંદુની ઝડપ (ટ્રેનને દૃઢ પદાર્થ ગણતાં તેના દરેક બિંદુની કોઈ પણ સમયે ઝડપ સમાન હોય છે.) u છે અને તે જ બિંદુ પાસેથી પસાર થતી વખતે ગાર્ડના ડબાના પાછળના બિંદુની ઝડપ v છે, એટલે કે l જેટલું અંતર કાપતાં ટ્રેનની ઝડપ uમાંથી v થઈ માટે ગતિના સમીકરણ $v^2 - {v_0}^2 = 2ax$ પરથી,

$\therefore\ v^2 - u^2 = 2al$ (1)

હવે ધારો કે તે બિંદુ પાસેથી પસાર થતી વખતે ટ્રેનના મધ્યબિંદુની ઝડપ v છે

આનો અર્થ એ થયો કે $l/2$ જેટલું અંતર કાપતાં ઝડપ u માંથી v' થઈ.

$\therefore\ v'^2 - u^2 = 2a\left(\frac{l}{2}\right) = al$ (2)

સમી. (1) અને (2) નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{v^2 - u^2}{v'^2 - u^2} = 2$$

$$\therefore\ v' = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{2}}$$

ઉદાહરણ 11 : બે બિંદુઓ A અને B પાસેથી અનુક્રમે $252 kmh^{-1}$ અને $144 kmh^{-1}$ ના વેગથી શરૂ કરી બે કણો, Aથી B તરફની દિશામાં અનુક્રમે $-4 m\ s^{-2}$ અને $8 m\ s^{-2}$ જેટલા પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. સાબિત કરો કે આ કણો બે વખત એકબીજાને મળશે. તેઓ કયા-કયા સમયે અને ક્યાં-ક્યાં મળશે તે ગણો AB = 36m છે.

ઉકેલ : $v_1 = 252 \frac{km}{h} = 70 m\ s^{-1}$, $v_2 = 144 \frac{km}{h} = 40 m\ s^{-1}$,

$a_1 = -4 m\ s^{-2}$ and $a_2 = 8 m\ s^{-2}$

ધારો કે બંને આ કણો t સમયે બિન્દુ A થી x જેટલા અંતરે મળે છે. સૂત્ર $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ પરથી

બિંદુ A પરથી ગતિ કરતાં કણો માટે

$x = 70t + \frac{1}{2}(-4)t^2$

$\therefore\ x = 70t - 2t^2$ (1)

બિંદુ B પરથી ગતિ કરતા કણો માટે

$x - 36 = 40t + \frac{1}{2}(8)t^2$

$\therefore\ x - 36 = 40t + 4t^2$ (2)

સમીકરણ (1)માંથી સમીકરણ (2) બાદ કરતાં,

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$\therefore\ t = 2$ અથવા $t = 3$ s

આમ, આ કણો આ બે સમયે એકબીજાને મળે છે. $t = 2$ s સમીકરણ (1)માં મૂકતાં, $x = 132$m અને $t = 3$ s મૂકતાં $x = 192$m.

આમ, બંને કણો એકબીજાને 132m અને ત્યાર બાદ 192m ના અંતરે મળશે.

ઉદાહરણ 12 : stopping distance of vehicle : જ્યારે ગતિમાન વાહનને બ્રેક મારવામાં આવે, ત્યારે તે ઊભું રહે તે પહેલાં અમુક અંતર કાપે છે. જેને **stopping distance** કહે છે. stopping distance એ વાહનના પ્રારંભિક વેગ v_0 અને બ્રેકની ક્ષમતા અથવા બ્રેક લગાવવાથી વાહનમાં ઉત્પન્ન થતાં પ્રતિપ્રવેગ $(-a)$ પર આધારિત છે. વાહન માટે stopping distance નું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે v_0 જેટલા વેગથી ગતિ કરતાં વાહનને બ્રેક મારતાં તે d_s જેટલું અંતર કાપીને ઊભું રહે છે. સમીકરણ $v^2 - v_0^2 = 2ax$ પરથી

$0 - v_0^2 = 2(-a)d_s$

$\therefore\ d_s = \frac{v_0^2}{2a}$

આમ, stopping distance એ વાહનની ઝડપના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. વાહનની ઝડપ બમણી કરવામાં આવે, તો તે પ્રતિપ્રવેગ માટે stopping distance ચાર ગણું મળે છે. શાળા, હૉસ્પિટલ જેવા વિસ્તારોમાં વાહન માટે speed limit નિર્ધારિત કરવા માટે stopping distance અગત્યનું પરિબળ છે.

મુક્તપતન કરતાં પદાર્થો માટે ગતિનાં સમીકરણો (Kinematic equations for freely fallingbody) : પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ બળને કારણે પદાર્થમાં અધોદિશામાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગને ગુરુત્વપ્રવેગ (g) કહે છે. હવાના અવરોધને અવગણવામાં આવે તો પદાર્થ મુક્તપતન કરે છે તેમ કહેવાય. પતન કરતાં પદાર્થે કાપેલું અંતર, પૃથ્વીની ત્રિજ્યાની સરખામણીમાં અવગણી શકાય, તો g નું મૂલ્ય $9.8 m\ s^{-2}$ જેટલું અચળ લઈ શકાય. આમ, મુક્તપતન કરતો પદાર્થ નિયમિત પ્રવેગી ગતિનું ઉદાહરણ છે.

પદાર્થને મુક્ત કરવામાં આવે તે સ્થળેથી ઊર્ધ્વ દિશાને ધન Y–અક્ષ તરીકે લેતાં ગુરુત્વપ્રવેગની દિશા ઋણ Y–અક્ષ થશે. આથી, ગતિનાં સમીકરણોમાં $a = -g$ મૂકતાં,

$v = v_0 - gt$ 3.11.7

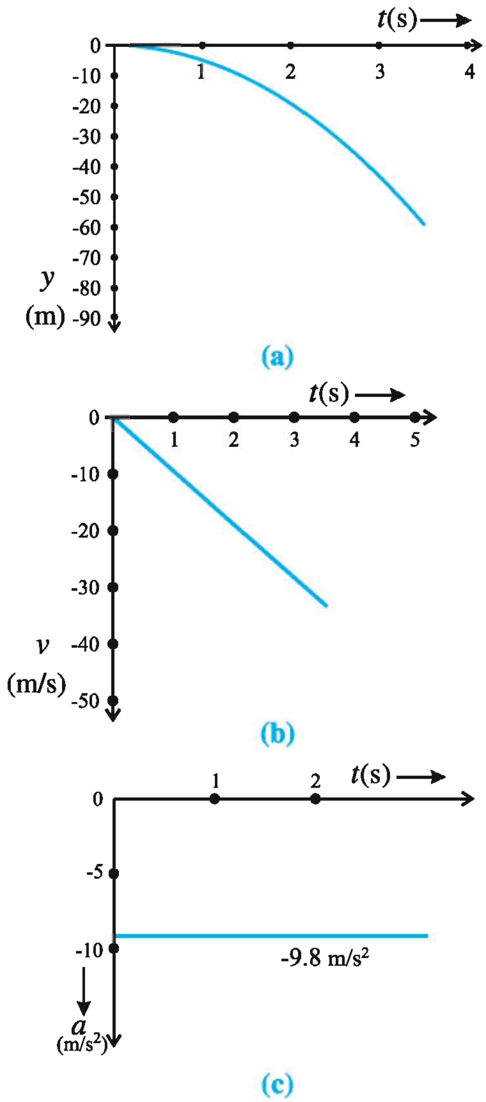
$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ 3.11.8

$v^2 - v_0^2 = -2gy$ 3.11.9

($y_0 = 0$ લેતાં)

મુક્તપતન માટે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $v_0 = 0$ થશે. ક્યારેક સરળતા ખાતર અધોદિશાને ધન Y–અક્ષ અને ઊર્ધ્વ દિશાને ઋણ Y–અક્ષ તરીકે લઈ શકાય, ત્યારે ગતિનાં સમીકરણોમાં $a = g$ લેવું.

મુક્તપતન કરતાં પદાર્થ માટે, $y - t$, $v - t$ અને $a - t$ આલેખો આકૃતિ 3.11માં દર્શાવ્યા છે.



મુક્તપતન કરતાં પદાર્થ માટે ગતિના આલેખો

આકૃતિ 3.11

ઉદાહરણ 13 : એક પદાર્થને ઊર્ધ્વ દિશામાં v_0 વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. (*a*) મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચતાં લાગતો સમય શોધો. (*b*) તેણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : (*a*) ઊર્ધ્વ દિશાને ધન ગણતાં, v_0 ધન થશે અને ગુરુત્વપ્રવેગ $(-g)$ થશે. મહત્તમ ઊંચાઈએ વેગ $v = 0$ હોય છે.

આથી, $v = v_0 + at$ પરથી

$$0 = v_0 - gt$$

$$\therefore t = \frac{v_0}{g}$$

(*b*) પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ h હોય, તો

$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $y = h$, $t = \frac{v_0}{g}$ અને $a = -g$ મૂકતાં

$$\therefore h = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{{v_0}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g}$$

$$h = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

ઉદાહરણ 14 : ગુરુત્વપ્રવેગની અસર હેઠળ મુક્ત-પતન કરતો પથ્થર, 6 s ની ગતિ બાદ જમીનની સપાટીથી h ઊંચાઈએ સમક્ષિતિજ રાખેલ ગ્લાસની તકતીને અથડાય છે. તે ગ્લાસની તકતીને તોડીને 2 s માં જમીન પર પહોંચે છે. તકતીને અથડાયા બાદ તે $\frac{2}{3}$ જેટલો વેગ ગુમાવે છે. આ ગ્લાસની તકતીની જમીનથી ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : પથ્થર ગ્લાસની તકતીને અથડાય તે સમયનો વેગ શોધવા

$v = v_0 + gt$ માં

અહીં, $v_0 = 0$, $g = -9{\cdot}8\text{m s}^{-2}$, અને $t = 6$ s મૂકતાં

$$\therefore v = 0 + (-9{\cdot}8)\,(6) = -\,58{\cdot}8\text{m s}^{-1}$$

અથડામણ બાદ પથ્થર $\frac{2}{3}$ જેટલો વેગ ગુમાવે છે. આથી, અથડામણ બાદ પથ્થરનો વેગ

$$v_0 = \frac{v}{3} = -\frac{58.8}{3} = -19{\cdot}6\text{m s}^{-1}$$

ધારો કે ગ્લાસની તકતી, જમીનની સપાટીથી h જેટલી ઊંચાઈએ છે

$$\therefore h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

$v_0 = -\,19{\cdot}6\text{m s}^{-1}$, $t = 2\text{s}$, $g = -\,9{\cdot}8\text{m s}^{-2}$,

$h = -h$ મૂકતાં

$$-h = (-19{\cdot}6 \times 2) + \frac{1}{2}(-9{\cdot}8)(2)^2$$

$$\therefore h = 58{\cdot}8\text{m}$$

ઉદાહરણ 15 : એક બલૂન 12m s^{-1}ના નિયમિત વેગથી ઉપર જઈ રહ્યું છે. જ્યારે બલૂન 81m ની ઊંચાઈએ છે, ત્યારે તેમાંથી એક સિક્કાને પડતો મૂકવામાં આવે છે. જ્યારે સિક્કો જમીન પર પહોંચે, ત્યારે બલૂન કેટલી ઊંચાઈએ હશે ? $g = 10\text{m s}^{-2}$

ઉકેલ : $t = 0$ સમયે 12 m s^{-1}ના વેગથી સિક્કો ઉપર જઈ રહ્યો છે. ત્યાર બાદ તે મુક્તપતન કરે છે. ધારો કે તે t સમયે જમીન પર પહોંચે છે. ઊર્ધ્વદિશાને ધન લેતાં,

$$y = -81\text{m},\ v_0 = 12\text{m s}^{-1},\ a = g = -10\text{m s}^{-2}$$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$-81 = (12)t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

$$\therefore 5t^2 - 12t - 81 = 0$$

$$\therefore t = \frac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(5)(-81)}}{2(5)}$$

$$= \frac{12 \pm 42}{10}$$

$\therefore t = 5{\cdot}4$ s અથવા $t = -3$ s જે શક્ય નથી. એટલે કે $5{\cdot}4$ s બાદ સિક્કો જમીન પર આવશે. આ સમય દરમિયાન બલૂને કાપેલ અંતર,

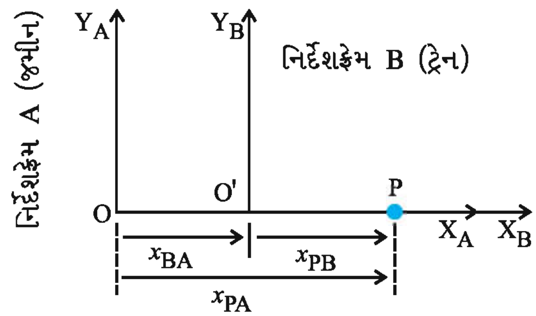
$$y_1 = (\text{વેગ} \times \text{સમય}) = (12)(5{\cdot}4) = 64{\cdot}8\text{m}$$

આથી સિક્કો જમીન પર પહોંચે ત્યારે બલૂનની ઊંચાઈ $81\text{m} + 64{\cdot}8\text{m} = 145{\cdot}8\text{m}$ હશે.

3.12 સાપેક્ષ વેગ (Relative Velocity)

ગતિ એ સાપેક્ષ ખ્યાલ છે. આગળ આપણે જોયું કે અલગ-અલગ નિર્દેશફ્રેમોની સાપેક્ષે પદાર્થનો વેગ અલગ અલગ હોય છે. આપણો સામાન્ય અનુભવ એમ કહે છે કે ગતિમાન ટ્રેનમાં ટ્રેનની ગતિની દિશામાં ઊડી રહેલી માખીની ઝડપ, ટ્રેનમાં બેઠેલી વ્યક્તિને ઓછી લાગે છે, પરંતુ જમીન પર સ્થિર ઊભી રહેલી વ્યક્તિને તે ટ્રેનની ઝડપ કરતાં વધુ લાગે છે. ટ્રેનની ગતિની વિરૂધ્ધ દિશામાં ટ્રેનની અંદર ઊડી રહેલી માખીની ઝડપ ટ્રેનની ઝડપ કરતાં ઓછી લાગે છે. આવા અનુભવોને સમજવા માટે આપણે સાપેક્ષ વેગનો ખ્યાલ મેળવીશું.

ધારો કે જમીન પર ઊભી રહેલી વ્યક્તિ સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમ A છે. X-દિશામાં અચળ વેગથી ગતિ કરતી ટ્રેન સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમ B છે. આ બંને નિર્દેશફ્રેમો જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમો છે. માખીને P વડે દર્શાવીએ તો t સમયે નિર્દેશફ્રેમ Aના ઉદ્ગમબિંદુ O ની સાપેક્ષે Pનું સ્થાન x_{PA} અને નિર્દેશફ્રેમ Bના ઉદ્ગમબિંદુ O'ની સાપેક્ષે x_{PB} થશે. Oની સાપેક્ષે O'નું સ્થાન x_{BA} છે.



સાપેક્ષ વેગ

આકૃતિ 3·12

આકૃતિ 3·12 પરથી

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$

't' ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં

$$\frac{d(x_{PA})}{dt} = \frac{d(x_{PB})}{dt} + \frac{d(x_{BA})}{dt}$$

$$\therefore v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad (3{\cdot}12{\cdot}1)$$

$$\text{અથવા } v_{BA} = v_{PA} - v_{PB} \qquad (3{\cdot}12{\cdot}2)$$

અહીં, v_{PA} = નિર્દેશફ્રેમ A (જમીન)ની સાપેક્ષે P (માખી) નો વેગ

v_{PB} = નિર્દેશફ્રેમ B (ટ્રેન)ની સાપેક્ષે Pનો વેગ અને

v_{BA} = નિર્દેશફ્રેમ Bનો Aની સાપેક્ષે વેગ છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં ધારો કે ટ્રેનનો જમીનની સાપેક્ષે વેગ $v_{BA} = +10\text{m s}^{-1}$, માખીનો ટ્રેનની સાપેક્ષે વેગ $v_{PB} = +2\text{m s}^{-1}$ (ટ્રેનની ગતિની દિશામાં) હોય, તો સમીકરણ (3·12·1), પરથી જમીનની સાપેક્ષે માખીનો વેગ $v_{PA} = 10 + 2 = +12\text{m s}^{-1}$ થશે, જે ટ્રેનના વેગ કરતાં વધુ છે. જો માખી ટ્રેનની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં ઊડતી હોય, તો $v_{PB} = -2\text{m s}^{-1}$ થશે અને જમીનની સાપેક્ષે તેનો વેગ $v_{PA} = 10 - 2 = 8\text{m s}^{-1}$ થશે.

હવે, જો P એ જમીન (G) સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમ, A અને B એ કોઈ બે કણો સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમ હોય, તો સમીકરણ (3·12·2), પરથી કણ Bનો કણ Aની સાપેક્ષે વેગ.

$v_{BA} = v_{GA} - v_{GB}$

$v_{BA} = v_{BG} - v_{AG} = v_B - v_A$ (3.12.3)

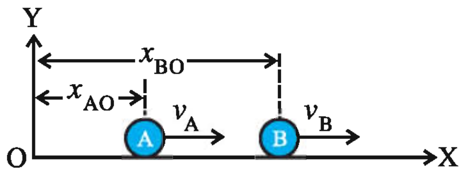
આ જ રીતે કણ A નો કણ Bની સાપેક્ષે વેગ,

$v_{AB} = v_{AG} - v_{BG} = v_A - v_B$

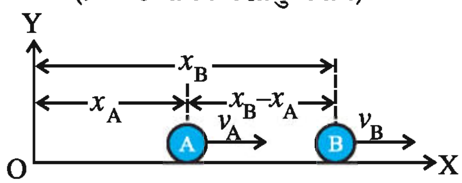
(જમીન / પૃથ્વીની સાપેક્ષેના વેગો v_{AG} અથવા v_{BG} ને ફક્ત v_A અથવા v_B વડે દર્શાવી શકાય.)

સાપેક્ષ સ્થાનાંતર (Relative Displacement)

ધારો કે બે કણો A અને B અનુક્રમે અચળ વેગ v_A અને v_B થી $+x$ દિશામાં ગતિ કરે છે. $t = 0$ સમયે તેઓ અનુક્રમે x_{AO} અને x_{BO} સ્થાને છે. (જુઓ આકૃતિ 3·13) અને $t = t$ સમયે તેઓ અનુક્રમે x_A અને x_B સ્થાને છે. આથી,



(t = 0 સમયે કણોનું સ્થાન)



(t = t સમયે કણોનું સ્થાન)

સાપેક્ષવેગ

આકૃતિ 3.13

$x_A = x_{AO} + v_A t,\ x_B = x_{BO} + v_B t$

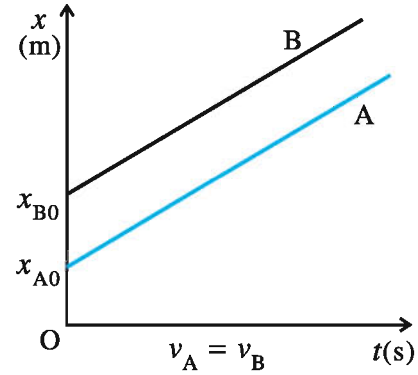
$t = t$ સમયે, કણ A ની સાપેક્ષે કણ B નું સ્થાનાંતર,

$x_B - x_A = (x_{BO} - x_{AO}) + (v_B - v_A)t$ (3·12·4)

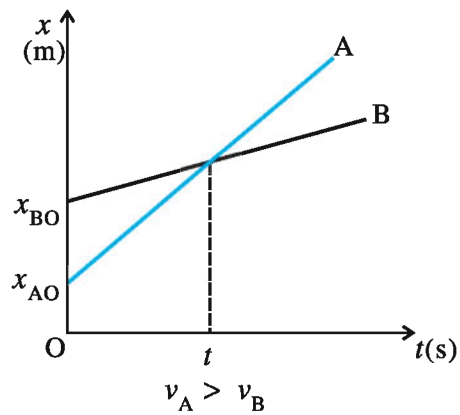
જ્યાં, $x_{BO} - x_{AO}$ એ $t = 0$ સમયે કણ Bનું કણ Aની સાપેક્ષે સ્થાનાંતર છે. $v_B - v_A = v_{BA}$ એ કણ A ની સાપેક્ષે કણ Bનો વેગ છે.

(1) જ્યારે $v_A = v_B$ હશે, ત્યારે $x_B - x_A = x_{BO} - x_{AO}$ થશે. એટલે કે કોઈ પણ સમયે બંને કણો વચ્ચેનું અંતર પ્રારંભિક સ્થાનાંતર જેટલું જ હશે. (જુઓ આકૃતિ 3·14 (a)) અહીં બંને કણોનો સાપેક્ષ વેગ $v_{AB} = v_{BA} = 0$ છે.

(2) જો $v_A > v_B$, હશે. ત્યારે બંને કણો કોઈ એક સમય t આગળ ભેગા થશે (જુઓ આકૃતિ 3·14 (b)).



(a)



(b)

આકૃતિ 3.14

આ સમયે કણોનું સાપેક્ષ સ્થાન $x_B - x_A = 0$ થશે. ત્યાર બાદ, કણ A એ કણ Bથી આગળ નીકળી જશે.

(3) જ્યારે $v_B > v_A$ હશે, ત્યારે બંને કણો વચ્ચેનું સાપેક્ષ સ્થાનાંતર $x_B - x_A$ સમયની સાથે વધતું જશે અને તેમના ગતિપથ પર ક્યારેય મળશે નહિ.

ઉદાહરણ 16 : v_1 જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતી શતાબ્દી એક્સપ્રેસનો ડ્રાઇવર તે જ ટ્રેક પર તે જ દિશામાં v_2 ઝડપથી (જ્યાં $v_2 < v_1$) જતી એક માલગાડીને પોતાનાથી x અંતરે જોતાં બ્રેક મારે છે. તો બ્રેક વડે કેટલો પ્રતિપ્રવેગ ઉત્પન્ન કરવો જોઈએ કે જેથી અકસ્માત નિવારી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં સ્પષ્ટ છે કે માલગાડીની સાપેક્ષે શતાબ્દી એક્સપ્રેસનો સાપેક્ષ વેગ $v_1 - v_2$ થશે. જો x અંતરમાં આ સાપેક્ષ વેગ શૂન્ય થાય, તો અકસ્માત નિવારી શકાય. ધારો કે આ માટે જરૂરી પ્રતિપ્રવેગ a છે. હવે $2ax = v^2 - v_0^2$ પરથી,

$$-2ax = 0 - (v_1 - v_2)^2$$

$$\therefore a = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2x}$$

ઉદાહરણ 17 : $t = 0$ સમયે કાર A અને B ઉદ્‌ગમબિંદુથી અનુક્રમે 100m અને 200m અંતરે છે. બંને કાર એકસાથે અનુક્રમે 10m s^{-1} અને 5m s^{-1}ના અચળ વેગથી એક જ દિશામાં ગતિની શરૂઆત કરે છે. આ બંને કાર કયા સમયે અને કયા સ્થાન આગળ એકબીજાને overtake કરશે ?

ઉકેલ :

$x_{BO} = 200\text{m}, x_{AO} = 100\text{m}$

$v_A = 10\text{m s}^{-1}, v_B = 5\text{m s}^{-1}$

હવે, $x_B - x_A = (x_{BO} - x_{AO}) + (v_B - v_A)t$

ધારો કે, t સમયે બંને કાર એકબીજાને overtake કરે છે. આથી $x_B = x_A$ થશે અને $x_B - x_A = 0$

$0 = (200 - 100) + (5 - 10)\ t$

$$\therefore\ t = \frac{100}{5} = 20\text{s}$$

હવે ધારો કે બંને કાર x_{AO} સ્થાનથી x જેટલા અંતરે મળે છે.

$$\therefore\ x = x_{AO} + v_A t = 100 + (10)\ (20) = 300\text{m}$$

ઉદાહરણ 18 : અમદાવાદ અને વડોદરા વચ્ચેનું અંતર 100km છે. અમદાવાદ અને વડોદરા બંને રેલવે સ્ટેશનોથી એક જ સમયે બંને ટ્રેન ઊપડે છે. આ ટ્રેનોની ઝડપ અનુક્રમે 45kmh^{-1} અને 30kmh^{-1} છે. કયા સમયે આ બંને ટ્રેનો એકબીજાને ક્રૉસ કરશે ?

ઉકેલ :

અમદાવાદથી ઊપડતી ટ્રેનનો વેગ $v_A = 45\text{kmh}^{-1}$

વડોદરાથી ઊપડતી ટ્રેનનો વેગ $v_B = -30\text{kmh}^{-1}$

(વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતી હોવાથી)

$x_{BO} - x_{AO} = 100\text{km}$

જ્યારે બંને ટ્રેન એકબીજાને ક્રૉસ કરશે ત્યારે એકબીજાની સાપેક્ષે સ્થાનાંતર શૂન્ય થશે.

$x_B - x_A = 0.$

$\therefore\ x_B - x_A = (x_{BO} - x_{AO}) + (v_B - v_A)t$

$0 = 100 + (-30 - 45)t$

$$\therefore\ t = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}\ \text{hour}$$

સારાંશ

1. **નિર્દેશફ્રેમ :** અવલોકનકાર જે સ્થળેથી જે પરિસ્થિતિમાંથી અવલોકન કરે છે, તેને નિર્દેશફ્રેમ કહે છે.

2. **પથલંબાઈ :** કોઈ સમયગાળામાં કણે કાપેલા અંતરને પથલંબાઈ કહે છે. પથલંબાઈ હંમેશાં ધન હોય છે.

3. **સ્થાનાંતર :** કોઈ સમયગાળામાં કણના સ્થાનમાં થતાં ફેરફારને સ્થાનાંતર કહે છે.

   સ્થાનાંતર = અંતિમ સ્થાન − પ્રારંભિક સ્થાન.

   સ્થાનાંતર ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે. પથલંબાઈનું મૂલ્ય સ્થાનાંતર કરતાં વધુ અથવા તેના જેટલું હોઈ શકે છે.

4. **સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગ :** પદાર્થની પથલંબાઈ અને તે માટે લાગતા સમયના ગુણોત્તરને સરેરાશ ઝડપ કહે છે.

   પદાર્થના સ્થાનાંતર અને તે માટે લાગતા સમયગાળાના ગુણોત્તરને **સરેરાશ વેગ** કહે છે.

   $$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

   સરેરાશ ઝડપમાં દિશાનું મહત્ત્વ નથી. તે હંમેશાં ધન હોય છે. સરેરાશ વેગ એ સ્થાનાંતરની દિશામાં હોય છે. તે ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે છે. આપેલા સમયગાળા માટે કણની સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ વેગના મૂલ્ય જેટલું અથવા વધુ હોઈ શકે છે.

5. **તત્કાલીન વેગ :** સરેરાશ વેગ પરથી સમયગાળાની જુદી-જુદી ક્ષણે પદાર્થનો વેગ કેટલો છે, તેની માહિતી મળતી નથી. સરેરાશ વેગની વ્યાખ્યામાં $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં t સમયે મળતા સરેરાશ વેગને **તત્કાલીન વેગ** કહે છે.

તત્કાલીન વેગ, $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

તત્કાલીન વેગના મૂલ્યને **તત્કાલીન ઝડપ** કહે છે.

6. સુરેખ પથ પર ગતિ કરતો કણ, સમાન સમયગાળામાં સમાન અંતર કાપે, તો કણ નિયમિત ગતિ કરે છે, તેમ કહેવાય.

7. $x - t$ આલેખમાં કણના અંતિમ સ્થાન અને પ્રારંભિક સ્થાનને જોડતી રેખાનો ઢાળ તે સમયગાળામાં કણના સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય દર્શાવે છે. $x - t$ આલેખના કોઈ બિંદુએ વક્રને દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે સમયે કણના તત્કાલીન વેગનું મૂલ્ય દર્શાવે છે.

8. **સરેરાશ પ્રવેગ અને તત્કાલીન પ્રવેગ :** Δt સમયગાળામાં પદાર્થના વેગમાં થતો ફેરફાર Δv હોય, તો

સરેરાશ પ્રવેગ $< a > = \frac{\text{વેગમાં ફેરફાર}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

t સમયે પદાર્થનો તત્કાલીન પ્રવેગ,

$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ **અથવા** $a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

પ્રવેગ એ સદિશ રાશિ છે, તે વેગના ફેરફારની દિશામાં હોય છે. તેનો SI એકમ m s^{-2} છે.

9. વેગ વિરુદ્ધ tના આલેખનો ઢાળ આપેલા સમયગાળા માટે સરેરાશ પ્રવેગનું મૂલ્ય આપે છે. આલેખના વક્રના કોઈ બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણે કણના પ્રવેગનું મૂલ્ય આપે છે. વેગ અને પ્રવેગ એક જ દિશામાં હોય, તો કણની ઝડપમાં વધારો થાય છે. જો વિરુદ્ધ દિશામાં હોય, તો તેની ઝડપમાં ઘટાડો થાય છે. તેને કણનો પ્રતિપ્રવેગ કહે છે.

10. $v - t$ આલેખની નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ આપેલા સમયગાળામાં કરેલું સ્થાનાંતર / કુલ અંતર દર્શાવે છે. અંતર મેળવવા માટે ઋણ ક્ષેત્રફળને પણ ધન લઈ ગણતરી કરવી.

11. **અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો**

$v = v_0 + at$ જ્યાં, x_0 = કણનું પ્રારંભિક સ્થાન

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ x = સમયે કણનું સ્થાન

$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ v_0 = કણનો પ્રારંભિક વેગ

v = કણનો t સમયે વેગ

12. કણ Aની સાપેક્ષે કણ Bનો વેગ, $v_{BA} = v_B - v_A$, કણ Bની સાપેક્ષે કણ Aનો વેગ $v_{AB} = v_A - v_B$ તથા $[v_{AB} = -v_{BA}]$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

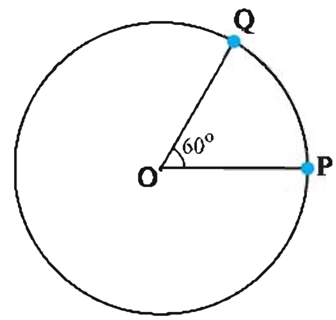
1. એક કાર r ત્રિજ્યાના અર્ધવર્તુળાકાર પથ પર એક છેડેથી બીજા છેડે જાય છે. આ કાર માટે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરનાં મૂલ્યનો ગુણોત્તર .... થશે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) 2π

2. એક વ્યક્તિ સુરેખપથ પર ઉત્તર દિશામાં 3 km, ત્યાર બાદ પશ્ચિમ દિશામાં 2 km અને દક્ષિણમાં 5 km ચાલે છે. આ વ્યક્તિએ કરેલ સ્થાનાંતર મૂલ્ય ....

(A) $2\sqrt{2}$ km (B) $3\sqrt{2}$ km (C) $4\sqrt{2}$ km (D) 10 km

3. આકૃતિ 3.15માં દર્શાવ્યા અનુસાર એક કીડી 1m ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર માર્ગ પર બિંદુ Pથી Q પર જાય છે. આ માટે તે 1 મિનિટ જેટલો સમય લે છે. આ સમયગાળામાં કીડીનો સરેરાશ વેગ કેટલો હશે ?

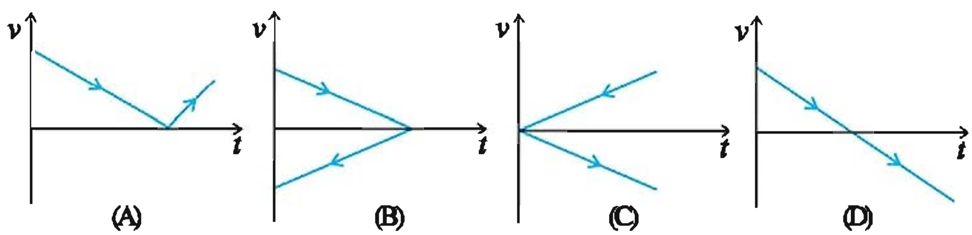


આકૃતિ 3.15

(A) $\frac{\pi}{40}$ m s^{-1} (B) $\frac{\pi}{60}$ m s^{-1}

(C) $\frac{3\pi}{160}$ m s^{-1} (D) $\frac{1}{60}$ m s^{-1}

4. એક પદાર્થને ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકવામાં આવે છે, તો નીચેનામાંથી કયો આલેખ તેના વેગ-સમયનો યોગ્ય ગ્રાફ છે ?

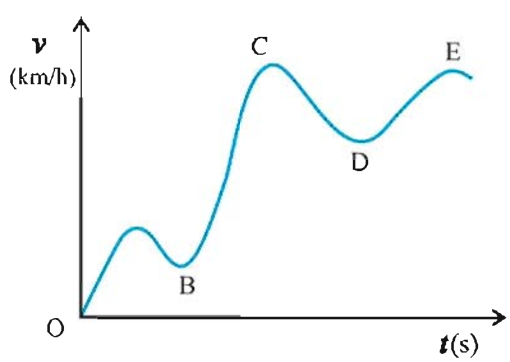


આકૃતિ 3.16

5. આકૃતિ 3.17માં બે કલાકની મુસાફરી દરમિયાન કોઈ કારની ઝડપમાં સમય સાથે થતો ફેરફાર દર્શાવ્યો છે. આ કારનો મહત્તમ પ્રવેગ .... વિભાગમાં છે.

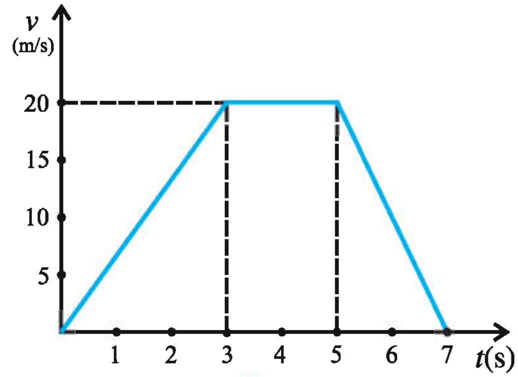
(A) OA (B) BC

(C) CD (D) DE



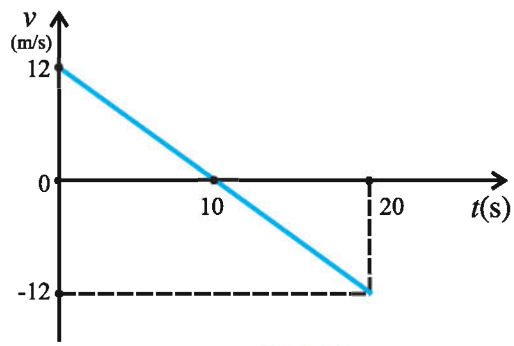
આકૃતિ 3.17

6. આકૃતિ 3.18માં કઈ ગતિમાન ખટારા માટે ઝડપ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દર્શાવેલ છે. આ ખટારાએ છેલ્લી બે સેકન્ડમાં કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?
(A) 60 m
(B) 90 m
(C) 20 m
(D) 40 m



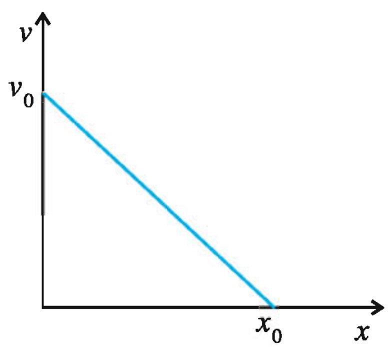
આકૃતિ 3.18

7. આકૃતિ 3.19 માં કોઈ ગતિમાન કણ માટે વેગ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દર્શાવેલ છે. 0થી 20 સેકન્ડના સમયગાળામાં કણનું થતું સ્થાનાંતર .... છે.
(A) 0 m
(B) 60 m
(C) 120 m
(D) –120 m

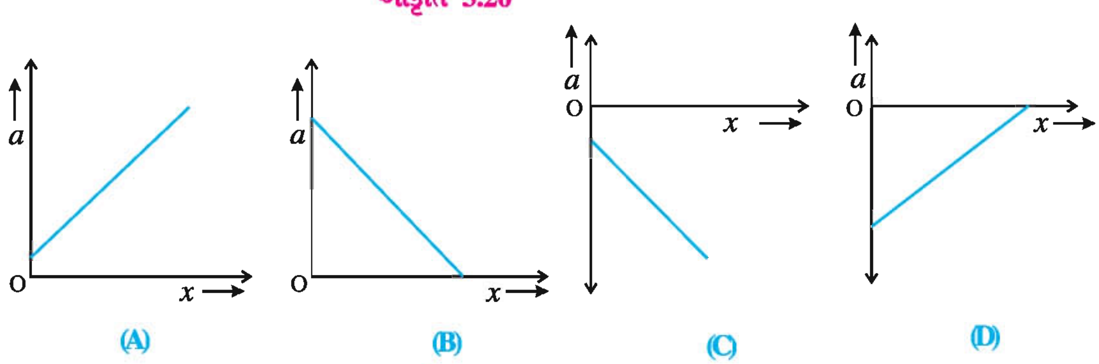


આકૃતિ 3.19

8. આકૃતિ 3.20 કોઈ એક ગતિમાન પદાર્થ માટે વેગ (v) વિરુદ્ધ સ્થાન (x) નો આલેખ દર્શાવે છે. આકૃતિ 3.20.a માં દર્શાવેલ કયો વિકલ્પ (આલેખ) આ પદાર્થ માટે પ્રવેગ (a) વિરુદ્ધ સ્થાન (x) નો આલેખ દર્શાવે છે



આકૃતિ 3.20



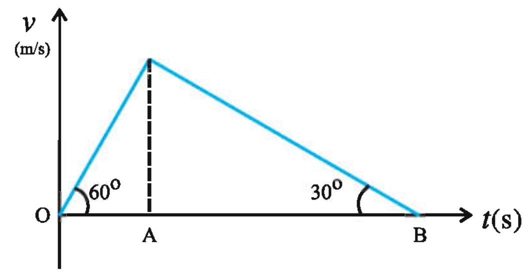
આકૃતિ 3.20

નોંધ : આલેખ પરથી સુરેખનો ઢાળ $m = -v_0/x_0$ અને આંતરચ્છેદ $c = v_0$ થશે. આથી સુરેખાનું સમીકરણ $v = (-v_0/x_0)\,x + v_0$ થશે. આ પરથી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવો.

9. કોઈ એક પદાર્થ માટે વેગ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ આકૃતિ 3.21માં દર્શાવ્યાં છે. પદાર્થના OA અને AB એ દરેક સમયગાળામાં મળતા સરેરાશ પ્રવેગોનો ગુણોત્તરકેટલો થશે?

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{3}$ (D) 3



આકૃતિ 3.21

10. એક કણનું સ્થાનાંતર $y(t) = a + bt + ct^2 - dt^4$ વડે માપવામાં આવે છે. કણના પ્રારંભિક વેગ અને પ્રવેગ અનુક્રમે .... છે. (a, b, c અને d અચળાંકો છે.)

(A) $b, -4d$ (B) $-b, 2c$ (C) $b, 2c$ (D) $2c, -4d$

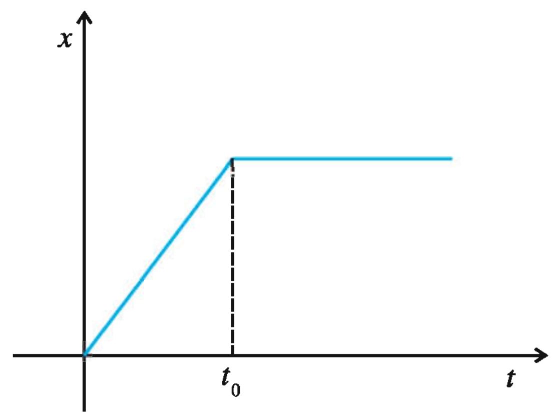
11. આકૃતિ 3.22 માં x–અક્ષ પર ગતિ કરતાં એક કણ માટેનો સ્થાનાંતર વિરુદ્ધ સમયનો ગ્રાફ દર્શાવ્યો છે. આ ગ્રાફ પરથી કહી શકાય કે,

(A) કણ ધન x–દિશામાં સતત ગતિ કરે છે.

(B) કણનો વેગ t_0 સમય સુધી વધે છે અને પછી અચળ થઈ જાય છે.

(C) કણ સ્થિર છે.

(D) કણ t_0 સમય સુધી અચળ વેગથી ગતિ કહે છે અને પછી તેનો વેગ શૂન્ય થાય છે.



આકૃતિ 3.22

12. એક પદાર્થનું સ્થનાંતર (મીટરમાં) સમય (સેકન્ડમાં) સાથે નીચેના સૂત્ર મુજબ બદલાય છે :

$y = -\frac{2}{3}t^2 + 16t + 2$ આ પદાર્થને સ્થિર થવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

(A) 12 s (B) 8 s (C) 16 s (D) 10 s

13. પદાર્થનું સ્થાન સમય સાથે $x = at^2 - bt^3$ અનુસાર બદલાય છે. પદાર્થનો પ્રવેગ કયા સમયે શૂન્ય થશે ? (જ્યાં a અને b અચળાંકો છે.)

(A) $\frac{2a}{3b}$ (B) $\frac{a}{b}$ (C) $\frac{a}{3b}$ (D) શૂન્ય

14. પદાર્થનું સ્થાન સમય સાથે $x = at + bt^2 - ct^3$ અનુસાર બદલાય છે. જ્યાં a, b અને c ગતિના અચળાંકો છે, જ્યારે પદાર્થનો પ્રવેગ શૂન્ય હશે, ત્યારે તેનો વેગ .... હશે.

(A) $a + \frac{b^2}{c}$ (B) $a + \frac{b^2}{2c}$ (C) $a + \frac{b^2}{3c}$ (D) $a + \frac{b^2}{4c}$

15. અમુક ઊંચાઈ પરથી એક પદાર્થને પડતો મૂકવામાં આવે, ત્યારે 'h' જેટલું અંતર કાપીને તેનો વેગ v થાય છે. તેનો વેગ બમણો થાય તે માટે પદાર્થે વધારાનું .... અંતર કાપ્યું હશે.

(A) $4h$ (B) $3h$ (C) $2h$ (D) h

16. એક બૉલ A ને વેગ v_0થી ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. આ જ ક્ષણે બીજો એક બૉલ B ઊંચાઈ h પરથી મુક્તપતન શરૂ કરે છે, તો t ક્ષણે B ની સાપેક્ષે A નો વેગ .... છે.

(A) v_0 (B) $v_0 - 2gt$ (C) $v_0 - gt$ (D) $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$

17. અચળ પ્રવેગથી એક સુરેખપથ પર ગતિ શરૂ કરતાં કણે ચોથી અને ત્રીજી સેકન્ડમાં કાપેલ અંતરનો ગુણોત્તર ....

(A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{3}{7}$

18. સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરીને એક કાર x જેટલા અચળ પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. પછી તે y પ્રતિપ્રવેગથી ગતિ કરે છે અને સ્થિર થાય છે. જો આ દરમિયાન લાગતો કુલ સમય t હોય, તો કારનો મહત્તમ વેગ કેટલાં થશે ?

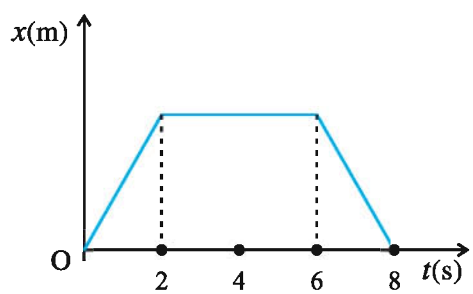
(A) $\frac{xy}{x - y}t$ (B) $\frac{xy}{x + y}t$ (C) $\frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}t$ (D) $\frac{x^2y^2}{x^2 - y^2}t$

19. એક કાર સુરેખ માર્ગ પર v_1 જેટલી અચળ ઝડપથી x જેટલું અંતર કાપે છે. ત્યાર બાદ તેટલું જ અંતર v_2 જેટલી અચળ ઝડપથી કાપે છે. કારનો સરેરાશ વેગ.......... સૂત્ર વડે મેળવી શકાય.

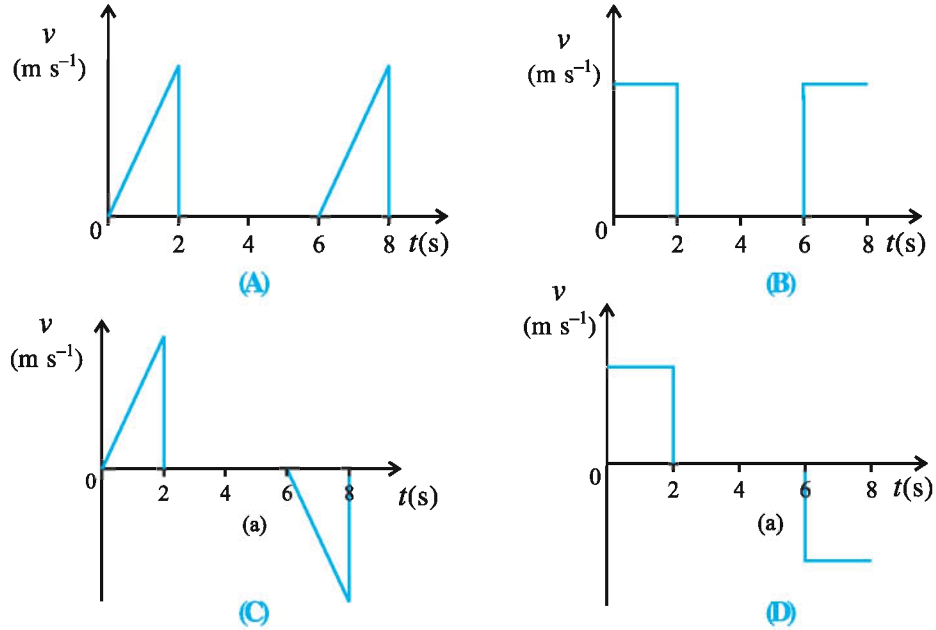
(A) $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ (B) $\bar{v} = \sqrt{v_1 v_2}$

(C) $\frac{2}{\bar{v}} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$ (D) $\frac{1}{\bar{v}} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$

20. સુરેખપથ પર ગતિ કરતા પદાર્થ માટે $x - t$ આલેખ આકૃતિ 3.23માં દર્શાવ્યો છે. આકૃતિ 3.24માં દર્શાવેલ વિકલ્પોમાંથી કયો આલેખ આ ગતિમાન પદાર્થ માટે $v - t$ આલેખ દર્શાવે છે ?



આકૃતિ 3.23



આકૃતિ 3.24

21. એક દડાને ઊર્ધ્વ દિશામાં ઉછાળવામાં આવે છે. હવાના અવરોધને અવગણતાં, હવામાં દડાનો પ્રવેગ ....

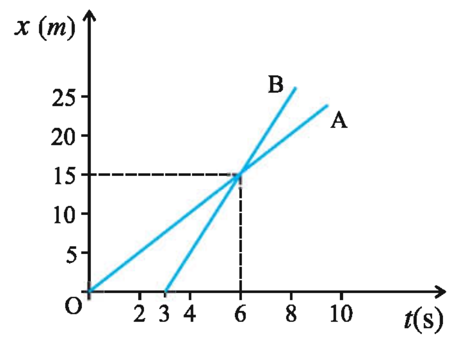
(A) શૂન્ય હશે.
(B) સતત વધતો હશે.
(C) અચળ હશે.
(D) ઊપરની તરફ જતાં વધશે અને નીચે તરફ આવતાં ઘટશે.

22. સ્થિર અવસ્થામાંથી બલૂન જમીનથી ઉપરની તરફ 1.25m s^{-2}ના અચળ પ્રવેગથી ઊડવાની શરૂઆત કરે છે. 8 સેકન્ડ બાદ બલૂનમાંથી એક પથ્થરને મુક્તપતન કરાવવામાં આવે છે. પથ્થર કેટલા સમયમાં જમીન પર આવશે ? ($g = 10$ m s^{-1} લો.)

(A) 2 s (B) 4 s (C) 6 s (D) 10 s

23. આકૃતિ 3.25માં કાર A અને કાર B માટે $x - t$ આલેખ દર્શાવ્યો છે. કાર Aનો કાર Bની સાપેક્ષે વેગ .... હશે.

(A) +5m s^{-1}
(B) −2.5m s^{-1}
(C) −5m s^{-1}
(D) +2.5m s^{-1}



આકૃતિ 3.25

24. પ્રશ્ન 23ના અનુસંધાનમાં $t = 0$ સમયે, કાર Aની સાપેક્ષે કાર B કયા સ્થાને હશે ? ($t = 0$ સમયે કાર B નિયમિત ગતિથી શરૂઆત કરે છે.)

(A) +15 m (B) −15 m (C) −10 m (D) −25 m

જવાબો

1. (A)	2. (A)	3. (D)	4. (D)	5. (B)	6. (C)
7. (A)	8. (D)	9. (D)	10. (C)	11. (D)	12. (A)
13. (C)	14. (C)	15. (B)	16. (A)	17. (A)	18. (B)
19. (C)	20. (D)	21. (C)	22. (B)	23. (B)	24. (B)

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગ વચ્ચેનો ભેદ જણાવો.
2. પ્રવેગ એટલે શું ? તે કઈ દિશામાં હોય છે ?
3. stopping distance કોને કહે છે ?
4. શું કોઈ ગતિમાન પદાર્થ માટે $x - t$ આલેખ સ્થાન-અક્ષને સમાંતર હોઈ શકે ?
5. ગતિમાન એવી બે કારનો સાપેક્ષ વેગ શૂન્ય ક્યારે થાય ?
6. એક પદાર્થને ગુરુત્વાકર્ષણ બળની અસર નીચે પડતો મૂકવામાં આવે છે, તો 1 સેકન્ડના અંતે તેણે કાપેલું અંતર કેટલું હશે ?
7. $v - t$ આલેખનો ઢાળ અને તે આલેખ દ્વારા ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ શું દર્શાવે છે ?
8. ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકેલા દડાની મહત્તમ ઊંચાઈએ વેગ અને પ્રવેગ કેટલો હશે ?
9. એક પરિમાણમાં ગતિ કરતાં પદાર્થને શું કોઈ એક ક્ષણે શૂન્ય વેગ અને અશૂન્ય પ્રવેગ હોઈ શકે ? ઉદાહરણ આપો.
10. મુક્તપતન કરતાં પદાર્થ માટે વેગ વિરુદ્ધ સમય અને પ્રવેગ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરો.
11. આપેલા સમયગાળા માટે પ્રવેગ વિરુદ્ધ સમયના આલેખ નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ શું દર્શાવે છે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

1. પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતર વચ્ચેનો ભેદ ઉદાહરણ સહિત સ્પષ્ટ કરો.
2. તત્કાલીન વેગની સમજૂતી આપો.
3. નિયમિત ગતિ માટે $x - t$ અને $v - t$ આલેખો સમજાવો.
4. અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો આલેખની રીતથી મેળવો.
5. સાપેક્ષ વેગ સમજાવો.

નીચેના દાખલાઓ ગણો :

1. એક મોટરસાઇકલ સવાર તેણે કાપવાના કુલ અંતરના $\frac{1}{3}$ જેટલું અંતર 10 kmh^{-1}, ત્યાર બાદનું $\frac{1}{3}$ અંતર 20 kmh^{-1} અને બાકીનું $\frac{1}{3}$ અંતર 30 kmh^{-1} ની ઝડપે કાપે છે. મોટરસાઇકલની સરેરાશ ઝડપ શોધો.

   [જવાબ : 16.36kmh^{-1}]

2. બે સ્ટેશન વચ્ચેનું અંતર 40km છે. એક ટ્રેનને આ અંતર કાપતાં 1 કલાક લાગે છે. પહેલા સ્ટેશનથી ટ્રેન પોતાની ગતિની શરૂઆત કરી પ્રથમ 5km તે અચળપ્રવેગી ગતિ કરે છે. પછીના 20km સુધી તેનો વેગ અચળ રહે છે અને છેવટના 15km તેનો વેગ નિયમિતપણે ઘટતો રહે છે અને બીજા સ્ટેશને ઊભી રહે છે, તો આ ટ્રેનનો મહત્તમ વેગ ગણો.

   [જવાબ : 60kmh^{-1}]

3. જમીન પર રહેલો વાંદરો 13m ઊંચા થાંભલા પર ચઢવાનો નિયમિત વેગથી પ્રયત્ન કરી રહ્યો છે. તે 1 સેકન્ડમાં 5m જેટલો ઉપર ચઢે છે અને ત્યાર બાદની 1 સેકન્ડમાં 3m જેટલો સરકી જાય છે. ફરીથી તે 1 sમાં 5m જેટલો ઉપર જાય છે અને ત્યાર બાદની 1 સેકન્ડમાં 3m જેટલો સરકી જાય છે. વાંદરાની આ ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો. તે કેટલા સમયમાં થાંભલાની ટોચ પર પહોંચશે.

[જવાબ : 9 s]

4. એક મોટરસાઇકલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરીને $+2.6\text{m s}^{-2}$ના પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. 120mનું અંતર કાપ્યા પછી તે -1.5m s^{-2}ના પ્રવેગથી જ્યાં સુધી તેનો વેગ $+12\text{m s}^{-1}$ નો થાય ત્યાં સુધીમાં મોટરસાયકલે કાપેલ કુલ અંતર શોધો.

[જવાબ : 280m]

5. ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકેલ એક બૉલ 16mની મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરે છે, તો કઈ ઊંચાઈએ તેનો વેગ તેના પ્રારંભિક વેગથી અડધો થતો હશે ?

[જવાબ : 12m]

6. એક ટાવરની ઊંચાઈ 39.2m છે. કોઈ એક ક્ષણે ટાવર પરથી એક પદાર્થને મુક્તપતન કરવા દેવામાં આવે છે. બરાબર તે જ ક્ષણે ટાવરના તળિયેથી બીજા પદાર્થને ઊર્ધ્વ દિશામાં 19.6m s^{-1}ના વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. તો તે બન્ને ક્યાં અને ક્યારે મળશે ?

[જવાબ : 2 s, 19.6m]

7. કોઈ એક ગતિમાન પદાર્થનું સ્થાનાંતર (m માં) સમય (s માં) સાથે નીચેના સૂત્ર મુજબ બદલાય છે :

$x = t^3 + 4t^2 - 2t + 5$

(*a*) t = 4s સેકન્ડે પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ

(*b*) t = 0 થી t = 4s ના સમયગાળામાં પદાર્થનો સરેરાશ વેગ અને સરેરાશ પ્રવેગ શોધો.

[જવાબ : (*a*) $v = 78\text{m s}^{-1}$; $a = 32\text{m s}^{-2}$ (*b*) $< v > = 30\text{m s}^{-1}$, $< a > = 20\text{m s}^{-2}$]

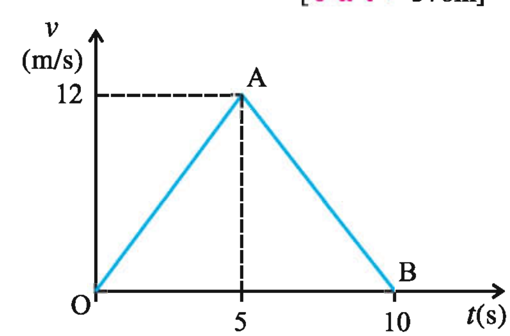
8. 30m s^{-1}ની ઝડપે જતી ટ્રેન Aનો ડ્રાઇવર, બીજાં એક ટ્રેન Bને તે જ પાટા પર તે જ દિશામાં 10m s^{-1}ની ઝડપથી જતી જોતાં બ્રેક મારે છે અને પરિણામે ટ્રેન પર 2m s^{-2}નો પ્રતિપ્રવેગ લાગે છે. ઍક્સિડન્ટ નિવારવા માટે બંને ટ્રેન વચ્ચેનું અંતર ઓછામાં ઓછું કેટલું હોવું જોઈએ ?

[જવાબ : 100m]

9. એક પદાર્થ અચળ પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. 10 સેકન્ડના અંતે તેનો વેગ 48m s^{-1} તથા 15 સેકન્ડના અંતે તેનો વેગ 68m s^{-1} થાય છે, તો 15 સેકન્ડમાં કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?

[જવાબ : 570m]

10. સુરેખપથ પર ગતિ કરતાં કણ માટે $v - t$ આલેખ આકૃતિ 3.26માં દર્શાવ્યો છે. (*a*) t = 0થી t = 10s સુધીમાં કણે કાપેલું અંતર શોધો. (*b*) t = 2 sથી 6 s જેટલા સમયગાળામાં કણે કાપેલું અંતર શોધો.
[જવાબ : 60m, 36m]



આકૃતિ 3.26

11. 120m લાંબી એક ટ્રેન પૂર્વથી પશ્ચિમ તરફ 10m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરે છે. એક પક્ષી પૂર્વ તરફ 5m s^{-1}ના વેગથી ઊડતું-ઊડતું આ ટ્રેન ક્રૉસ કરે છે. આ ટ્રેન ક્રૉસ કરવા માટે પક્ષીને લાગતો સમય કેટલો હશે ?

[જવાબ : 8 s]

12. કોઈ એક કણનો વેગ $v = 4t$ અનુસાર બદલાય છે. આ કણે $t = 2$ sથી $t = 4$ s જેટલા સમયગાળામાં કાપેલું અંતર શોધો. v એ m s^{-1}માં છે.

[જવાબ : 24m]

પરિશિષ્ટ 3.1
વિકલન (Differentiation)

જ્યારે કોઈ રાશિમાં ફેરફાર થતો હોય ત્યારે આ ફેરફાર માટે અમુક સમય લાગતો હોય છે. દા.ત., સગડી પર મૂકેલા પાણીનું તાપમાન (T) 30°Cથી 75°C સુધી વધવા માટે 5 મિનિટનો સમય લે છે. અહીં, તાપમાનમાં વધવાનો સરેરાશ દર 9°C/min છે.

સંજ્ઞામાં,

$$\text{તાપમાનમાં ફેરફારનો સરેરાશ દર} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{75^{\circ}C - 30^{\circ}C}{5\ min} = 9^{\circ}C/min$$

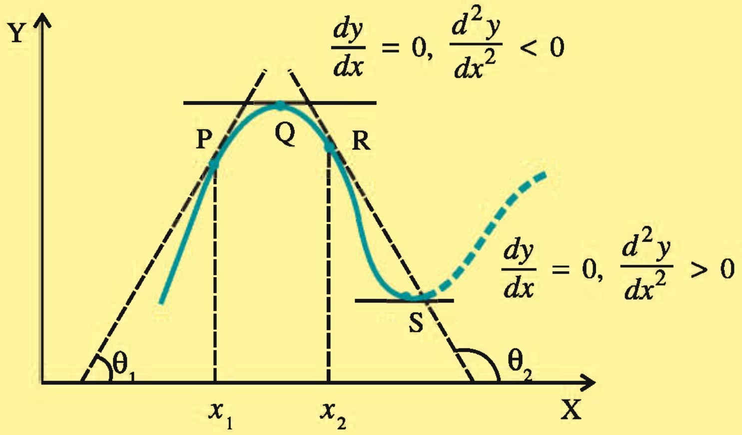
9°C/min ને તાપમાનના ફેરફારનો સમયદર કહે છે, પરંતુ કોઈ એક ક્ષણે તાપમાનના ફેરફારનો દર (તત્કાલીન ફેરફારનો દર) જાણવો હોય, તો લક્ષ (limit) નામના એક વિભાવનાનો ઉપયોગ કરવો પડે.

ધારો કે t સમયે તાપમાન T અને $t + \Delta t$ સમયે તાપમાન $T + \Delta T$ છે. આમ, Δt જેટલા સમયગાળામાં તાપમાનમાં થતો ફેરફાર ΔT જેટલો છે. તાપમાનના ફેરફારનો (સરેરાશ) દર દર્શાવતા ગુણોત્તર $\frac{\Delta T}{\Delta t}$માં સમયગાળો Δt જેમ નાનો લઈએ તેમ આ ફેરફારનો દર, સમયની ક્ષણ tની નજીકનો મળે છે અને $\Delta t \to 0$ લક્ષ લેતાં t સમયે તાપમાનના ફેરફારનો દર મળે છે અને તેને સંકેત $\frac{dT}{dt}$ વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$$

$\frac{dT}{dt}$ ને સમય (t)ની સાપેક્ષે તાપમાન (T)નું વિકલિત(derivative) કહે છે. વિકલિત મેળવવાની ક્રિયા (operation) ને વિકલન કહે છે.

ધારો કે, કોઈ રાશિ y એ બીજી કોઈ રાશિ xનું વિધેય છે. અર્થાત્ $y = f(x)$ જ્યારે xમાં સતત ફેરફાર થતો હોય, ત્યારે $f(x)$ વિધેય અનુસાર yમાં પણ સતત ફેરફાર થાય છે. આ ફેરફારનો દર (x ની સાપેક્ષે) xના કોઈ મૂલ્ય પાસે કેટલો છે તે જાણવું હોય, તો xના તે મૂલ્ય પાસે $\frac{dy}{dx}$ મેળવવું જોઈએ. **$\frac{dy}{dx}$ એ y વિરુદ્ધ xના વક્રનો $x = x$ પાસે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ આપે છે.**



આકૃતિ A

આકૃતિ Aમાં દર્શાવેલ વક્ર માટે,

બિંદુ P પાસે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ $= tan\theta_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$

બિંદુ R પાસે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ $= tan\theta_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_2}$

બિંદુ Q અને બિંદુ S પાસે સ્પર્શકનો ઢાળ $= tan\ 0^o = \frac{dy}{dx} = 0$

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે જે બિંદુ પાસે $\frac{dy}{dx} = 0$ હોય ત્યાં yનું મૂલ્ય મહત્તમ (બિંદુ Q) અથવા ન્યૂનતમ (બિંદુ S) હોય છે. જો $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ હોય, તો y નું મૂલ્ય મહત્તમ અને $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ હોય, તો yનું મૂલ્ય ન્યૂનતમ હોય છે. અહીં, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y$ નું x ની સાપેક્ષે દ્વિતીય વિકલન કહેવાય છે.

જો y વિરુદ્ધ xનો આલેખ આપેલો હોય, તો વક્ર પરના બિંદુ પાસે સ્પર્શક દોરી તેનો ઢાળ મેળવીને તે બિંદુ પાસે $\frac{dy}{dx}$ શોધી શકાય છે, પરંતુ આલેખને બદલે y અને x વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ હોય, તો ગાણિતીય રીતે $\frac{dy}{dx}$ મેળવી શકાય. આ માટે નીચેનું ઉદાહરણ સમજો :

ધારો કે L લંબાઈ ધરાવતા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ A છે.

આથી, $A = L^2$ થાય.

હવે જો લંબાઈમાં ΔL જેટલો વધારો થાય, તો ક્ષેત્રફળમાં ΔA જેટલો વધારો થશે. એટલે કે ચોરસની નવી લંબાઈ $L + \Delta L$ અને ક્ષેત્રફળ $A + \Delta L$ થશે.

$A + \Delta A = (L + \Delta L)^2 = L^2 + 2L\ \Delta L + (\Delta L)^2$

$\therefore\ \Delta A = 2\ L\Delta L + (\Delta L)^2\ (\therefore A = L^2)$ છે.

$\therefore\ \frac{\Delta A}{\Delta L} = 2L + \Delta L$

હવે, જો ΔLને સૂક્ષ્મ કરતાં જઈએ, તો $2L + \Delta L$નું મૂલ્ય $2L$ની નજીક મળશે.

આમ, $\frac{dA}{dL} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta L} = 2L$

અમુક પ્રામાણિક વિધેયોનાં વિકલિત નીચે ટેબલમાં દર્શાવ્યા છે :

y	$\frac{dy}{dx}$	y	$\frac{dy}{dx}$
x^n	nx^{n-1}	$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\sin x$	$\cos x$	$\text{cosec } x$	$-\text{cosec } x \cot x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$\sec^2 x$		
$\cot x$	$-\text{cosec}^2 x$	e^x	e^x
$\sin kx$	$k \cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos kx$	$-k \sin x$		

વિકલિતના કાર્ય-નિયમો :

1. $\frac{d}{dx}(k) = 0$ (જ્યાં, k અચળ છે.)

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(ky) = k\frac{dy}{dx}$ (જ્યાં, k અચળ છે.)

4. જો $y = u \pm v$, હોય, તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

5. જો $y = uv$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} \pm v\frac{du}{dx}$

6. જો $y = \frac{u}{v}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

ઉદાહરણ : $y = x^3 + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$ માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = x^3 + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

$$= x^3 + 4x^{\frac{-1}{2}} - 3x^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(4x^{\frac{-1}{2}}) + \frac{d}{dx}(-3x^{-2})$$

$$= 3x^{3-1} + 4\left(\frac{-1}{2}\right)x^{\frac{-1}{2}-1} + (-3) = [(-2)x^{-2-1}]$$

$$= 3x^2 - 2x^{\frac{-3}{2}} + 6x$$

પરિશિષ્ટ 3.2

સંકલન (Integration)

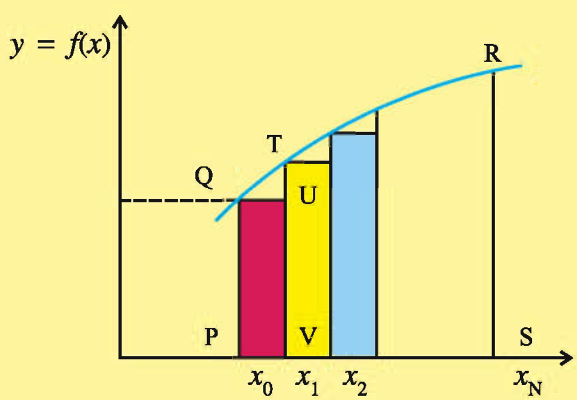
ત્રિકોણ, ચોરસ, લંબચોરસ, વર્તુળ જેવી નિયમિત આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટેનાં પ્રમાણિત સૂત્રો છે. હવે આપણે અનિયમિત આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કઈ રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું અને તે દરમિયાન સાહજિક રીતે સંકલનનો અછડતો પરિચય મેળવીશું.

ધારો કે કોઈ રાશિ y એ કોઈ ચલરાશિ xનું વિધેય છે, અર્થાત્ $y = f(x)$. ધારો કે $y \rightarrow x$નો આલેખ આકૃતિ (B)માં દર્શાવ્યા મુજબનો મળે છે.

હવે ધારો કે આપણે $x = x_0$થી $x = x_N$ની વચ્ચે ઘેરાતા આલેખની નીચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ (PQRS) શોધવું છે.

આ માટે x_0થી x_N વચ્ચેના અંતરાલ(interval)ને Δx જેટલી સૂક્ષ્મ પહોળાઈની N પટ્ટીઓ(strips)માં વહેંચીશું.

આકૃતિ (B) પરથી સ્પષ્ટ છે કે આ બધી જ પટ્ટીઓનાં ક્ષેત્રફળનો સરવાળો જરૂરી છે.



આકૃતિ B

પ્રથમ પટ્ટી (x_1 થી $x_2 = x_1 + \Delta x$) માટે $f(x) = f(x_1)$ લેતાં,

પ્રથમ પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ $\Delta A_1 = f(x_1)\Delta x$.

બીજી પટ્ટી (x_2 થી $x_3 = x_2 + \Delta x$) માટે $f(x) = f(x_2)$.

$\therefore$ બીજી પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ $\Delta A_2 = f(x_2)\Delta x$.

આ રીતે દરેક પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ મેળવી સરવાળો કરતાં મળતું કુલ ક્ષેત્રફળ

$$A' = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_N)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x \qquad (1)$$

પરંતુ આ રીતે મળતું ક્ષેત્રફળ (A') એ આપણે જે શોધવું છે, તે ક્ષેત્રફળ (A) કરતાં થોડું જુદું હશે. આમ થવાનું કારણ નીચે મુજબ છે :

$\Delta A_1 = f(x_1)\Delta x$ એ લંબચોરસ PQUVનું ક્ષેત્રફળ આપશે, જ્યારે આપણે જોઈતો ભાગ PQTV છે. આમ, પ્રથમ stepમાં જ Q-U-T-Q ના ક્ષેત્રફળ જેટલું ક્ષેત્રફળ ઓછું ગણાઈ ગયું છે. આ જ રીતે દરેક પટ્ટી માટે થયું છે.

એ સ્પષ્ટ છે કે જેમજેમ આવી પટ્ટીઓની સંખ્યા (N) વધારતા (એટલે કે પહોળાઈ (Δx) ઘટાડતાં) જઈશું. તેમતેમ આ રીતે મેળવેલ મૂલ્ય અને સાચા મૂલ્ય વચ્ચેનો તફાવત ઘટતો જશે, અને પટ્ટીની પહોળાઈ (Δx) શૂન્યવત્ નાની લેતાં સંપૂર્ણપણે ચોક્કસ મેળવી શકાય છે. સંકેતમાં

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

$$= \int_{x_0}^{x_N} f(x)dx$$

આમ, કહી શકાય તે **સરવાળાનું લક્ષ એટલે સંકલન.**

$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx$ એ $f(x)$ નો $x = x_0$થી $x = x_N$ સુધીનો x પરનો **(સતત) સરવાળો છે.** તેને $f(x)$નું x_0 થી x_N સુધીનું x પરનું (નિયત) સંકલન કહે છે.

સંકલન એ વિકલનની પ્રતિ (inverse) પ્રક્રિયા છે.

અમુક પ્રમાણિત વિધેયોનાં સંકલિતો :

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$	$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$ln\ x + c$	$sin\ x$	$-cos\ x + c$
e^x	$e^x + c$	$cos\ x$	$sin\ x + c$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + c$	$sin\ kx$	$-\frac{1}{k}cos\ x + c$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + c$	$cos\ kx$	$\frac{1}{k}sin\ kx + c$

ઉપર્યુક્ત ટેબલમાં cને સંકલન-અચળાંક કહે છે. ચોક્કસ સીમાઓ (limits)ની વચ્ચે કરેલ સંકલન (નિયત)ને ચોક્કસ મૂલ્ય હોય છે. જેમકે,

$$\int_1^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^4 = \frac{1}{4}[(4)^4 - (1)^4]$$

$$= \frac{1}{4}(256 - 1)$$

$$= 63.75$$

ઉદાહરણ : $\int_0^t A\sin\omega t\ dt$ નું મૂલ્ય મેળવો જ્યાં, A અને ω અચળાંક છે.

ઉકેલ : $\int_0^t A\sin\omega t\ dt = A\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^t = \frac{A}{\omega}(1 - cos\omega t)$

ઉદાહરણ : $\int_R^\infty \frac{GMm}{x^2}dx$ નું મૂલ્ય મેળવો જ્યાં, G અચળ છે.

ઉકેલ : $\int_R^\infty \frac{GMm}{x^2}dx = GMm\int_R^\infty \frac{1}{x^2}dx$

$$= GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_R^\infty$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{\infty}-\left(-\frac{1}{R}\right)\right]$$

$$= \frac{GMm}{R}$$

વિકલન અને સંકલનની આટલી સમજણ મેળવ્યા બાદ હવે આપણે અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો કલનશાસ્ત્રની મદદથી મેળવીશું.

ઉદાહરણ : કલનશાસ્ત્ર (Calculus)ની મદદથી સુરેખપથ પર નિયમિત (અચળ) પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે ગતિનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ :

(1) વેગ-સમય વચ્ચેનો સંબંધ :

તત્કાલીન પ્રવેગની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$a = \frac{dv}{dt}$

$dv = adt$

હવે, $t = 0$ સમયે $v = v_0$ અને $t = t$ સમયે $v = v$ છે. બન્ને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$

$[v]_{v_0}^{v} = a\ [t]_0^t$ (a અચળ છે.)

$\therefore\ v - v_0 = at$

or $v = v_0 + at$ (1)

(2) સ્થાન-સમય વચ્ચેનો સંબંધ :

તત્કાલીન વેગની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$v = \frac{dx}{dt}$

$\therefore\ dx = vdt$

$t = 0$ સમયે પદાર્થ x_0 સ્થાન પર અને $t = t$ સમયે x સ્થાન પર છે. બન્ને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v dt$$

$$= \int_0^t (v_0 + at) dt \qquad \text{(સમીકરણ (1) પરથી)}$$

$$= \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at\ dt$$

$$\therefore [x]_{x_0}^{x} = v_0[t]_0^t + a\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

$$\therefore x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

અથવા $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (2)

(3) વેગ-સ્થાન વચ્ચેનો સંબંધ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \times v \left(\because \frac{dx}{dt} = v\right)$$

$$\therefore adx = vdv$$

જ્યારે $x = x_0$ છે, ત્યારે $v = v_0$ અને $x = x$ છે, ત્યારે $v = v$ છે.

$$\therefore \int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv$$

$$\therefore a\int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} vdv$$

$$a[x]_{x_0}^{x} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v}$$

$$a(x - x_0) = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right)$$

$\therefore 2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$ (3)

સમીકરણ (1), (2), અને (3) એ નિયમિત પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો છે. આ રીતનો ફાયદો એ છે કે તે અનિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે પણ વાપરી શકાય છે.

પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ

4.1 પ્રસ્તાવના
4.2 અદિશ અને સદિશ રાશિઓ
4.3 સદિશ રાશિની આકૃતિ સ્વરૂપે રજૂઆત
4.4 સ્થાન અને સ્થાનાંતર સદિશો
4.5 સદિશોની સમાનતા
4.6 સદિશોનું બીજગણિત
4.7 શૂન્ય સદિશ
4.8 એકમસદિશ
4.9 સમતલમાં સદિશનું વિભાજન
4.10 બે સદિશોના ગુણાકાર
4.11 તત્કાલીન વેગ
4.12 પ્રવેગ
4.13 સાપેક્ષ વેગ
4.14 સમતલમાં (દ્વિપરિમાણમાં) થતી અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો
4.15 નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ
4.16 પ્રક્ષિપ્ત ગતિ
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

4.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપણે આગળ સુરેખપથ પર (એક પરિમાણમાં) પદાર્થની ગતિના વર્ણન માટે જરૂરી ભૌતિક રાશિઓ, સ્થાનાંતર, વેગ અને પ્રવેગ વિશે શીખ્યા. આપણે જોયું કે એક પરિમાણમાં માત્ર બે જ દિશાઓની શક્યતા હોવાથી (+) (ધન) અને (–) (ઋણ) ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવાથી દિશાઓની કાળજી આપોઆપ લઈ શકાય છે, પરંતુ પદાર્થની ગતિનું દ્વિપરિમાણમાં (સમતલમાં) અથવા ત્રિપરિમાણમાં (અવકાશમાં) વર્ણન કરવા માટે ઉપર્યુક્ત ભૌતિક રાશિઓને દર્શાવવા માટે સદિશની જરૂર પડે છે. આ માટે સદિશ એટલે શું ? સદિશના સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર કેવી રીતે કરવા ? સદિશને વાસ્તવિક સંખ્યાથી ગુણતાં પરિણામ શું મળે તે સમજવું જરૂરી છે. સમતલમાં વેગ અને પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સદિશનો ઉપયોગ કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે સમતલમાં પદાર્થની ગતિની ચર્ચા હાથ ધરીશું. સમતલમાં ગતિના સાદા કિસ્સા તરીકે આપણે અચળ પ્રવેગવાળી તથા વિગતવાર રીતે પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરીશું. વર્તુળાકાર ગતિનું રોજબરોજના જીવનમાં ખાસ મહત્ત્વ હોવાથી આપણે નિયમિત વર્તુળગતિનો વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું.

સમતલમાંની ગતિ માટે મેળવેલાં સમીકરણોને સહેલાઈથી ત્રિપરિમાણિક ગતિનાં સમીકરણોમાં પરિવર્તિત કરી શકાય છે.

4.2 અદિશ અને સદિશ રાશિઓ (Scalar and Vector Quantities)

ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં રાશિઓનું વર્ગીકરણ (1) અદિશ રાશિઓ (Scalar quantities) અને (2) સદિશ રાશિઓ (Vector quantities) તરીકે કરવામાં આવે છે. સદિશ રાશિઓ અને અદિશ રાશિઓ વચ્ચે મૂળભૂત ફરક એટલો છે કે અદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી નથી, જ્યારે સદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી છે.

જે રાશિઓનાં ફક્ત મૂલ્ય જાણવાથી જ તેમના વિષેની સંપૂર્ણ માહિતી મળી શકતી હોય તેવી રાશિઓને અદિશ રાશિઓ કહે છે. દા. ત., તાપમાન (temperature), સમય (time), દળ (mass), ઘનતા (density), કદ (volume), કાર્ય (work) વગેરે. અદિશ રાશિને તેનું મૂલ્ય દર્શાવતા અંક અને યોગ્ય એકમ સાથે દર્શાવવામાં આવે છે. અદિશ રાશિઓનું સંયોજન સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરે છે. સામાન્ય અંકોની જેમ જ અદિશ રાશિઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.

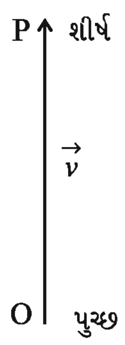
જે રાશિઓ વિશેની સંપૂર્ણ માહિતી મેળવવા માટે તેમના મૂલ્ય ઉપરાંત દિશાની પણ જરૂર પડતી હોય, તેવી રાશિઓને સદિશ રાશિઓ કહેવામાં આવે છે. દા. ત., વેગ (velocity), પ્રવેગ (acceleration), બળ (force), ટૉર્ક (torque), ક્ષેત્રફળ (area), સ્થાનાંતર (displacement) વગેરે.

સદિશ રાશિઓને દર્શાવવા માટે તે રાશિની સંજ્ઞા પર તીર મૂકવામાં આવે છે અથવા તે રાશિની સંજ્ઞાને ઘાટી (bold) કરીને દર્શાવવામાં આવે છે. જેમકે બળના સદિશને $\vec{F}$ અથવા **F** વેગના સદિશને $\vec{v}$ અથવા ***v*** વડે દર્શાવાય છે. સદિશ રાશિના મૂલ્યને તે સદિશ સંજ્ઞાને માનાંકમાં મૂકીને અથવા તો તે રાશિની સંજ્ઞાને તીર વગર લખીને દર્શાવાય છે. દા.ત., $\vec{A}$નું મૂલ્ય $|\vec{A}|$ અથવા A વડે દર્શાવાય છે.

સદિશ રાશિઓ ચોક્કસ પ્રકારનાં યૌગિક સંયોજનોને અનુસરે છે.

4.3 સદિશ રાશિની આકૃતિ સ્વરૂપે (ભૌમિતિક સ્વરૂપે) રજૂઆત (Presentation of Vector by Graphical or Geometrical Method)

સદિશ રાશિને આકૃતિ સ્વરૂપે રજૂ કરવા માટે તીર દોરવામાં આવે છે અને આ તીરની લંબાઈ યોગ્ય સ્કેલ પર, તે સદિશ રાશિના મૂલ્ય જેટલી લેવામાં આવે છે. આ સદિશ રાશિની અસર જે દિશામાં પ્રવર્તતી હોય તે દિશામાં તીરનું શીર્ષ (head) મૂકવામાં આવે છે. આ તીર ગમે તે બિંદુએથી દોરી શકાય છે. આવા સદિશોને મુક્ત સદિશો (free vectors) કહે છે. દા. ત., એક ટ્રેન દક્ષિણથી ઉત્તર તરફની દિશામાં 40km/hrના વેગથી ગતિ કરે છે. આ વેગસદિશને દર્શાવવા આકૃતિ 4.0 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દક્ષિણથી ઉત્તર દિશામાં તીર દોરો. તીરની લંબાઈ વેગના મૂલ્યને સમપ્રમાણમાં (એટલે કે સ્કેલમાપ 10km/hr = 1cm લેતાં) 4cm રાખો. ગતિ ઉત્તર દિશામાં છે, તેથી ઉત્તર દિશામાં (P બિંદુએ) તીરનું શીર્ષ (head) મૂકો. O બિંદુને સદિશની પુચ્છ (tail) કહે છે. આમ વેગસદિશ $\vec{v} = \vec{OP}$ વડે દર્શાવાય છે.

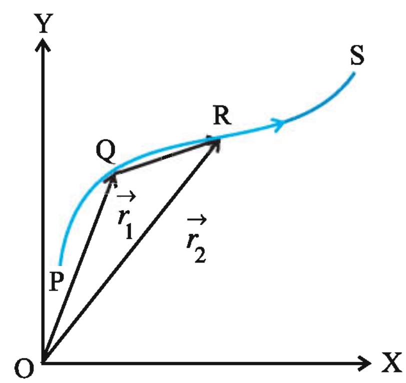


આકૃતિ 4.0

4.4 સ્થાન અને સ્થાનાંતર સદિશો (Position and Displacement Vecotrs)

પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ જરૂરી છે. જે સામાન્ય રીતે યામાક્ષોના ઉગમબિંદુને લેવામાં આવે છે. આકૃતિ (4.1)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પદાર્થ PQRS... માર્ગે ગતિ કરે છે. કોઈક t_1 સમયે તે Q બિંદુએ છે. ઉદ્‌ગમ બિંદુ O અને Qને સુરેખા વડે જોડતાં બનતો સદિશ $\vec{OQ} = \vec{r_1}$ એ પદાર્થનો t_1 સમયે સ્થાનસદિશ કહેવાય. ધારો કે t_2 સમયે તે R બિંદુએ પહોંચે છે. O અને Rને સુરેખા વડે જોડતાં બનતો સદિશ $\vec{OR} = \vec{r_2}$ એ t_2 સમયે પદાર્થનો સ્થાન સદિશ બનશે. આમ, પદાર્થ $t_2 - t_1$ સમયમાં Q થી R પર પહોંચે છે. તેનો સ્થાનાંતર સદિશ $\vec{QR}$ વડે દર્શાવાય છે.

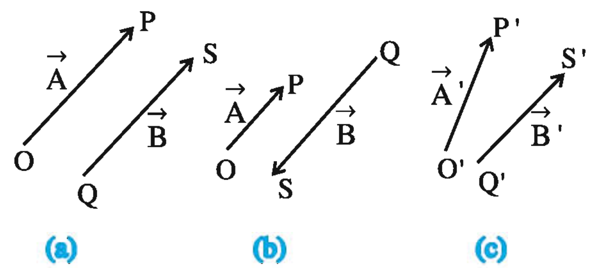
અત્રે અગત્યની નોંધવા જેવી બાબત એ છે કે સ્થાનાંતર સદિશનું મૂલ્ય એ પ્રારંભિક સ્થાન અને અંતિમ સ્થાન વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર છે.



આકૃતિ 4.1

4.5 સદિશોની સમાનતા (Equality of Vectors)

સમાન સદિશો : જો બે સદિશોનાં મૂલ્ય અને દિશા સમાન હોય, તો તેવા સદિશોને સમાન સદિશો કહેવાય (આકૃતિ 4.2(a)).



આકૃતિ 4.2

સમાંતર સદિશો : એક જ દિશામાંના સદિશોને સમાંતર સદિશો (parallel vectors) કહેવાય. (આવા સદિશોનાં મૂલ્યો સમાન કે જુદાં-જુદાં હોઈ શકે.) જુઓ આકૃતિ 4.2 (a).

પ્રતિ સમાંતર સદિશો (Antiparallel Vectors) : પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના સદિશોને પ્રતિ સમાંતર સદિશો કહે છે. આકૃતિ 4.2 (b).

અસમાંતર સદિશો (Aparallel Vectors) : સમાંતર કે પ્રતિસમાંતર ન હોય તેવા સદિશોને અસમાંતર સદિશો કહે છે. આકૃતિ 4.2 (c)

4.6 સદિશોનું બીજગણિત (Vector Algebra)

4.6.1 વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોનો ગુણાકાર (Multiplication of Vectors by Real Numbers)

સદિશ રાશિને વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણતાં મળતું પરિણામ સદિશ રાશિ જ હોય છે. સદિશ $\vec{A}$નો ધન સંખ્યા k સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતા સદિશ $k\vec{A}$નું મૂલ્ય સદિશ $\vec{A}$ના મૂલ્ય કરતાં k ગણું થાય છે.

$$|k\vec{A}| = k|\vec{A}| \qquad \text{જો } k > 0$$

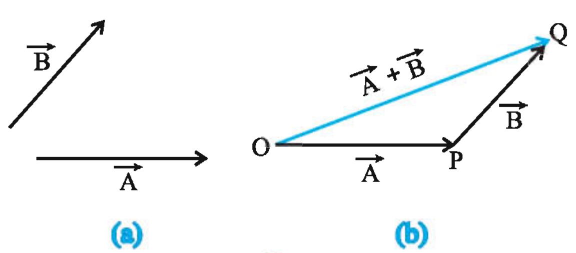
સદિશ $\vec{A}$ ને ઋણ સંખ્યા $-k$ વડે ગુણતાં મળતા પરિણામી સદિશ $k\vec{A}$ ની દિશા સદિશ $\vec{A}$ની દિશા કરતાં વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે તથા તેનું માનાંક $|k\vec{A}|$ હોય છે.

સદિશ $\vec{A}$ સાથે ગુણાકારમાં લેવાતો ગુણાંક k ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતો અદિશ પણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સદિશ $k\vec{A}$ના પરિમાણ k અને $\vec{A}$ પરિમાણોનો ગુણાકાર છે. દા. ત., અચળ વેગનો સમયના ગાળા સાથેનો ગુણાકાર, સ્થાનાંતર સદિશ આપે છે.

4.6.2 સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી (Addition and Subtraction of Vectors)

આલેખની (ભૌમિતિક) રીત (Graphical or Geometrical Method)

બે સદિશોનો ભૌમિતિક રીતે સરવાળો નીચે પ્રમાણે કરવામાં આવે છે :



આકૃતિ 4.3

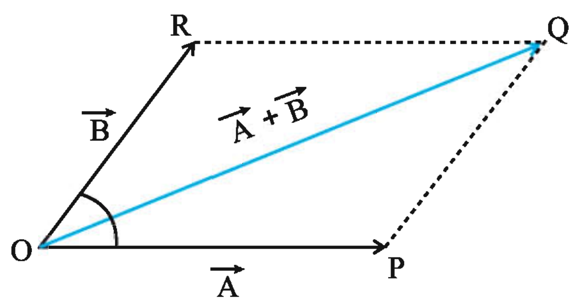
ધારો કે (આકૃતિ 4.3 (a)) બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો સરવાળો કરવો છે.

આ માટે આકૃતિ 4.3 (b) માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ એક બિંદુ Oમાંથી $\vec{A}$ના જેટલા મૂલ્યનો અને $\vec{A}$ની દિશામાં હોય તેવો એક સદિશ $\vec{OP}$ દોરો. માટે $\vec{OP} = \vec{A}$ થશે. હવે આ સદિશ $\vec{OP}$ના શીર્ષ (head) P પર બીજા સદિશ $\vec{B}$નું પુચ્છ (tail) મૂકીને $\vec{PQ} = \vec{B}$ દોરો. ત્યાર બાદ પ્રથમ સદિશ $\vec{A}$ની પુચ્છ (tail) O ને દ્વિતીય સદિશ $\vec{B}$ના શીર્ષ (head) Qને જોડતો સદિશ $\vec{OQ}$ દોરતાં તે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો સરવાળો દર્શાવતો **પરિણામી સદિશ** $\vec{R}$ છે.

અર્થાત્ $\vec{A} + \vec{B} = \vec{OQ} = \vec{R}$.

સદિશોના સરવાળાની આ રીતમાં બે સદિશો અને તેમનો પરિણામી સદિશ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની રચના કરતા હોવાથી તેને સદિશ સરવાળાની **ત્રિકોણની રીત** પણ કહે છે.

કોઈ બિંદુ O માંથી સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ને રજૂ કરતા સદિશો $\vec{OP}$ અને $\vec{OR}$ દોરો. હવે OP અને OR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સંલગ્ન બાજુઓ બને તે રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (આકૃતિ 4.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) OPQR પૂર્ણ કરો.



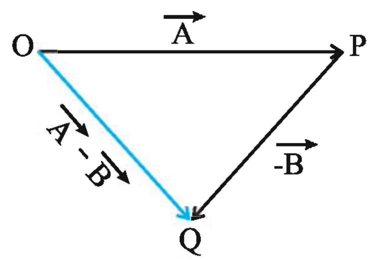
આકૃતિ 4.4

અત્રે સ્પષ્ટ છે કે $\vec{OR} = \vec{PQ} = \vec{B}$. આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના O બિંદુમાંથી દોરેલ વિકર્ણ OQ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ બનશે. એટલે કે $\vec{OQ} = \vec{A} + \vec{B}$.

આ રીતને સદિશોના સરવાળાની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત પણ કહે છે. (આ રીતની વિગતવાર ચર્ચા આર્ટીકલ 4.9.4માં કરીશું.)

4.6.3 સદિશોની બાદબાકી (Subtraction of Vectors)

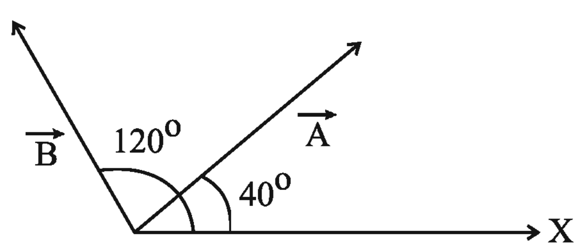
ધારો કે આકૃતિ 4.3(a) માં દર્શાવેલા $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ની બાદબાકી કરવી છે. હવે $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ હોઈ આનો અર્થ એ થાય કે $\vec{A}$માંથી $\vec{B}$ને બાદ કરવો એટલે $\vec{A}$માં $-\vec{B}$ (અર્થાત્ $\vec{B}$ના મૂલ્ય જેટલું જ મૂલ્ય ધરાવતો પરંતુ તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાંનો સદિશ) ઉમેરવો. જુઓ આકૃતિ 4.5.



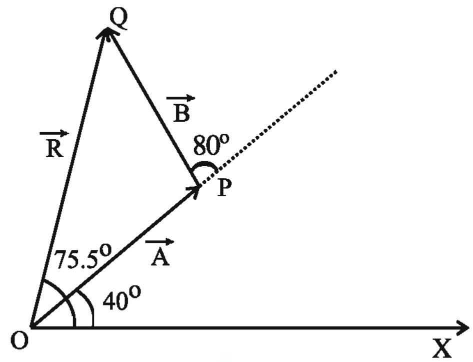
આકૃતિ 4.5

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતમાં આકૃતિ 4.5 માં બિંદુ P અને Rને જોડતાં વિકર્ણ વડે દર્શાવાતો સદિશ $\vec{OQ} = \vec{A} - \vec{B}$ દર્શાવે છે. (આ હકીકત જાતે ચકાસો.) વળી ચકાસી જુઓ કે $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$.

ઉદાહરણ 1 : બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$, X-અક્ષ સાથે 40^o અને 120^o ખૂણા બનાવે છે. જો $|\vec{A}| = 6$ અને $|\vec{B}| = 5$ એકમ હોય તો, આ બે સદિશોનો પરિણામી સદિશ શોધો.



(a)



(b)

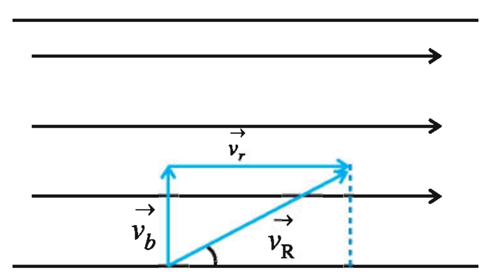
આકૃતિ 4.6

ઉકેલ : આકૃતિ 4.6(a) માં આ બે સદિશોને દર્શાવ્યા છે. તેમનો સરવાળો કરવા માટે ગ્રાફપેપર લઈ, આકૃતિ 4.6(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ તેના પરના કોઈ બિંદુ Oમાંથી પસાર થતો X-અક્ષ દર્શાવો. યોગ્ય સ્કેલ નક્કી કરી Oમાંથી $\vec{A}$ને રજૂ કરતો સદિશ $\vec{OP}$ દોરી આ સદિશના P બિન્દુ પરથી બીજા સદિશ $\vec{B}$ની પુચ્છ મૂકીને $\vec{PQ} = \vec{B}$ દોરો.

O અને Qને સુરેખા વડે જોડતાં $\vec{OQ}$એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ મળે છે. અર્થાત્ $\vec{OQ} = \vec{R}$ પરિણામી સદિશ $\vec{OQ}$નું મૂલ્ય માપપટ્ટીથી શોધતાં તે 8.4 એકમ મળે છે. આ પરિણામી સદિશ X-અક્ષ સાથેનો ખૂણો 75.5^o રચે છે.

ઉદાહરણ 2 : એક નદીમાં પાણીના પ્રવાહનો વેગ 40km/h છે. આ નદીમાં માછીમાર મોટરબોટને કાંઠાને લંબ રૂપે 30km/hના વેગથી હંકારવા પ્રયત્ન કરે છે, તો મોટરબોટનો પરિણામી વેગ તથા પરિણામી વેગની દિશા કાંઠાની સાપેક્ષે શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાણીના પ્રવાહના વેગને $\vec{v_r}$ અને મોટરબોટના વેગને $\vec{v_b}$ વડે દર્શાવેલ છે. સદિશ સરવાળા માટે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત વાપરતાં ત્યાં બંને વેગોનો પરિણામી વેગ $\vec{v_R}$ વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 4.7 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



આકૃતિ 4.7

$$\left|\vec{v}_R\right| = \sqrt{\left|\vec{v}_r\right|^2 + \left|\vec{v}_b\right|^2}$$

$$= \sqrt{(40)^2 + (30)^2}$$

$$= 50 \text{ km/h}$$

ધારો કે $\vec{v}_R$ નદીના પ્રવાહ સાથે θ કોણ બનાવે છે. આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી

$$\therefore \tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{30}{40} = 0.75$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}(0.75) \approx 37^\circ$$

આમ, બોટનો પરિણામી વેગ 50km/hr અને તેની દિશા પ્રવાહ સાથે 37°નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં છે.

4.6.4 સદિશોના સરવાળાના ગુણધર્મો (Properties of vector addition)

(1) સદિશોના સરવાળા સમક્રમી (commutative) છે, પરંતુ બાદબાકી સમક્રમી નથી.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

(2) સદિશોનો સરવાળો જૂથના નિયમ (associative law) ને અનુસરે છે. અર્થાત્

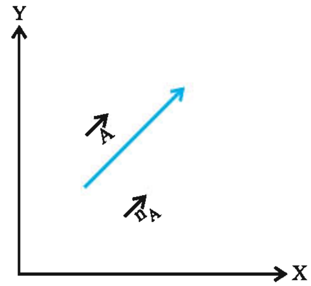
$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

4.7 શૂન્ય સદિશ (Null or Zero Vector)

બે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના સદિશોનો સરવાળો કરતાં મળતા સદિશને શૂન્ય સદિશ કહે છે અને તેને $\vec{0}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, $\vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$. શૂન્ય સદિશનું મૂલ્ય શૂન્ય હોઈને તેની દિશા દર્શાવી શકાય નહિ. દા.ત., અચળ વેગથી ગતિ કરતી ટ્રેનનો પ્રવેગ શૂન્ય સદિશ છે.

4.8 એકમસદિશ (Unit Vectior)

એકમમૂલ્ય ધરાવતા સદિશને એકમસદિશ કહે છે. એકમસદિશને સંકેત $\hat{n}$ (વંચાય એન હેટ અથવા એન કેરટ) વડે દર્શાવાય છે. કોઈ પણ સદિશને તેના મૂલ્ય વડે ભાગતાં તે સદિશની દિશામાંનો એકમસદિશ મળે છે. દા.ત., આકૃતિ 4.8માં સદિશ $\vec{A}$ દર્શાવ્યો છે. ધારો કે $|\vec{A}| = 6$ છે.



આકૃતિ 4.8

આ સદિશની દિશામાંના એકમ સદિશને $\hat{n}_A$ વડે દર્શાવીએ તો,

$$\hat{n}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{6} \qquad (4.8.1)$$

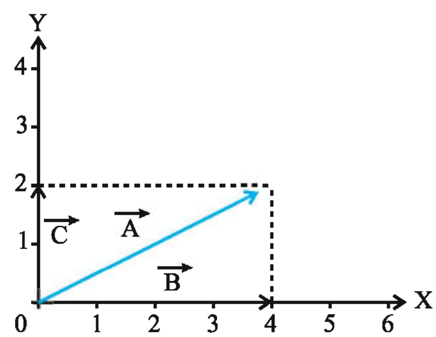
આમ, કોઈ પણ સદિશને તેના મૂલ્ય અને તે સદિશની દિશામાંના એકમ સદિશના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

$$\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{n}_A = A\hat{n}_A \qquad (4.8.2)$$

કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિમાં X, Y અને Z–અક્ષની દિશામાંના એકમસદિશોને અનુક્રમે $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ વડે દર્શાવાય છે. આકૃતિ 4.9માં દર્શાવેલ સદિશોને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\vec{B} = 4\hat{i},\ \vec{C} = 2\hat{j}$$

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} \qquad (4.8.3)$$

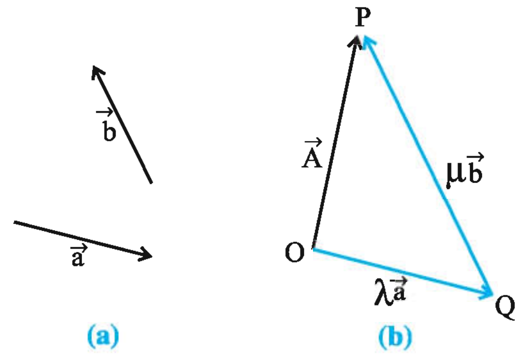


આકૃતિ 4.9

4.9 સમતલમાં સદિશનું વિભાજન (Resolution of a Vector in a Plane)

આકૃતિ 4.10 (a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં બે અશૂન્ય સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ તથા બીજો એક અશૂન્ય સદિશ $\vec{A}$ માં ધ્યાનમાં લો. સદિશ $\vec{A}$ ને બે સદિશોના સરવાળારૂપે દર્શાવી શકાય. જેમાંનો એક સદિશ, $\vec{a}$ ને વાસ્તવિક સંખ્યા λ વડે ગુણીને મેળવેલ હોય અને બીજો

સદિશ, $\vec{b}$ ને વાસ્તવિક સંખ્યા μ વડે ગુણીને મેળવેલો હોય તો ઉપર્યુક્ત વિધાનને ચકાસવા માટે સદિશ $\vec{A}$ ની પુચ્છ Oમાંથી પસાર થતી અને $\vec{a}$ ને સમાંતર સુરેખા દોરો. તેવી જ રીતે સદિશ $\vec{A}$ ના શીર્ષ Pમાંથી પસાર થતી તથા $\vec{b}$ ને સમાંતર સુરેખા દોરો. આ બંને સુરેખાઓના છેદબિંદુને Q વડે દર્શાવવામાં આવે, તો આકૃતિ 4.10 (b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે



આકૃતિ 4.10

$$\vec{A} = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} \qquad (4.9.1)$$

પરંતુ $\vec{OQ}$ સદિશ $\vec{a}$ ને સમાંતર છે અને $\vec{QP}$ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર છે, તેથી

$$\vec{OQ} = \lambda\vec{a} \text{ અને } \vec{QP} = \mu\vec{b} \qquad (4.9.2)$$

આને સદિશ $\vec{A}$ નું સદિશ $\vec{a}$ અને સદિશ $\vec{b}$ ની દિશામાં અનુક્રમે સદિશ ઘટકો $\lambda\vec{a}$ અને $\mu\vec{b}$ માં વિભાજન કર્યું કહેવાય. જ્યાં λ અને μ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

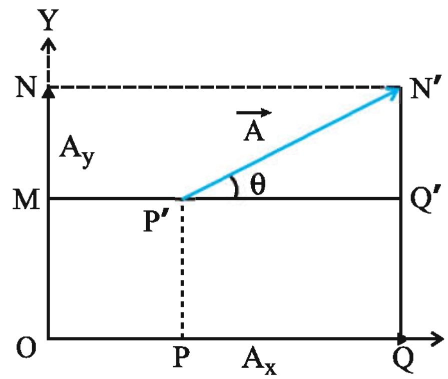
$$\therefore \ \vec{A} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \qquad (4.9.3)$$

આમ આપેલ સદિશનું બે સદિશ ઘટકોમાં આપેલ બે સદિશોની દિશામાં રહે તથા આ ત્રણે સદિશો એક જ સમતલમાં રહે તે રીતે વિભાજન કરી શકાય.

લંબયામાક્ષ પદ્ધતિમાં એકમસદિશનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સદિશનું અક્ષોની દિશાઓમાં સરળતાથી વિભાજન કરી શકાય છે.

4.9.1 સદિશના લંબઘટકો (Perpendicular components of a vector)

આકૃતિ 4.11 માં દ્વિ-પરિમાણમાં એક સદિશ $\vec{A}$ દર્શાવેલ છે. આ સદિશના પુચ્છ અને શીર્ષમાંથી X અને Y-અક્ષો પર લંબ દોરેલા છે. આમ કરતાં PQ = $\vec{A}$ નો X-અક્ષની દિશામાંનો અદિશ ઘટક અથવા $\vec{A}$ નો X-અક્ષના દિશાનો પ્રક્ષેપ (A_x) અને MN = $\vec{A}$ નો Y-અક્ષની દિશામાંનો અદિશ ઘટક અથવા $\vec{A}$ નો Y-અક્ષની દિશાનો પ્રક્ષેપ (A_y).



આકૃતિ 4.11

હવે સદિશોના સરવાળાના નિયમ પરથી

$$\vec{A} = \vec{P'Q'} + \vec{Q'N'} = \vec{PQ} + \vec{MN} \qquad (4.9.4)$$

$$\therefore \ \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (4.9.5)$$

અહીં, $A_x\hat{i} = \vec{A_x}$ = સદિશ $\vec{A}$ નો X-દિશામાંનો સદિશ ઘટક તથા $A_y\hat{j} = \vec{A_y}$ = સદિશ $\vec{A}$ નો Y-દિશામાંનો સદિશ ઘટક છે.

$$\cos\theta = \frac{P'Q'}{P'N'} = \frac{A_x}{A}$$

$$\therefore \ A_x = A \cos\theta \qquad (4.9.6)$$

અને આ જ રીતે $A_y = A \cos(90^\circ - \theta)$

$$\therefore \ A_y = A \sin\theta \qquad (4.9.7)$$

આ પરથી કહી શકાય કે આપેલ સદિશનો કોઈ પણ દિશામાંનો ઘટક એટલે તે સદિશનું મૂલ્ય અને તે સદિશે તે દિશા સાથે બનાવેલ ખૂણાની cosineનો ગુણાકાર.

આમ, કોઈ પણ સદિશનું બે પરસ્પર લંબઘટકોમાં વિભાજન કરી શકાય છે.

કોઈ પણ સદિશને બે રીતે વર્ણવી શકાય છે :

(1) તે સદિશનું મૂલ્ય અને તેણે નિશ્ચિત દિશા સાથે બનાવેલ ખૂણા વડે અથવા

(2) તે સદિશના ઘટકો વડે.

આકૃતિ 4.11 માં $\Delta P'Q'N'$માં

$$|\vec{A}| = P'N' = \sqrt{(P'Q')^2 + (Q'N')^2}$$

$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (4.9.8)$$

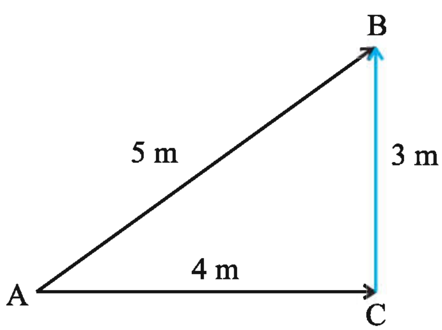
આમ, કોઈ પણ સદિશનું મૂલ્ય તેના પરસ્પર લંબ ઘટકોના વર્ગના સરવાળાના વર્ગમૂળ જેટલું હોય છે અને દિશા માટે

$$\tan\theta = \frac{N'Q'}{P'Q'} = \frac{A_y}{A_x} \quad (4.9.9)$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right), \quad (4.9.10)$$

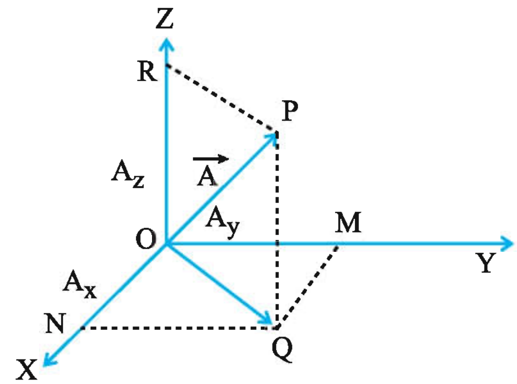
જ્યાં θ એ $\vec{A}$ અને X-અક્ષ વચ્ચેનો કોણ છે. અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે (XY) સમતલમાં રહેલ સદિશની જ ચર્ચા કરી છે. આ જ રીતે ત્રિ-પરિમાણમાં રહેલા સદિશને ત્રણ પરસ્પર લંબઘટકો (X, Y અને Z)માં વિભાજિત કરી શકાય છે.

કોઈ ભૌતિક રાશિને રજૂ કરતાં સદિશનો કોઈ પણ દિશામાંનો ઘટક તે ભૌતિક રાશિની તે દિશામાંની અસરકારકતા સૂચવે છે. જેમકે આકૃતિ 4.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ વ્યક્તિ Aથી B સુધી 5mનું સ્થાનાંતર કરે તો સ્પષ્ટ છે કે તેણે સમક્ષિતિજ દિશામાં કાપેલ અંતર (Aથી C સુધી) 4m છે અને ઊર્ધ્વદિશામાં કાપેલ અંતર (C થી B સુધી) 3m. છે.



આકૃતિ 4.12

આકૃતિ 4.13 માં ત્રિ-પરિમાણમાં એક સદિશ $\vec{A}$ દર્શાવ્યો છે. આ સદિશનો XY સમતલ પરનો પ્રક્ષેપ OQ છે. બિંદુ Q માંથી X અને Y-અક્ષો પર લંબ દોરતાં તે અક્ષો પરના સદિશ $\vec{A}$ના X અને Y ઘટકો અનુક્રમે $ON = A_x$ અને $OM = A_y$ મળે છે. ત્રિ-પારિમાણિક દૃષ્ટિએ જોતાં માલૂમ પડે છે કે $PQ = RO = A_z$ છે.



આકૃતિ 4.13

હવે પાઈથાગોરસના પ્રમેય પરથી

$$OQ^2 = MQ^2 + OM^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (4.9.11)$$

તથા $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$

$$\therefore OP^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (4.9.12)$$

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\therefore |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4.9.13)$$

ત્રિપરિમાણમાં સદિશ $\vec{A}$ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

બીજી રીતે સદિશને નીચે મુજબ પણ લખવામાં આવે છે.

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

કોઈ બિંદુના યામો (x, y, z) હોય, તો તેનો સ્થાનસદિશ ઉગમબિંદુની સાપેક્ષે નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x, y, z) \quad (4.9.14)$$

અહીં, x, y અને z એ $\vec{r}$ ના X, Y, અને Z-અક્ષની દિશામાંના ઘટકો છે. સ્થાનસદિશનું મૂલ્ય,

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.9.15)$$

4.9.2 સદિશોના સરવાળા અને બાદબાકી (ઘટકોની મદદથી) : બૈજિક રીત (Addition and subtraction of vectors (using component) : Algebraic or analytical method)

આપણે સદિશોના સરવાળાની ભૌમિતિક રીત શીખી ગયા. આ રીત બે કે ત્રણ સદિશોનો સરવાળો કરવાનો હોય

ત્યાં સુધી સરળ રહે છે, પરંતુ વધારે સંખ્યામાં સદિશોનો સરવાળો કરવાનો હોય ત્યારે કંટાળાજનક છે અને તેની ચોક્સાઈ પણ મર્યાદિત છે. આવા સંજોગોમાં સદિશ સરવાળાની બૈજિક રીત ખૂબ જ અનુકૂળ પડે છે.

આપણે જોઈ ગયા કે કોઈ પણ સદિશનું પરસ્પર લંબ ઘટકોમાં વિભાજન થઈ શકે છે. સદિશોના ઘટકોના સંયોજનની મદદથી સદિશોનું સંયોજન ઘણી જ સરળતાથી થઈ શકે છે.

ધારો કે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ એ XY-સમતલમાં આવેલા સદિશો છે અને તેમના ઘટકો A_x, A_y અને B_x, B_y છે માટે,

$$\therefore \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \quad (4.9.16)$$

અને $$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \quad (4.9.17)$$

આ બે સદિશોનો સરવાળો કરતાં મળતા પરિણામી સદિશને $\vec{R}$ વડે દર્શાવીએ તો,

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) \quad (4.9.18)$$

સદિશોના સરવાળા સમક્રમી છે અને તે જૂથના નિયમને અનુસરે છે, માટે,

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \quad (4.9.19)$$

વળી, $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$ હોઈને

$R_x = A_x + B_x$ અને $R_y = A_y + B_y$

આમ, પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ નો દરેક ઘટક એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

આ જ રીતે, ત્રિ-પરિમાણમાં

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad (4.9.20)$$

હવે, ઉદાહરણ દ્વારા જોઈ શકીશું કે સરવાળા માટેની બૈજિક રીત ભૌમિતિક રીત કરતાં કઈ રીતે સરળ પડે છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$, હોય તો, $\vec{A} + \vec{B}$ અને $\vec{A} - \vec{B}$ નાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A} + \vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\therefore \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{(6)^2 + (8)^2 + (7)^2}$$

$= 12.2$ એકમ

$$\vec{A} - \vec{B} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore \left|\vec{A} - \vec{B}\right|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$

$= 3$ એકમ

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 4.14 માં દર્શાવેલા બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ નો સરવાળો બૈજિક રીતની મદદથી કરો. $|\vec{A}| = 10$ એકમ અને $|\vec{B}| = 8$ એકમ છે.

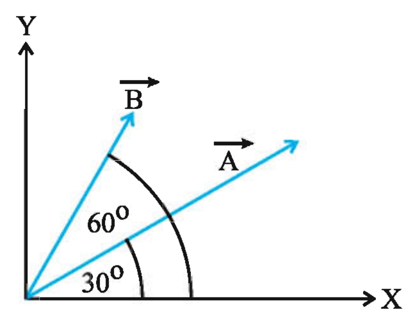
ઉકેલ : આ માટે આપણે બન્ને સદિશના X અને Y ઘટકો મેળવીશું.

$A_x = A\,cos\,30^\circ = 10\,cos\,30^\circ$

$= 10 \times 0.8660 = 8.66$

$B_x = B\,cos\,60^\circ = 8cos60^\circ = 8 \times 0.5$

$= 4.0$



આકૃતિ 4.14

$A_y = A\,sin\,30^\circ = 10\,sin\,30^\circ$

$= (10)(0.5) = 5.0$

$B_y = B\,sin\,60^\circ = 8\,sin\,60^\circ$

$= (8)(0.8660) = 6.928 \approx 6.93$

હવે આ બંને સદિશોના પરિણામીને $\vec{R}$ કહીએ, તો

$R_x = A_x + B_x = 8.66 + 4.0 = 12.66$

$R_y = A_y + B_y = 5 + 6.93 = 11.93$

∴ પરિણામી સદિશ $\vec{R}$ નું મૂલ્ય

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$= \sqrt{(12.66)^2 + (11.93)^2}$$

$= 17.4$ એકમ

ધારો કે પરિણામી સદિશ X-અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવે છે તો,

$$tan\ \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{11.93}{12.66} = 0.9423$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1} 0.9423 \approx 43^o\ 8'$$

આ પ્રક્રિયાને સરળ નીચે મુજબ બનાવી શકાય. X અને Y-અક્ષો આપણે આપણી અનુકૂળતા પ્રમાણે લઈ શકીએ છીએ.

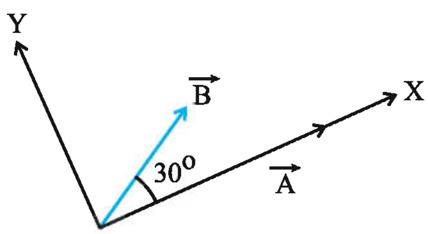
ધારો કે X-અક્ષ $\vec{A}$ ની દિશામાં લઈએ તો હવે $\vec{A}$ અને X-અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો 0^o થશે અને $\vec{B}$ અને X-અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો 30^o થશે. આ સંજોગોમાં (આકૃતિ 4.15)

$A_x = A\ cos\ 0^o = 10\ cos\ 0^o = 10$

$B_x = B\ cos\ 30^o = 8(0.8660) = 6.93$

$A_y = A\ sin\ 0^o = 10\ sin\ 0^o = 0$

$B_y = B\ sin\ 30^o = (8)\ (0.5) = 4.0$



આકૃતિ 4.15

$\therefore\ R_x = A_x + B_x = 10 + 6.93 = 16.93$

$R_y = A_y + B_y = 0 + 4 = 4$

$$\therefore\ |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

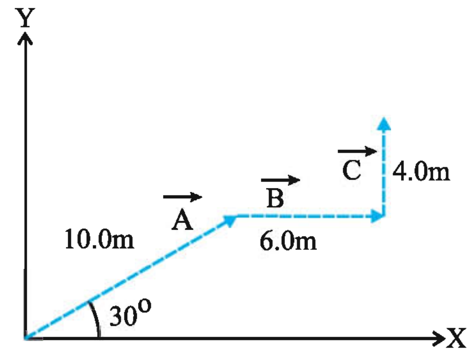
$$= \sqrt{(16.93)^2 + (4)^2}$$

≈ 17.4 એકમ

પરિણામીની દિશાની ખાતરી જાતે કરી જુઓ.

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 4.16માં દર્શાવેલા ત્રણ સદિશોનો પરિણામી સદિશ શોધો.

ઉકેલ : આ ત્રણેય સદિશોના x અને y ઘટકો શોધીને અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા પરથી પરિણામી સદિશ શોધીશું.



આકૃતિ 4.16

$\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના x-ઘટકો લેતાં

$A_x = Acos30^o = 10cos30^o$

$= (10)(0.8660) = 8.66$

$B_x = Bcos0^o = 6cos0^o = 6$

$C_x = Ccos90^o = 4(0) = 0$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના y-ઘટકો લેતાં

$A_y = Acos60^o = (10)(0.5) = 5$

$B_y = Bcos90^o = (6)(0) = 0$

$C_y = Ccos0^o = (4)(1) = 4$

જો પરિણામી સદિશને $\vec{R}$ કહીએ તો,

$R_x = A_x + B_x + C_x$

$= 8.66 + 6 + 0 = 14.66m$

$R_y = A_y + B_y + C_y = 5 + 0 + 4 = 9m$

R નું મૂલ્ય $= |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$$= \sqrt{(14.66)^2 + (9)^2}$$

$= 17.2m$

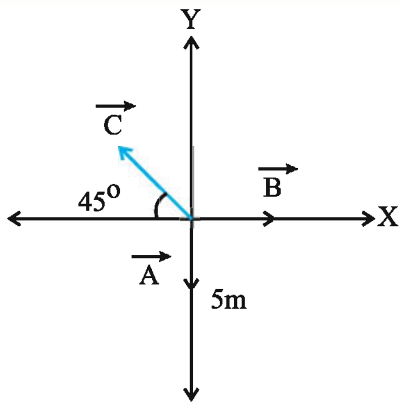
જો $\vec{R}$ X-અક્ષ સાથે θ ખૂણો બનાવતો હોય, તો

$$tan\ \theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{9}{14.66} = 0.6139$$

$$\therefore\ \theta = tan^{-1}\ (0.6139)$$

$$= 31^{o}\ 27'$$

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 4.17માં દર્શાવેલા ત્રણ સદિશોનો સરવાળો શૂન્ય થતો હોય, તો સદિશો $\vec{B}$ અને $\vec{C}$નાં મૂલ્યો શોધો.



આકૃતિ 4.17

ઉકેલ : આ ત્રણેય સદિશોના x ઘટકો લેતાં

$A_x = A\ cos\ 270^o = 0$

$B_x = B\ cos\ 0^o = B$

$C_x = C\ cos\ 135^o = -\frac{1}{\sqrt{2}}C$

હવે, ત્રણેય સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ ના y–ઘટકો લેતાં.

$A_y = A\ cos\ 180^o = -A$

$B_y = B\ cos\ 90^o = 0$

$C_y = C\ cos\ 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}C$

જો પરિણામી સદિશને $\vec{R}$ કહીએ તો

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ હોવાથી

$$R_x = A_x + B_x + C_x = 0 + B - \frac{1}{\sqrt{2}}\ C$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = -A + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ C$$

હવે આપેલ છે કે પરિણામી સદિશ $\vec{R}$નું મૂલ્ય શૂન્ય છે. માટે સ્પષ્ટ છે કે તેના ઘટકોનાં મૂલ્યો પણ શૂન્ય થવાં જોઈએ. આમ કરતાં,

$$R_x = 0 + B - \frac{1}{\sqrt{2}}C = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2}}C$$

$$R_y = -A + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}C = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}C$$

$\therefore\ A = B$

આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે કે $|\vec{A}| = A = 5m$

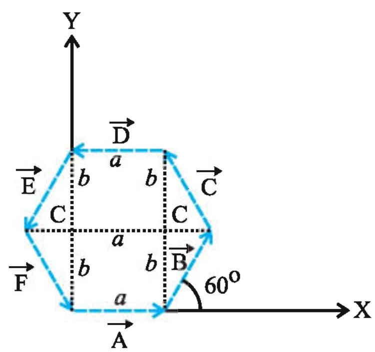
$\therefore C = A\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\,m$

અને $B = A = 5m$

ઉદાહરણ 7 : આકૃતિ 4.18 દર્શાવ્યા મુજબ છ સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ અને $\vec{F}$ એક નિયમિત ષટ્કોણ (regular hexagon) બનાવે છે., તો સદિશોના સરવાળાની બૈજિક રીતનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે તેમનો સરવાળો શૂન્ય છે.

ઉકેલ : નિયમિત hexagon હોઈને સ્પષ્ટ છે કે તેની બાજુઓ સમાન હોય એટલે કે આ બધા સદિશોનાં મૂલ્ય સમાન હશે. ધારો કે આ મૂલ્ય = P છે. અર્થાત્ A = B = C = D = E = F = P.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર X અને Y અક્ષો લઈને આ સદિશોના અનુક્રમે x અને y ઘટકો લેતાં.



આકૃતિ 4.18

આકૃતિ 4.18 પરથી,

$\vec{A} = a\hat{i}$

$\vec{B} = c\hat{i} + b\hat{j}$

$\vec{C} = -c\hat{i} + b\hat{j}$

$\vec{D} = -a\hat{i}$

$\vec{E} = -c\hat{i} - b\hat{j}$

$\vec{F} = c\hat{i} - b\hat{j}$

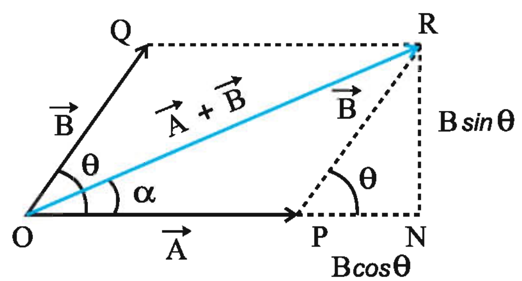
$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F}$

$= (a\hat{i}) + (c\hat{i} + b\hat{j}) + (-c\hat{i} + b\hat{j}) + (-a\hat{i}) + (-c\hat{i} - b\hat{j}) + (c\hat{i} - b\hat{j}) = 0$

આમ જ્યારે સદિશો બંધગાળો રચે ત્યારે તેમનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થાય.

4.9.3 બે સદિશોના સરવાળા માટેનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ (Law of parallelogram for addition of two vectors)

"આપેલ બે સદિશોને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસ પાસેની બાજુઓ તરીકે લઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરવામાં આવે, તો જે સામાન્ય બિંદુમાંથી બે સદિશ દોરેલા હોય, તેમાંથી દોરેલો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ આ બે સદિશનો સરવાળો દર્શાવતો સદિશ બને છે." તથા બીજો વિકર્ણ $\vec{A} - \vec{B}$ એટલે કે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ની બાદબાકી દર્શાવે છે. આકૃતિ 4.19 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ને પાસપાસેની બાજુઓ તરીકે લઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OQRP પૂરો કરો. અત્રે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. વિકર્ણ OR એ પરિણામી સદિશ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{OR}$ બનશે. જે નીચે પ્રમાણે જોઈ શકાય છે.



આકૃતિ 4.19

ધારો કે $\vec{A}$ X-અક્ષની દિશામાં છે.

$\vec{A} = A_x\hat{i}$ અને $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$

∴ બૈજિક રીતે

$\vec{R} = A_x\hat{i} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + B_y\hat{j} \quad (4.9.20)$$

$$\therefore \left|\vec{R}\right| = \left[(A_x + B_x)^2 + B_y^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$= [A_x^2 + 2A_xB_x + B_x^2 + B_y^2]^{\frac{1}{2}}$$

જો પરિણામી $\vec{R}$ સદિશ $\vec{A}$ સાથે α કોણ બનાવતો હોય તો $\tan\alpha = \dfrac{B_y}{A_x + B_x}$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{B_y}{A_x + B_x} \quad (4.9.21)$$

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી

$B_x = PN = B\cos\theta$ અને $B_y = NR = B\sin\theta$ (4.9.22)

પરંતુ $A_x = A$ અને $B_x^2 + B_y^2 = B^2$

$$\therefore \left|\vec{R}\right| = \left[A^2 + B^2 + 2AB_x\right]^{\frac{1}{2}}$$

હવે $B_x = B\cos\theta$ હોવાથી,

$$\therefore \left|\vec{R}\right| = \left[A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.9.23)$$

જો પરિણામી $\vec{R}$ સદિશ $\vec{A}$ સાથે એટલે કે X– અક્ષ સાથે α કોણ બનાવતો હોય, તો આકૃતિ પરથી

$$\tan\alpha = \frac{RN}{OP + PN} = \frac{B_y}{A_x + B_x}$$

$$= \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \quad (4.9.24)$$

આમ, સમીકરણ (4.9.23) અને સમીકરણ (4.9.24)થી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\vec{A} + \vec{B}$ નું અનુક્રમે મૂલ્ય અને દિશા મેળવી શકાય છે. તમારી જાતે $\vec{A} - \vec{B}$ માટે

$$|\vec{R}| = \left[A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

અને $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{B\sin\theta}{A - B\cos\theta}$ જાતે મેળવો.

અત્રે θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ છે.

4.10 બે સદિશોના ગુણાકાર (Multiplication of Two Vectors)

સદિશ રાશિઓને મૂલ્ય અને દિશા બંન્ને હોવાથી તેમના ગુણાકાર સાદા બીજગણિતના નિયમોને અનુસરતા નથી. બે સદિશ રાશિઓના વિશિષ્ટ ગુણાકાર કરીને નવી ભૌતિક રાશિઓ મેળવી શકાય છે. આ રીતે મળતી નવી રાશિ

સદિશ અથવા અદિશ હોઈ શકે છે. આ પ્રકારના ગુણાકારોને અનુક્રમે સદિશ અને અદિશ ગુણાકાર કહે છે. અહીં ગુણાકારનો વ્યાપક અર્થ એ સમજવાનો છે કે તે સદિશોનું ગુણાકાર જેવું લાગતું ચોક્કસ પ્રકારનું સંયોજન છે. અર્થાત્ સદિશોના ગુણાકાર બે રીતે કરી શકાય છે. (1) અદિશ ગુણાકાર અને (2) સદિશ ગુણાકાર.

4.10.1 બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar products of two vectors)

બે સદિશ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ના અદિશ ગુણાકારને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયીત કરવામાં આવે છે :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}| \cos\theta$$

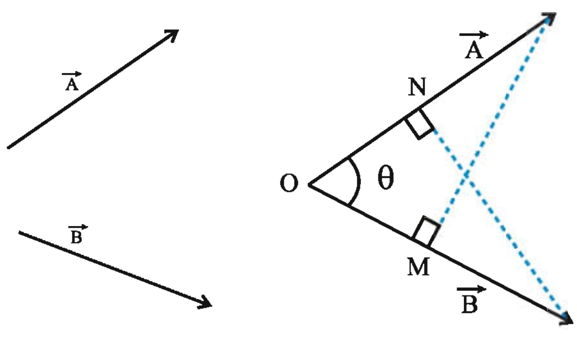
$$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \qquad (4.10.1)$$

જ્યાં θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

આવા ગુણાકારને આપેલા બે સદિશો વચ્ચે ડોટ (·)નું ચિહ્ન મૂકીને દર્શાવાતો હોઈ તેને ડોટ ગુણાકાર પણ કહે છે.

આકૃતિ 4.20.(a) માં દર્શાવેલ બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$નો સદિશ ગુણાકાર કરવા માટે કોઈ એક સામાન્ય બિંદુ O માંથી (જુઓ આકૃતિ 4.20 (b)). આ સદિશો દોરો.

હવે સદિશ $\vec{A}$ના શીર્ષ (head) પરથી $\vec{B}$ પર લંબ દોરીએ, તો OM સદિશ $\vec{A}$નો સદિશ $\vec{B}$ પરનો પ્રક્ષેપ કહેવાય. સમીકરણ (4.10.1) પરથી



આકૃતિ 4.20

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = B(A\cos\theta) \qquad (4.10.2)$$

આકૃતિ 4.20.(b) પરથી સ્પષ્ટ છે કે

$$\cos\theta = \frac{OM}{A}$$

$$\therefore\ OM = (A)(\cos\theta) \qquad (4.10.3)$$

$$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = B(OM)$$

= ($\vec{B}$નું મૂલ્ય) ($\vec{A}$ નો $\vec{B}$ પરનો પ્રક્ષેપ) (4.10.4)

અથવા આ જ રીતે,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A(B\cos\theta) = A(ON)$$

= ($\vec{A}$નું મૂલ્ય) ×

($\vec{B}$નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ) (4.10.5)

આમ, બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર એટલે બેમાંથી એક સદિશનું મૂલ્ય અને બીજા સદિશનો પહેલા સદિશ પરના પ્રક્ષેપનો ગુણાકાર.

4.10.2 અદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો (Properties of scalar product)

(1) ક્રમનો નિયમ (Commutative Law) :

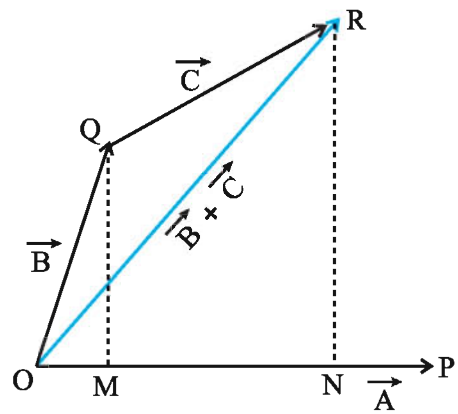
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = BA\cos\theta = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad (4.10.6)$$

આમ, બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર સમક્રમી છે.

(2) વિભાજનનો નિયમ (Distributive Law) :

આકૃતિ 4.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,

$\vec{OP} = \vec{A}$, $\vec{OQ} = \vec{B}$ અને $\vec{QR} = \vec{C}$ હવે,



આકૃતિ 4.21

$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$ = ($\vec{A}$નું મૂલ્ય) (($\vec{B}+\vec{C}$) નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ)

$$= |\vec{A}|(ON)$$

$$= |\vec{A}|(OM + MN)$$

$$= |\vec{A}|(OM) + |\vec{A}|(MN) \qquad (4.10.7)$$

$\therefore\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = |\vec{A}|$ ($\vec{B}$નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ)

$+ |\vec{A}|$ ($\vec{C}$ નો $\vec{A}$ પરનો પ્રક્ષેપ)

$$\therefore\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \qquad (4.10.8)$$

આમ, બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર સરવાળાના સંદર્ભમાં વિભાજનનો ગુણધર્મ ધરાવે છે.

(3) જો $\vec{A} \parallel \vec{B}$, હોય, તો $\theta = 0^\circ$

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\,cos\,0^\circ = AB \qquad (4.10.9)$$

વળી, $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|\ |\vec{A}| = A^2$

$$\therefore\ |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \qquad (4.10.10)$$

આમ, સદિશનું મૂલ્ય તેના પોતાની સાથેના અદિશ ગુણાકારના વર્ગમૂળના મૂલ્ય જેટલું હોય છે.

(4) જો $\vec{A} \perp \vec{B}$ હોય, તો $\theta = 90^\circ$:

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\,cos\,90^\circ = 0$$

આમ, પરસ્પર લંબ એવા બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર શૂન્ય હોય છે.

(5) કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિના એકમ સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar products of unit vectors in Cartesian co–ordinate system) :

$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ અને

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \qquad (4.10.11)$$

(6) સદિશોના કાર્તેઝીય ઘટકોના સ્વરૂપમાં અદિશ ગુણાકાર (Scalar product in terms of Cartesian Component of vectors) :

જો $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ અને

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ હોય તો,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (4.10.12)$$

(7) બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ (Angle between two vectors) $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\ cos\theta$

$$\therefore\ cos\,\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\ |\vec{B}|}$$

$$= \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \qquad (4.10.13)$$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને આપેલા બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 8 : બે સદિશો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$નો અદિશ ગુણાકાર શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_y B_y + A_z B_z$

$= 2 + 3 + 12$

$= 17$ એકમ

ઉદાહરણ 9 : સદિશો વચ્ચેનો $\vec{A} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ વચ્ચેનો કોણ શોધો.

ઉકેલ :

$$cos\,\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$= \frac{-4 + 8 + 8}{\sqrt{24}\ \sqrt{24}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 60^\circ$

ઉદાહરણ 10 : જો સદિશ $\vec{A} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + m\hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો mની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

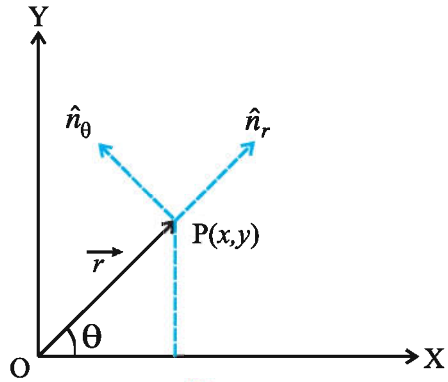
$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$

$= 24 - 48 + 2m = 0$

$\therefore\ 2m = 24$

$\therefore\ m = 12$

ઉદાહરણ 11 : XY સમતલમાં બિંદુ Pના યામ (x, y) છે. આ બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$, X-અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવે છે, તો X Y સમતલમાં સદિશ $\vec{r}$ ની દિશામાંનો એકમસદિશ $\hat{n}_r$ તથા $\vec{r}$ ને લંબ દિશામાંનો એકમસદિશ $\hat{n}_\theta$ શોધો. (આકૃતિ 4.22).



આકૃતિ 4.22

ઉકેલ : વ્યાખ્યા અનુસાર

$$\hat{n}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{r}$$

$$\therefore \ \hat{n}_r = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j}$$

or $\hat{n}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$, (આકૃતિ 4.22 પરથી)

$\hat{n}_r$ સદિશને $\frac{\pi}{2}$ જેટલું ભ્રમણ આપતાં મળતો સદિશ $\hat{n}_r$ ને લંબ હોય છે. આ સદિશને $\hat{n}_\theta$.

$$\hat{n}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\hat{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\hat{j}$$

$$\therefore \hat{n}_\theta = -\sin\theta\ \hat{i} + \cos\theta\ \hat{j}$$

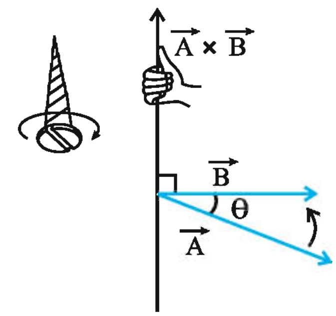
નોંધ : અત્રે આપણે θ માં વિષમઘડી (anti-clockwise) દિશામાં $\frac{\pi}{2}$ જેટલો વધારો લીધો છે.

4.10.3 બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (Vector product of two vectors)

બે સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ના સદિશ ગુણાકારને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\ \sin\theta\ \hat{n}$$

જ્યાં θ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ છે. $\hat{n}$ એ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વડે રચાતા સમતલને લંબદિશામાંનો એકમસદિશ છે, જેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ અનુસાર નક્કી કરી શકાય છે. જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ



આકૃતિ 4.23

આકૃતિ 4.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જમણા હાથના સ્ક્રૂને સદિશ $\vec{A}$ તથા $\vec{B}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ રૂપે ગોઠવી $\vec{A}$થી $\vec{B}$ તરફ ફેરવતાં જે દિશામાં સ્ક્રૂ આગળ વધે તે દિશા $\hat{n}$ની એટલે કે પરિણામી સદિશ $\vec{A} \times \vec{B}$ની દિશા છે. બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની દિશા જમણા હાથના નિયમ પરથી પણ શોધી શકાય છે. જમણા હાથના પંજાને પ્રસારો અને આંગળીઓને $\vec{A}$ થી $\vec{B}$ તરફ વાળતાં, બહારની દિશા તરફ વિસ્તરેલ અંગૂઠો, $\vec{A} \times \vec{B}$ ની દિશા દર્શાવે છે. સદિશ ગુણાકારને બે સદિશો વચ્ચે ક્રૉસ (×)નું ચિહ્ન મૂકીને દર્શાવાતો હોઈ, તેને બે સદિશોનો ક્રૉસ ગુણાકાર પણ કહે છે.

4.10.4 બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો (Properties of vector product of two vectors)

(1) $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$, બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર સમક્રમી નથી.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (4.10.14)$$

આ પરિણામ જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ વાપરીને સમજી શકાય છે.

(2) વિભાજનનો નિયમ,

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C}) \quad (4.10.15)$$

સદિશ ગુણાકારને પણ લાગુ પડે છે.

(3) જો બે સદિશો સમાંતર ($\theta = 0^\circ$) કે પ્રતિસમાંતર ($\theta = 180^\circ$) હોય, તો $\sin(0^\circ) = \sin(180^\circ) = 0$.

હોવાથી આવા સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર શૂન્ય સદિશ થશે.

(4) જો $\vec{A} \perp \vec{B}$ હોય તો, $\theta = 90^\circ$

$$\therefore \sin\theta = \sin 90^\circ = 1$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin 90^\circ = AB\,\hat{n} \qquad (4.10.16)$$

(5) કાર્તેઝીય યામપદ્ધતિમાં એકમસદિશ માટે સદિશ ગુણાકારો

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad (4.10.17)$$

અને $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i},\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \quad (4.10.18)$$

(6) કાર્તેઝીય ઘટકોના સ્વરૂપમાં સદિશ ગુણાકાર

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ અને

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ હોય તો,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \quad (4.10.19)$$

$\therefore$ હવે નિશ્ચાયક , $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$

$$(A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \quad (4.10.20)$$

સમીકરણ (4.10.19) અને (4.10.20) પરથી

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4.10.21)$$

ઉદાહરણ 12 : સદિશો $\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$નો સદિશ ગુણાકાર શોધો.

ઉકેલ : $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$= (8 + 3)\hat{i} + (-1 - 16)\hat{j} + (12 - 2)\hat{k}$$

$$= 11\hat{i} - 17\hat{j} + 10\hat{k}$$

ઉદાહરણ 13 : જો સદિશ $\vec{A} = 2\hat{i} - 10\hat{j}$ અને સદિશ $\vec{B} = 4\hat{i} - 20\hat{j}$ હોય, તો સાબિત કરો કે બંને સદિશો એકબીજાને સમાંતર છે.

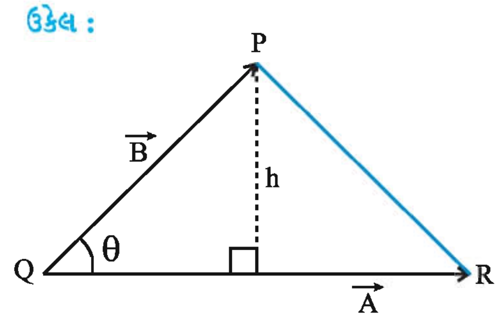
ઉકેલ : બે સદિશો એકબીજાને સમાંતર હોય, તો તેમનો ક્રૉસ (સદિશ) ગુણાકાર શૂન્ય થવો જોઈએ.

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -10 & 0 \\ 4 & -20 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{A}$ અને $\vec{B}$ એકબીજાને સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય, $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ને સંલગ્ન બાજુઓ વડે દર્શાવીને બનાવેલ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું હોય છે.

ઉકેલ :



આકૃતિ 4.24

આકૃતિ 4.24 માં ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}|\vec{A}|h$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

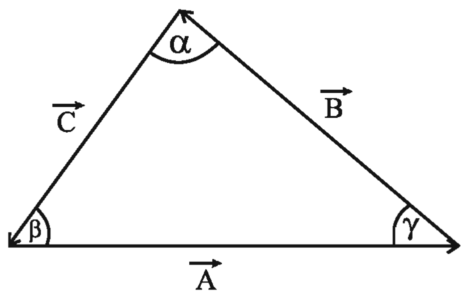
$\therefore$ 2(ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ) $= |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$

$\therefore$ $|\vec{A} \times \vec{B}| = 2$ (ΔPQRનું ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ)

ઉદાહરણ 15 : સદિશ ગુણાકારોનો ઉપયોગ કરી, સમતલીય ત્રિકોણ (plane triangle) માટે સાબિત કરો કે,

$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$$

ઉકેલ : જ્યાં α, β તથા γ ત્રિકોણના ખૂણાઓ છે અને A, B, C તે અનુક્રમે ખૂણાઓ α, β અને γ સામેની ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈઓ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય, તે બે સદિશો જેની પાસપાસેની બે બાજુઓ હોય તેવા ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું હોય છે. આ પરિણામના સંદર્ભમાં આકૃતિ 4.25 તપાસતાં.



આકૃતિ 4.25

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{B}\times\vec{C}\right| = \left|\vec{C}\times\vec{A}\right|$$

$\therefore$ AB sin $(\pi - \gamma)$ = BC sin $(\pi - \alpha)$ = CA sin $(\pi - \beta)$

$\therefore$ AB sin γ = BC sin α = CA sin β

બધાં પદોને ABC વડે ભાગતાં,

$$\therefore \frac{sin\ \gamma}{C} = \frac{sin\ \alpha}{A} = \frac{sin\ \beta}{B}$$

4.11 તત્કાલીન વેગ (Instantaneous Velocity)

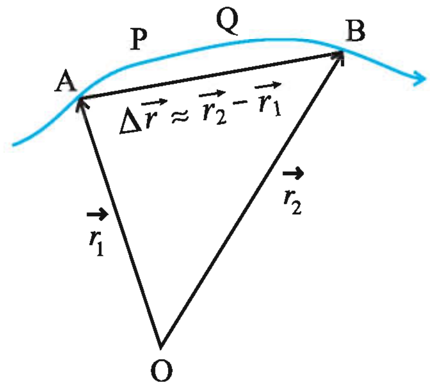
આકૃતિ 4.26(a)માં કોઈ કણનો XY સમતલમાં APQB વક્રાકાર ગતિપથ દર્શાવેલ છે. ધારો કે t સમયે કણ A બિંદુ પર અને ત્યાર બાદ $t + \Delta t$ સમયે B બિંદુ પર છે. કોઈ સંદર્ભબિંદુની સાપેક્ષે આ બે બિંદુઓના સ્થાન. સદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1 = \vec{OA}$ અને $\vec{r}_2 = \vec{OB}$ છે.

કણ A બિંદુથી B બિંદુ પર જાય તે દરમિયાન તેના સ્થાનમાં થતો ફેરફાર, સ્થાનાંતર સદિશ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ વડે દર્શાવ્યો છે. આ સ્થાનાંતર માટે લાગતો સમય Δt છે.

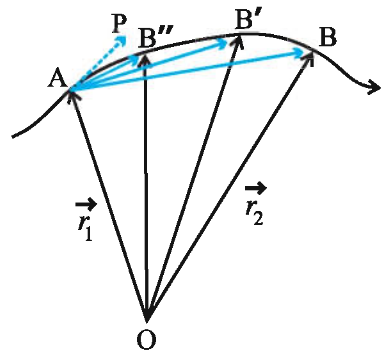
આપેલ સમયગાળા Δt દરમિયાન કણના સરેરાશ વેગની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે અપાય છે.

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર (સદિશ)}}{\text{સમય (અદિશ)}}$$

$$\therefore \langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (4.11.1)$$



(a)



(b)

આકૃતિ 4.26

સરેરાશ વેગ $\langle\vec{v}\rangle$ એ સદિશ રાશિ છે. અને તેની દિશા $\Delta\vec{r} = \vec{AB}$ની દિશામાં છે. જુદા-જુદા સમયગાળા દરમ્યાન મળતો સરેરાશ વેગ સમાન હોય, તો તે કણ અચળ-વેગી ગતિ કરે છે તેમ કહેવાય. આપેલ સમયગાળા Δt દરમિયાનનો સ્થાનાંતરસદિશ $\Delta\vec{r}$ એ કણની પ્રારંભિક સ્થિતિ અને Δt જેટલા સમય બાદની સ્થિતિને જોડતો સદિશ જ છે, તેથી તે કણે કાપેલું ખરેખર અંતર દર્શાવતો ન પણ હોય. ખરેખર તો કણ APQB માર્ગે ગતિ કરીને A થી B પર ગયું છે. વળી, Δt જેટલા સમયગાળા દરમિયાન કણના વેગમાં ફેરફારો પણ થયા હોય. **આમ, કણના સરેરાશ વેગ પરથી કણનો ખરેખરો ગતિપથ તેમજ ગતિપથના જુદા જુદા બિંદુ પાસે તેના વેગની માહિતી મળતી નથી.**

આકૃતિ 4.26(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે આપણે સમયગાળા Δtને નાનો ને નાનો કરતા જઈએ, તો તે t સમયે બિંદુ A પર રહેલ કણ Δt સમયગાળા બાદ B બિંદુના બદલે B' પર, B'ના બદલે B" પર... હશે. આ રીતે સમયગાળો સૂક્ષ્મ કરતા કણને તેનો વેગ બદલવા માટેનો સમયગાળો અતિસૂક્ષ્મ આપીએ છીએ

($\Delta t \to 0$). આમ, $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં આકૃતિ 4.26(b) પરથી જોઈ શકાય છે કે કણનો સ્થાનાંતરસદિશ કણના ગતિપથને બિંદુ A પાસે સ્પર્શક APની દિશામાં ગોઠવાશે. આમ, આવા સંજોગોમાં કણનો વેગ એક ચોક્કસ મૂલ્ય અને દિશા ધારણ કરે છે. આ વેગને t સમયે કણનો બિંદુ A પાસેનો તત્કાલીન (તાત્ક્ષણિક) વેગ ($\vec{v}$) કહે છે. તેને સંકેતમાં નીચે મુજબ દર્શાવવામાં આવે છે :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (4.11.2)$$

અહીં $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ને $\vec{r}$ નું સમય t પ્રત્યે વિકલિત (derivative) કહે છે. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ને સંકેત $\dot{\vec{r}}$ વડે દર્શાવાય છે. સામાન્ય રીતે તત્કાલીન વેગને વેગ કહે છે. વેગનો SI એકમ m s^{-1} છે.

પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિપથને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

વેગને તેના ઘટકોના સ્વરૂપ દર્શાવવા માટે આકૃતિ 4.26(a)માં દર્શાવેલાં બિંદુઓ A અને B ના યામો ધારો કે (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) છે.

$$\therefore \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} \text{ અને } \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

$$\therefore \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \qquad (4.11.3)$$

જ્યાં $\Delta x = x_2 - x_1$ અને $\Delta y = y_2 - y_1$ છે.

સમીકરણ (4.11.3) નો ઉપયોગ સમીકરણ (4.11.2)માં કરતાં,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad (4.11.4)$$

જ્યાં $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ કણના વેગ $\vec{v}$ નો X ઘટક

(4.11.5)

અને $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ કણના વેગ $\vec{v}$ નો Y ઘટક છે.

(4.11.6)

જો ગતિ કરતા કણના યામો x અને y સમયના વિધેય હોય, તો ઉપર્યુક્ત સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી કણના વેગના x અને y ઘટકો (v_x અને v_y) મેળવી શકાય છે અને તેનો ઉપયોગ કરી વેગનું મૂલ્ય $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ પરથી અને દિશા $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ પરથી મેળવી શકાય છે. અહીં θ એ વેગની દિશા અને X-અક્ષ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

ઉદાહરણ 16 : કોઈ કણનો સ્થાનસદિશ સૂત્ર $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + 3t\hat{j} + 24\hat{k}$ વડે આપી શકાય છે : તો (i) કણના વેગનું સૂત્ર અને (ii) t = 2 s માટે તેના વેગનું મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

યાદ રાખો કે, $\left[\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}\right]$

ઉકેલ :

(i) કોઈ પણ સમયે

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\hat{i} + 3t\hat{j} + 24\hat{k})$$

$$\therefore \vec{v}(t) = 2t\hat{i} + 3\hat{j}$$

(ii) t = 2 સેકન્ડે વેગ મેળવવા માટે ઉપરના સૂત્રમાં t = 2 s મૂકતાં

$$\vec{v}(2) = 2(2)\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$= 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

$\therefore\ v_x = 4\text{m s}^{-1}$ અને $v_y = 3\text{m s}^{-1}$

$\therefore$ વેગનું મૂલ્ય =

$$\left|\vec{v}(2)\right| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5\text{m s}^{-1}$$

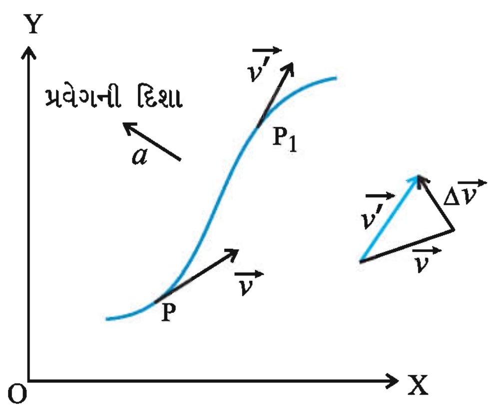
જો વેગની દિશા X-અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવતી હોય તો

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = tan^{-1} 0.75 \approx 37^\circ$$

4.12 પ્રવેગ (Acceleration)

વેગના ફેરફારના સમયદરને પ્રવેગ કહે છે.

ધારો કે આકૃતિ 4.27 દર્શાવ્યા પ્રમાણે t સમયે કોઈ કણ X સમતલમાં તેના ગતિપથના P બિંદુ પાસે વેગ $\vec{v}$ છે. $t + \Delta t$ સમયે કણ P_1 પર પહોંચે છે અને તેનો વેગ ત્યાં $\vec{v}'$ છે. આમ, Δt સમયમાં કણના વેગમાં થતો ફેરફાર $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ છે.



આકૃતિ 4.27

$\therefore$ વ્યાખ્યા મુજબ સરેરાશ પ્રવેગ = $\dfrac{\text{વેગમાં થતો ફેરફાર}}{\text{સમય}}$

$$\therefore \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (4.12.1)$$

સરેરાશ પ્રવેગ $\langle \vec{a} \rangle$ એ સદિશ રાશિ છે જેની દિશા વેગનો ફેરફાર દર્શાવતા સદિશ $\Delta\vec{v}$ ની દિશામાં હોય છે.

સરેરાશ પ્રવેગ પરથી P અને P_1 વચ્ચેના કણના ખરેખર પથ પર ક્ષણે-ક્ષણે કણનો વેગ કઈ રીતે બદલાય છે, તેની માહિતી મળતી નથી.

સમીકરણ (4.12.1)માં $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ લેતાં t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ (Instantaneous acceleration) $\vec{a}$ મળે છે. તત્કાલીન પ્રવેગને સામાન્ય રીતે પ્રવેગ કહે છે. પ્રવેગનો SI એકમ m s^{-2} છે.

$\therefore$ t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ =

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (4.12.2)$$

હવે, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (4.12.3)$$

સમીકરણ (4.12.2) માં $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ મૂકતાં

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$\therefore \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

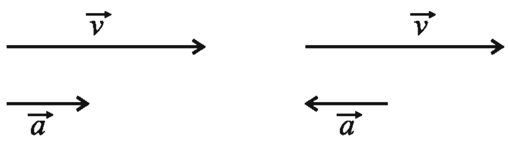
જ્યાં, $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$ = કણના પ્રવેગ $\vec{a}$ નો X-ઘટક (4.12.4)

$a_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{v}_y$ = કણના પ્રવેગ $\vec{a}$ નો Y-ઘટક (4.12.5)

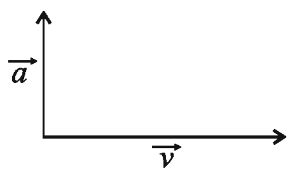
જો ગતિ કરતા કણના યામો x અને y સમયના વિધેય તરીકે હોય તો સમીકરણ (4.12.4) અને સમીકરણ (4.12.5) નો ઉપયોગ કરીને કણના વેગના X અને Y ઘટકો (v_x અને v_y) મેળવી શકાય અને તેના પરથી સમીકરણ (4.12.4) અને (4.12.5)નો ઉપયોગ કરી કણના પ્રવેગના X અને Y ઘટકો (a_x અને a_y) મેળવી શકાય.

વેગ એ સદિશ રાશિ હોઈ તેનામાં ફેરફાર ત્રણ રીતે થઈ શકે :

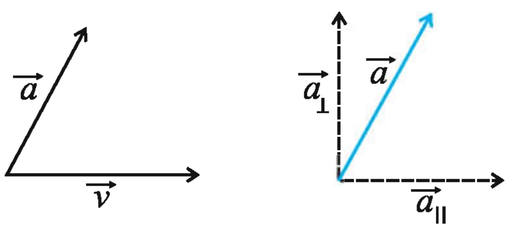
(i) માત્ર મૂલ્યમાં ફેરફાર કરીને (ii) માત્ર દિશામાં ફેરફાર કરીને અને (iii) મૂલ્ય અને દિશા બન્નેમાં ફેરફાર કરીને.



આકૃતિ 4.27 (a)



આકૃતિ 4.27 (b)



આકૃતિ 4.27 (c)

આકૃતિ 4.27(a) માં દર્શાવ્યા મુજબ જો પ્રવેગ $\vec{a}$ ની દિશા વેગ ($\vec{v}$) ની દિશામાં અથવા વેગ ($\vec{v}$)ની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય, તો વેગના માત્ર મૂલ્યમાં અનુક્રમે વધારો અથવા ઘટાડો થાય છે.

આકૃતિ 4.27(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ જો પ્રવેગ $\vec{a}$ ની દિશા વેગ ($\vec{v}$) ની દિશાને લંબ હોય, તો વેગની માત્ર દિશા જ બદલાય છે.

આકૃતિ 4.27(c) માં દર્શાવ્યા મુજબ જો પ્રવેગ ($\vec{a}$) અને વેગ ($\vec{v}$)ની દિશા વચ્ચે અમુક ખૂણો (0°, 90° અથવા 180° સિવાયનો) બનતો હોય, તો પ્રવેગ $\vec{a}$ ના વેગને સમાંતર (a_{11}) અને વેગને લંબ ($a_\perp$) એવા બે ઘટકો લેતાં જોઈ શકાય છે કે (a_{11}) ને કારણે વેગના મૂલ્યમાં ફેરફાર થાય છે, જ્યારે $a_\perp$ના કારણે વેગની દિશામાં ફેરફાર થાય છે.

ઉદાહરણ 17 : કણનો t સમયે વેગ $\vec{v}(t) = 7t\hat{i} + 16\hat{k}$ છે, તો કણનો પ્રવેગ મેળવો.

ઉકેલ : પ્રવેગ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d}{dt}(7t\hat{i} + 16\hat{k})$$

$$= 7\hat{i} \text{ m s}^{-2}$$

ઉદાહરણ 18 : ગતિ કરતાં કોઈ કણનો સ્થાનસદિશ સમયની સાપેક્ષે સૂત્ર $\vec{r} = \alpha t\hat{i} - \beta t^2\hat{j}$ અનુસાર બદલાય છે, અહીં α અને β એ ધન અચળાંક છે, તો (a) કણનો ગતિમાર્ગ નક્કી કરો, (b) વેગ અને પ્રવેગને સમયના વિધેય તરીકે મેળવો અને તેનાં મૂલ્યો પણ મેળવો.

ઉકેલ :

(a) $\vec{r} = \alpha t\hat{i} - \beta t^2\hat{j}$ આપેલ છે અને

$$\vec{r} = x\hat{i} - y\hat{j}$$

$\therefore$ $x = \alpha t$ અને $y = -\beta t^2$. આમાંથી t નો લોપ કરતાં,

$y = -\dfrac{\beta x^2}{\alpha^2}$ કે જે પરવલય (parabola) ના સમીકરણ $y = ax - bx^2$ પ્રકારનું ($a = 0$ અને $b = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$) છે.

માટે કહી શકાય કે કથિત કણનો ગતિમાર્ગ પરવલયાકાર છે.

(b) કણનો વેગ $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\therefore \vec{v} = \frac{d}{dt}(\alpha t\hat{i} - \beta t^2\hat{j}) = \alpha\hat{i} - 2\beta t\hat{j}$$

આ સમીકરણ કણના વેગને સમયના વિધેય તરીકે દર્શાવે છે.

$\therefore$ વેગનું મૂલ્ય $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{\alpha^2 + (-2\beta t)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$$

હવે કણનો પ્રવેગ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d}{dt}(\alpha\hat{i} - 2\beta t\hat{j}) = -2\beta\hat{j}$$

આ સમીકરણમાં સમય t આવતો ન હોઈને કહી શકાય કે કણનો પ્રવેગ અચળ છે અને તે ઋણ Y દિશામાં છે.

પ્રવેગનું મૂલ્ય

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-2\beta)^2}$$

$$= 2\beta$$

ઉદાહરણ 19 : કોઈ કણનો સ્થાનસદિશ સમયના વિધેય તરીકે નીચેના સૂત્ર વડે મળે છે :

$\vec{r} = \vec{b}\, t\,(1 - \alpha t)$; જ્યાં $\vec{b}$ એ અચળ સદિશ છે અને α એ કોઈ ધન સંખ્યા છે. તો (i) તે કણના વેગ અને પ્રવેગને સમયના વિધેય સ્વરૂપે મેળવો અને (ii) કોઈ એક બિંદુથી શરૂ કરીને ત્યાં જ પાછા આવવા માટે કણને લાગતો સમય શોધો.

ઉકેલ : (i) $\vec{r} = \vec{b}\, t\,(1 - \alpha t)$ (1)

$$\therefore \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{b}\, t\,(1 - \alpha t)\}$$

$$= \frac{d}{dt}\{(\vec{b}\, t - \vec{b}\,\alpha t^2)\}$$

$$\therefore \quad \vec{v}(t) = \vec{b} - 2\vec{b}\,\alpha\, t$$

$$= \vec{b}\,(1 - 2\alpha t) \qquad (2)$$

આ જ રીતે પ્રવેગ,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{b} - 2\vec{b}\,\alpha t\}$$

$$= 0 - 2\vec{b}\,\alpha$$

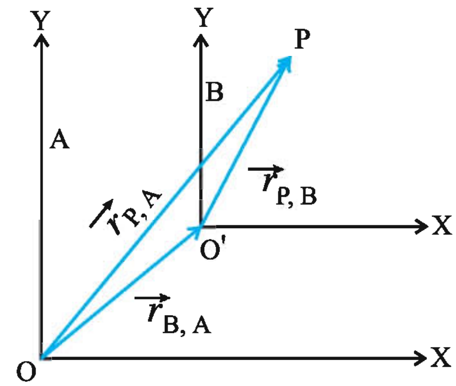
$$\therefore \quad \vec{a}(t) = -2\vec{b}\,\alpha$$

(ii) આ કણની ગતિની શરૂઆત (એટલે કે $t = 0$ સમયે) $\vec{r} = \vec{0}$ થી કરે છે. સમીકરણ (1) પરથી જોઈ શકાય છે કે $t = \frac{1}{\alpha}$ સમયે પાછું $\vec{r} = \vec{0}$ થાય છે. આમ, $\Delta t = \frac{1}{\alpha}$ જેટલા સમયગાળા દરમિયાન કણે જ્યાંથી ગતિની શરૂઆત કરી હોય ત્યાં જ પાછો ફરે છે.

4.13 સાપેક્ષ વેગ (Relative Velocity)

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે આપેલ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે કણની ગતિની ચર્ચા કરી છે તથા એ પણ નોંધ્યું કે નિર્દેશફ્રેમ આપણી મરજી પ્રમાણે લઈ શકાય તથા કોઈ પણ કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$, વેગ $\vec{v}$ અને પ્રવેગ $\vec{a}$ એ નિર્દેશફ્રેમ પર આધાર રાખે છે.

હવે જોઈશું કે બે જુદી-જુદી નિર્દેશફ્રેમમાંના આપેલ કણના, સ્થાનસદિશ, વેગ અને પ્રવેગના વચ્ચેના સંબંધો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય છે :



આકૃતિ 4.28

આકૃતિ 4.28 એકબીજાની સાપેક્ષે અચળ વેગથી ગતિ કરતી બે નિર્દેશફ્રેમો A અને B દર્શાવી છે. આવી નિર્દેશ-ફ્રેમોને જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમો કહે છે, જેના વિશે વિગતવાર ચર્ચા પરિચ્છેદ 5.11.માં કરેલ છે. ધારો કે એક અવલોકનકાર Aમાંથી અને બીજો અવલોકનકાર Bમાંથી કોઈ એક કણનો અભ્યાસ કરે છે.

ધારો કે t સમયે ગતિ કરતા કણ Pનો ફ્રેમ Aના ઊગમબિંદુ Oને સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\vec{r}_{P,A} = \vec{OP}$ અને ફ્રેમ B ના ઊગમબિંદુ O'ને સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\vec{r}_{P,B} = \vec{O'P}$ છે તથા Oની સાપેક્ષે O'નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}_{B,A} = \vec{OO'}$ છે.

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$$

$$\therefore \quad \vec{r}_{P,A} = \vec{r}_{P,B} + \vec{r}_{B,A} \qquad (4.13.1)$$

આ સમીકરણનું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{P,A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{P,B}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{B,A})$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{P,A} = \vec{v}_{P,B} + \vec{v}_{B,A} \qquad (4.13.2)$$

અહીં, $\vec{v}_{P,A}$ એ નિર્દેશફ્રેમ Aની સાપેક્ષે કણનો વેગ, $\vec{v}_{P,B}$ એ નિર્દેશફ્રેમ Bની સાપેક્ષે કણનો વેગ અને $\vec{v}_{B,A}$ એ નિર્દેશફ્રેમ Aની સાપેક્ષે નિર્દેશફ્રેમ Bનો વેગ છે.

ધારો કે કોઈ બે કણો A અને B ના કોઈ એક નિર્દેશ-ફ્રેમ (ધારો કે જમીન) ને સાપેક્ષે વેગ અનુક્રમે $\vec{v}_A$ અને $\vec{v}_B$ છે, તો Bની સાપેક્ષે Aનો વેગ $\vec{v}_{AB}$.

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad (4.13.3)$$

અને Aની સાપેક્ષે Bનો વેગ ($\vec{v}_{BA}$)

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \text{ થાય} \quad (4.13.4)$$

આમ, $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$

અને $|\vec{v}_{AB}| = |\vec{v}_{BA}|$

ઉદાહરણ તરીકે પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં આવેલા એક હાઈવે પર એક કાર 80 km/h ના વેગથી પૂર્વ તરફ, એક ટ્રક પૂર્વ તરફ 60 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે તથા એક મોટરબાઈક પશ્ચિમ તરફ 40 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે. આ બધા વેગો જમીનની સાપેક્ષે લીધેલા છે જે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$\vec{v}_{CG} = 80\hat{i}$ km/h, $\vec{v}_{TG} = 60\hat{i}$ km/h અને $\vec{v}_{BG} = -40\hat{i}$ km/h

હવે મોટરબાઈકની સાપેક્ષે કારનો વેગ

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CG} - \vec{v}_{BG}$$

$= 80\hat{i} - (-40\hat{i}) = 120\hat{i}$, ટ્રકની સાપેક્ષે કારનો વેગ $\vec{v}_{CT} = \vec{v}_{CG} - \vec{v}_{TG} = 80\hat{i} - 60\hat{i} = 20\hat{i}$

તથા ટ્રકની સાપેક્ષે મોટરબાઈકનો વેગ

$$\vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BG} - \vec{v}_{TG} = -40\hat{i} - 60\hat{i}$$

$= -100\hat{i}$ થાય.

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પદાર્થો P અને Q ના ત્રીજા પદાર્થ X ની સાપેક્ષમાં વેગો જાણતા હોઈએ તો,

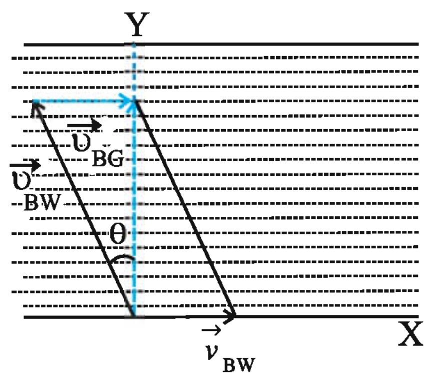
$$\vec{v}_{PQ} = \vec{v}_{PX} + \vec{v}_{XQ} = \vec{v}_{PX} - \vec{v}_{QX} \quad (4.13.5)$$

આ સૂત્ર વેગનાં મૂલ્યો પ્રમાણમાં બહુ મોટા ના હોય ત્યારે (એટલે કે પ્રકાશના વેગની નજીક ન હોય ત્યારે) તથા આમાંનો કોઈ પદાર્થ ભ્રમણ (ચાકગતિ)ના કરતો હોય ત્યારે જ સાચા છે. આ ઉપરાંત આપણે બધી નિર્દેશફ્રેમો માટે સમયના ગાળા સમાન લીધા છે.

ઉદાહરણ 20 : એક હોડી નદીના પાણીમાં 8 km/hની ઝડપથી ગતિ કરી શકે છે. આ હોડીને 4 km/h ના વેગથી વહેતી નદીના એક કાંઠેથી લંબદિશામાં આવેલા બીજા કાંઠાના સ્થાને પહોંચવું હોય તો (i) હોડીને કઈ દિશામાં હંકારવી જોઈએ ? (ii) જો નદી 600 m પહોળી હોય, તો આ નદી પાર કરતાં હોડીને કેટલો સમય લાગશે ?

નોંધ : જ્યારે આપણે એમ કહીએ કે હોડી પાણીમાં 8 km/h ના વેગથી ગતિ કરી શકે છે. ત્યારે તેનો અર્થ એ થાય કે પાણીની સાપેક્ષે હોડીનો વેગ 8 km/h છે. પ્લેનમાં જ્યારે એરહોસ્ટેસ એવું એનાઉન્સમેન્ટ કરે કે પ્લેન 700 km/hના વેગથી ઊડી રહ્યું છે ત્યારે આ પ્લેનનો વેગ વાતાવરણની સાપેક્ષે છે તેમ ગણવું.

ઉકેલ : (i) આકૃતિ 4.29માં દર્શાવ્યા અનુસાર નદી ધન X-દિશામાં વહેતી હોય, તો સામા કાંઠે (એટલે કે Y-અક્ષ પરના બિંદુ સુધી) પહોંચવા માટે હોડીને Y-અક્ષ સાથે ડાબી બાજુ θ ખૂણો બનાવતી દિશામાં હંકારવી પડશે. આ ખૂણો એવો હોવો જોઈએ કે જેથી હોડીનો સામા કાંઠાની સાપેક્ષમાં વેગ કાંઠાને લંબરૂપે મળે.



આકૃતિ 4.29

ધારો કે, $\vec{v}_{BW}$ = પાણીની સાપેક્ષે હોડીનો વેગ કે જે Y–અક્ષ સાથે θ ખૂણો બનાવતી દિશામાં 8 km/h જેટલો છે.

$\vec{v}_{WG}$ = કાંઠાની સાપેક્ષે પાણીનો વેગ કે જે ધન X દિશામાં 4 km/h જેટલો છે અને $\vec{v}_{BG}$ કાંઠાની સાપેક્ષે હોડીનો વેગ જે શોધવો પડશે.

આકૃતિ 4.29 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

(i) $\vec{v}_{BG} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WG}$ (a)

આ સમીકરણમાં x ઘટકો લેતાં

$0 = 8\ cos\ (90 + \theta) + 4\ cos\ 0 = -8\ sin\ \theta + 4$

$\therefore\ sin\ \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\ \therefore\ \theta = 30^\circ$

(ii) સમીકરણ (a) માં Y–ઘટકો લેતાં.

$v_{BG} = 8\ cos\ 30^\circ + 0 = 8 \times 0.866 = 6.928 \approx 6.93$ km/h

આમ હોડીનો કાંઠાની સાપેક્ષે વેગ $v_{BG} = 6.93$ km/h થશે અને આટલા વેગથી 600 m મીટર જેટલું અંતર કાપતાં લાગતો સમય

$= \frac{\text{Y દિશામાં થતું સ્થાનાંતર}}{\text{Y દિશામાંનો વેગ}}$

$= \frac{0.6\text{km}}{6.93\text{km/h}}$

$= 0.8658$ hr $\approx$ 5.2 મિનિટ

4.14 સમતલમાં (દ્વિ-પરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો (Equations of motion in a plane (two dimensions) with uniform acceleration

ધારો કે કોઈ કણ (પદાર્થ) X–Y સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $\vec{a}$ થી ગતિ કરે છે. $t = 0$ સમયે તેનો વેગ $\vec{v_0}$ અને $t = t$ સમયે વેગ $\vec{v}$ છે. પ્રવેગ અચળ હોઈને કોઈ પણ સમયગાળામાં તેનો સરેરાશ પ્રવેગ અને તત્કાલીન પ્રવેગ સમાન હશે.

હવે સમયગાળા $\Delta t = t - 0$ માં વેગનો ફેરફાર $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v_0}$ છે.

$\Delta t = t - 0,\ \Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v_0}$

$\therefore\ \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t - 0} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t} \quad (4.14.1)$$

$$\therefore\ \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t \quad (4.14.1a)$$

આ સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં (x અને y ઘટકો)

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (4.14.2)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \quad (4.14.3)$$

ધારો કે $t = 0$ સમયે પદાર્થનું સ્થાન $\vec{r_0}$ અને $t = t$ સમયે $\vec{r}$ સદિશો વડે દર્શાવેલ છે. આ સમયગાળા $(t - 0)$ દરમિયાન પદાર્થનો સરેરાશ વેગ

$= \frac{\vec{v_0} + \vec{v}}{2}$ થશે.

$\therefore$ t સમયમાં થતું સ્થાનાંતર = સરેરાશ વેગ $\times$ સમય.

$$\therefore\ \vec{r} - \vec{r_0} = \left(\frac{\vec{v_0} + \vec{v}}{2}\right)t \quad (4.14.4)$$

$\vec{v}$ નું મૂલ્ય સમીકરણ (4.14.1)માંથી મુકતાં

$$\vec{r} - \vec{r_0} = \left(\frac{\vec{v_0} + \vec{v_0} + \vec{a}\,t}{2}\right)t$$

$$= \vec{v_0}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$$\therefore\ \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \quad (14.14.5)$$

આ સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં (x અને y ઘટકો)

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (14.14.6)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (14.14.7)$$

સમીકરણ (4.14.6) અને (4.14.7) પરથી સ્પષ્ટ છે કે X અને Y દિશામાંની ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે વર્ણવી શકાય છે.

આમ સમતલમાં (દ્વિ-પરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિને બે પરસ્પર લંબ દિશાઓમાં એકીસાથે, જુદા જુદા અચળ પ્રવેગથી થતી એક પારિમાણિક ગતિઓના સંયોજન સ્વરૂપે ગણી શકાય છે. આ એક અગત્યનું પરિણામ છે. (આવાં જ સમીકરણો ત્રિ-પરિમાણમાં થતી ગતિ માટે પણ વાપરી શકાય છે.) બે પરસ્પર લંબદિશાઓ કઈ લેવી તે આપણા ઉપર આધારિત છે.

આમ સમતલ (દ્વિ-પરિમાણ)માં અચળ પ્રવેગ $\vec{a}$ થી થતી ગતિ માટેનાં સમીકરણો નીચે મુજબ લખી શકાય છે.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

સમીકરણ (4.14.1) અને સમીકરણ (4.14.4) નો ડોટ ગુણાકાર લેતાં,

$$(\vec{a})\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = (\vec{v} - \vec{v}_0)\cdot\left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\right)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

આના પરથી એક પરિમાણમાં અચળપ્રવેગ a થી થતી સુરેખગતિના સમીકરણો નીચે મુજબ થશે :

$v = v_0 + at$

$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ અહીં, $d = r - r_0$

$v^2 - v_0^2 = 2ad$

અહીં, d એ t સમયમાં થતું સ્થાનાંતર છે.

ઉદાહરણ 21 : એક કણ ઊગમબિંદુ પાસેથી $2\hat{i}$ m s^{-1} ના વેગથી શરૂ કરીને XY સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $\hat{i} + 3\hat{j}$ થી ગતિ કરે છે. (i) જ્યારે તેનો x યામ 30 m હોય ત્યારે તેનો Y યામ કેટલો હશે ? (ii) તે સમયની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : (i) દ્વિ-પરિમાણમાં કણના સ્થાનનું સૂત્ર

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$ છે.

અહીં, $\vec{r}_0 = 0$

$$\therefore \vec{r}(t) = \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ m s^{-1} અને $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j}$ m s^{-2}

$$\therefore \vec{r}(t) = (2\hat{i})t + \frac{1}{2}(\hat{i} + 3\hat{j})t^2$$

$$= (2t + \frac{1}{2}t^2)\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j}\,t^2$$

$\therefore x(t) = 2t + \frac{1}{2}t^2$ અને $y(t) = \frac{3}{2}t^2$

સમયની કોઈ ક્ષણ માટે $x(t) = 30$m આપેલ છે.

$$\therefore 30 = 2t + \frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore t^2 + 4t - 60 = 0$$

$$\therefore (t + 10)(t - 6) = 0$$

$\therefore t = -10$ s અથવા $t = 6$ s પરંતુ $t = -10$ s શક્ય નથી.

$$\therefore t = 6 \text{ sec.}$$

હવે $y(t) = \frac{3}{2}t^2$ માં

$t = 6$ s મૂકતાં $y(t) = \frac{3}{2}(6)^2 = 54$ m

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow y(6) = \frac{3}{2}(6)^2 = 54 \text{ m}$$

કોઈ પણ સમયે વેગ

$$\therefore \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left((2t + \frac{1}{2}t^2)\hat{i} + \frac{3}{2}t^2\hat{j}\right)$$

$$\therefore \vec{v}(t) = (2 + t)\hat{i} + 3t\,\hat{j}$$

$$\therefore \vec{v}(6) = 8\hat{i} + 18\hat{j}$$

$v_x = 8$ m s^{-1} અને $v_y = 18$ m s^{-1}

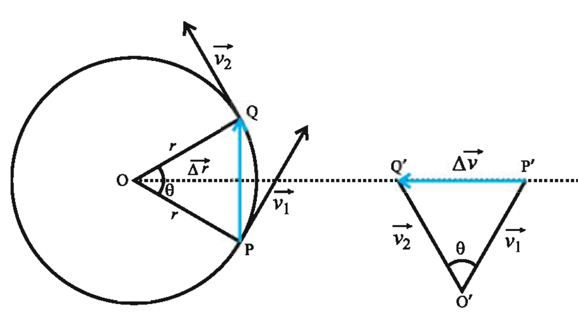
$$\therefore v = \sqrt{(8)^2 + (18)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 324}$$

$$= 19.698 \text{ m s}^{-1}$$

4.15 નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ (Uniform Circular Motion)

અચળ ઝડપથી વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતા કણની ગતિને નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ કહે છે. આકૃતિ 4.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ કણ r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપ v થી ગતિ કરે છે.



આકૃતિ 4.30 આકૃતિ 4.31

કોઈ કણ r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપ v થી ગતિ કરે છે. વક્રાકાર માર્ગે ગતિ કરતા કણનો કોઈ બિંદુ પાસે વેગ તે બિંદુ પાસે વક્રને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. માટે સ્પષ્ટ છે કે વર્તુળ પરના દરેક બિંદુ પાસે કણના વેગની દિશા સતત બદલાતી જાય છે, પરંતુ તેનું મૂલ્ય અચળ રહે છે.

વેગની દિશા બદલાતી હોવાથી કણની ગતિ તો પ્રવેગિત જ કહેવાય. આમ, નિયમિત વર્તુળગતિ કરતા કણની ગતિ પ્રવેગિત ગતિનું ઉદાહરણ છે. (અત્રે પ્રવેગ સદિશની દિશા પણ બદલાય છે, તેથી આ ઉદાહરણને અચળ મૂલ્ય ધરાવતા ચલિત પ્રવેગવાળી ગતિ પણ કહી શકાય.)

પરિચ્છેદ 4.12 માં જોયું કે જો વેગની માત્ર દિશા જ બદલાતી હોય, તો તેવા કિસ્સામાં પ્રવેગની દિશા વેગની દિશાને લંબ હોય છે. હવે વેગની દિશા સ્પર્શકની દિશા છે અને સ્પર્શકની લંબ દિશા એ ત્રિજ્યાની (કેન્દ્ર તરફની) દિશા હોઈને આવા પ્રવેગને **ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ a_r** અથવા **કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_c** કહે છે.

આપણે ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવવા માટે આકૃતિ 4.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે વર્તુળગતિ કરતા કણના તેના પથનાં બિંદુઓ P અને Q પાસે વેગ અનુક્રમે $\vec{v_1}$ અને $\vec{v_2}$ છે, તથા કણને P થી Q સુધી જતાં લાગતો સમય Δt છે. આમ, Δt જેટલા સમયગાળામાં કણના વેગમાં થતો ફેરફાર $\vec{\Delta v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ છે, જે આકૃતિ 4.31માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ΔOPQ અને ΔO'P'Q' એ સમરૂપ ત્રિકોણો છે. માટે,

$$\frac{P'Q'}{O'P'} = \frac{PQ}{OP} \quad \therefore \frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\text{પરંતુ} \left| \vec{v_1} \right| = \left| \vec{v_2} \right| = v$$

$$\therefore \Delta v = \frac{v}{r} \cdot \Delta r$$

$\therefore$ Δt સમયગાળા દરમિયાન સરેરાશ પ્રવેગનું મૂલ્ય

$$< a > = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

આ ગુણોત્તરમાં $\lim_{\Delta t \to 0}$ લેતાં t સમયે તત્કાલીન પ્રવેગ મળશે.

$$\text{પ્રવેગ } a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$= \frac{v}{r}\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{v}{r}\frac{dr}{dt}$$

પરંતુ $\frac{dr}{dt} = v = t$ સમયે તત્કાલીન ઝડપ હોઈને

$$\text{પ્રવેગ } a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (4.15.1)$$

આકૃતિ 4.31 પરથી જોઈ શકાય છે કે $\vec{\Delta v}$ ની દિશા કેન્દ્ર તરફ છે. અર્થાત્ પ્રવેગની દિશા કેન્દ્ર તરફ હોય છે. આમ, વર્તુળગતિમાં આ પ્રવેગને કેન્દ્રગામી પ્રવેગ કે ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ કહે છે. આ પ્રવેગને અનુરૂપ બળને કેન્દ્રગામી બળ કહે છે.

અહીં જોઈ શકાય છે કે જો કોઈ કણને વક્રમાર્ગે ગતિ કરાવવી હોય, તો તેના વક્રમાર્ગના કેન્દ્ર તરફ યોગ્ય એવું કેન્દ્રગામી બળ લગાડવું જોઈએ.

નિયમિત વર્તુળગતિ કરતા કણના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું મૂલ્ય અચળ હોય છે. પણ દિશા સતત બદલાતી હોઈને કેન્દ્રગામી પ્રવેગ દર્શાવતો સદિશ અચળ નથી.

ઉદાહરણ 22 : નીરવ 1 મીટર લાંબી દોરીના છેડે નાનકડો પથ્થર બાંધી હાથ વડે સમક્ષિતિજ સમતલમાં અચળ ઝડપથી ગોળ-ગોળ ફેરવે છે. (અત્રે ગુરૂત્વાકર્ષણ બળને ધ્યાનમાં ન લેતાં) જો પથ્થર 314 સેકન્ડમાં 100 પરિભ્રમણ કરતો હોય, તો (i) તેની રેખીય ઝડપ કેટલી હશે ? (ii) તેના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું મૂલ્ય શોધો. શું તેના પ્રવેગ દર્શાવતા સદિશને અચળ ગણી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં પથ્થરના વર્તુળપથની ત્રિજ્યા $r = 1$ મીટર છે.

(i) પથ્થરને 100 પરિભ્રમણ કરતાં 314 સેકન્ડ લાગે છે.

$\therefore$ એક પરિભ્રમણ કરતાં લાગતો સમય અર્થાત

$$\text{આવર્તકાળ (T)} = \frac{314}{100} = 3.14$$

પથ્થરની રેખીય ઝડપ $(v) = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}}$

$$= \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 1}{3.14} = 2 \text{ m s}^{-1}$$

$$\therefore v = 2 \text{ m s}^{-1}$$

(ii) કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું મૂલ્ય $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2)^2}{1}$

$= 4\text{m s}^{-2}$. આ પ્રવેગની દિશા સતત બદલાતી હોઈને પ્રવેગ દર્શાવતા સદિશને અચળ ગણી શકાય નહિ.

4.16 પ્રક્ષિપ્તગતિ (Projectile Motion)

જ્યારે કોઈ પદાર્થ ગુરૂત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં ફેંકવામાં આવે છે, ત્યારે તે નિયમિત સમક્ષિતિજ વેગ અને નિયમિત ઊર્ધ્વ માત્ર ગુરુત્વપ્રવેગ સાથે ગતિ કરે છે. આવી દ્વિ-પારિમાણિક ગતિને પ્રક્ષિપ્ત ગતિ અને પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહે છે. દા. ત., જો હવાના અવરોધને અવગણીએ તો કીક મારેલા ફૂટબૉલની ગતિ, ક્રિકેટરે હવામાં ફેંકેલા ક્રિકેટબૉલની ગતિ પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કહેવાય તથા ક્રિકેટબૉલ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહેવાય.

પ્રક્ષિપ્ત ગતિ એ એકીસાથે પરસ્પર લંબદિશામાં થતી બે જુદી-જુદી સ્વતંત્ર ઘટક-ગતિઓની પરિણામી ગતિ છે. એક ઘટક-ગતિ સમક્ષિતિજ દિશામાંની અચળ વેગથી થતી ગતિ છે. જ્યારે બીજી ઘટક-ગતિ શિરોલંબ (ઊર્ધ્વ દિશામાં) થતી અચળપ્રવેગી ગતિ છે. અહીં અચળ પ્રવેગ, ગુરુત્વપ્રવેગ g છે. ઈ.સ. 1632માં ગૅલિલિયોએ આ બન્ને ઘટક-ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર ગણી શકાય તેમ પ્રતિપાદિત કરેલું.

આકૃતિ 4.32 દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ પદાર્થને X–અક્ષ (સમક્ષિતિજ દિશા) સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાં $\vec{v_0}$ વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે. સરળતા ખાતર આપણે આ ચર્ચામાં હવાના અવરોધને અવગણીશું.

પ્રક્ષિપ્તિ પદાર્થ પર લાગતો પ્રવેગ એ ગુરુત્વપ્રવેગ g છે અને તે અધોદિશામાં હોવાથી

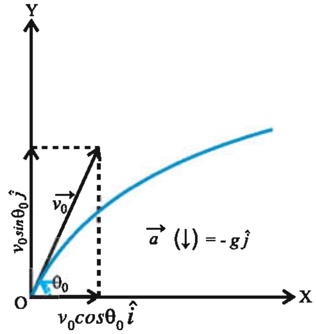
$\therefore \vec{a} = -g\hat{j}$ થશે

અથવા તો $a_x = 0,\ a_y = -g$ (4.16.1)

પ્રારંભિક વેગ $\vec{v_0}$ ના x અને y દિશામાંના એટલે કે સમક્ષિતિજ અને ઊર્ધ્વ (શિરોલિંબ) દિશામાંના ઘટકો નીચે મુજબ થશે :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad (4.16.2a)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \qquad (4.16.2b)$$



આકૃતિ 4.32

પ્રક્ષિપ્તબિંદુને (જે બિંદુએથી પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરેલો છે તે બિંદુ) યામાક્ષોના ઊગમબિંદુ તરીકે લેતાં તેના યામ (x_0, y_0) નીચે મુજબ છે :

$x_0 = 0,\ y_0 = 0$

∴ સમીકરણ (4.14.6) અને (4.14.7)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = v_{0x}t = (v_0 cos\ \theta_0)t \qquad (4.16.3)$$

અને $y = (v_0 sin\ \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$ (4.16.4)

કોઈ સમય t એ વેગના ઘટકો સમીકરણ (4.16.2) અને (4.16.3) પરથી મેળવી શકાય.

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\ \theta_0 \qquad (4.16.5)$$

અને $v_y = v_0 sin\ \theta_0 - gt$ (4.16.6)

સમીકરણો (4.16.3) અને (4.16.4) પરથી કોઈ પણ સમયે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના યામોનાં મૂલ્યો પ્રાચલો v_0 અને θ_0 ના સ્વરૂપમાં મેળવી શકાય છે.

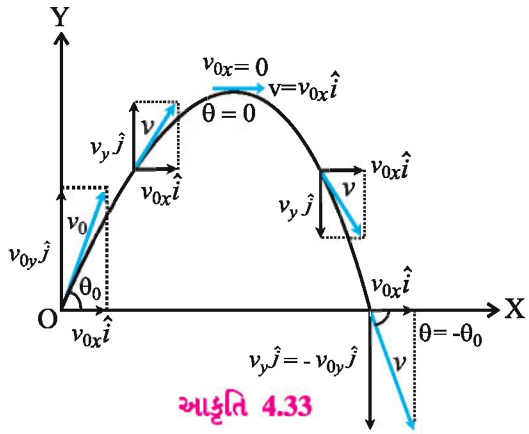
પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથનું સમીકરણ (Equation of trajectory of projectile) :

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની સમગ્ર ગતિ દરમિયાન સમક્ષિતિજ દિશામાંનો વેગનો ઘટક v_x (વેગનો x ઘટક) અચળ રહે છે. જ્યારે શિરોલંબ ઘટક v_y શિરોલંબ દિશામાં ગતિ કરતા પદાર્થના વેગની જેમ બદલાય છે. હવે, ગતિ કરતા કણના x અને y યામો વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતા સમીકરણને તે કણના ગતિપથનું સમીકરણ કહેવાય. આથી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિ પથનું સમીકરણ મેળવવા માટે સમીકરણ (4.16.3) માંથી

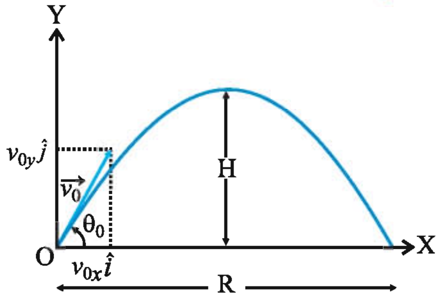
$t = \frac{x}{v_0 cos\ \theta_0}$ સમીકરણ (4.16.4) માં મૂકતાં

$$y = (v_0 \sin\ \theta_0)\left(\frac{x}{v_0 cos\ \theta_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{v_0^2\ cos^2\ \theta_0}\right)$$

$$y = (\tan\ \theta_0)\ x - \frac{g}{2(v_0 cos\ \theta_0)^2} \cdot x^2 \qquad (4.16.7)$$



આકૃતિ 4.33



આકૃતિ 4.34

આ સમીકરણમાં આપેલ પરિસ્થિતિમાં v_0, θ_0 અને g અચળ હોઈ તે $y = ax - bx^2$ સ્વરૂપનું છે. અહીં a અને b અચળો છે. આ સમીકરણ પરવલયનું હોઈ તે કહી શકાય કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકારનો હોય છે. જુઓ (આકૃતિ 4.33 અને 4.34)

મહત્તમ ઉંચાઈ પ્રાપ્ત કરવા માટે લાગતો સમય (Time taken to Achieve Maximum Height) :

ધારો કે મહત્તમ ઊંચાઈ H પ્રાપ્ત કરવા માટે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને લાગતો સમય t_m છે. (જુઓ આકૃતિ 4.34) પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરે છે, ત્યારે તેનો વેગનો ઘટક v_y તે ક્ષણે શૂન્ય હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 4.33) માટે સમીકરણ (4.16.6) પરથી

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt_m = 0$$

$$\therefore\ t_m = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \qquad (4.16.8)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ (H) (Maximum height attained by projectile) :

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ (H) (ઊર્ધ્વ દિશામાં કાપેલ મહત્તમ અંતર મેળવવા સમીકરણ (4.16.4)માં

$$t = t_m = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \text{ મૂકતાં}$$

$$y = H = (v_0 \sin\theta_0)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

$$\therefore\ H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} \qquad (4.16.9)$$

ઉડ્ડયનનો કુલ સમય (t_F) (Time of flight (t_F)) :

ઉડ્ડયનનો કુલ સમય t_F મેળવવા સમીકરણ (4.16.4) માં $y = 0$ મૂકતાં.

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t_F - \frac{1}{2}gt_F^2$$

$$t_F = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = 2t_m \qquad (4.16.10)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ (R) (Range of a projectile (R)) :

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પોતાની પ્રારંભિક સ્થિતિ ($x = y = 0$) માંથી અંતિમ સ્થિતિ ($x = R$, $y = 0$) સુધી પહોંચતા, સમક્ષિતિજ દિશામાં કાપેલા કુલ અંતરને તેની અવધિ (range) (R) કહે છે.

સરળતાથી સમજી શકાય છે કે અવધિ એટલે ઉડ્ડયનના કુલ સમય દરમિયાન કાપેલું અંતર છે. અવધિ (R) શોધવા માટે સમીકરણ (4.16.3)માં $x = R$ અને $t = t_F$ મૂકતાં

$$R = (v_0 \cos\theta_0)(t_F)$$

$$= (v_0 \cos\theta_0)\left(\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}\right)$$

$$\therefore\ R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore \text{ મહત્તમ અવધિ } R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (4.16.11)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી જોઈ શકાય છે કે આપેલા v_0 માટે R નું મૂલ્ય મહત્તમ R_{max} થવા માટે $2\theta_0 = 90^\circ$ એટલે કે $\theta_0 = 45^\circ$ થવું જોઈએ. એટલે કે આપેલ પ્રારંભિક વેગ v_0 થી પદાર્થને પ્રક્ષિપ્તકોણ 45° હોવો જોઈએ.

નોંધો કે અવધિનું મૂલ્ય પદાર્થના પ્રારંભિક વેગ અને પ્રક્ષિપ્તકોણ પર આધારિત છે. જ્યારે મહત્તમ અવધિનું મૂલ્ય માત્ર પ્રારંભિક વેગ પર આધારિત છે. શિરોલંબ દિશામાં ફેંકેલા પદાર્થ માટે ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ લઈને t_m અને t_F શોધો.

ઉદાહરણ 23 : જમીન પર રહેલા એક ફૂટબૉલને કીક મારતાં 28 m s^{-1}ના વેગથી સમક્ષિતિજ દિશા સાથે 30° નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં ગતિ કરે છે તો (i) ફૂટબૉલે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ (ii) તેને જમીન પર પાછો ફરતાં લાગતો સમય તથા (iii) તે મૂળ સ્થળેથી કેટલે દૂર જમીન પર પાછો ફરશે ? (ગુરુત્વપ્રવેગ $g = 9.8$ m s^{-2} લો.)

ઉકેલ : (i) ફૂટબૉલે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ (H)

અત્રે $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$ તથા $\theta_0 = 30^\circ$ તથા $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$

$$\therefore H = \frac{{v_0}^2 sin^2\theta_0}{2g} = \frac{(28)^2 \ (sin30)^2}{2 \times 9.8}$$

$$= \frac{(28)^2 \ (0.5)^2}{2 \times 9.8} = 10.0 \text{ m}$$

(ii) જમીન પર પાછો ફરતાં લાગતો સમય એટલે કુલ ઉડ્ડયન સમય,

$$\therefore t_F = \frac{2v_0 sin\theta_0}{2g} = \frac{2 \times 28 \times sin30}{9.8}$$

$$= \frac{28}{9.8} = 2.9 \text{ s}$$

(iii) જે સ્થળેથી કીક મારવામાં આવે ત્યાંથી જેટલે અંતરે જમીન પર પાછો ફરે તે અવધી R થાય.

$$\therefore R = \frac{v^2{}_0 sin2\theta_0}{g}$$

$$= \frac{28 \times 28 \times sin60^\circ}{g}$$

$$= 69 \text{ m}$$

ઉદાહરણ 24 : ગૅલિલિયોએ તેના પુસ્તક "Dialogues on the Two new sciences" માં એવું વિધાન કર્યું છે કે "45° ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત ધરાવતા બે જુદા-જુદા કોણે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે, તો તેમની અવધિ સમાન હોય છે." આ વિધાન સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે પદાર્થને 45° સાથે θ જેટલો તફાવત ધરાવતા એટલે $45^\circ - \theta$ અને $45^\circ + \theta$ ના બે જુદા-જુદા કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરતાં મળતી અવધિ R_1 અને R_2 છે.

સૂત્ર : $R = \dfrac{v^2{}_0 \, sin \, 2\theta^\circ}{g}$ પરથી

$$R_1 = \frac{v_0^2 \ sin \, 2(45 - \theta^\circ)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \ sin \, (90 - 2\theta^\circ)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \ cos \, 2\theta^\circ}{g}$$ અને

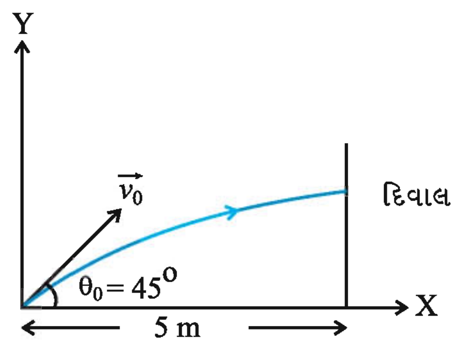
$$R_2 = \frac{v_0^2 \ sin \, 2(45 + \theta^\circ)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \ sin \, (90 + 2\theta^\circ)}{g}$$

$$= \frac{v^2{}_0 \cos 2\theta^\circ}{g}$$

આમ, જોઈ શકાય છે કે $R_1 = R_2$

ઉદાહરણ 25 : જમીન પર રહેલી એક પાણીની પાઈપમાં છિદ્ર પડતાં તેમાંથી નીકળતી પાણીની ધાર સમક્ષિતિજ દિશા સાથે 45° નો કોણ બનાવતી દિશામાં 10 m s^{-1} ના વેગથી જાય છે. આ છિદ્રથી 5 m મીટર દૂર આવેલ દીવાલ પર કેટલી ઊંચાઈએ આ ધાર પહોંચશે ?



આકૃતિ 4.35

ઉકેલ : $\theta_0 = 45^\circ$, $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$, $x = 5$ m

સૂત્ર : $y = x(tan \ \theta_0) - \dfrac{g}{2(\ v_0 \ cos \ \theta_0 \ )^2} \cdot x^2$

પરથી

$$y = 5(tan \ 45^\circ) - \frac{9.8 \times 25}{2 \times (10 \times cos \ 45^\circ)^2}$$

$$= 5 - \frac{9.8 \times 25}{2 \times 100 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 5 - \frac{9.8}{4} = 5 - 2.45$$

$$= 2.55 \text{ m}$$

આમ, દીવાલ પર પાણીની ધાર 2.55 mની ઊંચાઈ સુધી પહોંચશે.

સારાંશ

1. આ પ્રકરણમાં આપણે સદિશ અને અદિશ રાશિઓ વિષેની વિગતવાર માહિતી મેળવી. સદિશ રાશિઓને આકૃતિ સ્વરૂપે (ભૌમિતિક રીતે) કેવી રીતે રજૂ કરી શકાય, તે જોયું. ત્યાર બાદ કોઈ બિંદુ (કણ કે પદાર્થ)નું સ્થાન દર્શાવતા સદિશ સમજ્યા. સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતર સદિશ વચ્ચેનો ભેદ સ્પષ્ટ કર્યો અને સ્થાનસદિશનો ઉપયોગ કરી સ્થાનાંતર સદિશ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોયું.
2. સદિશ સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરતા નથી. માટે સદિશોના બીજગણિતની માહિતી મેળવી. શૂન્યસદિશ, એકમસદિશને વ્યાખ્યાયિત કર્યા. એકમસદિશનો ઉપયોગ કરી સદિશની રજૂઆત કેવી રીતે થઈ શકે છે તે જોયું. આપેલા સદિશનું સમતલમાં વિભાજન કઈ રીતે થઈ શકે છે તે જોયું. બે સદિશોના ગુણાકારમાં તેમના સદિશ અને અદિશ ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કર્યા.
3. તત્કાલીન વેગ શું છે તે સમજ્યા અને તેના પરથી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવ્યું. સાપેક્ષગતિ દરમિયાન સાપેક્ષવેગની સમજૂતી મેળવી, સાપેક્ષવેગ મેળવવાનું સૂત્ર મેળવ્યું. સમતલમાં (દ્વિ-પરિમાણમાં) થતી અચળ ગતિનાં સમીકરણો મેળવ્યાં.
4. નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિની વિગતે ચર્ચા કરી કેન્દ્રવર્તી પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવ્યું. ત્યાં તેની દિશા કેન્દ્ર તરફ ત્રિજ્યા પર હોય છે તેમ દર્શાવ્યું.
5. પ્રક્ષિપ્ત ગતિ એટલે શું ? તે સમજીને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ માટેના ગતિપથનું સમીકરણ મેળવ્યું. મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરવા માટે લાગતા સમયનું સૂત્ર મેળવ્યું. ત્યાં મહત્તમ ઊંચાઈ અને અવધિ માટેનાં સૂત્રો મેળવ્યા અને દર્શાવ્યું કે આપેલા વેગ માટે મહત્તમ અવધિ મેળવવા પદાર્થને 45^o ખૂણે પ્રક્ષિપ્ત કરવો જોઈએ.

સદિશના ગુણાકાર

↓

અદિશ સાથે ↓

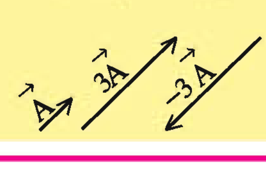
સંખ્યા સાથે
(સાદો ગુણાકાર)

સદિશ $\vec{A}$ ને કોઈ સંખ્યા m વડે ગુણતાં નવો સદિશ $m\vec{A}$ મળે છે.

- જો m ધન હોય, તો નવો સદિશ $\vec{A}$ ની દિશામાં.
- જો m ઋણ હોય, તો નવો સદિશ $\vec{A}$ ની વિરુદ્ધ દિશામાં.

દા.ત. : $3 \times \vec{A} = 3\vec{A}$

$-3 \times \vec{A} = -3\vec{A}$



ભૌતિક રાશિ સાથે
(સાદો ગુણાકાર)

(1) દળ × વેગ = વેગમાન
(અદિશ) × (સદિશ) = (સદિશ)

(2) દળ × પ્રવેગ = બળ

આમ, સદિશ ભૌતિક રાશિને અદિશ ભૌતિક રાશિ વડે ગુણતાં નવી સદિશ ભૌતિક રાશિ મળે છે જેની દિશા મૂળ સદિશ રાશિની દિશામાં હોય છે.

સદિશ સાથે ↓

પરિણામ અદિશ
(સદિશ)·(સદિશ) = (અદિશ)
અદિશ ગુણાકાર
અથવા
(ડૉટ પ્રોડક્ટ)

પરિણામ સદિશ
(સદિશ) × (સદિશ) = (સદિશ)
સદિશ ગુણાકાર
અથવા
(ક્રૉસ પ્રોડક્ટ)

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. નીચેની ભૌતિક રાશિઓમાંથી કઈ રાશિ અદિશ છે ?

(A) પ્રવેગ (B) વેગ

(C) રેખીય વેગમાન (D) તાપમાન

2. જો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$, હોય તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો

(A) π (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0^o

3. એક પદાર્થ વર્તુળાકાર પથ પર આપેલી ક્ષણે $\vec{v}$ વેગથી ગતિ કરે છે. તે જ્યારે અર્ધું પરિભ્રમણ પૂરું કરશે ત્યારે તેના વેગમાં .... જેટલો ફેરફાર થયો હશે.

(A) $\vec{v}$ (B) $-2\vec{v}$ (C) શૂન્ય (D) $\sqrt{2}\,\vec{v}$

4. એક ભૌતિક રાશિને રજૂ કરતો સદિશ $\vec{C} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ છે, તો X-અક્ષ અને આ સદિશ વચ્ચેનો કોણ

(A) $cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}}$ (B) $cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{29}}$

(C) $cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{29}}$ (D) $cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{29}}$

5. સમતલમાં ગતિ કરતાં એક કણના યામો કોઈ પણ સમય t એ $x = \alpha t^2$ અને $y = \beta t^2$ વડે આપી શકાય છે, તો આ કણના વેગનો માનાંક .... થાય.

(A) $2t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ (B) $2t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

(C) $2t(\alpha + \beta)$ (D) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

6. પ્રક્ષિપ્ત ગતિમાં પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ તેની અવધિ કરતાં અડધી હોય, ($H = \frac{1}{2}R$)નો સમક્ષિતિજ સાથેનો પ્રક્ષિપ્તકોણ ....

(A) $tan^{-1}(1)$ (B) $tan^{-1}(2)$ (C) $tan^{-1}(3)$ (D) $tan^{-1}(4)$

7. એક પદાર્થને $\vec{v}$ જેટલા વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે. જો તેની અવધિ મહત્તમ ઊંચાઈ કરતાં બમણી હોય, તો અવધિનું મૂલ્ય (**સૂચન :** ઉપરના પ્રશ્ન 6ના પરિણામનો ઉપયોગ કરો.)

(A) $\frac{v^2}{g}$ (B) $\frac{3}{5}\frac{v^2}{g}$ (C) $\frac{4}{5}\frac{v^2}{g}$ (D) $\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

8. $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 =$ .... છે.

(A) AB (B) A^2B^2 (C) $\sqrt{AB}$ (C) શૂન્ય

9. વરસાદ અધોદિશામાં 4 km/hના વેગથી પડે છે. એક માણસ સુરેખ રસ્તા પર 3 km/hના વેગથી ચાલે છે, તો આ માણસની સાપેક્ષે વરસાદનો દેખીતો વેગ (માણસ વડે અનુભવાતો વેગ)

(A) $3\ km\ h^{-1}$ (B) $4\ km\ h^{-1}$ (C) $5\ km\ h^{-1}$ (D) $7\ km\ h^{-1}$

10. કયા પ્રક્ષિપ્તકોણે અવધિ અને મહત્તમ ઊંચાઈ સમાન બનશે ?

(A) $\theta_0 = 45^\circ$ (B) $\theta_0 = tan^{-1}(4)$

(C) $\theta_0 = tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ (D) $\theta_0 = 30^\circ$

11. એક મોટરકાર ઉત્તર તરફ 30m s^{-1} ના વેગથી ગતિ કરે છે. જો તે વળીને પશ્ચિમ તરફ તેટલી જ ઝડપથી ગતિ કરે, તો તેના વેગમાં થતો ફેરફાર ....

(A) 60m s^{-1} ઉત્તર-પશ્ચિમ (B) $30\sqrt{2}\text{ m s}^{-1}$ ઉત્તર-પશ્ચિમ

(C) $30\sqrt{2}\text{ m s}^{-1}$ દક્ષિણ-પશ્ચિમ (D) 60m s^{-1} દક્ષિણ-પશ્ચિમ

12. $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ સદિશોનો પરિણામી સદિશ $\vec{A}$ સાથેનો α-કોણ અને સદિશ $\vec{B}$ સાથે β-કોણ બનાવતો હોય, તો

(A) હંમેશાં $\alpha < \beta$ (B) જો $A < B$ હોય, તો $\alpha < \beta$

(C) જો $A > B$ હોય, તો $\alpha < \beta$ (D) જો $A = B$ હોય, તો $\alpha < \beta$

13. ઘડિયાળના સેકન્ડ-કાંટાના છેડાની રેખીય ઝડપ v છે, તો 15 સેકન્ડમાં તેના રેખીય વેગના ફેરફારનું મૂલ્ય .... છે.

(A) શૂન્ય (B) $\frac{v}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}\,v$ (D) $2v$

14. એક બોટનો જમીનની સાપેક્ષે વેગ $3\hat{i} + 4\hat{j}$ છે અને પાણીનો જમીનની સાપેક્ષે વેગ $-3\hat{i} - 4\hat{j}$ છે, તો બોટનો પાણીની સાપેક્ષે વેગ .... છે. રાશિઓ SI માં છે.

(A) $8\hat{i}$ (B) $-6\hat{i} - 8\hat{j}$ (C) $6\hat{i} + 8\hat{j}$ (D) $6\hat{i}$

15. જ્યારે પ્રતિક્ષિપ્તકોણ 25° હોય ત્યારે એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ R છે. જો પ્રતિક્ષિપ્તકોણ .... હોય, તો તેની અવધિ R જ રહેશે.

(A) 40° (B) 45° (C) 65° (D) 60°

16. જો બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારનું માનાંક $|\vec{A} \times \vec{B}|$ તેમના અદિશ ગુણાકાર $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ કરતાં $\sqrt{3}$ ગણું હોય, તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો ....

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

17. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની મહત્તમ ઊંચાઈએ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો પ્રવેગ

(A) શૂન્ય (B) g (C) મહત્તમ (D) લઘુત્તમ

18. એક પદાર્થને સમક્ષિતિજ સાથે 45° ના કોણે K જેટલી ગતિ-ઊર્જાથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે, તો મહત્તમ ઊંચાઈએ તેની ગતિ-ઊર્જા .... હશે. [$K = \frac{1}{2}mv^2$]

(A) 0 (B) $\frac{K}{2}$ (C) $\frac{K}{\sqrt{2}}$ (D) K

19. નદીના પાણીમાં એક બોટની ઝડપ 5 km h^{-1} છે. તે 1.0 km પહોળાઈવાળી નદીને સૌથી ટૂંકા માર્ગ પર 15 મિનિટમાં ઓળંગે છે, તો નદીના વહેણની ઝડપ .... km h^{-1} છે.

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

20. સમાન પ્રારંભિક વેગ v ધરાવતી અનેક ગોળીઓ સમતલ સપાટી પરથી જુદી-જુદી દિશાઓમાં ફાયર કરવામાં આવે છે. આ ગોળીઓ આ સપાટી પર .... જેટલા મહત્તમ ક્ષેત્રફળ પર પડી હશે.

(A) $\frac{\pi v^2}{g}$ (B) $\frac{\pi v^2}{g^2}$ (C) $\frac{\pi^2 v^2}{g^2}$ (D) $\frac{\pi v^4}{g^2}$

21. એક પ્રક્ષિપ્ત ગતિ માટે $y(t) = 8t - 5t^2$ અને $x(t) = 6t$ છે, જ્યાં x અને y મીટરમાં તથા t સેકન્ડમાં છે, તો પ્રારંભિક વેગ .... છે.

(A) 6 m/s (B) 8 m/s (C) 10 m/s (D) 14 m/s

22. જો $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A}| = |\vec{B}|$ હોય, તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ ....

(A) 90° (B) 120° (C) 0° (D) 60°

23. જો $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ અને $A = \sqrt{3}$, $B = \sqrt{3}$ અને $C = 3$ હોય, તો સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ ....

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

24. સદિશો $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ને લંબ એવો એકમ સદિશ .... થશે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

(C) $(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ (D) $\sqrt{3}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$

25. સદિશ $\vec{P} = a\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ અને સદિશ $\vec{Q} = a\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય તો 'a' નું ધનમૂલ્ય કેટલું હશે ?

(A) 3 (B) 4 (C) 9 (D) 13

જવાબો

1. (D) **2.** (D) **3.** (B) **4.** (D) **5.** (B) **6.** (B)
7. (C) **8.** (B) **9.** (C) **10.** (B) **11.** (C) **12.** (C)
13. (C) **14.** (C) **15.** (C) **16.** (C) **17.** (B) **18.** (B)
19. (B) **20.** (D) **21.** (C) **22.** (B) **23.** (C) **24.** (A) **25.** (A)

નીચેના પ્રશ્નોના અતિ ટૂંકમાં જવાબ આપો :

1. સદિશ અને અદિશ રાશિઓ વચ્ચેનો મૂળભૂત ફરક શું છે ?
2. કોઈ પણ બે અદિશ રાશિઓ અને બે સદિશ રાશિઓ જણાવો.
3. પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે શાનો ઉલ્લેખ જરૂરી છે ?
4. સમાન સદિશો કોને કહેવાય ?
5. સમાંતર સદિશોની વ્યાખ્યા આપો.
6. પ્રતિસમાંતર સદિશોની વ્યાખ્યા આપો.
7. અસમાંતર સદિશો કોને કહેવાય ?
8. કોઈ પણ સદિશને કઈ બે રીતે વર્ણવી શકાય ?
9. બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર કઈ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે ?
10. બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર કઈ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે ?
11. બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ શૂન્ય હોય, તો બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય .... થાય.
12. બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ 90° હોય, બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય .... થાય.

13. બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ શૂન્ય હોય, તો તેમના સદિશ ગુણાકારનું મૂલ્ય .... થાય.
14. પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ .... ની દિશામાં હોય છે.
15. વેગ સદિશરાશિ છે. તેનામાં ફેરફાર કઈ-કઈ રીતે થઈ શકે ?
16. પ્રવેગના વેગને સમાંતર (a_{11}) ઘટકને લીધે વેગના .... માં ફેરફાર અને લંબ ($a_{\perp}$) ઘટકને લીધે .... માં ફેરફાર થાય છે.
17. નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિમાં વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં પ્રવેગ .... હોય છે.
18. પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કોને કહેવાય ?
19. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની ટોચે (મહત્તમ ઊંચાઈએ) તેનો વેગ .... હોય છે.
20. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ગતિપથની ટોચે (મહત્તમ ઊંચાઈએ) તેનો પ્રવેગ .... હોય છે.
21. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ મહત્તમ મેળવવા માટે તેને આપેલા વેગ માટે સમક્ષિતિજ દિશા સાથે .... કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરવો જોઈએ.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સદિશ રાશિઓને આકૃતિ સ્વરૂપે (ભૌમિતિક સ્વરૂપે) કેવી રીતે દર્શાવવામાં આવે છે ?
2. સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતરસદિશ વચ્ચેનો ભેદ સમજાવો.
3. વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોના ગુણાકારની સમજૂતી આપો.
4. બે સદિશોની બાદબાકી કેવી રીતે થાય તે સમજાવો.
5. સદિશોના સરવાળાના ગુણધર્મો જણાવો.
6. એકમસદિશની વ્યાખ્યા આપી વિગતે સમજાવો.
7. સદિશના લંબઘટકો કેવી રીતે મેળવી શકાય ?
8. સદિશોના અદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો જણાવો.
9. બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારમાં પરિણામી સદિશની દિશા માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ સમજાવો.
10. સદિશોના સદિશ ગુણાકારના ગુણધર્મો લખો.
11. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને મહત્તમ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરવા લાગતા સમય t_m નું સૂત્ર મેળવો.
12. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલ મહત્તમ ઊંચાઈ H નું સૂત્ર મેળવો.
13. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધી R માટેનું સૂત્ર મેળવો તથા તેના પરથી મહત્તમ અવધિનું સૂત્ર મેળવો.
14. પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના કુલ ઉડ્ડયનસમય t_F નું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના પ્રશ્નોના સવિસ્તારથી ઉત્તર આપો :

1. સદિશોના સરવાળા માટેની ત્રિકોણની રીતનું વર્ણન કરો. (જરૂરી આકૃતિ દોરો)
2. સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતનું યોગ્ય આકૃતિ દોરી વર્ણન કરો. તેના પરિણામીના માનાંક અને દિશાનાં સૂત્રો ઘટકોનો ઉપયોગ કરી મેળવો.
3. સમતલમાં સદિશોનું વિભાજન સમજાવો.
4. સદિશોના સરવાળા અને બાદબાકીની બૈજિક રીતનું વર્ણન કરો.
5. યોગ્ય આકૃતિ દોરી તત્કાલીન વેગ સમજાવો અને સૂત્ર $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ મેળવો.
6. યોગ્ય આકૃતિનો ઉપયોગ કરી પ્રવેગની સમજૂતિ આપો તથા સૂત્ર

   $\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ મેળવો.
7. યોગ્ય આકૃતિ દોરી સાપેક્ષવેગની સમજૂતી આપો.
8. સમતલમાં થતી અચળપ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો.

   $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$

   $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$ મેળવો.

9. યોગ્ય આકૃતિનો ઉપયોગ કરી નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિમાં પ્રવેગ $a_c = \frac{v^2}{r}$ સૂત્ર મેળવો અને દર્શાવો કે તેની દિશા ત્રિજ્યા પર કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

10. પ્રક્ષિપ્ત ગતિની વ્યાખ્યા આપી ગતિપથનું સમીકરણ $y = (tan\theta_0)\, x - \frac{g}{(2cos\theta_0)} x^2$ મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. બે સમાન માનાંક F ધરાવતાં બળો એક કણ ઉપર લાગે છે. જો આ બે બળો વચ્ચેનો કોણ θ હોય, તો પરિણામી બળનો માનાંક શોધો.

[જવાબ : $2F\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$]

2. જો સદિશો $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ એકમ અને $\vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ એકમ હોય, તો સદિશ $\vec{A} - \vec{B}$ નો એકમસદિશ શોધો. [જવાબ : $\frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}}$ એકમ]

3. જો સદિશો $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો દર્શાવો કે બંને સદિશો સમાંતર સદિશો છે.

4. એક મુસાફર એક નવા શહેરમાં સ્ટેશન પર ઊતરીને ટૅક્ષી કરે છે. સ્ટેશનથી સુરેખ રોડ ઉપર તેની હોટેલ 10 km દૂર છે. ડાઈવર્ઝનના કારણે ટૅક્ષીડ્રાઈવર મુસાફરને 23 km લંબાઈના વાંકા-ચૂંકા માર્ગે 28 મિનિટમાં હોટેલ ઉપર પહોંચાડે છે, તો

(a) ટૅક્ષીની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?

(b) સરેરાશ વેગનું માનાંક કેટલું હશે ? શું આ બંને સમાન હશે ?

[જવાબ : (a) 49.3 km h^{-1} (b) 21.26 km h^{-1} આ બંને સમાન નથી.]

5. એક કણ ઊગમબિંદુએથી $t = 0$ સમયે $10\hat{j}$ m s^{-1} ના વેગથી ગતિ શરૂ કરી X–Y સમતલમાં $8\hat{i} + 2\hat{j}$ m s^{-2} જેટલા અચળ પ્રવેગથી આગળ વધે છે, તો

(a) કયા સમયે તેનો x-યામ 16m થશે. ત્યાં આ સમયે તેનો y-યામ કેટલો હશે ?

(b) આ સમયે કણની ઝડપ કેટલી હશે ?

[જવાબ : (a) સમય 2 s, y યામ 24 m (b) ઝડપ 21.26 m s^{-1}]

6. એક વિમાન જમીનથી 3600 m ની ઊંચાઈએ ઊડે છે. જમીન પરના અવલોકનબિંદુ પાસે વિમાન 10 સેકન્ડમાં 30°નો ખૂણો રચતું હોય તો આ વિમાનની ઝડપ કેટલી હશે ?

[જવાબ : 60π m s^{-1}]

7. બંદૂકમાંથી સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના કોણે છોડેલી ગોળી જમીનને 3 km દૂર અથડાય છે. પ્રક્ષિપ્ત-કોણનું મૂલ્ય ગોઠવીને 5 km દૂર આવેલા લક્ષ્ય પર ગોળી મારવાનું શક્ય છે કે નહિ તે ગણતરી કરીને જણાવો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

8. ઊગમબિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થનો પ્રક્ષિપ્ત કોણ $\theta_0 = tan^{-1}\left(\frac{4H}{R}\right)$ વડે અપાય છે, તેમ દર્શાવો. H = મહત્તમ ઉંચાઈ અને R = અવધિ.

9. ત્રણ અશૂન્ય સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ સમીકરણ $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ને અને તેમનાં મૂલ્યો સમીકરણ A + B = C ને સંતોષે છે, તો $\vec{A}$ એ $\vec{B}$ ની સાપેક્ષે કઈ રીતે ગોઠવાયેલો હશે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો.

10. સદિશ $\vec{A}$ ની દિશા ઊલટાવવામાં આવે, તો $\Delta\vec{A}$, $|\Delta\vec{A}|$ અને $\Delta|\vec{A}|$ શોધો.

11. કોઈ સદિશની દિશા તે જ રાખીને તેનું મૂલ્ય બમણું કરવામાં આવે, તો શું તેના દરેક ઘટકનું મૂલ્ય પણ બમણું થાય ?

12. કોઈ એક સદિશની પુચ્છ X અને Y અક્ષોનાં ઊગમબિંદુ પર છે અને આ સદિશ + X દિશામાં છે. હવે આ સદિશ વિષમઘડી દિશામાં ભ્રમણ કરે છે, તો (i) 90°, (ii) 180°, (iii) 270° અને (iv) 360° ના ભ્રમણ વખતે આ સદિશના X અને Y ઘટકો કયા હશે તે જણાવો.

13. બે પદાર્થો વચ્ચેના સાપેક્ષ વેગનું મૂલ્ય શું તે પદાર્થોના વેગના મૂલ્ય કરતાં વધુ હોઈ શકે ? એક ઉદાહરણ આપો..

14. $\hat{i} + \hat{j}$ અને $\hat{i} - \hat{j}$ નાં મૂલ્ય અને દિશા નક્કી કરો.

[**જવાબ :** બંનેનું મૂલ્ય = $\sqrt{2}$; X–અક્ષ સાથે 45° અને 315°]

15. $\vec{A}$ ધન Y દિશામાં છે અને તેનું મૂલ્ય 100 એકમ છે. $\vec{B}$ ધન X દિશા સાથે (ઉપર તરફ) 60° નો ખૂણો બનાવે છે અને તેનું મૂલ્ય 200 એકમ છે. $\vec{C}$ ધન X દિશામાં છે અને તેનું મૂલ્ય 150 એકમ છે, તો આમાંથી કયા સદિશના (i) x ઘટક (ii) y ઘટકનું મૂલ્ય મહત્તમ હશે ?

[**જવાબ :** (i) $\vec{C}$ નો x ઘટક (ii) $\vec{B}$ નો y ઘટક]

16. કોઈ કણના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ ના x ઘટકનું મૂલ્ય 3 m છે અને તે ઋણ X-અક્ષની દિશામાં છે. આ જ સદિશના y ઘટકનું મૂલ્ય 4 m છે અને તે ઋણ Y દિશામાં છે, તો આ સ્થાનસદિશનું મૂલ્ય અને ઋણ X-અક્ષની સાપેક્ષે દિશા મેળવો.. [**જવાબ :** 5 m, $tan^{-1}\frac{4}{3}$]

17. નીચેનામાંથી કઈ રાશિ(ઓ) અક્ષોની પસંદગીથી સ્વતંત્ર છે ?

(A) $\vec{A} + \vec{B}$ (B) $\vec{A} - \vec{B}$ (C) $A_x + B_y$

[**જવાબ :** (A) અને (B)]

18. જો $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ હોય, તો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો કેટલો હશે ?

[**જવાબ :** 90°]

19. જે કણનો સ્થાનસદિશ $\vec{r} = 3t^2\hat{i} + 4t^2\hat{j} + 7\hat{k}$ હોય, તેણે 10s માં કરેલ સ્થાનાંતર કેટલું હશે ? $\vec{r}$ મીટરમાં છે. [**જવાબ :** $300\hat{i} + 400\hat{j}$ (m)]

20. સદિશ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ નો સદિશ $\hat{i} + \hat{j}$ ની દિશામાંનો ઘટક કેટલો હશે ?

[**જવાબ :** $\frac{5}{\sqrt{2}}$]

21. જો કોઈ સદિશનું મૂલ્ય અશૂન્ય હોય, તો તેના કોઈ એક ઘટકનું મૂલ્ય શૂન્ય હોઈ શકે ખરું ? કોઈ એક સદિશનો એક ઘટક અશૂન્ય હોય, તો શું સદિશનું મૂલ્ય શૂન્ય હોઈ શકે ?

22. ત્રણ અશૂન્ય સદિશો $\vec{A}$, $\vec{B}$ અને $\vec{C}$ સમીકરણ $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ને અને તેમનાં મૂલ્યો સમીકરણ $A^2 + B^2 = C^2$ સંતોષે છે, તો $\vec{A}$ એ $\vec{B}$ સાપેક્ષે કઈ રીતે ગોઠવાયેલો હશે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો.

23. બે પદાર્થોને સમાન વેગથી સમક્ષિતિજ સાથે બે જુદા-જુદા કોણે પ્રક્ષિપ્ત કરતાં બંનેની રેન્જ સમાન મળે છે. જો આ પદાર્થોના ઉડ્ડયન-સમયો t_1 અને t_2 હોય, તો સાબિત કરો કે $t_1t_2 = \frac{2R}{g}$.

•

પ્રકરણ 5

ગતિના નિયમો

5.1 પ્રસ્તાવના
5.2 બળ અને જડત્વ
5.3 ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ
5.4 વેગમાન
5.5 ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ
5.6 બળનો આઘાત
5.7 ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ
5.8 વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ
5.9 એકબિંદુગામી બળોનું સંતુલન
5.10 ઘર્ષણ
5.11 નિયમિત વર્તુળગતિનું ગતિશાસ્ત્ર
5.12 જડત્વીય અને અજડત્વીય નિર્દેશ-ફ્રેમ
5.13 ગતિશાસ્ત્રમાં કોયડાઓ ઉકેલવા અંગે માર્ગદર્શન
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

5.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

ગયા પ્રકરણમાં આપણે પદાર્થની ગતિમાં તેનાં સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ અંગે ચર્ચા કરી. પરંતુ ગતિ શાથી ઉદ્‌ભવે છે અને તેમાં ફેરફાર શાને કારણે થાય છે તેનો વિચાર કર્યો નથી. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આ બાબતો વિષે વિચારીશું. આ રીતે ગતિનાં કારણો અને ગતિ કરતી વસ્તુના ગુણધર્મો સહિત ગતિની ચર્ચા કરવામાં આવે તે વિષયાંગને ગતિશાસ્ત્ર (Dynamics) કહે છે, તે તમે જાણો છો.

5.2 બળ અને જડત્વ (Force and Inertia)

રોજિંદા જીવનમાં જોવા મળતી જુદા-જુદા પદાર્થોની ગતિ અંગેનાં આપણાં થોડાં અવલોકનોનો વિચાર કરીએ : (1) ટેબલ પર પડેલ પુસ્તક પર બહારથી આપણે કંઈ બળ ન લગાડીએ, તો તેમનું તેમ સ્થિર જ રહે છે. (2) દડાને ઊંચે ફેંકવા માટે આપણે તેને ઉપર તરફ ધકેલવો પડે છે. (3) સ્થિર ઊભેલી લારીને ગતિ કરાવવા કોઈ વ્યક્તિ તેને ધકેલે છે. (4) ઢાળ પરથી ગબડતા દડાને અટકાવવા માટે આપણે ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં હાથ વડે બાહ્ય બળ લગાડીએ છીએ. આ અવલોકનો અંગે વિચારતાં એમ લાગે છે કે પદાર્થને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ કરાવવા માટે તેમજ તેની ગતિને ધીમી પાડવા અને અટકાવવા માટે પણ બળ પૂરું પાડતું કોઈ બાહ્ય પરિબળ (External agency) જરૂરી છે. આ બધા કિસ્સાઓમાં બાહ્ય પરિબળ પદાર્થ સાથે સંપર્કમાં છે. આ રીતે સંપર્કમાં રહીને લાગતા (કે લગાડેલા) બળને **સંપર્કબળ (Contact force)** કહે છે. જોકે ગતિનાં એવાં ઉદાહરણો પણ જોવા મળે છે કે જેમાં બાહ્ય પરિબળ (agency) પદાર્થ સાથે સંપર્કમાં ન હોય, તેમ છતાં પદાર્થ પર બળ લગાડતું હોય. દા.ત., મકાનની ટોચ પરથી મુક્ત કરેલો પદાર્થ પૃથ્વી તરફ પ્રવેગિત ગતિ કરે છે. પૃથ્વી તે પદાર્થના સંપર્કમાં નથી પણ પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રને લીધે પદાર્થ પર લાગતું બળ તેની પ્રવેગિત ગતિ માટે જવાબદાર છે. એક ચુંબકથી થોડે દૂર લોખંડની ખીલીને મૂકતાં તે આકર્ષણ પામી ચુંબક તરફ ગતિ કરે છે. આમાં ચુંબકના ચુંબકીય ક્ષેત્રને લીધે ખીલી પર લાગતું બળ તેની ગતિ માટે જવાબદાર છે. આવાં બળોને (ગુરુત્વક્ષેત્ર, વિદ્યુતક્ષેત્ર, ચુંબકીય ક્ષેત્ર જેવાં ક્ષેત્રોને લીધે લાગતાં બળોને) **ક્ષેત્રબળો (Field forces)** કહે છે. આમ, બાહ્ય પરિબળો (agencies) પદાર્થ પર સંપર્કમાં આવ્યા સિવાય દૂરથી પણ બળ લગાડી શકે છે.

આ પરથી સમજી શકાય તેમ છે કે પદાર્થની ગતિને અસર કરતું બળ

જેના દ્વારા મળે છે તે બાહ્ય પરિબળ પદાર્થના સંપર્કમાં હોય પણ ખરું અને ન પણ હોય. ઉપર વિચારેલા કિસ્સાઓમાં પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિમાં આવે છે અથવા ગતિ દરમિયાન વેગમાં ફેરફાર થાય છે. પરંતુ ''નિયમિત ગતિ (એટલે કે એક જ સુરેખામાં અચળ ઝડપવાળી ગતિ) કરતા પદાર્થને તેની નિયમિત ગતિ ચાલુ રાખવા માટે શું બાહ્ય બળની જરૂર પડે છે ?'' એવો પ્રશ્ન થાય.

ગ્રીક તત્વચિંતક ઍરિસ્ટોટલ (ઈ. સ. પૂ. 384થી 322)નો ખ્યાલ એવો હતો કે જો પદાર્થ ગતિમાં હોય - નિયમિત કે અનિયમિત - તો તેને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બહારથી 'કંઈક' - એટલે કે બાહ્ય બળની જરૂર પડે છે. આની સત્યતા વિશે જાણીએ તે પહેલાં એક ઉદાહરણ વિચારીએ: લીસી લાગતી સમક્ષિતિજ સડક પર એક જ સુરેખામાં નિયમિત ગતિ (અચળ ઝડપ) કરતી સાઇકલને પેડલ મારવાનું બંધ કરીએ, તો પછી સાઇકલ થોડી વારમાં અટકી પડે છે. સાઇકલને સતત નિયમિત ગતિમાં રાખવા માટે તેને પેડલ મારીને બાહ્ય બળ લગાડતાં રહેવું પડે છે. આ અવલોકન ઍરિસ્ટોટલના ખ્યાલને પુષ્ટિ આપતું હોય એવું પણ કદાચ લાગે. પણ ખરેખર એવું નથી.

હકીકતમાં આપણે સૌ જાણીએ છીએ કે સડક વડે લાગતું બાહ્ય ઘર્ષણબળ સાઇકલની ગતિને અવરોધે છે તેથી તે અટકી પડે છે અને ગતિ ચાલુ રાખવા પેડલ મારવાની જરૂર પડે છે તો પછી ઍરિસ્ટોટલની ભૂલ કઈ હતી ? તેણે અનુભવેલા કોઈક વ્યવહારુ અનુભવને કુદરતનો મૂળભૂત નિયમ ગણી લીધો - તે ભૂલ હતી. બળો અને ગતિ માટેનો કુદરતનો નિયમ શું છે તે જાણવા માટે ગતિને અવરોધતા ઘર્ષણબળો હોય જ નહિ તેવી સ્થિતિની કલ્પના કરવી પડે. ગેલિલિયોએ આમ જ કર્યું હતું અને ગતિ અંગે ઊંડી સમજ મેળવી હતી. ગતિ અંગેના ઍરિસ્ટોટલના મોટા ભાગના ખ્યાલો આજે તો ખોટા જણાયા છે.

તમે ગેલિલિયોના પ્રયોગો અંગે ધોરણ-9માં ભણી ગયા છો. ગેલિલિયોએ એવું અવલોકન કર્યું કે,

(i) ઢાળ પર નીચે તરફ ગતિ કરતા પદાર્થો પ્રવેગિત થાય છે - એટલે કે તેમનો વેગ વધે છે.

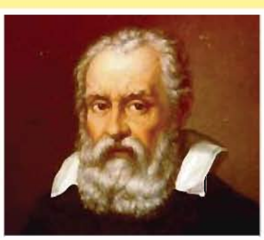
(ii) ઢાળ પર ઉપર તરફ ગતિ કરતાં પદાર્થો પ્રતિ-પ્રવેગિત થાય છે. - એટલે કે તેમનો વેગ ઘટે છે.

પરંતુ સમક્ષિતિજ સમતલ પરની ગતિ એ તો ઉપરના બન્ને કિસ્સાઓની વચગાળાની સ્થિતિ છે. તેથી ગેલિલિયોએ એવો તર્ક રજૂ કર્યો કે ઘર્ષણ રહિત સમક્ષિતિજ સમતલ પર સુરેખામાં ગતિ કરતા પદાર્થને પ્રવેગ કે પ્રતિપ્રવેગ હોવો ન જોઈએ. એટલે કે તે અચળ વેગથી ગતિ કરતો હોવો જોઈએ અને આ માટે તેને કોઈ બાહ્ય બળની જરૂર પડતી નથી.

ઘર્ષણ એ પદાર્થ પર લાગતું એક બાહ્ય બળ છે, જે તેની ગતિનો વિરોધ કરે છે. આ ઘર્ષણનો વિરોધ કરતું એક બીજું પૂરતું બાહ્ય બળ લગાડીએ, તો પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ શૂન્ય બને અને તેથી તે પદાર્થનો અચળ વેગ જળવાઈ રહેશે. વળી, પદાર્થ તેની સ્થિર અવસ્થામાં જેમનો તેમ રહેતો હતો ત્યારે પણ તેના પર કોઈ ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ લાગતું ન હતું. આમ, પદાર્થની સ્થિર અવસ્થા (state) અને નિયમિત ગતિ (અચળ વેગવાળી ગતિ)ની અવસ્થા એ બંને અવસ્થાઓ બળને લાગેવળગે છે, ત્યાં સુધી સમતુલ્ય છે. કારણ કે એ બંને અવસ્થાઓમાં પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ શૂન્ય છે.

ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગે તો જ પદાર્થની અવસ્થા બદલાય છે. પદાર્થ પોતાની સ્થિર અથવા નિયમિત ગતિની અવસ્થામાં આપમેળે ફેરફાર કરતો (અને કરી શકતો) નથી. પોતાની અવસ્થા જાતે ન બદલવાના પદાર્થના આ ગુણધર્મને પદાર્થનું 'જડત્વ' (inertia) કહે છે. જડત્વ એટલે ફેરફારનો વિરોધ. પદાર્થનું દળ તેના જડત્વનું માપ છે. આપેલા બે પદાર્થોમાંથી જેનું દળ વધુ હોય તેનું જડત્વ પણ વધુ હોય છે તેમ કહેવાય.

ગૅલિલિયો ગૅલિલી (1564-1642)



ઇટલીના પીસા શહેરમાં ઈ. સ. 1564માં જન્મેલ ગેલિલિયો ગેલિલી યુરોપમાં થયેલ વૈજ્ઞાનિક ક્રાંતિનો પ્રણેતા હતો. તેણે પ્રવેગનો ખ્યાલ રજૂ કર્યો. ઢાળ પર ગતિ કરતા પદાર્થો અને મુક્ત પતન પામતા પદાર્થોના અભ્યાસ પરથી તેણે તે સમયે પ્રવર્તતા ઍરિસ્ટોટલના એવા મતનું ખંડન કર્યું કે, ગતિ ચાલુ રાખવા માટે બળની જરૂર છે અને ગુરુત્વાકર્ષણની અસર હેઠળ ભારે પદાર્થો હલકા પદાર્થો કરતાં વધુ ઝડપથી પડે છે. તેણે રજૂ કરેલો જડત્વનો ખ્યાલ ન્યૂટનના કાર્યનું આરંભબિંદુ હતો.

તેણે બનાવેલા ટેલિસ્કોપની મદદથી સૂર્ય પરનાં કાળાં ધાબાં, ચંદ્રની સપાટી પરના પર્વતો-ખીણો, ગુરુના ચંદ્રો, શુક્રની કલાઓ જેવાં ખગોળીય અવલોકનો કર્યાં. તેણે એમ પણ પ્રતિપાદિત કર્યું કે આકાશગંગાની પ્રકાશિતતા, નરી આંખે ન જોઈ શકાતા અસંખ્ય તારાઓમાંથી આવતા પ્રકાશને આભારી છે.

તેની ઉત્તમ રચના, 'Dialogue on the Two Chief World Systems'માં તેણે કૉપરનિકસે સૂર્યમંડળ માટે રજૂ કરેલ 'સૂર્ય કેન્દ્રીવાદ'નું સમર્થન કર્યું. જે આજે પણ સાર્વત્રિક સ્વીકૃતિ પામેલ છે.

તેની મહાન શોધોને લીધે આજે પણ તે વિજ્ઞાનની દુનિયામાં સન્માન અને આદર પામેલ છે.

આઈઝેક ન્યૂટન

ન્યૂટનનો જન્મ 1642માં ઇંગ્લૅન્ડના વુલ્સથોર્પમાં થયો હતો. ગેલિલિયોનું અવસાન થયું તે જ વર્ષે ન્યૂટનનો જન્મ થયો. કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીમાંના અભ્યાસ દરમિયાન ત્યાં પ્લેગ ફાટી નીકળતાં તેની માતાના ફાર્મ પર પાછો ગયો. અહીં તેને ઊંડાં ચિંતન-મનન કરવાની પુષ્કળ અનુકૂળતા થઈ અને ગણિત અને ભૌતિક વિજ્ઞાનની ઘણી શોધો કરી. વિકલ ગણિત, ઋણાત્મક અને અપૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે દ્વિપદી પ્રમેય, ગુરુત્વાકર્ષણનો વ્યસ્ત વર્ગનો નિયમ, શ્વેત પ્રકાશનો વર્ણપટ જેવી શોધો ન્યૂટનને આભારી છે. ફરી કેમ્બ્રિજ પાછા ફર્યા પછી પરાવર્તક ટેલિસ્કોપની રચના કરી.

તેણે પોતે રચેલ ગ્રંથ 'The Principia Mathematica'ને વિજ્ઞાનના સર્વકાલીન મહાન ગ્રંથોમાંનો એક ગણવામાં આવે છે. તેમાં તેણે ગતિના ત્રણ નિયમો, ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ, તરલનું યંત્રશાસ્ત્ર, તરંગગતિનું ગણિત, પૃથ્વીના તેમજ સૂર્યના દળ અને અન્ય ગ્રહોનાં દળોની ગણતરી, ભરતી-ઓટની સમજ જેવા અત્યંત મહત્ત્વના મુદ્દાઓનો સમાવેશ કર્યો.

પ્રકાશ અને રંગો અંગેનાં તેનાં સંશોધનો તેનાં બીજા ગ્રંથ (Opticks)માં જોવા મળે છે. કૉપરનિક્સ, કૅપ્લર અને ગેલિલિયોની વૈજ્ઞાનિક ક્રાંતિને તેણે આગળ ધપાવી અને પૂર્ણ કરી. પૃથ્વી પરની અને આકાશી ઘટનાઓમાં સમાન નિયમો હોવાનું જણાવ્યું. દા.ત., પૃથ્વી પર સફરજન પડવામાં અને પૃથ્વીની આસપાસ ચંદ્રના ભ્રમણમાં સમાન પ્રકારના ગાણિતીય સમીકરણ જણાય છે તેમ પ્રતિપાદિત કર્યું. ઈ. સ. 1727માં ન્યૂટનનું અવસાન થયું.

5.3 ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ (Newton's First Law of Motion)

ગેલિલિયોના તર્કબદ્ધ વિચારોથી શરૂ કરીને યંત્રશાસ્ત્રનો વિકાસ કરવાનું ભગીરથ કાર્ય, સર્વકાલીન મહાન વૈજ્ઞાનિકોમાંના એક એવા આઇઝેક ન્યૂટને લગભગ એકલે હાથે પાર પાડ્યું. ન્યૂટને આપેલા ગતિ અંગેના ત્રણ નિયમો આ યંત્રશાસ્ત્રના પાયા છે.

ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ નીચે મુજબ લખાય છે :

"પદાર્થ પર કોઈ ચોખ્ખું (net) બાહ્ય બળ લાગુ ન પડે ત્યાં સુધી, સ્થિર પદાર્થ સ્થિર જ રહે છે અને ગતિમાન પદાર્થ પોતાનો વેગ અચળ જાળવી રાખે છે."

વસ્તુતઃ આ ગેલિલિયોનો જડત્વનો નિયમ જ છે. કેટલાક કિસ્સાઓમાં પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું (પરિણામી) બાહ્ય બળ શૂન્ય છે તેમ આપણે જાણીએ છીએ અને તે પરથી પદાર્થનો પ્રવેગ શૂન્ય અને વેગ અચળ છે, તેવો નિર્ણય કરીએ છીએ. આથી ઊલટું કેટલીક વાર પદાર્થની સ્થિતિ પ્રવેગ-રહિત (સ્થિર સ્થિતિ અથવા અચળ વેગવાળી ગતિ) હોવાનું દેખાય છે અને તે પરથી પદાર્થ પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું જ જોઈએ, તેવો નિષ્કર્ષ તારવીએ છીએ.

પદાર્થ પર ચોખ્ખું બળ લગાડતાં તે સ્થિર હોય, તો ગતિમાં આવે છે અને ગતિમાં હોય, તો તેનો વેગ બદલાય છે. આમ, બન્ને કિસ્સાઓમાં તેનામાં પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે. આથી, બળ એ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરનાર કારણ તરીકે ઊપસી આવે છે.

ન્યૂટનના પહેલા નિયમ પરથી કહી શકાય કે બળ એક એવી ભૌતિક રાશિ છે કે જેના કારણે સ્થિર પદાર્થ ગતિમાં આવે છે અને ગતિમાન પદાર્થના વેગમાં ફેરફાર થાય છે. આમ, ન્યૂટનનો પહેલો નિયમ બળની વ્યાખ્યા આપે છે, પણ બળના મૂલ્ય અંગે તે માહિતી આપતો નથી.

5.4. વેગમાન (Momentum)

પદાર્થના દળ (m) અને વેગ ($\vec{v}$)ના ગુણાકારને તે પદાર્થનું વેગમાન ($\vec{p}$) કહે છે.

એટલે કે, $\vec{p} = m\,\vec{v}$ (5.4.1)

વેગમાન એ સદિશ રાશિ છે અને તેની દિશા વેગની દિશામાં જ હોય છે. વેગમાનનો SI એકમ kg m s^{-1} or N s છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $[M^1L^1T^{-1}]$ છે.

ગતિમાન પદાર્થના વેગ કરતાં તેનું વેગમાન કંઈક વધુ માહિતી આપે છે. આપણે ઉદાહરણથી સમજીએ : એકસમાન વેગથી આપણી તરફ આવતી એક સાઇકલ અને એક કાર એ બેમાંથી આપણને શું અથડાય, તો વધુ નુકસાન થશે ? સ્પષ્ટ જ છે કે કાર.

આમ, વેગમાન એક અગત્યની ભૌતિક રાશિ છે.

5.5 ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ (Newton's Second Law of Motion)

ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ પદાર્થ પર લાગતા બાહ્ય બળનું માન (મૂલ્ય) આપે છે.

પદાર્થ પર બળ લગાડતાં તેના વેગમાં ફેરફાર થાય છે, તેથી તેના વેગમાનમાં પણ ફેરફાર થાય છે. સ્થિર એવા એક હલકા અને બીજા ભારે બે પદાર્થો પર એક સરખું બળ $\vec{F}$ સમાન સમયગાળા (Δt) માટે લગાડતાં જણાય છે કે હલકો પદાર્થ વધુ વેગ પ્રાપ્ત કરે છે, પરંતુ બંને પદાર્થો એકસરખું વેગમાન પ્રાપ્ત કરે છે.

ધારો કે તમે સાઇકલ પર નિયમિત (અચળ) વેગ $\vec{v}$ થી ગતિ કરી રહ્યા છો. હવે, અટકવા માટે બહુ ઉતાવળ ન હોય, તો જરા ધીમેથી બ્રેક લગાડશો (આ રીતે નાનું બળ લાગે છે.) આથી સાઇકલનો વેગ ધીમે ધીમે ઓછો થઈને પછી અમુક સમયે સાઇકલ અટકી જશે. પણ જો તમારે સાઇકલને તાત્કાલિક અટકાવવાની જરૂર પડે, તો તમે બહુ જોરથી બ્રેક લગાડશો (આ રીતે મોટું બળ લાગે છે.) અને તો જ સાઇકલ જલદી અટકી શકશે. આ બંને કિસ્સાઓમાં વેગમાનનો ફેરફાર તો સમાન છે. ($m\vec{v}$ માંથી શૂન્ય બને છે, જ્યાં m = તમારું + સાઇકલનું દળ). પરંતુ બીજા કિસ્સામાં તે ફેરફાર ઝડપથી કરવાનો હોવાથી મોટું બળ લગાડવું પડ્યું. (યાદ રાખો કે બ્રેક લગાડીએ ત્યારે પેડલ મારવાનું બંધ છે !)

આમ, બળને વેગમાનના ફેરફાર અને તે માટે લાગેલા સમય સાથે સંબંધ છે, અને તે સંબંધ નીચે જણાવેલા ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ પરથી મળે છે.

'પદાર્થના વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર તેના પર લાગતા પરિણામી બાહ્ય બળ જેટલો હોય છે અને તે ફેરફાર પરિણામી બળની દિશામાં હોય છે.'

આથી જો બળ $\vec{F}$, m દળના, $\vec{v}$ વેગ ધરાવતા અને $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ વેગમાન ધરાવતા પદાર્થ પર લગાડવામાં આવે તો,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (5.5.1)$$

$$= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (5.5.2)$$

જો દળ m અચળ રહેતું હોય તો,

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (5.5.3)$$

$$\therefore \vec{F} = m\vec{a} \qquad \left(\because \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}\right)$$

આમ,

$$\text{બળ } \vec{F} = \text{દળ } m \times \text{પ્રવેગ } \vec{a} \qquad (5.5.4)$$

બળનો SI એકમ newton (= N) છે.

1 kg દળના પદાર્થમાં 1 m s^{-2}નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરતા બળને 1 N બળ કહે છે.

[1 N = 1 kg m s^{-2}]

(CGS પદ્ધતિમાં બળનો એકમ dyne છે અને 1 N = 10^5 dyne).

બળનું પારિમાણિક સૂત્ર [$M^1L^1T^{-2}$] છે.

સમીકરણ 5.5.4 પરથી પદાર્થ પર લાગતાં પરિણામી બળનું મૂલ્ય મળે છે. m દળના અને $\vec{v_1}$ વેગ ધરાવતા પદાર્થ પર $\vec{F}$ બળ Δt સમયગાળા માટે લગાડતાં તેનો વેગ $\vec{v_2}$ થાય તો $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ અને Δtનાં માપેલાં મૂલ્યો પરથી $\vec{a} = \dfrac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{\Delta t}$ શોધીને m અને $\vec{a}$ પરથી સમીકરણ (5.5.4) ની મદદથી $\vec{F}$નું મૂલ્ય ગણી શકાય છે.

આ નિયમ અંગે કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓ નોંધી લઈએ :

(1) જો $\vec{F} = 0$ હોય (એટલે કે પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય), તો $\vec{a} = 0$, $\therefore \vec{v}$ = અચળ આ હકીકત ન્યૂટનના પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત છે.

(2) આ નિયમ સદિશ નિયમ છે, તેથી બળના ત્રણ ઘટકો F_x, F_y, અને F_z માટે ત્રણ સમીકરણો નીચે મુજબ મળે છે :

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{d\ p_x}{dt} = m\ a_x \\ F_y &= \frac{d\ p_y}{dt} = m\ a_y \\ F_z &= \frac{d\ p_z}{dt} = m\ a_z \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.5)$$

(3) આપેલા બિંદુએ આપેલી ક્ષણે પદાર્થનો પ્રવેગ $\vec{a}$ તે બિંદુએ તે ક્ષણે તેના પર લાગતાં બાહ્ય બળ $\vec{F}$ વડે નક્કી થાય છે અને પદાર્થ તે અગાઉની ક્ષણો આગળના પ્રવેગની સ્મૃતિ ધરાવતો નથી. પ્રવેગિત ટ્રેનમાંથી બહાર પડવા દીધેલા પથ્થરને તે પછીની ક્ષણે સમક્ષિતિજ દિશામાં કોઈ પ્રવેગ હોતો નથી (હવાનો અવરોધ અવગણતાં).

(4) સમીકરણ (5.5.1) માં $\vec{p}$ ના મૂલ્યનું નહિ પરંતુ $\vec{p}$ ના ફેરફારનું મહત્ત્વ છે. પ્રારંભમાં કણ સ્થિર હોય તો પ્રારંભમાં $\vec{v} = 0$ અને $\vec{p} = 0$ હોય પણ જો બળ $\vec{F}$ તેના પર લાગે તો $\vec{v}$ માં અને તેથી $\vec{p}$ માં ફેરફાર થાય છે અને એ ફેરફારનું આ સમીકરણમાં મહત્ત્વ છે.

ઉદાહરણ 1 : 40 kg દળનો એક પદાર્થ લીસી સમક્ષિતિજ સપાટી પર સુરેખપથ પર અચળ બળની અસર હેઠળ ગતિ કરે છે. 6 સેકન્ડમાં તેનો વેગ $5.0\ m\ s^{-1}$ માંથી ઘટીને $2.0\ m\ s^{-1}$ થાય છે, તો આ પદાર્થ પર લાગતું બળ શોધો. આ સમયમાં પદાર્થે કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?

ઉકેલ : પદાર્થની ગતિની દિશાને X-અક્ષ તરીકે લેતાં બળના મૂલ્ય માટે $F_x = m\,a_x$ લખી શકાય,

અને $v_x = v_{0x} + a_x t$ પરથી

$2 = 5 + a_x(6)$

$\therefore a_x = -\,0.5\ m\ s^{-2}$

$\therefore F_x = m\,a_x = (40)\,(-\,0.5) = -20\ N$

આમ, આટલું બળ ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં (એટલે ઋણ X-દિશામાં) લાગે છે.

$v_x^{\,2} - v_{0x}^{\,2} = 2a_x x$ પરથી,

$4 - 25 = 2(-0.5)x$

$\therefore x = 21\ m$

ઉદાહરણ 2 : m દળના પદાર્થ પર 45 N જેટલું બળ લગાડતાં તેમાં $4.5\ m\ s^{-2}$નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે અને આટલું જ બળ m' દળના પદાર્થ પર લગાડતાં તેમાં $9.0\ m\ s^{-2}$નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે. તો આ બે પદાર્થોને ભેગા બાંધીને આટલું જ બળ લગાડીએ, તો તેમાં ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ શોધો.

ઉકેલ :

$F = ma \quad \therefore 45 = m\,(4.5) \therefore m = 10\ kg$

$F = m'a' \ \therefore 45 = m'\,(9.0) \therefore m' = 5\ kg$

ભેગા બાંધ્યા પછી આ બળ વડે મળતો પ્રવેગ a'' હોય તો,

$F = (m + m')\,a''$

$45 = (10 + 5)\,a'' \ \therefore a'' = 3\ m\ s^{-2}$

ઉદાહરણ 3 : એક 'સમક્ષિતિજ' સુરેખ રસ્તા પર 1000 kg દળની એક કાર $30\ m\ s^{-1}$ના વેગથી ગતિ કરે છે. દૂરથી traffic signalની red light જોઈને ડ્રાઈવરે બ્રેક મારતાં 4 kN નું અચળ Breaking Force લાગે છે. તો (i) કારનો પ્રતિ-પ્રવેગ (Deceleration or retardation) શોધો. (ii) કાર કેટલા સમયમાં થોભશે ? (iii) આ ગતિ દરમિયાન તે કેટલું અંતર કાપશે ?

ઉકેલ : (i) કારની ગતિની દિશામાં X-અક્ષ લેતાં, તેના પર લગાડેલું બળ ઋણ X-અક્ષ દિશામાં હશે.
$4kN = 4 \times 10^3\ N$

$F_x = m\,a_x$ પરથી, $-4 \times 10^3 = (1000)a_x$

$\therefore a_x = -4\ m\ s^{-2}$

(ii) કાર થોભે ત્યારે ઝડપ શૂન્ય થાય.

$\therefore v_x = v_{0x} + a_x t$ પરથી,

$0 = 30 + (-4)t$

$\therefore t = 7.5\ s$

(iii) $v_x^{\,2} - v_{0x}^{\,2} = 2\,a_x x$ પરથી

$0 - 900 = 2\,(-4)x$

$\therefore x = 112{\cdot}5\ m$

5.6 બળનો આઘાત (Impulse of Force)

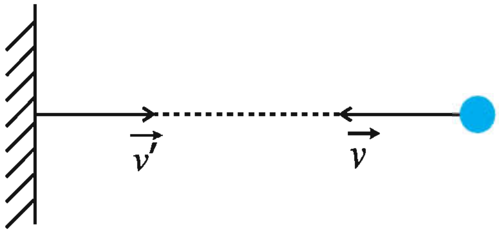
પદાર્થ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ અને તે લાગતું હોય તે દરમિયાનના સમયગાળાના ગુણાકારને બળનો આઘાત કહે છે. ન્યૂટનના બીજા નિયમને રજૂ કરતાં સમીકરણ (5.5.1) પરથી,

બળનો આઘાત $\vec{F}\,dt = d\vec{p}$ = વેગમાનનો ફેરફાર (5.6.1)

જ્યારે મોટા મૂલ્યનું બળ બહુ જ અલ્પ સમય સુધી લાગતું હોય ત્યારે બળનું અને સમયગાળાનું મૂલ્ય જુદું-જુદું મેળવવાનું મુશ્કેલ હોય છે, પરંતુ વેગમાનનો ફેરફાર માપી શકાય છે. દા.ત., m દળનો એક દડો $\vec{v}$ વેગથી ગતિ કરી દીવાલ સાથે અથડાઈ $\vec{v}'$ વેગથી પાછો ફેંકાય છે, ત્યારે દીવાલ વડે દડા પર અલ્પ સમય માટે જ બળ લાગે છે. આ દડાના વેગ $\vec{v}$ અને $\vec{v}'$ માપીને વેગમાનનો ફેરફાર જાણી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 5.1).

અથડામણ પહેલાનું વેગમાન $\vec{p} = m\vec{v}$

અથડામણ પછીનું વેગમાન $\vec{p}' = m\vec{v}'$



આકૃતિ 5.1

આવા અલ્પ સમય માટે લાગતા બળને આઘાતી બળ (Impulsive force) કહે છે.

ઉદાહરણ 4 : પોતાના તરફ 12 m s^{-1}ના વેગથી આવતા 150 g દળના બૉલને બૅટ્સમેન 480 N જેટલા બળથી એવી રીતે ફટકારે છે કે જેથી બૉલ પોતાની ગતિની મૂળ દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં 20 m s^{-1}ના વેગથી ગતિ કરે છે, તો બેટ અને બૉલનો સંપર્ક સમય શોધો.

ઉકેલ : અહીં બૉલની ગતિની મૂળ દિશાને ઋણ X-અક્ષ ગણતાં $\vec{v}_1 = -12\hat{i}$ m s^{-1}, $\vec{v}_2 = 20\hat{i}$ m s^{-1} અને $\vec{F} = 480\hat{i}$ N થશે.

બૉલના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર,

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$= (0.150)[20\hat{i} - (-12\hat{i})]$$

$$= 4.8\hat{i} \text{ kg m s}^{-1}$$

$$|\vec{F}| = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} \text{ પરથી, } 480 = \frac{4.80}{\Delta t}$$

$$\therefore \Delta t = 0.01 \text{ s}$$

5.7 ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ (Newton's Third Law of Motion)

ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ આપેલા પદાર્થ પર લાગતા પરિણામી બાહ્ય બળનો તે પદાર્થના પ્રવેગ સાથેનો સંબંધ ($\vec{F} = m\vec{a}$) દર્શાવે છે. પણ આવું બળ પદાર્થ પર શાને લીધે લાગે છે ? હકીકતમાં પદાર્થ પર લાગતું બળ બીજા પદાર્થ (કે પદાર્થો) દ્વારા લાગતું હોય છે. આથી એવો પ્રશ્ન થાય છે કે જો તે બીજો પદાર્થ આપેલ પદાર્થ પર બળ લગાડે છે, તો આપેલ પદાર્થ પેલા બીજા પદાર્થ પર બળ લગાડે છે કે નહિ ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ, જે નીચે મુજબ લખી શકાય છે, તેના પરથી મળે છે.

"દરેક ક્રિયાબળ (action)ને હંમેશાં સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનું પ્રતિક્રિયાબળ (reaction) હોય છે."

એક સ્પ્રિંગને હાથ વડે દબાવી જુઓ. તમે અનુભવશો કે સ્પ્રિંગ પણ હાથ પર વિરુદ્ધ દિશામાં બળ લગાડે છે. અહીં સ્પ્રિંગ અને હાથ એકબીજાના સંપર્કમાં હતા, તેથી સ્પ્રિંગે હાથ પર લગાડેલ બળ આપણે અનુભવી શક્યા. પણ પૃથ્વી કોઈ પથ્થરને પોતાની તરફ આકર્ષે છે અને તે પથ્થર પૃથ્વી તરફ પ્રવેગથી પડવા લાગે છે, ત્યારે પથ્થર વડે પૃથ્વી પર બળ લાગે છે ? અને શું પૃથ્વી પણ પથ્થર તરફ ઊંચે ગતિ કરે છે ? આપણા મનમાં આવા પ્રશ્નો થાય. ન્યૂટનના મત મુજબ આનો જવાબ છે - હા, પથ્થર પણ પૃથ્વી પર એટલું જ બળ વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે, જેટલું પૃથ્વીએ પથ્થર પર લગાડ્યું હોય. પણ પૃથ્વીના ખૂબ મોટા દળને લીધે આ બળની તેની ગતિ પરની અસર અત્યંત - અત્યંત ઓછી હોવાથી આપણે તે નીરખી-પારખી-અનુભવી શકતા નથી, એટલે આવી અસર અવગણ્ય છે.

આમ, ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ પરથી ફલિત થાય છે કે કુદરતમાં કોઈ બળ એકલુંઅટૂલું હોતું નથી. બળો બે પદાર્થોની એકબીજા વચ્ચેની આંતરક્રિયાથી જ ઉદ્ભવે છે. બળો હંમેશાં જોડ (pairs)માં જ ઉદ્ભવે છે અને "એક જોડમાંનાં બે બળો સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં" હોય છે. ગતિના ત્રીજા નિયમના ન્યૂટનના પોતાના શબ્દો – To every action there is always equal and opposite reaction – એવાં તો અલંકૃત અને સુંદર છે કે તે સામાન્ય વાતચીતનો ભાગ બની ગયાં છે. આ નિયમ વિશેની કેટલીક ગેરસમજ નિવારવા થોડી સ્પષ્ટતા કરીએ :

(1) બે પદાર્થો વચ્ચેની આંતરક્રિયામાં ગમે તે એક બળને 'ક્રિયાબળ' (action) અને બીજાને 'પ્રતિક્રિયા બળ' (reaction) તરીકે ગણી શકાય.

(2) પહેલું ક્રિયાબળ (action) લાગે અને પછી પરિણામ રૂપે પ્રતિક્રિયાબળ (reaction) લાગે એમ માનવું સાચું નથી. આ ત્રીજા નિયમમાં કાર્ય-કારણનો સંબંધ સમાયેલો સમજવાનો નથી.

A પર B વડે અને B પર A વડે એકસાથે જ બળ લાગે છે.

(3) ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ જુદા-જુદા પદાર્થો પર લાગે છે. A પર B વડે લાગતું બળ $\vec{F}_{AB}$ અને B પર A વડે લાગતું બળ $\vec{F}_{BA}$ તરીકે લખીએ તો, આ ત્રીજા નિયમ મુજબ,

$$\begin{bmatrix} \vec{F}_{AB} \\ \text{એટલે કે A પર} \\ \text{B વડે બળ} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{F}_{BA} \\ \text{એટલે કે B પર} \\ \text{A વડે બળ} \end{bmatrix}$$

એટલે જો એક પદાર્થની દા.ત., (A ની) ગતિ અંગે ચર્ચા કરવાની હોય, તો તે પદાર્થ પરનું બળ ($\vec{F}_{AB}$) જ લેવાનું છે - બીજું બળ $\vec{F}_{BA}$ અપ્રસ્તુત (irrelevant) છે. અને તેને ધ્યાનમાં લેવાનું નથી. જો Aની અથવા Bની એટલે કે કોઈ એક જ પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરતી વખતે આપણે એમ કહીએ કે "બંને બળોનો સરવાળો કરતાં ચોખ્ખું બળ શૂન્ય મળે છે." તો તે ખોટું છે, કારણ કે તે બે બળો જુદા-જુદા પદાર્થો પર લાગે છે, પરંતુ જો આપણે આ બે A અને B પદાર્થોના સમગ્ર તંત્રની ગતિ વિચારતા હોઈએ તો આ બંને બળો ($\vec{F}_{AB}$ અને $\vec{F}_{BA}$) તંત્રની અંદરનાં બળો બનશે અને તેમનું કુલ બળ શૂન્ય બનશે. (કેવી રીતે આમ થાય તે આગળ ઉપર 'કણોના તંત્રનું ગતિશાસ્ત્ર' પ્રકરણમાં વિસ્તારથી જોઈશું.) અને આમ સમગ્ર તંત્રની ગતિ માટે તેમને ગણવાના છે જ નહિ. આ હકીકતને લીધે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ કણોના તંત્ર પર પણ લગાડી શકાય છે.

તંત્રની સમગ્રપણે ગતિ માટે તંત્રમાનું (આંતરિક) બળ જવાબદાર નથી. આપણે કારની અંદર બેસીને કારને ધક્કો મારીને કારને ચલાવી શકીએ નહિ. કારની ગતિ માટે તેની પર બાહ્ય બળ લાગવું જરૂરી છે. હવે તમને કદાચ એમ પણ થાય કે કારનું એન્જિન તો કારનો એક આંતરિક ભાગ છે, તો એન્જિન ચાલુ કરીને કારને કેવી રીતે ચલાવી શકીએ છીએ ? હકીકતમાં કારને ચલાવવા માટે જરૂરી બાહ્ય બળ રસ્તાના ઘર્ષણબળ રૂપે મળે છે. આ કદાચ તમને આશ્ચર્યજનક લાગે, પરંતુ તે સત્ય છે.

5.8 વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Momentum)

ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો અને ત્રીજો નિયમ 'વેગમાન સંરક્ષણના નિયમ' તરીકે ઓળખાતા એક અગત્યના પરિણામ તરફ દોરી જાય છે. રાઈફલમાંથી છૂટતી બૂલેટનું ઉદાહરણ વિચારીએ. રાઈફલમાંથી છોડેલી (fired) બુલેટ આગળ જાય ત્યારે રાઈફલ પાછળની દિશામાં ધકેલાય છે. (તેને recoil of rifle કહે છે.) જો રાઈફલ વડે બુલેટ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ હોય, તો બુલેટ વડે રાઈફલ પર લાગતું બળ $-\vec{F}$ થાય. આ બંને બળો સમાન સમયગાળા Δt માટે લાગે છે. બુલેટ છોડતાં પહેલાં બુલેટ અને રાઈફલ બન્ને સ્થિર હોવાથી તેમનાં વેગમાન અનુક્રમે $\vec{p}_b$ અને $\vec{p}_r$ બન્ને શૂન્ય છે, તેથી તેમનું કુલ પ્રારંભિક વેગમાન,

$$\vec{p}_b + \vec{p}_r = 0 \qquad (5.8.1)$$

હવે ગતિના બીજા નિયમ પરથી મળેલ સમીકરણ (5.6.1) મુજબ,

$$\text{બુલેટના વેગમાનમાં ફેરફાર} = \vec{F}\Delta t \qquad (5.8.2)$$

$$\text{રાઈફલના વેગમાનમાં ફેરફાર} = -\vec{F}\Delta t \qquad (5.8.3)$$

આ દરેકનું પ્રારંભિક વેગમાન શૂન્ય હોવાથી તે દરેકનું અંતિમ વેગમાન ($\vec{p'}_b$ અને $\vec{p'}_r$), તેમના દરેકના વેગમાનના ફેરફાર જેટલું થશે.

આમ, $\vec{p'}_b = \vec{F}\Delta t$ અને $\vec{p'}_r = -\vec{F}\Delta t$ (5.8.4.)

સમીકરણ (5.8.4) અને (5.8.1), પરથી,

$$\vec{p'}_b + \vec{p'}_r = 0 = \vec{p}_b + \vec{p}_r \qquad (5.8.5)$$

એટલે કે,

$$\begin{bmatrix} \text{(બુલેટ + રાઈફલ)નું} \\ \text{અંતિમ વેગમાન} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{(બુલેટ + રાઈફલ)નું} \\ \text{પ્રારંભિક વેગમાન} \end{bmatrix} \qquad (5.8.6)$$

અહીં (રાઈફલ + બુલેટ)ના તંત્ર પર કોઈ બાહ્ય બળ લાગતું નથી, તેથી આ તંત્રને અલગ કરેલું તંત્ર કહેવાય છે. જે બળો લાગે છે તે માત્ર આંતરિક બળો જ છે અને તેમનું પરિણામી કાયમ શૂન્ય બને છે. આ હકીકતોને વેગમાન-સંરક્ષણના નિયમમાં સાંકળી લેવામાં આવી છે. વેગમાન-સંરક્ષણનો નિયમ નીચે મુજબ લખાય છે.

"અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે."

આ નિયમ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમ અને વિદ્યુતભાર સંરક્ષણના નિયમ જેવો જ એક મૂળભૂત અને સાર્વત્રિક નિયમ છે. વળી, તે ગ્રહો અને તારાઓ જેવા મોટા પદાર્થોની આંતરક્રિયાઓ તેમજ ઈલેક્ટ્રૉન-પ્રોટોન જેવા સૂક્ષ્મ કણોની આંતરક્રિયાઓ માટે સમાનપણે સાચો છે. આ નિયમનું ઉલ્લંઘન થાય તેવી કોઈ ઘટના (પ્રક્રિયા) થઈ શકતી નથી.

ઉદાહરણ 5 : એક સૈનિક પોતાની ઑટોમેટીક રાઈફલમાંથી 50 g દળની ગોળીઓ દરેક $1000\ m\ s^{-1}$ના વેગથી છોડે છે, જો તે પોતાના ખભા પર વધુમાં વધુ 200 Nનું બળ ખમી શકતો હોય, તો તે એક સેકન્ડમાં વધુમાં વધુ કેટલી ગોળીઓ છોડી શકે ?

ઉકેલ : ધારો કે દરેક ગોળીનું દળ $= m$ અને 1s માં વધુમાં વધુ n ગોળીઓ છૂટે છે.

ગોળીઓ છોડ્યા પહેલાં ગોળીઓ અને રાઈફલનું કુલ વેગમાન = 0

છૂટ્યા પછી દરેક ગોળીનું વેગમાન $p = mv$

∴ ગોળીઓને દર સેકંડે મળતું વેગમાન

$= (nmv - 0) = nmv$

ગોળીઓ છોડવાની આ પ્રક્રિયામાં કોઈ બાહ્યબળ લાગતું ન હોવાથી (ગોળીઓ + રાઈફલ)ના તંત્રને અલગ કરેલું તંત્ર ગણી શકાય અને તેથી તેનું કુલ વેગમાન અચળ રહેવું જોઈએ.

∴ રાઈફલને 1 સેકન્ડમાં વિરુદ્ધ દિશામાં મળતું વેગમાન $= nmv$

હવે, દર સેકન્ડે વેગમાનનો ફેરફાર બરાબર બળ. આમ આપણે કહી શકીએ કે રાઈફલ પરનું બળ અને તેથી સૈનિકના ખભા પરનું બળ $= nmv$

$\therefore nmv = 200N$

$\therefore n(50 \times 10^{-3}\ kg)\ (1000\ m/s) = 200N$

$\therefore n = 4\ s^{-1}$

ઉદાહરણ 6 : એક સરોવરમાં 40 kg દળના તરાપા પર 60 kg દળની એક વ્યક્તિ ઊભી છે. કાંઠાથી તે વ્યક્તિનું અંતર 30 m છે. જો તે વ્યક્તિ કાંઠા તરફ (તરાપા પર) 10 m/s ના વેગથી દોડવા લાગે, તો એક સેકન્ડ પછી તે વ્યક્તિ કાંઠાથી કેટલી દૂર હશે ?

ઉકેલ : વ્યક્તિ અને તરાપાનું પ્રારંભિક વેગમાન શૂન્ય છે.

જ્યારે વ્યક્તિ કાંઠા તરફ દોડવા લાગે છે ત્યારે (વ્યક્તિ + તરાપા)નું તંત્ર પાછળ તરફ ગતિ કરે છે.

ધારો કે, વ્યક્તિ (person) નું દળ $= m_P$

તરાપા (raft)નું દળ $= m_R$

અને વ્યક્તિનો તરાપાની સાપેક્ષે વેગ $= \vec{v}_{PR}$

તરાપાનો કાંઠાની સાપેક્ષે વેગ $= \vec{v}_{RB}$

વ્યક્તિનો કાંઠાની સાપેક્ષે વેગ $= \vec{v}_{PB}$

વ્યક્તિની દોડવાની દિશાને ધન X–અક્ષ તરીકે લેતાં,

$\vec{v}_{PR} = 10\hat{i}\ m/s$

વળી એ સ્પષ્ટ છે કે $\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PR} + \vec{v}_{RB}$ (1)

(વ્યક્તિ + તરાપા)ના આ તંત્ર પર કોઈ બાહ્ય બળ લાગતું ન હોવાથી, વેગમાન સંરક્ષણના નિયમ મુજબ

$$\begin{bmatrix}\text{વ્યક્તિ + તરાપાનું} \\ \text{પ્રારંભિક વેગમાન}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{વ્યક્તિ + તરાપાનું} \\ \text{અંતિમ વેગમાન}\end{bmatrix}$$

$$\therefore 0 = m_P\vec{v}_{PB} + m_R\vec{v}_{RB}$$

$$= m_P(\vec{v}_{PR} + \vec{v}_{RB}) + m_R\vec{v}_{RB}$$

$$= m_P\vec{v}_{PR} + (m_P + m_R)\vec{v}_{RB}$$

$$\therefore 0 = 60\ (10\hat{i}) + (60 + 40)\vec{v}_{RB}$$

$$\therefore \vec{v}_{RB} = -6\hat{i}\ m/s$$

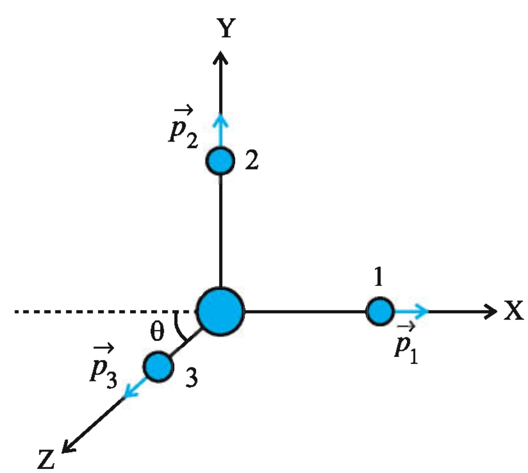
∴ સમીકરણ (1) પરથી

$\vec{v}_{PB} = 10\hat{i} - 6\hat{i} = 4\hat{i}\ m/s$

આમ, વ્યક્તિ 1 સેકન્ડમાં કાંઠા તરફ 4 mનું અસરકારક અંતર કાપે (પોતે 10 m આગળ જાય પણ તરાપો 6 m પાછળ જાય તેથી).

∴ 1 સેકન્ડ પછી તેનું કાંઠાથી અંતર 30 − 4 = 26 m હોય.

ઉદાહરણ 7 : સ્થિર સ્થિતિમાં રહેલો એક બોમ્બ ફૂટતાં તેના ત્રણ ટૂકડા થાય છે. બે સમાન દળના ટૂકડા એકબીજાને લંબદિશામાં 30 m/s ના સમાન વેગથી ગતિ કરે છે. ત્રીજા ટૂકડાનું દળ આ બે માંના દરેક કરતાં ત્રણ ગણું છે. તો આ ત્રીજા ટુકડાના વેગનાં માન અને દિશા શોધો.



આકૃતિ 5.2

ઉકેલ : બૉમ્બ ફૂટ્યા પહેલાં સ્થિર હોવાથી તેનું ∴ પ્રારંભિક વેગમાન = 0. બૉમ્બની ફૂટવાની ક્રિયામાં

બાહ્ય બળ લાગતું નથી. તેથી વેગમાન સંરક્ષણના નિયમ મુજબ, બૉમ્બ ફૂટ્યા પછીના બધા ટુકડાઓનાં વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ. અહીં પહેલા અને બીજા ટુકડાનાં દળ = m સમાન છે.

∴ ત્રીજા ટુકડાનું દળ = 3 m

બૉમ્બ ફૂટ્યા પછી ટૂકડાઓનાં વેગમાનો અનુક્રમે $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ અને $\vec{p}_3$ હોય તો,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

આકૃતિ મુજબ X અને Y અક્ષો લેતાં,

$$\vec{p}_1 = m(30)\hat{i}\ ,\ \vec{p}_2 = m(30)\hat{j}$$

$$\therefore\ m(30)\hat{i} + m(30)\hat{j} + (3m)\vec{v}_3 = 0$$

$$\therefore\ 3m\,(\vec{v}_3) = -30m\,(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\therefore\ \vec{v}_3 = -10\hat{i} - 10\hat{j}$$

$$\therefore\ |\vec{v}_3| = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2}$$

$$= 10\sqrt{2}\ \text{m/s.}$$

અને, $tan\ \theta = \dfrac{v_{3y}}{v_{3x}} = \dfrac{-10}{-10} = 1$

$\therefore\ \theta = 45^\circ$

આમ ત્રીજો ટુકડો ઋણ X-અક્ષ તેમજ ઋણ Y-અક્ષ સાથે 45° ના કોણે ગતિ કરશે.

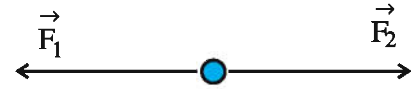
5.9 એકબિંદુગામી બળોનું સંતુલન (Equilibrium of Concurrent Forces)

જે બળોની કાર્યરેખાઓ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તેવાં બળોને એકબિંદુગામી (Concurrent) બળો કહે છે.

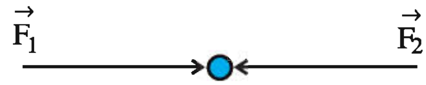
કણ પર લાગતાં બધા બાહ્ય બળોનું પરિણામી (ચોખ્ખું-net) બળ શૂન્ય બને તે પરિસ્થિતિને સંતુલન કહે છે. આ દૃષ્ટિકોણથી વિચારતાં પદાર્થની સ્થિર અવસ્થા અને નિયમિત વેગવાળી ગતિની અવસ્થા એ બંને સંતુલન અવસ્થાઓ જ છે.

આમ સંતુલન માટે $\Sigma\vec{F} = 0$ બને છે.

જો કણ પર એક જ બાહ્ય બળ $\vec{F}$ લાગતું હોય, તો તેનામાં $\vec{F} = m\vec{a}$ મુજબ પ્રવેગ ઉત્પન્ન થશે જ, આથી તે કણ સંતુલનમાં રહી શકશે નહિ. જો કણ પર બે બાહ્ય બળો $\vec{F}_1$ અને $\vec{F}_2$ લાગતાં હોય, તો સંતુલન માટે એટલે કે $\Sigma\vec{F} = 0$ થવા માટે $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ થવું જ જોઈએ. આકૃતિ 5.3 (a), (b).



(a)



(b)

આકૃતિ 5.3

જો બે કરતાં વધુ બાહ્ય બળો લાગતાં હોય, તો સંતુલન માટે તેમનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ. એટલે કે

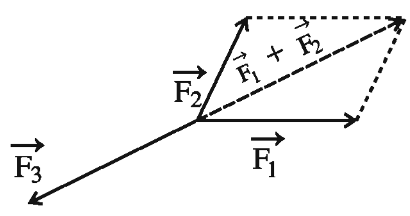
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \ldots\ldots\ldots = 0$ થવું જોઈએ.

વળી, બળ સદિશ રાશિ હોવાથી બધાં બળોના અનુરૂપ ઘટકોનો સરવાળો પણ શૂન્ય થવો જોઈએ. એટલે કે,

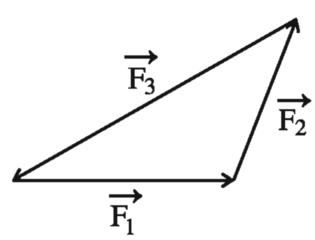
$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$ થવું જોઈએ.

ત્રણ બળો $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ અને $\vec{F}_3$ ની અસર નીચે સંતુલનમાં રહેતા કણ માટે $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ થાય, તે માટે આકૃતિ 5.4.(a) માં દર્શાવ્યા મુજબ બે બળોનો સદિશ સરવાળો $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ ત્રીજા બળના મૂલ્ય જેટલો અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોવો જોઈએ. એટલે કે,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$



(a)



(b)

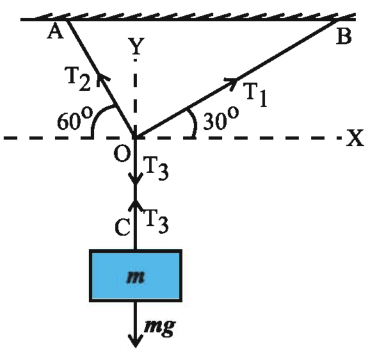
આકૃતિ 5.4

બીજી રીતે કહીએ તો ત્રણેય બળસદિશોને tail to head ગોઠવતાં આકૃતિ 5.4 (b) મુજબ બંધ આકૃતિ રચતા હોવા જોઈએ. આથી પરિણામી બળ શૂન્ય બને.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 5.5માં દર્શાવ્યા અનુસાર બે દોરીઓ AO અને BOને એક દઢ આધાર સાથે બાંધીને તેની સાથે ત્રીજી એક દોરી OC વડે 20 kg દળના પદાર્થને લટકાવેલ છે. આ સમગ્ર રચનાની સંતુલન સ્થિતિમાં AO અને BO દોરીઓ સમક્ષિતિજ સાથે અનુક્રમે 60° અને 30° ના ખૂણાઓ બનાવે છે. આ બધી દોરીઓ દળ રહિત છે. તેમ ધારીને દોરીઓમાં ઉદ્ભવતા તણાવ (tensions) શોધો. [$g = 10 \text{ m s}^{-2}$ લો.]

ઉકેલ : અહીં દોરીઓ દળ રહિત છે. તેથી દોરીના એક છેડે લગાડેલું બળ એટલું ને એટલું જ (undiminished) બીજા છેડે લાગે છે. (આમ, દળ રહિત દોરી પોસ્ટમેન જેવું કામ કરે છે.)

સંતુલન સ્થિતિમાં પદાર્થ અને O બિંદુ સ્થિર છે. સંતુલન સ્થિતિમાં દોરીમાં તણાવ આકૃતિ 5.5 મુજબ T_1, T_2, T_3 લાગે છે, તેમ ધારો.



આકૃતિ 5.5

C બિંદુ સંતુલનમાં હોવાથી $T_3 - mg = 0$

$$\therefore \quad T_3 = mg = (20)(10)$$

$$= 200 \text{ N} \qquad (1)$$

X–અક્ષને સમક્ષિતિજ દિશામાં અને Y–અક્ષ તેને લંબ લો.

આકૃતિ પરથી T_1 નો x ઘટક $= T_1 \cos 30^\circ$

T_1 નો y ઘટક $= T_1 \sin 30^\circ$

T_2 નો x ઘટક $= T_2 \cos 60^\circ$

T_2 નો y ઘટક $= T_2 \sin 60^\circ$

O બિંદુ સંતુલનમાં હોવાથી,

$\sum F_x = 0$ પરથી, $T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 - \frac{1}{2} T_2 = 0$$

$$\therefore \sqrt{3}\, T_1 - T_2 = 0 \qquad (2)$$

$\sum F_y = 0$ પરથી, $T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ - T_3 = 0$

$$\therefore \frac{1}{2} T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 - 200 = 0$$

[સમીકરણ (1) પરથી]

$$\therefore T_1 + \sqrt{3}\, T_2 = 400 \qquad (3)$$

સમીકરણ (2) ને $\sqrt{3}$ વડે ગુણી સમીકરણ (3)માં ઉમેરતાં,

$$(3T_1 - \sqrt{3}\, T_2) + T_1 + \sqrt{3}\, T_2 = 400$$

$$\therefore T_1 = 100 \text{ N}$$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (3)માં મૂકતાં $T_2 = 173$ N

5.10 ઘર્ષણ (Friction)

જ્યારે પદાર્થો સંપર્કમાં હોય ત્યારે પદાર્થોની સંપર્કસપાટી આગળ કણોની દરેક જોડ (pair) માં પરસ્પર સંપર્કબળો લાગે છે જે, ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમનું પાલન કરે છે. આ સંપર્ક બળના બે ઘટક વિચારો : (i) સંપર્કસપાટીઓને લંબ દિશામાંના ઘટકને **લંબ પ્રતિક્રિયાબળ N** (ઘણી વાર ટૂંકમાં લંબ બળ અથવા લંબપ્રતિક્રિયા) કહે છે. (ii) સંપર્કસપાટીઓને સમાંતર ઘટકને **ઘર્ષણબળ f** અથવા ટૂંકમાં ઘર્ષણ કહે છે.

આણ્વિક સ્તરે સંપર્કસપાટીઓનું ખરબચડાપણું આવાં સંપર્ક બળો અને ઘર્ષણબળો નક્કી કરે છે. પદાર્થોની સપાટીઓ ગમે તેટલી લીસી દેખાય પણ માઇક્રોસ્કોપમાંથી જોતાં સૂક્ષ્મ ખાડા-ટેકરા જણાઈ આવે છે. એક સપાટીના ઉપસેલા ભાગ બીજા સપાટીના ખાડા જેવા ભાગોમાં ભરાઈ જવાથી 'cold welding' થઈ જાય છે. એટલે એક સપાટી બીજી પર ખસવાનો પ્રયત્ન કરે, ત્યારે તેનો વિરોધ કરતું બળ ઉદ્ભવે છે જેને **ઘર્ષણબળ f** કહે છે.

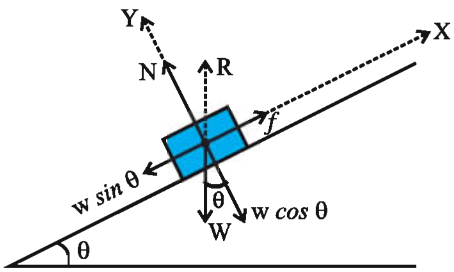
એક ઉદાહરણ જોઈએ. ધારો કે એક બ્લોક Q ઢોળાવવાળી સપાટી પર સ્થિર છે. આ બ્લોક તેના વજન બળ $\vec{W}$ જેટલું બળ ઢાળની સપાટી પર અધોદિશામાં લાગે છે. આ સપાટી બ્લોક પર તેટલા જ મૂલ્યનું પણ વિરુદ્ધ દિશામાં બળ $\vec{R}$ લગાડે છે. $\vec{R}$ એ સંપર્ક બળ છે.

હવે સરળતા ખાતર અક્ષોની પસંદગી આપણે એવી રીતે કરીએ કે જેથી X-અક્ષ ઢાળને સમાંતર રહે. (જુઓ આકૃતિ 5.6(a) આ બળ $\vec{R}$ના બે લંબ ઘટકો નીચે મુજબ છે.

(1) સપાટીને લંબ ઘટકને લંબબળ (normal force) $\vec{N}$ કહે છે.

(2) સપાટીને સમાંતર ઘટકને ઘર્ષણબળ (frictional force) $\vec{f}$ કહે છે.

જો આવું ઘર્ષણબળ fને લાગતું હોત તો બળ W sin θ ને કારણે બ્લોક ઢાળ પર (ન્યૂટનના નિયમ મુજબ) નીચે તરફ સરકવા લાગત અને આવી ગતિ (કે જે ઘર્ષણના કારણે વાસ્તવમાં થતી નથી.) ને અપેક્ષિત ગતિ (impending motion) કહે છે.



આકૃતિ 5.6 (a)

હવે $|\vec{R}|^2 = |\vec{N}|^2 + |\vec{f}|^2$

બ્લોક સંતુલનમાં હોવાથી, $\Sigma F_x = 0$ અને $\Sigma F_y = 0$,

$\Sigma F_x = 0$ પરથી $|f| - w \sin \theta = 0$ (1)

અને $\Sigma F_y = 0$ પરથી $|f| - w\cos\theta = 0$ (2)

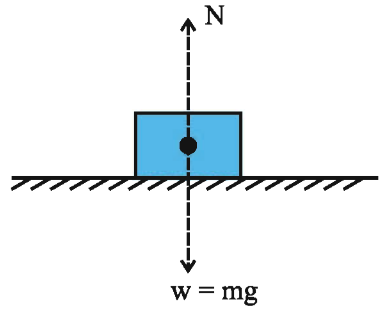
સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{f}{N} = \tan \theta \quad (3)$$

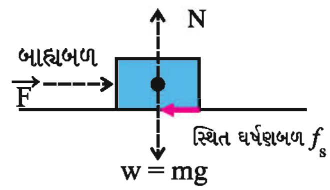
(a) સ્થિત ઘર્ષણ (Static friction) : ટેબલની સમક્ષિતિજ સપાટી પર સ્થિર રહેલા m દળના પદાર્થનો વિચાર કરો. તે પોતાના વજન W (= mg) જેટલું બળ ટેબલની સપાટી પર લગાડે છે અને સપાટી પદાર્થ પર લંબબળ N લગાડે છે. પદાર્થની સંતુલન-અવસ્થા પરથી કહી શકાય કે,

$$\begin{bmatrix} \text{પદાર્થ પરનું} \\ \text{અધોદિશામાંનું} \\ \text{ગુરુત્વ બળ} \\ W\ (= mg) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{સપાટી વડે પદાર્થ પર} \\ \text{લાગતું ઊર્ધ્વ} \\ \text{દિશામાંનું} \\ \text{લંબબળ N} \end{bmatrix} \quad (5.10.1)$$

(જુઓ આકૃતિ 5.6 (b))



(b)



(c)

આકૃતિ 5.6

હવે +x–દિશામાં એક નાનું બળ $\vec{F}$, પદાર્થ પર લગાડવા છતાં ધારો કે પદાર્થ ગતિમાં આવતો નથી પણ સ્થિર જ રહે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.6 (c)) આ નાનું બળ $\vec{F}$ જો એકમાત્ર બળ હોત, તો પદાર્થ નાના પ્રવેગ (= F/m)થી પણ ગતિમાં આવત. પણ પદાર્થ હજી સ્થિર રહે છે, તેથી કોઈ બીજું બળ ઋણ $-x$ દિશામાં લાગતું હોવું જોઈએ કે જે આ બળ $\vec{F}$ ને સમતોલે છે, એટલે કે કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય બનાવી પદાર્થને સ્થિર રાખે છે.

આ બીજું બળ એ સંપર્કબળનો સપાટીને સમાંતર ઘટક છે, જેને ઘર્ષણબળ f_s કહે છે. તેને ઘર્ષણ અથવા સ્થિત ઘર્ષણ પણ કહે છે. આ સ્થિત ઘર્ષણબળ પોતાની મેળે અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી, પણ જ્યારે બાહ્ય બળ F લાગે તે જ ક્ષણે તે લાગવા માંડે છે.

હવે બાહ્ય બળ $\vec{F}$ થોડું અને ધીમે-ધીમે વધારીએ તેમ છતાં પદાર્થ ખસતો નથી, તેથી સ્પષ્ટ છે કે ઘર્ષણબળ f_s પણ તે જ પ્રમાણે વધતું હશે. આમ, આ સ્થિત ઘર્ષણબળ (self adjusting) સ્વનિયમન કરતું બળ છે. આવું અમુક હદ સુધી જ થાય છે. **આ સ્થિત ઘર્ષણબળ અપેક્ષિત (impending) ગતિનો વિરોધ કરે છે.** અપેક્ષિત ગતિ એટલે જો ઘર્ષણબળ ગેરહાજર હોત, તો લગાડેલા બળની અસર હેઠળ જે ગતિ થાત (પણ ખરેખર થતી નથી) તે.

હવે લગાડેલું બાહ્ય બળ $\vec{F}$ હજી વધારતાં ઘર્ષણબળનું મૂલ્ય અમુક સીમા સુધી જ વધી શકે છે. જો બાહ્ય બળ આ મહત્તમ ઘર્ષણબળ કરતાં સ્હેજ વધે કે તરત પદાર્થ ગતિ શરૂ કરે છે. પદાર્થ ગતિ શરૂ કરવાની અણી પર હોય ત્યારે લાગતા ઘર્ષણબળને મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ $f_{s(max)}$

અથવા સીમાંત ઘર્ષણબળ (limiting force of friction) કહે છે. પ્રયોગો દર્શાવે છે કે, (1) મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ સપાટીઓના સંપર્ક ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી. (2) મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ $f_{s(max)}$, લંબબળ Nના સમપ્રમાણમાં હોય છે. એટલે કે, $f_{s(max)} \alpha$ N.

ઉપર્યુક્ત બાબતો [(1) અને (2)માં દર્શાવેલી] ને સ્થિત ઘર્ષણના નિયમો કહે છે.

અહીં સ્પષ્ટ જ છે કે $f_{s(max)} = \mu_s$ N (5.10.2)

જ્યાં, μ_s એ સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે અને તેને **સ્થિત-ઘર્ષણાંક (co-efficient of static friction)** કહે છે. તેનું મૂલ્ય સપાટીઓના પ્રકાર, સપાટીઓના દ્રવ્યની જાત અને તાપમાન પર આધારિત છે. ખરબચડી કરતાં લીસી સપાટી માટે μ_s નું મૂલ્ય નાનું હોય છે. μ_s નું મૂલ્ય લગભગ 0.01થી 1.5ના ગાળામાં હોય છે. જ્યાં સુધી સ્થિર પદાર્થ ખસતો ન હોય ત્યાં સુધી કહી શકાય કે $f_s \le \mu_s$ N.

સમીકરણ (5.10.2) એ $f_{s(max)}$ અને N નાં મૂલ્યો વચ્ચેનો જ સંબંધ છે, બાકી તેમની દિશાઓ તો પરસ્પર લંબ છે.

ઉદાહરણ 9 : 4 kg દળનો એક બ્લૉક સમક્ષિતિજ સપાટી પર પડ્યો છે. ધીમે ધીમે આ સપાટીનો સમક્ષિતિજ સાથેનો ખૂણો વધારવામાં આવે છે. જ્યારે આ ખૂણો 15^o નો થાય ત્યારે બ્લૉક સરકી પડવાની અણી પર આવે છે, તો આ બ્લૉકની સપાટી અને ઢાળની સપાટી વચ્ચેનો સ્થિત-ઘર્ષણાંક શોધો.

ઉકેલ : આ બ્લૉક પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ છે :

(i) અધોદિશામાં લાગતું વજનબળ (ગુરુત્વાકર્ષી બળ) = mg

(ii) ઢાળની સપાટી વડે બ્લૉક પર લાગતું લંબબળ = N અને

(iii) સ્થિત-ઘર્ષણબળ $= f_s$ (ઢાળની સપાટીને સમાંતર)

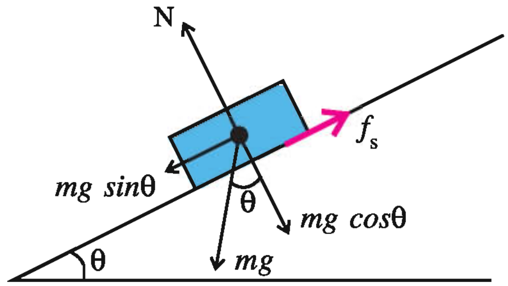
બ્લૉક સંતુલનમાં હોઈને આ બધાં બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય થશે. વજનબળ mgના આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બે ઘટકો લેતાં,

$$\text{mg } sin\theta = f_s \text{ અને} \quad (1)$$

$$\text{mg } cos\theta = \text{N} \quad (2)$$

આ બંને સમીકરણોનો ગુણોત્તર લેતાં

$$tan\theta = \frac{f_s}{\text{N}} \quad (3)$$



આકૃતિ 5.7

સમીકરણ (3) પરથી, જેમજેમ θ નું મૂલ્ય વધતું જાય તેમ તેમ $tan\theta$ નું મૂલ્ય પણ વધતું જશે અને તેથી ઘર્ષણબળ f_s નું મૂલ્ય પણ અમુક હદ સુધી વધતું જશે. ધારો કે $\theta = \theta_{max}$ માટે ઘર્ષણબળનું મૂલ્ય મહત્તમ $f_{s\,(max)}$ થાય છે. સમીકરણ (3) પરથી

$$tan\theta_{max} = \frac{f_{s(\,max\,)}}{\text{N}} = \mu_s$$

$$\therefore\ \theta_{max} = \tan^{-1} \mu_s$$

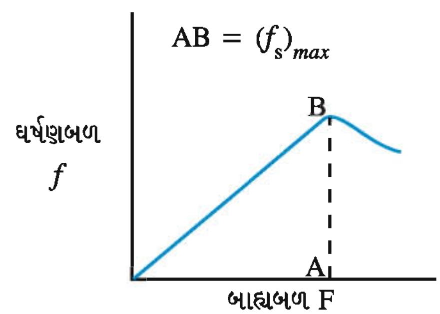
આ કોણને વિરામકોણ કહે છે.

જ્યારે θ નુંમૂલ્ય θ_{max}ના મૂલ્ય કરતાં સહેજ વધશે કે તરત જ આ બ્લૉક પર અસંતુલિત પરિણામી બળ લાગવાના લીધે બ્લૉક નીચે તરફ સરકવાનું શરૂ કરશે. દાખલામાં આપેલ છે કે $\theta_{max} = 15^o$.

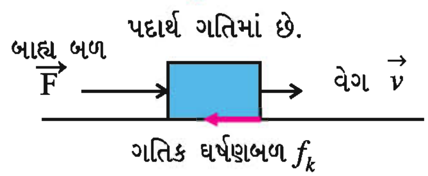
$\therefore\ \mu_s = tan15^o = 0.27$

અહીં એ નોંધો θ_{max} એ ફક્ત μ_s પર જ આધારિત છે, બ્લૉકના દળ પર નહિ.

(b) ગતિક ઘર્ષણ (Kinetic Friction) :



આકૃતિ 5.8



આકૃતિ 5.9

ઉપર ચર્ચેલ પરિચ્છેદ (a) ના ટેબલ પરના પદાર્થના ઉદાહરણમાં જો લગાડેલું બાહ્ય બળ $\vec{F}$, $f_{s(max)}$ કરતાં (એટલે

મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ કરતાં) સહેજ પણ વધે કે તરત પદાર્થ ગતિ કરવા લાગે છે. પ્રયોગો એમ દર્શાવે છે કે જેવી આ સાપેક્ષ ગતિ શરૂ થાય કે તરત જ ઘર્ષણબળનું મૂલ્ય મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ $f_{s(max)}$ કરતાં ઘટી જાય છે (જુઓ આકૃતિ 5.8).

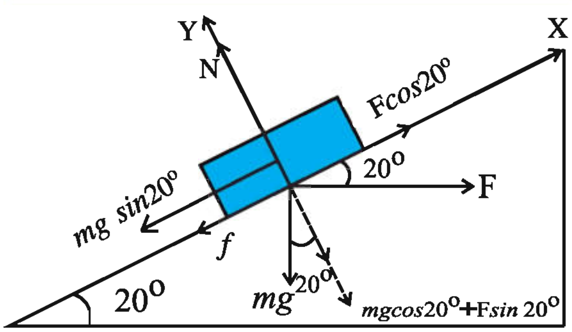
સંપર્કસપાટીઓની સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરતા ઘર્ષણબળને ગતિક ઘર્ષણબળ (f_k) કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.9). સ્થિત ઘષણબળની માફક ગતિક ઘર્ષણબળ પણ સંપર્ક-ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી અને લંબ બળ (N)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે, ઉપરાંત તે વેગથી પણ લગભગ સ્વતંત્ર હોય છે.

અત્રે સ્પષ્ટ છે કે $f_k = \mu_k$ N (5.10.3)

જ્યાં, μ_k અચળાંક છે અને તેને **ગતિક ઘર્ષણાંક (coefficient of kinetic friction)** કહે છે. તેનું મૂલ્ય સંપર્ક સપાટીઓના પ્રકાર પર આધારિત છે. પ્રયોગો દર્શાવે છે કે $\mu_k < \mu_s$.

આપણે બરાબર યાદ રાખવાનું છે કે પદાર્થને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિમાં લાવવા, બાહ્ય બળને મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળનો સામનો કરવો પડે છે. પણ એક વાર પદાર્થ ગતિમાં આવી જાય પછી ગતિક ઘર્ષણનો સામનો કરવો પડે છે, અને ગતિક ઘર્ષણ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણ $f_{s(max)}$ કરતાં ઓછું હોય છે.

ઉદાહરણ 10 : 15 kg દળના એક બ્લૉકને 20° ઢોળાવવાળા સમતલ પર 25 cm/s² ના પ્રવેગથી ઉપર તરફ સરકાવવા માટે 200 Nનું બળ સમક્ષિતિજ દિશામાં લગાડવું પડે છે, તો (i) બ્લૉક પર લાગતું ઘર્ષણબળ અને (ii) ગતિક ઘર્ષણાંક શોધો.



આકૃતિ 5.10

ઉકેલ : દાખલામાં વર્ણવેલ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 5.10માં દર્શાવી છે. આપણે X–અક્ષ ઢાળની સપાટીને સમાંતર અને Y–અક્ષ ઢાળને લંબ લઈશું. અહીં બ્લૉક X–દિશામાં પ્રવેગી ગતિ કરે છે, તેથી X–દિશામાં સંતુલન નથી.

$\sum F_x = ma_x$ પરથી

$F cos20° - f - mg\ sin20° = (15)(0.25)$

$\therefore (200)(0.9397) - f - (15)(9.8)(0.3420) = 3.75$

$\therefore f = 134$ N

Y–દિશામાં સંતુલન હોવાથી

$\sum F_y = 0$

$\therefore N - mg\ cos20° - F\ sin20° = 0$

$\therefore N-(15)(9.8)(0.9397) - (200)(0.3420) = 0$

$\therefore N = 207$ N

હવે,

$$\mu_k = \frac{f}{N} = \frac{134}{207} = 0.65$$

અહીં એક વાત નોંધો કે બળ F ને કારણે (અસરકારક) લંબબળમાં વધારો થાય છે.

(c) રોલિંગ ઘર્ષણ (Rolling Friction) : જ્યારે કોઈ તકતી, રિંગ કે ગોળો સરક્યા વિના કોઈ સપાટી પર ગબડે ત્યારે જે રેખા (કે બિંદુ) સપાટીને અડકે છે, તે તત્ક્ષણ સ્થિર હોય છે. આવા પદાર્થ પર સ્થિત કે ગતિક ઘર્ષણબળ લાગતું નથી. તો પછી તે થોડું ગબડ્યા પછી અટકી કેમ જાય છે ? અચળ વેગથી ગતિ કેમ ચાલુ રાખતા નથી ? આવી ગતિમાં રોલિંગ ઘર્ષણ લાગે છે અને તેથી ગતિ ચાલુ રાખવા માટે કંઈક બાહ્ય બળ લગાડવું પડે છે. આપેલ દળના પદાર્થ અને આપેલ સપાટી માટે સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણ કરતાં રોલિંગ ઘર્ષણ ઘણું ઓછું (કોઈક વાર 1000મા ભાગનું લાગતું) હોય છે. તે પદાર્થની ત્રિજ્યા ઝડપ અને દ્રવ્યના પ્રકાર પર આધારીત છે.

આવી ગબડવાની ક્રિયામાં સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓ ક્ષણિક વિકૃત થાય છે, તેથી સપાટી સાથેના સંપર્કમાં બિંદુ કે રેખા નહિ, પણ થોડુંક ક્ષેત્રફળ આવે છે અને તેથી સંપર્ક-બળનો સપાટીને સમાંતર ઘટક (જેને આપણે રોલિંગ ઘર્ષણ કહીએ છીએ તે) આ સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે તેમ લાગે છે.

(d) ઘર્ષણના લાભ અને ગેરલાભ (Advantages and Disadvantages of Friction) : ઘર્ષણ કેટલીક સ્થિતિમાં અનિચ્છનીય છે. યંત્રોમાં જુદા-જુદા ભાગો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરતા ઘર્ષણને લીધે **પાવરનો વ્યય ઉષ્મા રૂપે** થાય છે. તેમાં ગતિક ઘર્ષણ ઘટાડવા માટે ઊંજણ (Lubricants) (દા.ત., ગ્રીઝ, ઑઇલ, સાબુ, હવા વગેરે)નો ઉપયોગ થાય છે. બીજો રસ્તો બૉલ-બેરિંગ્સ વાપરવાનો પણ છે. તેમાં તો રોલિંગ ઘર્ષણ લાગે છે, જે સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણ કરતાં ઘણું ઓછું હોય છે. તેથી પાવરવ્યય ઘટી જાય છે.

કેટલીક સ્થિતિમાં ઘર્ષણ જરૂરી પણ છે. ગતિક ઘર્ષણ પાવરનો વ્યય કરે છે, પણ વાહનોને અટકાવવા માટે તે જરૂરી છે. તેનો ઉપયોગ યંત્રોમાં અને automobilesમાં

બ્રેક્સમાં થાય છે. (બ્રેક વગરનું વાહન ચલાવીએ, તો શું થાય ?) આપણે ચાલી શકીએ છીએ તે પણ ઘર્ષણને લીધે છે. કાર માટે ખૂબ લપસણી સડક (slippery road) પર ગતિ કરવાનું શક્ય નથી. સામાન્ય રીતે વાહનનાં ટાયર અને સડક વચ્ચેનું ઘર્ષણ વાહનને પ્રવેગિત કરવા માટેનું જરૂરી બાહ્ય બળ હોય છે. ઘર્ષણના નિયમો એ ગુરુત્વબળના નિયમ અને વિદ્યુતબળના નિયમ જેવા સરળ અને ચોકસાઈભર્યા નથી પણ આનુભવિક છે અને માત્ર આશરા પડતા સત્ય છે. પરંતુ યંત્રશાસ્ત્રમાં કોયડાઓના ઉકેલમાં ઉપયોગી છે.

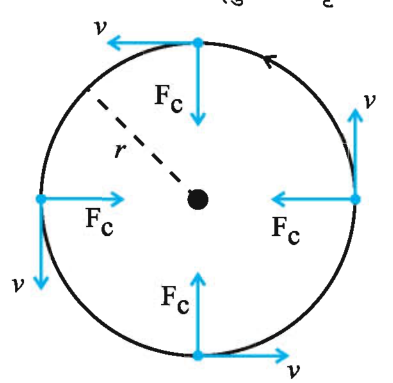
સૂક્ષ્મ સ્તરે ઘર્ષણની ક્રિયા ઘણી સંકીર્ણ (complex) છે.

5.11 નિયમિત વર્તુળગતિનું ગતિશાસ્ત્ર : (Dynamics of Uniform Circular Motion)

(a) કેન્દ્રગામી બળ : આપણે પ્રકરણ 4 માં જોઈ ગયા છીએ કે, r ત્રિજ્યાના વર્તુળમાર્ગ પર v જેટલી નિયમિત (અચળ) ઝડપથી ગતિ કરતી m દળની વસ્તુનો પ્રવેગ $\frac{v^2}{r}$ કેન્દ્ર તરફની દિશામાં હોય છે. તેને કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_c કહે છે. આથી ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ મુજબ આ ગતિ માટે

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \qquad (5.11.1)$$

બળ કેન્દ્ર તરફની દિશામાં લાગતું હોવું જરૂરી છે. આ બળને કેન્દ્રગામી બળ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.11.)



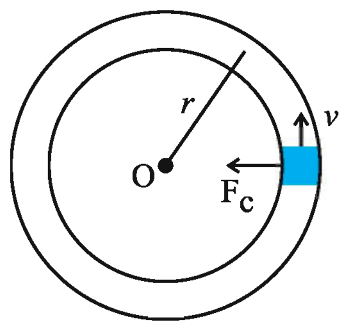
આકૃતિ 5.11

સૂર્યની આસપાસ ગ્રહની વર્તુળગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ, સૂર્ય વડે ગ્રહ પર લાગતા ગુરુત્વાકર્ષી બળ દ્વારા પૂરું પડાય છે.

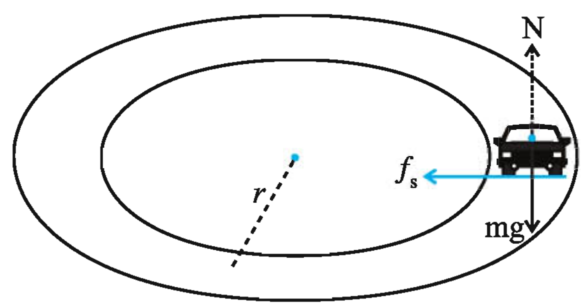
ન્યુક્લિયસની આસપાસ ઈલેક્ટ્રોનની વર્તુળગતિ માટેનું જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ, ન્યુક્લિયસ વડે ઈલેક્ટ્રોન પર લાગતા કુલંબ આકર્ષણ બળ દ્વારા પૂરું પડાય છે.

નિયમિત વર્તુળ ગતિ એ, આ પ્રકરણમાં અગાઉ જેનો ઘણીવાર ઉલ્લેખ થયો છે તે, નિયમિત ગતિ કરતાં અલગ છે. નિયમિત ગતિમાં પદાર્થનો વેગ સદિશ ($\vec{v}$) અચળ છે અને પ્રવેગ શૂન્ય છે. પરંતુ નિયમિત વર્તુળગતિમાં પદાર્થના વર્તુળ માર્ગ પરની ઝડપ અચળ છે. તેનો વેગ સદિશ ($\vec{v}$) તો બદલાય છે અને તેને કેન્દ્ર તરફ $\frac{v^2}{r}$ જેટલો પ્રવેગ હોય છે, જેને કેન્દ્રગામી પ્રવેગ કહે છે.

(b) સમતલીય વર્તુળાકાર માર્ગ પર વાહનની ગતિ (Motion of a Vehicle on a Level Circular Path) : આકૃતિ 5.12 (a, b)માં એક સમક્ષિતિજ સમતલીય વળાંકવાળા (તેને વર્તુળનો એક ભાગ ગણી શકાય) રસ્તા પર જતું m દળનું એક વાહન દર્શાવ્યું છે. આ વાહન પર જો પૂરતું કેન્દ્રગામી બળ લાગતું હોય, તો જ આ માર્ગ પર તે સલામત ગતિ કરી શકે. (નહીં તો બહારની તરફ ફેંકાઈ જાય !) અહીં વાહન પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ છે.



F_c = કેન્દ્રગામી બળ (a)



સ્થિત ઘર્ષણબળ (b)

આકૃતિ 5.12

(1) વાહનનું વજન (mg) – અધોદિશામાં (2) રસ્તા વડે લાગતું લંબ પ્રતિક્રિયા બળ (N) – ઊર્ધ્વ દિશામાં (3) રસ્તા વડે લાગતું ઘર્ષણબળ (f_s) – રસ્તાની સપાટીને સમાંતર દિશામાં. આ વાહનને શિરોલંબ દિશામાં કોઈ પ્રવેગ ન હોવાથી,

$$N - mg = 0$$

$$\therefore N = mg \qquad (5.11.1)$$

વાહનને આ રસ્તા પર વર્તુળગતિ માટેનું જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ F_c, ઘર્ષણબળ f_s દ્વારા પૂરું પડાતું હોવું જોઈએ.

$$\therefore\ F_c = f_s = \frac{mv^2}{r} \qquad (5.11.2)$$

આ ઘર્ષણબળ એ સ્થિત ઘર્ષણબળ f_s જ છે, જે વર્તુળના કેન્દ્રથી દૂરની તરફ થનારી વાહનની અપેક્ષિત ગતિ નો વિરોધ કરે છે. જો રસ્તા વડે લાગતું મહત્તમ ઘર્ષણબળ $f_{s(max)}$ હોય તો,

$$f_{s(max)} = \mu_s N \text{ (સમી. 5.10.1 મુજબ)}$$
$$= \mu_s mg \text{ (સમી. 5.11.1 પરથી)} \qquad (5.11.3)$$

જ્યાં μ_s = વાહનનાં ટાયર અને રસ્તા વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક

આ પરથી કહી શકાય કે જો વાહનની ઝડપ v એવી હોય કે, જેમાં

$$\begin{bmatrix}\text{જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ} \\ \dfrac{mv^2}{r}\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}\text{મહમત્ત ઘર્ષણબળ} \\ \mu_s\ mg\end{bmatrix} \qquad (5.11.4)$$

તો જ વાહન આ રસ્તા પર સલામત રીતે ગતિ કરશે.

$$\therefore\ v^2 \le \mu_s\, r\, g \qquad (5.11.5)$$

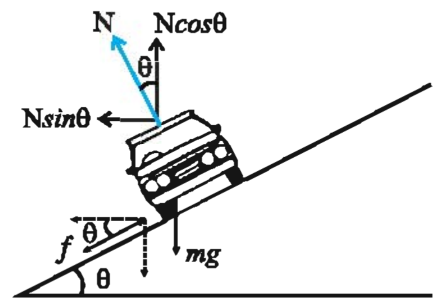
અને સલામત ગતિ માટેની મહત્તમ ઝડપ

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s r g} \qquad (5.11.6)$$

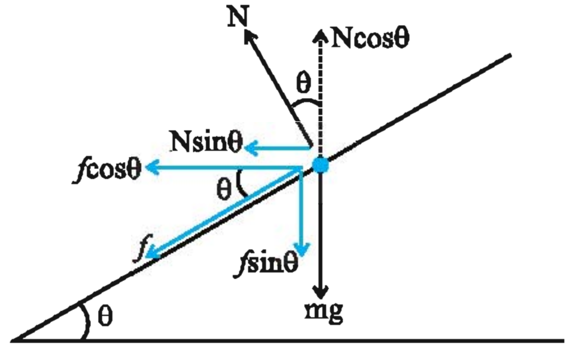
વાહનની ઝડપ આ v_{max} કરતાં વધારે હોય, તો તે રસ્તાથી દૂર ફેંકાઈ જશે. આ મહત્તમ ઝડપ v_{max} હલકાં કે ભારે સૌ વાહનો માટે સમાન છે. જુઓ કે સમીકરણ (5.11.6)માં દળ આવતું નથી.

આ ચર્ચા પરથી આપણે રસ્તા પર વળાંક લેતી વખતે વાહનને ધીમું શા માટે કરીએ છીએ, તે તમે સમજી શક્યા હશો.

(c) ઢોળાવવાળા વક્રાકાર રસ્તા પર વાહનની ગતિ (Motion of Vehicle on Banked Curved Road) : સમતલ વર્તુળાકાર માર્ગ પર વાહનની સલામત ગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ રસ્તાના માત્ર ઘર્ષણ દ્વારા જ મળે છે તે આપણે જોયું. પરંતુ રસ્તાના વળાંક આગળ, જો રસ્તો ઢોળાવવાળો (એટલે વર્તુળાકાર રસ્તાની અંદર તરફની કિનારી નીચી અને બહાર તરફની કિનારી ઊંચી હોય તેવો) બનાવવામાં આવે, તો વર્તુળગતિમાં જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ માટે થોડોક ફાળો રસ્તાના લંબબળ (N)માંથી પણ મળી રહે છે અને તેટલા પ્રમાણમાં ઘર્ષણનો ફાળો ઘટાડી શકાય છે. આકૃતિ (5.13)માં રસ્તાનો પુસ્તકના પાન સાથેનો આડછેદ દર્શાવ્યો છે. આ રસ્તો સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણે ઢળતો છે. વાહન પર લાગતાં બળો પણ આકૃતિ 5.13(b)માં દર્શાવ્યાં છે.



(a)



(b)

આકૃતિ 5.13

વાહન પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ છે :

(1) વજનબળ (mg) – અધોદિશામાં

(2) લંબબળ (N) – રસ્તાને લંબ રૂપે ઉપરની તરફ

(3) ઘર્ષણબળ (f) – રસ્તાની સપાટીને સમાંતર

શિરોલંબ દિશામાં વાહનનો પ્રવેગ શૂન્ય હોવાથી,

$$N\cos\theta = mg + f\sin\theta \qquad (5.11.7)$$

$$\therefore\ mg = N\cos\theta - f\sin\theta \qquad (5.11.8)$$

સમક્ષિતિજ દિશામાં વાહનની વર્તુળગતિ થતી હોવાથી તેને કેન્દ્રગામી બળ $F_C = \frac{mv^2}{r}$ ની જરૂર છે, જે N અને fના સમક્ષિતિજ ઘટકો વડે પૂરું પડાય છે.

$$\therefore\ \frac{mv^2}{r} = N\sin\theta + f\cos\theta \qquad (5.11.9)$$

સમીકરણ (5.11.9) ને સમીકરણ (5.11.8) વડે ભાગતાં,

$$\frac{v^2}{rg} = \frac{N\sin\theta + f\cos\theta}{N\cos\theta - f\sin\theta} \qquad (5.11.10)$$

મહત્તમ ઘર્ષણબળ $f = f_{s(max)} = \mu_s N$ પરથી આ રસ્તા પર વાહનની મહત્તમ સલામત ઝડપ v_{max} મેળવવા માટે આ સમીકરણમાં $f = f_{s(max)} = \mu_s N$ મૂકતાં,

$$\frac{v^2_{max}}{rg} = \frac{N\, sin\theta + \mu_s\, N\, cos\theta}{N\, cos\theta - \mu_s\, N\, sin\theta} \quad (5.11.11)$$

$$\therefore\ v^2_{max} = rg\left[\frac{sin\theta + \mu_s\, cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\, sin\theta}\right] \quad (5.11.12)$$

અંશ અને છેદને cosθ વડે ભાગતાં,

$$v^2_{max} = rg\left[\frac{tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\, tan\theta}\right] \quad (5.11.13)$$

$$\therefore v_{max} = \sqrt{rg\left[\frac{\mu_s + tan\theta}{1 - \mu_s\, tan\theta}\right]} \quad (5.11.14)$$

સમીકરણ (5.11.6) અને (5.11.14)ને સરખાવતાં માલૂમ પડે છે કે સમક્ષિતિજ વક્રાકાર રસ્તા કરતાં ઢોળાવવાળા વક્રાકાર રસ્તા પર વાહનની મહત્તમ સલામત ઝડપ વધુ છે કારણ કે અહીં tanθ ધન છે.

આપેલ વક્રાકાર રસ્તાની વક્રતાત્રિજ્યા r જાણીને, તથા તેના પર વાહનની મહત્તમ સલામત ઝડપ (દા.ત., 100 km/h) નક્કી કરીને, તેમજ ટાયર અને રસ્તા વચ્ચેનો સ્થિત-ઘર્ષણાંક μ_s જાણીને પછી સમીકરણ (5.11.14) પરથી રસ્તાના ઢોળાવનો જરૂરી કોણ θ શોધવા જોઇએ છે અને તે મુજબના રસ્તા બનાવવા જોઇએ તથા તેના પર મહત્તમ સલામત ઝડપ (v_{max}) દર્શાવતું બોર્ડ યોગ્ય સ્થાને મૂકવું જોઇએ.

આ ચર્ચામાં નીચેના બીજા બે ખાસ કિસ્સાઓનો વિચાર કરીએ :

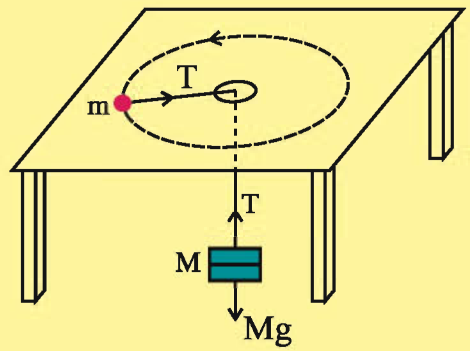
(i) સમીકરણ (5.11.14)માં $\mu_s = 0$ માટે (એટલે કે ઘર્ષણ લાગતું જ ન હોય તો),

$$v_0 = \sqrt{rg\ tan\theta} \quad (5.11.15)$$

ઢોળાવવાળા વક્રાકાર રસ્તા પર આ ઝડપે વાહનને હંકારીએ તો જરૂરી કેન્દ્રગામી બળમાં ઘર્ષણનો ફાળો લઘુતમ થવાથી ટાયરને લાગતો ઘસારો ન્યૂનતમ કરી શકાય. આ ઝડપ v_0 ને optimum (ઇષ્ટ, યથેષ્ટ) ઝડપ કહે છે.

(ii) જો $v < v_0$ હોય, તો ઘર્ષણબળ ઢોળાવની ઊંચી કિનારી તરફ લાગે. [ઉપરની આકૃતિમાં તો f ઢોળાવના નીચા ભાગ તરફ છે તે જુઓ]. જો $tan\theta \le \mu_s$ હોય તો જ વાહનને ઢોળાવવાળા રસ્તા પર સ્થિર ઊભું રાખી શકાય. એટલે કે પાર્ક કરી શકાય.

ઉદાહરણ 11 : ટેબલની એક લીસી સમક્ષિતિજ સપાટી પર m દળના એક પદાર્થને સપાટી પરના કાણામાંથી પસાર થતી એક હલકી દોરી મારફતે M દળના બીજા લટકતા પદાર્થ સાથે જોડે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.14.)



આકૃતિ 5.14

(a) M દળનો પદાર્થ સ્થિર રહે તે માટે m દળના પદાર્થની વર્તુળગતિની શરત v અને r ના પદમાં મેળવો.

(b) ઉપરના કિસ્સામાં 10 kg દળનો પદાર્થ 5 m/sની ઝડપથી 2m ત્રિજ્યાની નિયમિત વર્તુળગતિ જાળવી શકે તે માટે દોરીના બીજે છેડે કેટલું દળ લટકાવવું પડે ?

(g = 10 m/s^2 લો.)

ઉકેલ :

(a) જો આ વર્તુળગતિમાં દોરીમાં ઉદ્ભવતું તણાવ T હોય તો,

જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ $\frac{mv^2}{r} = T$ (1)

જ્યાં, v = ઝડપ, r = વર્તુળમાર્ગની ત્રિજ્યા

અને M દળનો પદાર્થ સ્થિર રહે તે માટે

$Mg = T$ (2)

$\therefore\ \frac{mv^2}{r} = Mg$ (3)

$\therefore\ \frac{v^2}{r} = \frac{M}{m}g$ એ જરૂરી શરત છે.

(b) ઉપરના સમીકરણ (3) મુજબ,

$$(10)\frac{(5)^2}{2} = M(10)$$

$\therefore$ M = 12.5 kg

ઉદાહરણ 12 : એક તકતી $\frac{100}{3}$ rotation/minuteના દરથી સમક્ષિતિજ સમતલમાં તેના કેન્દ્રથી આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. તેના કેન્દ્રથી 5 cm અને 25 cmના અંતરે એક-એક સિક્કો મૂકેલ છે. સિક્કા અને તકતી વચ્ચેનો સ્થિત-ઘર્ષણાંક 0.2 છે. કયો સિક્કો તકતી પરથી ફેંકાઈ જશે ? અને કયો સિક્કો તકતી સાથે જ ભ્રમણ ચાલુ રાખી શકશે.

($g = 10$ m/s^2, $\pi^2 = 10$ લો.)

ઉકેલ :

ધારો કે દરેક સિક્કાનું દળ = m છે.

અત્રે સિક્કાની વર્તુળગતિમાં,

જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ   મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ

$$\frac{mv^2}{r} \le f_{s(max)}$$

હોય તો જ સિક્કો તકતી સાથે ભ્રમણ ચાલુ રાખી શકશે.

વળી, $f_{s(max)} = \mu_s N = \mu_s mg$

($\because$ N = લંબબળ = mg)

અહીં $\frac{100}{3}$ ભ્રમણ માટે 60 s લાગે.

$\therefore$ 1 ભ્રમણ માટે (= T) = ?

$\therefore$ આવર્તકાળ $T = \frac{60 \times 3}{100} = 1.8$ s

અને $v = \frac{2\pi r}{T}$ પરથી, ઉપરની શરત મુજબ,

$$\frac{m}{r}\left(\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\right) \le \mu_s mg$$

$$\therefore r \le \frac{\mu_s gT^2}{4\pi^2}$$

$$\therefore r \le \frac{(0.2)(10)(1.8)^2}{(4)(10)}$$

$\therefore r \le 0.162$ m

$\therefore r \le 16.2$ cm

$\therefore$ કેન્દ્ર નજીકનો સિક્કો તકતી સાથે વર્તુળગતિ ચાલુ રાખશે, દૂરનો સિક્કો ફેંકાઈ જશે.

ઉદાહરણ 13 : 18 km/h ની ઝડપે ગતિ કરતો એક સાઇકલસવાર જ્યારે 3 m જેટલી વક્રતાત્રિજ્યાના સમક્ષિતિજ વળાંક પાસેથી (નમ્યા સિવાય) sharp turn લે ત્યારે તેનું શું થશે તે ગણતરી કરીને બતાવો. સાઇકલના ટાયર અને રોડ વચ્ચેનો સ્થિત-ઘર્ષણાંક 0.1 છે.

ઉકેલ :

અહીં $v = \frac{18000}{3600} = 5$ m/s,

$r = 3$ m અને $\mu_s = 0.1$

સમક્ષિતિજ વળાંકવાળા રોડ પર મહત્તમ ઝડપનું સૂત્ર

$v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$ છે.

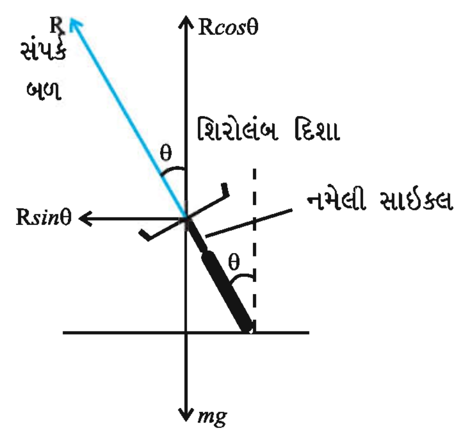
$$\therefore v_{max} = \sqrt{(0.1)(3)(9.8)}$$

$$= 1.714 \text{ m s}^{-1}$$

અને સાઇકલસવારનો વેગ તો આના કરતાં પણ વધુ (5 m s^{-1}) હોઈને સ્પષ્ટ છે કે તે બહારની બાજુ slip થઈ જશે.

ઉદાહરણ 14 : ઉદાહરણ 13માં જો આ સાઇકલસવારને આ જ વળાંક પરથી slip થયા સિવાય પસાર થવું હોય, તો તેણે શું કરવું જોઈએ, તે ગણતરી સહિત દર્શાવો.

ઉકેલ : અત્રે, ઘર્ષણબળ જરૂરી કેન્દ્રગામી પૂરું પાડતું નથી. એટલે જો સાઇકલસવાર ઊર્ધ્વ દિશા સાથે θ કોણે નમન કરે તો સંપર્કબળ (contanct force)ના વર્તુળાકાર માર્ગના કેન્દ્ર તરફના ઘટક વડે કેન્દ્રગામી બળ મેળવી શકાય છે. આથી, સાઇકલસવારે ઊર્ધ્વ દિશા સાથે θ કોણે નમન કરવું પડે. આ હકીકત આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.15

અહીં R એ સાઇકલ પર રસ્તા વડે લાગતું સંપર્કબળ છે. આ બળના બે ઘટકો Rcosθ અને Rsinθ પૈકી R sinθ ઘટક જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે.

$$\therefore R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad (1)$$

વળી આકૃતિ પરથી, $R\cos\theta = mg$ (2)

સમીકરણ (1) ને (2) વડે ભાગતાં,

$$tan\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = 40^o23'$$

(આ નમન વધુ પડતું નથી લાગતું ? વિચારો.)

નોંધ : આ પ્રૉબ્લેમ બળની ચાકમાત્રાઓની મદદથી પણ ઉકેલી શકાય.

ઉદાહરણ 15 : Motor race માટેના એક વર્તુળાકાર ટ્રેકની વક્રતાત્રિજ્યા 300 m અને ઢોળાવ 15^o છે. જો Race carના ટાયરની સપાટી અને ટ્રેક વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.2 હોય, તો (i) ટાયરનો ઘસારો નિવારવા માટે કારને કેટલી optimum ઝડપથી ચલાવવી જોઈએ અને (ii) આ ટ્રેક પરની મહત્તમ સલામત ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ :

(i) સામાન્ય રીતે ઢોળાવવાળા માર્ગ પર ઘર્ષણબળ અને લંબબળનો સમક્ષિતિજ ઘટક જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે. પરંતુ વાહનની optimum ઝડપે લંબબળનો સમક્ષિતિજ ઘટક જ કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવા માટે પૂરતો છે. (ઘર્ષણબળની જરૂર નથી.)

optimum ઝડપના સૂત્ર $v_0 = \sqrt{rg \ tan\theta}$ પરથી,

$$v_0 = \sqrt{(300)\ (9.8)\ (tan\,15^o)}$$

$= 28.1$ m/s.

(ii) મહત્તમ સલામત ઝડપ માટેનાં સૂત્ર

$$v_{max} = \sqrt{rg\left[\frac{\mu_s + tan\theta}{1 - \mu_s\ tan\theta}\right]} \text{ પરથી}$$

$$v_{max} = \sqrt{(300)\ (9.8)\left[\frac{0.2 + tan\,15^o}{1 - 0.2tan\,15^o}\right]}$$

$= 38.1$ m/s

5.12 જડત્વીય અને અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ (Inertial and Non–inertial Frames of Reference

અવલોકનકાર જે સ્થળેથી અને જે પરિસ્થિતિમાં અવલોકન કરે છે, તેને (સ્થળ + પરિસ્થિતિને) નિર્દેશફ્રેમ કહે છે, તેમ આપણે પ્રકરણ-3માં જોઈ ગયા છીએ. આવી નિર્દેશફ્રેમ સ્થિર પણ હોઈ શકે છે, અચળ વેગથી ગતિ કરતી પણ હોઈ શકે છે કે પ્રવેગથી ગતિ કરતી પણ હોઈ શકે છે.

ધારો કે તમે એક સ્થિર બસમાં બેઠા છો. જ્યારે બસ ઝટકાથી ઊપડે છે, ત્યારે તમે પાછળની બાજુ ધકેલાઈ જાઓ છો. હવે તે જ બસ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે, ત્યારે આવો કોઈ ધક્કો જણાતો નથી, અને બસ સ્થિર હતી ત્યારે પણ આવો કોઈ ધક્કો જણાતો ન હતો. હવે ડ્રાઈવર એકાએક બ્રેક મારે ત્યારે તમને આગળની તરફ ધક્કો લાગતો હોય તેમ લાગે છે. આમ, બસની પ્રવેગી (કે પ્રતિપ્રવેગી) સ્થિતિમાં તમારા પર કોઈ દેખીતું બળ લગાડાતું ન હોવા છતાં આવો ધક્કો અનુભવો છો. તો પછી ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ ખોટો પડતો હોય તેમ લાગે છે, કારણ કે આ નિયમ મુજબ તો જ્યાં સુધી વસ્તુ પર બાહ્ય બળ ન લાગે ત્યાં સુધી તેની ગતિની અવસ્થામાં ફેરફાર થવો ન જોઈએ.

આ ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે સ્થિર નિર્દેશફ્રેમમાં અને અચળ વેગથી ગતિ કરતી નિર્દેશફ્રેમમાં ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ પળાય છે. પણ પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમમાં આ નિયમ પળાતો નથી. **જે નિર્દેશફ્રેમમાં ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ પળાય છે, તેને જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ કહે છે અને જે નિર્દેશફ્રેમમાં તે પળાતો નથી, તેને અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ કહે છે.** ચાકગતિ કરતી નિર્દેશફ્રેમ એ પણ અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમનું ઉદાહરણ છે. ઉપરના, બસની ગતિના ઉદાહરણમાં જ્યારે બસ સ્થિરની સ્થિર હોય, અથવા અચળ વેગથી ગતિ કરતી હોય ત્યારે તે જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ છે પણ પ્રવેગી ગતિ વખતે તે જ બસ અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ છે.

અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમમાં પદાર્થોની ગતિની ચર્ચામાં આપણે એક વધારાનું બળ લાગે છે તેમ ગણવાનું છે. આવા બળને **આભાસી (pseudo / fictitious)** બળ F_p કહે છે. બળ તો બે પદાર્થો વચ્ચેની આંતરક્રિયા દરમિયાન ઉદ્ભવે છે, પણ આ જે આભાસી બળ F_pનો ઉલ્લેખ કર્યો છે તે માટે આપેલ પદાર્થ પર બીજો કોઈ પદાર્થ આંતરક્રિયા કરતો જણાતો નથી પણ આ F_p બળ તો નિર્દેશફ્રેમની પ્રવેગી ગતિના કારણે જ લાગતું હોવાનું જણાય છે. આથી તેને આભાસી બળ કહે છે. આ બળ F_pની દિશા નિર્દેશ ફ્રેમના પ્રવેગની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમમાં રહેલા m દળના પદાર્થને, નિર્દેશ ફ્રેમના પ્રવેગ જેટલો જ વધારાનો પ્રવેગ વિરુદ્ધ દિશામાં આપવામાં આવે છે, તેને આભાસી પ્રવેગ a_p કહે છે. આ પરથી $\vec{F_p} = m\ \vec{a_p}$ જેટલું બળ, નિર્દેશફ્રેમના પ્રવેગની વિરુદ્ધ દિશામાં આપીને, તથા બીજાં જે બળો પદાર્થ પર

ખરેખર લાગતાં હોય તેમનો પણ વિચાર કરીને પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરવામાં આવે છે. યાદ રાખો કે આવા કોયડાઓને પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમ (અજડત્વીય)ના સંદર્ભમાં ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમની મદદથી ઉકેલવા જ આવા વધારાના આભાસી બળ F_p ની કલ્પના કરીએ છીએ. જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમમાં આવા કોઈ આભાસી બળ F_pનો વિચાર કરવાનો નથી.

ચકડોળ (merry-go-round) એ પણ પ્રવેગી (અજડત્વીય) નિર્દેશફ્રેમ છે. તેમાં બેસીને ચકડોળ સાથે ઘૂમતા માણસ પર વર્તુળગતિ માટે કેન્દ્રગામી બળની જરૂર છે અને તે બેઠક અને માણસ વચ્ચે લાગતા ઘર્ષણબળ (અથવા પાછળના ટેકાના લંબબળ) દ્વારા પૂરું પડાય છે. આ વાસ્તવિક બળ છે.

પરંતુ માણસને વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રથી દૂર તરફ બળ લાગતું હોવાની (દૂર ફેંકાઈ જતા હોવાની) લાગણી થાય છે. આ આભાસી બળ F_p છે અને તેનું કારણ એ છે કે તે પ્રવેગી (અજડત્વીય) નિર્દેશફ્રેમમાં બેઠેલો છે.

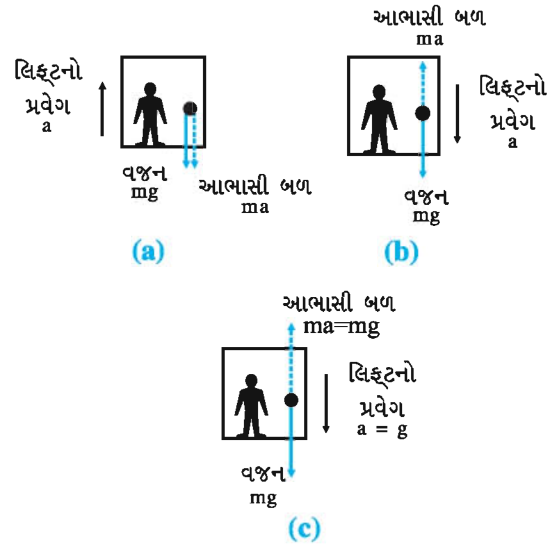
પૃથ્વી પણ અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ છે પણ તેના પ્રવેગને કારણે માપનમાં જે ત્રુટિ આવે છે, તે અત્યંત સૂક્ષ્મ હોય છે. તેથી વ્યાવહારિક હેતુઓ પૂરતું પૃથ્વીને જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ માની લઈએ છીએ. આ બધી ચર્ચાનો નિચોડ એ છે કે :

જો કોઈ એક અજડત્વીય (પ્રવેગી) નિર્દેશફ્રેમનો અધોદિશામાં નો પ્રવેગ ($\vec{a}$) હોય, તો તેમાંના નિરીક્ષકને m દળના પદાર્થની ગતિ સમજવા માટે પદાર્થ પર બીજાં બધાં બળો લાગતાં હોય તે પણ ગણવાનાં અને $\vec{F}_p = m(\vec{a})$ બળ ઊર્ધ્વ દિશામાં વધારાનું ગણવાનું અને પછી ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમનો ઉપયોગ કરવાનો.

ઉદાહરણ 16 : 60 kg દળ ધરાવતો રમેશ એક લિફ્ટમાં સ્પ્રિંગ-બૅલેન્સ પર ઊભેલો છે. (a) જો લિફ્ટ 2 m/s^2ના પ્રવેગથી (i) ઉપર તરફ (ii) નીચે તરફ ગતિ કરે, તો રમેશનું વજન કેટલું નોંધાશે ? (b) જો લિફ્ટનો કૅબલ તૂટી જાય, તો રમેશનું વજન કેટલું નોંધાશે ? (g = 10 m/s^2 લો.)

ઉકેલ : પદાર્થ પર લાગતા પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને વજન w કહે છે. વળી, $w = mg$. બૅલેન્સ વડે નોંધાતું વજનબળ એટલે તેની સપાટી વડે પદાર્થ પર લાગતું લંબબળ અથવા લંબ પ્રતિક્રિયાબળ. લિફ્ટ સ્થિર હોય કે અચળ વેગથી જતી હોય ત્યારે તે જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ છે. અને ત્યારે નોંધાતું રમેશનું વજન $w_1 = mg = (60)\,(10) = 600$ N.

પ્રવેગિત ગતિ કરતી લિફ્ટમાં માણસ અને તેની બાજુમાં તેના પરના બળો નીચેની આકૃતિ (5.16 a, b, c)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.16

(a) (i) લિફ્ટનો ઊર્ધ્વ દિશામાંનો પ્રવેગ = a

∴ તેમાં રહેલો રમેશ પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમમાં છે. તેથી રમેશને અધોદિશામાં આભાસી પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$ આપવો પડે. વળી, અધોદિશામાં તેનું વજનબળ mg પણ લાગે છે. ∴ અધોદિશામાંનું તેના પરનું પરિણામી બળ $W_1 = mg + ma = m\,(g + a)$, તેના વડે આ બળ બૅલેન્સ પર લાગે. આકૃતિ 5.16 (a) અને બૅલેન્સની સપાટી આટલું જ લંબબળ પ્રતિક્રિયા રૂપે લગાડે.

∴ નોંધાતું વજન $= W_1$

$= m(g + a)$

$= 60(10 + 2) = 720$ N.

(ii) લિફ્ટનો અધોદિશામાં પ્રવેગ = a.

∴ તેમાં રહેલો રમેશ પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમમાં છે, તેથી રમેશને ઊર્ધ્વ દિશામાં આભાસી પ્રવેગ **a** આપવો પડે. વળી, અધોદિશામાં તેનું વજનબળ mg પણ લાગે છે. ∴ અધોદિશામાંનું તેના પરનું પરિણામી બળ $W_2 = mg - ma = m\,(g - a)$. તેના વડે આ બળ W_2 બૅલેન્સ પર લાગે. આકૃતિ 5.16 (b). બૅલેન્સની સપાટી આટલું જ લંબબળ પ્રતિક્રિયા રૂપે લગાડે.

∴ નોંધાતું વજન $= W_2 = m\,(g - a)$

$= 60\,(10 - 2)$

$= 480$ N.

(b) જો લિફ્ટનો કેબલ તૂટી જાય તો, લિફ્ટ $a = g$ જેટલા પ્રવેગથી મુક્ત પતન કરશે.

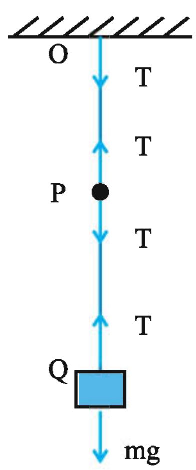
$\therefore$ નોંધાતું વજન $W_3 = m(g - g) = 0$ N.

આને ભારવિહીનતા (Weightlessness)ની અવસ્થા કહે છે.

5.13 ગતિશાસ્ત્રમાં કોયડાઓ ઉકેલવા અંગે માર્ગદર્શન (Guidance for Solving Problems in Dynamics) (માત્ર જાણકારી પૂરતું)

(A) ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં જુદી-જુદી અનેક પ્રકારની ઘટનાઓ, પ્રક્રિયાઓની ચર્ચામાં - 'ઘર્ષણ', 'લંબ પ્રતિક્રિયા', 'લંબબળ', 'પ્રતિક્રિયા', 'હવાનો અવરોધ', 'ધક્કો', 'ઉત્પ્લાવક બળ', 'ખેંચાણ', 'કેન્દ્રગામી બળ', 'વજન' 'તણાવ' ક્રિયાબળ' - જેવા જુદા-જુદા શબ્દો વપરાય છે. તે-તે ઘટનાઓ અને પ્રક્રિયાઓના સંદર્ભમાં આ બધા શબ્દોનો અર્થ છે બળ.

(B) દોરીમાં તણાવ (Tension in a string) : એક દૃઢ આધાર પરની એક દોરીને છેડે એક પદાર્થ (દળ $= m$) લટકાવતાં દોરી કડક (tight) થઈ જાય છે અને આ સ્થિતિમાં દોરીનો દરેક વિભાગ તણાવમાં છે, તેમ કહેવાય છે. દોરીના નીચેના છેડા પાસેના પરમાણુઓના પ્રોટોન - ઇલેક્ટ્રૉન અને સંપર્ક બિંદુ આગળના પદાર્થના પ્રોટોન-ઇલેક્ટ્રોન વચ્ચે પરસ્પર વિદ્યુતચુંબકીય બળ લાગે છે, જેને સંપર્કબળ કહીએ છીએ અને આ સંપર્કબળને કારણે પદાર્થ પડી જતો નથી પણ લટકી રહે છે.



આકૃતિ 5.17

આ જ રીતે દોરીના દરેક બિંદુ આગળ એક વિભાગ અને બીજા (સામેના) બીજા વિભાગ વચ્ચે પણ સંપર્ક બળો લાગે છે, જે ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આ બંને વિભાગો વચ્ચે લાગતાં સંપર્કબળોના સામાન્ય મૂલ્ય (common magnitude)ને તે બિંદુ આગળ દોરીમાં ઉદ્ભવતું તણાવ T કહે છે.

જો દોરી હલકી (એટલે કે દળ રહિત,) હોય તો દોરીમાં દરેક બિંદુ આગળ તણાવ T સમાન હોય છે. (અત્યારે આ બાબત આપણે સાબિતી આપ્યા વિના સ્વીકારી લઈશું.)

આકૃતિમાં P આગળ, PO તરફ તણાવ T અને PQ તરફ તણાવ T, Q બિંદુએ QP તરફ તણાવ T અને O બિંદુએ OP તરફ તણાવ T લાગે છે.

વળી એ સ્પષ્ટ છે કે પદાર્થ સ્થિર હોવાથી $mg = T$.

(C) Free Body Diagram (FBD) : આપણે શીખેલા ન્યૂટનના ગતિના ત્રણ નિયમોની મદદથી ગતિશાસ્ત્ર અંગેના જુદા-જુદા કોયડાઓને ઉકેલી શકીએ છીએ. કોઈ વાર કોયડામાં એક કરતાં વધુ પદાર્થો સંકળાયેલા હોય છે. આવા પદાર્થો એકબીજા પર બળ લગાડતાં હોય છે. ઉપરાંત દરેક પદાર્થ ગુરુત્વબળ પણ અનુભવતો હોય છે. આવા કોયડાઓના ઉકેલમાં, પદાર્થોના (કે તંત્રના) સમૂહ (assembly) માંથી જે ભાગની ગતિની ચર્ચા કરવાની હોય તેને આપણે 'તંત્ર' તરીકે લેવાનું છે. અને સમૂહના બાકીના ભાગોને તેમજ આપણે પસંદ કરેલા તંત્ર પર બળ લગાડતાં અન્ય પરિબળોને 'પરિસર' તરીકે લેવાનું છે.

કોયડાનો ઉકેલ મેળવવા નીચે જણાવેલાં સોપાનો મુજબ આગળ વધવું :

(1) જુદા-જુદા પદાર્થો, તેમની સાથે જોડાયેલા પદાર્થો, તેમને ટેકો આપતા પદાર્થો વગેરેના સમૂહની એક સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ દોરો.

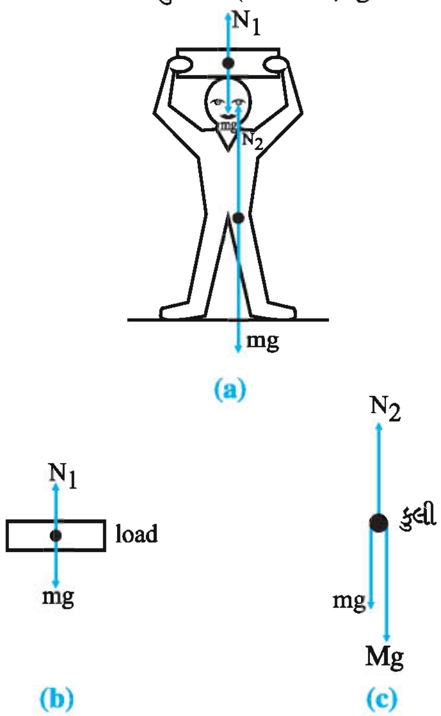
(2) જે પદાર્થ (કે પદાર્થો)ની ગતિની ચર્ચા કરવી છે, તેને 'તંત્ર' તરીકે પસંદ કરો.

જો એક કરતાં વધુ પદાર્થોનું તંત્ર વિચારતા હોવ તો ધ્યાન રાખવું કે તે બધા પદાર્થોનો પ્રવેગસદિશ (મૂલ્ય + દિશા) સમાન હોવો જોઈએ.

(3) તંત્ર પર સમૂહના બાકીના ભાગો વડે લાગતાં બળો અને અન્ય પરિબળો વડે લાગતાં બધાં બળોની યાદી બનાવો. આ યાદીમાં તંત્રની અંદર ઉદ્ભવતા (આંતરિક) બળોનો સમાવેશ કરવાનો નથી.

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિમાં માથે વજન ઊંચકીને ઊભેલા એક કુલીને દર્શાવ્યો છે. આ કિસ્સામાં ઉદ્ભવતાં બળો જોઈએ, તો તે આ મુજબ છે : (આકૃતિ 5.18 (a) (b) (c)). (i) બોજનું વજનબળ mg (કુલી પર અને બોજ પર અધોદિશામાં લાગે છે.), (ii) કુલી વડે બોજ પર લાગતું લંબ પ્રત્યાઘાતી બળ (N_1) (ઊર્ધ્વ દિશામાં) (ખાસ નોંધો કે આ બળ કુલી પર નહિ પણ બોજ પર લાગે છે.),

(iii) કુલીનું વજનબળ Mg (આ બળ અધોદિશામાં કુલી તેમજ જમીન પર લાગે છે. (iv) કુલી પર જમીન વડે લાગતું લંબ પ્રત્યાઘાતી બળ (N_2) (ઊર્ધ્વ દિશામાં) (v) જમીન પર લાગતું બળ (m + M) g



આકૃતિ 5.18

આ બધાં બળોમાંથી કયાં બળો ગણતરીમાં લેવાં પડશે તે ત્યાં સુધી ન કહી શકાય, જ્યાં સુધી તમે તમારું તંત્ર કયું છે, તે સ્પષ્ટ ન કર્યું હોય.

જો આપણને બોજની જ ગતિમાં રસ હોય, તો આપણે માત્ર બોજ પર જ લાગતાં બળો (i) અને (ii) ધ્યાનમાં લેવાં જોઈએ.

હવે જો આપણને ફક્ત કુલીની ગતિમાં જ રસ હોય, તો કુલીને તંત્ર તરીકે લેવું પડે અને ઉપરનાં બળોમાંથી જે બળો ફક્ત કુલી પર જ લાગતાં હોય એટલે કે, (i), (iii) અને (iv) ને ધ્યાનમાં લેવાં પડે.

જો આપણને (બોજ + કુલીના), સમગ્ર તંત્રની ગતિમાં રસ હોય, તો આ તંત્ર પર લાગતાં બધા બાહ્ય બળો (a) (m + M) g અને (b) N_2 ધ્યાનમાં લેવાં પડે.

(4) તંત્રને એક બિંદુ તરીકે દર્શાવી, તેના પર લાગતાં બધાં બળોને સદિશ રૂપે તે બિંદુએથી દર્શાવો. આ આકૃતિને free body diagram (FBD) કહે છે. (આનો એવો અર્થ કરવાનો નથી કે આપણે વિચારેલું તંત્ર બળોથી મુક્ત છે. - હકીકતમાં તેના પર લાગતાં બળો જ આ આકૃતિમાં દર્શાવ્યાં છે.)

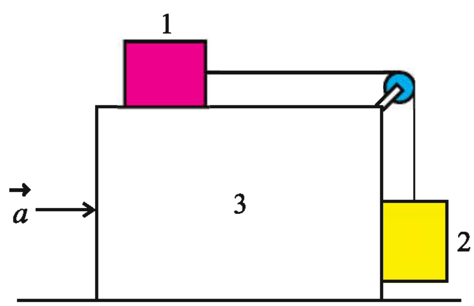
આ આકૃતિ (FBD) માં તંત્ર વડે પરિસર પર લગાડેલ બળો દર્શાવવાનાં નથી.

(5) હવે તંત્ર જે દિશામાં ગતિ કરતું હોય કે કરવાની શક્યતા હોય તે દિશાને X–અક્ષ તરીકે પસંદ કરો અને તેને લંબ દિશા Y–અક્ષ થશે.

હવે તંત્ર પર લાગતાં બળોના X–ઘટકોનું પરિણામી શોધો. તેનું મૂલ્ય તંત્રના દળ અને તેના X–દિશામાંના પ્રવેગ (a_x) ના ગુણાકાર જેટલું થાય છે તેમ દર્શાવતું સમીકરણ લખો. તે જ પ્રમાણે Y–ઘટકો પરથી બીજું સમીકરણ મળશે. આવાં સમીકરણોને ગતિનાં સમીકરણો કહે છે. આ સમીકરણોને ઉકેલવાથી તેમાં રહેલી અજ્ઞાત રાશિ (કે રાશિઓ) મળી શકે છે.

(6) જો મળતાં સમીકરણો કરતાં અજ્ઞાત રાશિઓની સંખ્યા વધુ હોય, તો આપણે પસંદ કરેલા તંત્ર સિવાયના બીજા કોઈ ભાગને તંત્ર તરીકે લઈ તેના FBD પરથી અન્ય સમીકરણો મેળવી, ઉકેલ શોધો.

ઉદાહરણ 17 : આકૃતિ 5.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર બ્લૉક 3ની સાથે સમાન દળના બે બ્લૉક 1 અને 2 સંપર્કમાં છે. 3 અને 1ની સપાટી તથા 3 અને 2ની સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક μ છે. આ બે બ્લૉક 1 અને 2ને એકબીજા સાથે હલકી દોરી વડે બાંધીને દોરીને હલકી અને ઘર્ષણ રહિત ગરગડી પરથી પસાર કરેલ છે, તો બ્લૉક 3 કેટલા લઘુત્તમ પ્રવેગથી સમક્ષિતિજ દિશામાં ગતિ કરે કે જેથી બ્લૉક 3 ની સાપેક્ષે 1 અને 2 ગતિ ન કરે ? (આ ઉદાહરણ માત્ર જાણકારી પૂરતું છે.)



આકૃતિ 5.19

ઉકેલ : ધારો કે બ્લૉક 3નો સમક્ષિતિજ દિશામાં (જમણી બાજુ તરફ) જરૂરી લઘુતમ પ્રવેગ a છે.

બ્લૉક 1 પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ થશે :

(i) પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષી બળ = mg (અધોદિશામાં)

(ii) બ્લૉક 3ની સપાટી વડે લાગતું લંબબળ = N_1 (ઊર્ધ્વ દિશામાં)

(iii) દોરી વડે લાગતું તણાવબળ = T (જમણી બાજુ)

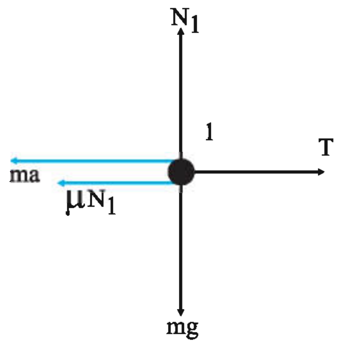
(iv) ઘર્ષણબળ = μN_1 (ડાબી બાજુ)

(v) આભાસી બળ = ma (ડાબી બાજુ)

બ્લૉક 1ને તંત્ર તરીકે ગણીને તેનો FBD આકૃતિ

5.20 માં દર્શાવેલ છે. ઊર્ધ્વ દિશામાં કોઈ જ પરિણામી પ્રવેગ ન હોઈને $N_1 = mg$.

અને સમક્ષિતિજ દિશામાં $ma + \mu N_1 = T$



આકૃતિ 5.20

$\therefore$ ma + μmg = T (1)

બ્લૉક 2 પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ થશે :

(i) પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષી બળ = mg (અધોદિશામાં),

(ii) બ્લૉક 3ની સપાટી વડે લાગતું લંબબળ = N_2 (જમણી તરફ),

(iii) દોરી વડે લાગતું તણાવબળ = T (ઊર્ધ્વ દિશામાં),

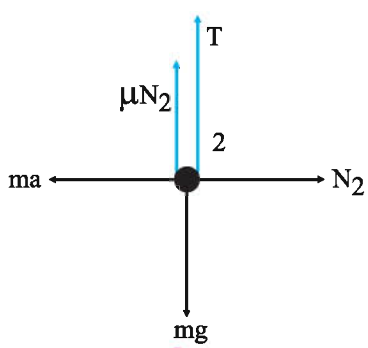
(iv) ઘર્ષણબળ = μN_2(ઊર્ધ્વ દિશામાં)

(v) આભાસી બળ = ma (ડાબી બાજુ)

બ્લૉક 2ને તંત્ર તરીકે ગણીને તેનો FBD આકૃતિ 5.21માં દર્શાવેલ છે. સમક્ષિતિજ દિશામાં કોઈ જ પરિણામી પ્રવેગ ન હોઈને $N_2 = ma$.

અને ઊર્ધ્વ દિશામાં $\mu N_2 + T = mg$

$\therefore \ \mu ma + T = mg$



આકૃતિ 5.21

સમીકરણ (1)માંથી Tની કિંમત મૂકતાં,

$\mu ma + ma + \mu mg = mg$

$\therefore \ a(\mu + 1) = g(1 - \mu)$

$$\therefore \ a = g\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)$$

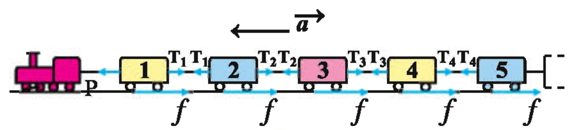
ઉદાહરણ 18 : એક પ્રવેગિત માલગાડીમાં સમાન દળના 25 વેગન લગાડેલાં છે. ચોથા અને પાંચમા વેગન વચ્ચેના couplingમાં ઉદ્‌ભવતો તણાવ તથા 21મા અને 22મા વેગન વચ્ચેના couplingમાં ઉદ્‌ભવતો તણાવ સમાન હશે કે નહિ તે ગણીને બતાવો.

ઉકેલ : ધારો કે એન્જિનનું પ્રથમ વેગન પરનું ખેંચાણબળ = P

અને દરેક વેગન પર લાગતું ઘર્ષણબળ = f

દરેક વેગનનું દળ = m

સમગ્ર માલગાડીનો પ્રવેગ = a



આકૃતિ 5.22

પહેલા ચાર વેગનનો FBD વિચારતાં, (આકૃતિ 5.22 મુજબ)

$P - 4f - T_4$ = પરિણામી બળ = $(4m)a$

$\therefore \ T_4 = P - 4(f + ma)$ (1)

આ T_4 એ ચોથા અને પાંચમા વેગન વચ્ચેનો તણાવ છે.

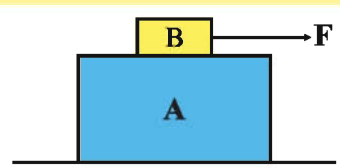
આ જ રીતે પહેલા 21 વેગનનો FBD વિચારતાં,

$T_{21} = P - 21(f + ma)$ (2)

જ્યાં T_{21} એ 21મા અને 22મા વેગન વચ્ચેનો તણાવ છે.

સમીકરણો (1) અને (2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે $T_4 \neq T_{21}$ અને $T_4 > T_{21}$.

ઉદાહરણ 19 : 20 kg દળનો એક બ્લૉક (A) ઘર્ષણ રહિત સપાટી પર મૂકી તેના પર 2 kg દળનો એક પદાર્થ (B) મૂક્યો છે. A અને Bની સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.25 છે. જ્યારે B પર 2 N નું બળ સમક્ષિતિજ દિશામાં લગાડવામાં આવે ત્યારે (i) બ્લૉક A અને પદાર્થ Bનો પ્રવેગ અને (ii) A અને B ની વચ્ચે લાગતું ઘર્ષણબળ ગણો. (iii) જો આ બળ 20 N નું હોય, તો આ બધી રાશિઓ ગણો. $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ લો.



આકૃતિ 5.23

ઉકેલ : એ સુવિદિત છે કે જ્યાં સુધી લગાડેલ બળ એ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ કરતાં ઓછું હશે, ત્યાં સુધી A અને B વચ્ચે કોઈ સાપેક્ષ ગતિ થશે નહિ. એટલે કે તે બંને જાણે કે એક જ પદાર્થ હોય તેમ ગતિ કરશે.

પ્રસ્તુત કિસ્સામાં મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ = μmg

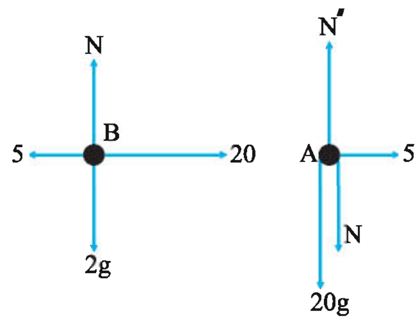
= (0.25) (2) (10) = 5 N

(i) જ્યારે B પર 2 N નું બળ લગાડવામાં આવે ત્યારે A અને B વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ થતી ન હોઈને બંનેના પ્રવેગ સમાન (ધારો કે a) હશે. દળ × પ્રવેગ = બળ

$$\therefore (2 + 20)a = 2 \therefore a = \frac{1}{11} = 0.09 \text{ m s}^{-2}$$

(ii) A અને B વચ્ચે લાગતું ઘર્ષણબળ $f = F - ma$ = 2 − (2) (0.09) = 1.82 N

(iii) જો 20 N નું બળ લગાડવામાં આવે, તો આ બળ એ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણબળ (5 N) કરતાં વધુ હોઈને હવે A અને B વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ સંભવશે અને બંનેના પ્રવેગનાં મૂલ્યો જુદાં-જુદાં હશે. આ પરિસ્થિતિમાં A અને B ના FBD આકૃતિ 5.24માં દર્શાવ્યા મુજબના હશે.

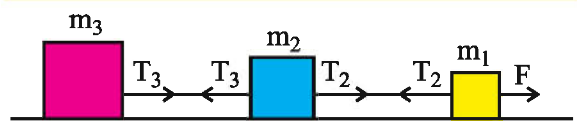


આકૃતિ 5.24

આના પરથી $20 - 5 = 2\,a_B \therefore a_B = 7.5 \text{ m s}^{-2}$

અને $5 = 20\,a_A \therefore a_A = 0.25 \text{ m s}^{-2}$.

ઉદાહરણ 20 : આકૃતિ 5.25માં દર્શાવ્યા અનુસાર m_1 = 1 kg અને m_2 = 2 kg અને m_3 = 3kg દળના ત્રણ બ્લૉક્સને દળ રહિત દોરી વડે બાંધીને તેમને સમક્ષિતિજ, લીસી સપાટી પર મૂકેલા છે. દળ m_1 પર F = 12 N નું બળ લગાડેલ છે, તો (i) આ તંત્રનો પ્રવેગ, (ii) m_1 અને m_2 વચ્ચેની દોરીમાં ઉદ્દ્ભવતું તાણ T_2 અને (iii) m_2 અને m_3 વચ્ચેની દોરીમાં ઉદ્દ્ભવતું તાણ T_3 શોધો.



આકૃતિ 5.25

ઉકેલ : (i) આ તંત્રનો પ્રવેગ

$$a = \frac{\text{કુલ બળ}}{\text{કુલ દળ}} = \frac{12}{1+2+3} = 2 \text{ m s}^{-2}$$

(ii) $T_2 = (m_2 + m_3)a = (2 + 3)\ (2)$

$= 10$ N

(iii) $T_3 = m_3 a = 3 \times 2 = 6$ N

આ જ તંત્ર પર આટલું જ બળ (12 N) m_3 પર ડાબી બાજુ લાગે છે, તેમ માનીને આ દાખલો ફરીથી ગણો અને તેના પરથી તમારું અર્થઘટન જણાવો.

સારાંશ

1. ગતિ માટેનાં અને તેમાં ફેરફાર માટેનાં કારણો અંગે વિચારીશું.
2. પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બળની જરૂર છે, એવો ઍરિસ્ટોટલનો ખ્યાલ સાચો નથી. વ્યવહારમાં અચળ વેગથી થતી ગતિને ચાલુ રાખવા માટે જે બાહ્ય બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે, તે ઘર્ષણ (તે પણ એક બાહ્ય બળ જ છે.)ને પહોંચી વળવા માટે જ છે.
3. ગેલિલિયોએ આપેલા જડત્વના નિયમને ન્યૂટને ગતિના પહેલા નિયમના રૂપમાં નવા સ્વરૂપે આ રીતે રજૂ કર્યો – "પદાર્થ પર કોઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગુ ન પડે ત્યાં સુધી સ્થિર પદાર્થ સ્થિર જ રહે છે, ગતિમાન પદાર્થ પોતાનો વેગ અચળ જાળવી રાખે છે."

   આ નિયમ બળની વ્યાખ્યા આપે છે.
4. પદાર્થનું વેગમાન $\vec{p} = m\vec{v}$ એ સદિશ રાશિ છે. વેગમાન વેગ કરતાં કંઈક વધુ માહિતી આપે છે.
5. ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ : 'પદાર્થના વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર લાગુ પાડેલા પરિણામી બાહ્ય બળના જેટલો અને બાહ્યબળની દિશામાં હોય છે.'

   $\vec{F} = d\vec{p}\ /\ dt = m\vec{a}$ એ સદિશ સંબંધ છે.

બળનો SI એકમ newton (= N) છે. 1 N = 1 kg. m s^{-2}. આ નિયમ બળનું મૂલ્ય આપે છે. તે પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત છે. ($\vec{F} = 0$ સૂચવે છે કે $\vec{a} = 0$). આ સમીકરણમાં જે ક્ષણે બળ $\vec{F}$ લાગે તે જ ક્ષણે જે પ્રવેગ $\vec{a}$ હોય તે ગણવાનો છે. (ભૂતકાળનો - એટલે અગાઉના સમયનો - નહિ !) આ $\vec{F}$ માત્ર પરિણામી બાહ્ય બળ જ છે.

6. બળનો આઘાત એ બળ અને તે લાગવાના સમયનો ગુણાકાર છે અને મોટું બળ અલ્પ સમય સુધી લાગે ત્યારે $\vec{F}$ અને Δt માપવાનું અઘરું હોય છે, પણ વેગમાનનો ફેરફાર માપી શકાય છે, જે બળના આઘાત ($\vec{F}\ \Delta t$) જેટલો જ હોય છે.

7. ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ : ''દરેક ક્રિયાબળને હંમેશાં સમાન મૂલ્યનું અને વિરુદ્ધ દિશામાંનું પ્રતિક્રિયા બળ હોય છે.''

   બળો હંમેશાં જોડમાં જ લાગે છે અને $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયા બળ બંને એક સાથે જ લાગે છે. તેઓ જુદા-જુદા પદાર્થો પર લાગે છે, તેથી તેમનો સરવાળો કરીને નાબૂદ કરી શકાય નહિ. પણ એક જ પદાર્થના અંદરનાં જુદા-જુદા ભાગો વચ્ચેનું પરિણામી શૂન્ય થાય. (આ કેવી રીતે થાય, તેની સમજૂતી ભવિષ્યમાં હવે પછીના સિમેસ્ટરમાં તમે 'કણોના તંત્રનું ગતિવિજ્ઞાન' - એ પ્રકરણ ભણશો ત્યારે મળશે.)

8. વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ અને ત્રીજા નિયમ પરથી મળે છે. તેને આમ લખાય છે : ''અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.''

9. એક બિંદુગામી બળો એટલે જે બળોની કાર્યરેખા એક જ બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તેવાં બળો.

   આવાં બળોની અસર નીચે પદાર્થના સંતુલન માટે $\sum\vec{F} = 0$ થવું જોઈએ. વળી, અનુરૂપ ઘટકોનો સરવાળો પણ શૂન્ય થવો જોઈએ. ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$)

10. ઘર્ષણ, સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓ વચ્ચેના સંપર્ક બળને લીધે ઉદ્ભવે છે. તે અપેક્ષિત કે વાસ્તવિક સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે.

    સ્થિત ઘર્ષણબળ $f_s \le f_{s(max)} = \mu_s N$ અને

    ગતિક ઘર્ષણબળ $f_k = \mu_k N$

    μ_s = સ્થિત-ઘર્ષણાંક

    μ_k = ગતિક ઘર્ષણાંક અને $\mu_k < \mu_s$.

11. નિયમિત વર્તુળગતિ કરતા પદાર્થ પર mv^2 / r જેટલું બળ વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્ર તરફ લાગે છે, તેને કેન્દ્રગામી બળ કહે છે.

    સમતલીય વક્રાકાર માર્ગ પરની મહત્તમ સલામત ઝડપ $v_{max} = \sqrt{\mu_s\ rg}$

    ઢોળાવવાળા વક્રાકાર માર્ગ પરની મહત્તમ સલામત ઝડપ $v_{max} = \sqrt{rg\left(\frac{\mu_s + tan\theta}{1 - \mu_s tan\theta}\right)}$

12. જે નિર્દેશફ્રેમમાં ન્યૂટનના ગતિના પહેલા નિયમનું પાલન થાય, તેને જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ કહે છે અને જેમાં તેનું પાલન ન થાય તેને અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ કહે છે. અચળ વેગવાળી નિર્દેશફ્રેમ

જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ છે અને પ્રવેગ ધરાવતી નિર્દેશફ્રેમ અજડત્વીય નિર્દેશ ફ્રેમ છે. અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમના પ્રવેગ જેટલો જ વધારાનો પ્રવેગ (આભાસી પ્રવેગ) વિરુદ્ધ દિશામાં પદાર્થ પર ગણીને ગતિ અંગેના કોયડાઓ ઉકેલી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. 100 g દળના પદાર્થ પર બળ લાગતાં તેના વેગમાં પ્રતિ સેકન્ડે 20 cm s^{-1}નો ફેરફાર થાય છે, તો આ બળનું મૂલ્ય .... N હશે.

   (A) 0.2 (B) 0.02 (C) 0.002 (D) 2.0

2. v જેટલા સમક્ષિતિજ વેગથી ગતિ કરતી m દળની એક ગોળી, સમક્ષિતિજ અને ઘર્ષણરહિત સપાટી પર સ્થિર પડેલા એક M દળના લાકડાના બ્લૉકમાં ઘૂસીને સ્થિર થઈ જતી હોય, તો આ સંયુક્ત તંત્ર કેટલા વેગથી ગતિ કરશે ?

   (A) $\frac{mv}{M - m}$ (B) $\frac{Mv}{M - m}$

   (C) $\frac{Mv}{M + m}$ (D) $\frac{mv}{M + m}$

3. સમક્ષિતિજ રસ્તા પર થતી વાહનની પ્રવેગી ગતિ શાને આભારી છે ?

   (A) વાહનના એન્જિન (B) ડ્રાઇવર

   (C) પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ (D) રસ્તા અને વાહન વચ્ચે ઘર્ષણ

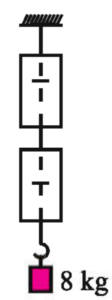
4. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એક 8 kg દળના પદાર્થને બે હલકી સ્પ્રિંગ-બૅલેન્સના છેડે લટકાવેલ છે, તો

   (A) બંને સ્પ્રિંગ-બૅલેન્સ વડે નોંધાતાં દળ 8 kg છે.

   (B) બંને સ્પ્રિંગ-બૅલેન્સ વડે નોંધાતાં દળ 4 kg છે.

   (C) ઉપરનું બૅલેન્સ 8 kg અને નીચેનું બૅલેન્સ 0 kg નોંધશે.

   (D) બંને બૅલેન્સ વડે નોંધાતાં દળ ગમે તે હશે પણ તેનો સરવાળો 8 kg થશે.



આકૃતિ 5.26

5. θ કોણના એક ઘર્ષણ રહિત ઢાળ પર m દળનો એક બ્લૉક મૂકેલ છે, તો ઢાળની સપાટી વડે બ્લૉક પર લાગતું લંબબળ .... જેટલું હશે.

   (A) mg (B) $\frac{mg}{\cos\theta}$ (C) $mg \cos\theta$ (D) $mg \sin\theta$

6. θ કોણના એક ઘર્ષણ રહિત ઢાળ પર m દળનો એક બ્લૉક મૂકેલ છે. હવે આ તંત્ર (ઢાળ + બ્લૉક)ને સમક્ષિતિજ દિશામાં એવી રીતે a પ્રવેગથી ગતિ કરાવવામાં આવે કે બ્લૉક ઢાળ પર સરકે નહિ, તો a = ...

   (A) $g \tan\theta$ (B) $g \sin\theta$ (C) $g \cos\theta$ (D) $g / \sin\theta$

7. એક લિફ્ટના તળિયે રહેલા θ કોણના એક ઘર્ષણ રહિત ઢાળ પર એક બ્લૉક મૂકેલ છે. જ્યારે લિફ્ટ પ્રતિપ્રવેગ a સાથે નીચે ઊતરે ત્યારે આ બ્લૉકનો ઢાળની સપાટીને સાપેક્ષ પ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) $g \sin\theta$ (B) $a\sin\theta$
(C) $(g - a)\sin\theta$ (D) $(g + a)\sin\theta$

8. નીચેનામાંથી સત્ય વિધાન જણાવો :

(A) એક પદાર્થનો વેગ અચળ છે, પણ ઝડપ બદલાય છે.
(B) એક પદાર્થની ઝડપ અચળ છે, પણ પ્રવેગનું મૂલ્ય બદલાય છે.
(C) એક પદાર્થની ઝડપ અચળ છે અને અશૂન્ય એવી અચળ છે.
(D) એક પદાર્થની ઝડપ અચળ છે અને વેગ બદલાય છે.

9. પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ સાથે જોડેલ નિર્દેશફ્રેમને આપણે કેવી નિર્દેશ ફ્રેમ ગણી શકીએ ?

(A) અજડત્વીય (B) જડત્વીય
(C) જડત્વીય કે અજડત્વીય ગમે તે (D) ઉપરમાંથી એકેય નહિ.

10. એક લિફ્ટમાં ઊભેલ વ્યક્તિના હાથમાંથી સિક્કો પડી જાય છે. જો લિફ્ટ સ્થિર હોય, તો આ સિક્કાને લિફ્ટમાં તળિયે પહોંચતાં t_1 સમય લાગે છે. જ્યારે લિફ્ટ ઉપર તરફ પ્રવેગી ગતિ કરતી હોય, ત્યારે આ જ સિક્કાને તળિયે પહોંચતાં t_2 સમય લાગે છે, તો

(A) $t_1 = t_2$ (B) $t_1 < t_2$
(C) $t_1 > t_2$ (D) કંઈ કહી શકાય નહિ.

11. એક લિફ્ટમાં ઊભેલ વ્યક્તિના હાથમાંથી સિક્કો પડી જાય છે. જો લિફ્ટ સ્થિર હોય, તો આ સિક્કાને લિફ્ટમાં તળિયે પહોંચતાં t_1 સમય લાગે છે. જ્યારે લિફ્ટ ઉપર તરફ અચળ વેગથી ગતિ કરતી હોય ત્યારે જ સિક્કાને તળિયે પહોંચતાં t_2 સમય લાગે છે. તો

(A) $t_1 = t_2$ (B) $t_1 < t_2$
(C) $t_1 > t_2$ (D) કંઈ કહી શકાય નહિ.

12. દરેકનું દળ m હોય તેવી N ગોળીઓ v જેટલા વેગથી એક દીવાલ તરફ દીવાલને લંબ રૂપે, એક સેકંડમાં n ગોળીઓના અચળ દરથી છોડવામાં આવે છે, જે દીવાલને અથડાઈને દીવાલ પર સ્થિર થાય છે, તો દીવાલ વડે ગોળીઓ પર લાગતો પ્રત્યાઘાત .... હશે.

(A) nmv (B) $\frac{Nmv}{n}$ (C) $\frac{nNm}{v}$ (D) $\frac{nNv}{m}$

13. 1.5 kg દળના સ્થિર પદાર્થ પર 0.5 s માટે બળ લાગે છે. બળ લાગતું બંધ થયા પછી આ પદાર્થ 2 s માં 5 mનું અંતર કાપતો હોય, તો તે બળનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?

(A) 5 N (B) 7.5 N (C) 10 N (D) 12.5 N

14. 2 kg દળના એક પદાર્થ પર 4 N નું બળ X–દિશામાં અને 3 Nનું બળ Y–દિશામાં લાગે છે, તો તે પદાર્થના પ્રવેગનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?

(A) 1.5 m s^{-2} (B) 2.0 m s^{-2} (C) 2.5 m s^{-2} (D) 3.5 m s^{-2}

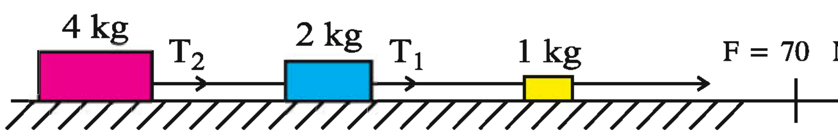
15. 400 N નું તણાવ ખમી શકે તેવું એક દોરડું એક ઝાડ સાથે બાંધીને લટકાવેલ છે. 30 kg દળનો એક વાંદરો આ દોરડું પકડીને ઉપર ચઢે છે, તો નીચે દર્શાવેલા કયા કિસ્સામાં દોરડું તૂટી જશે ? (g = 10 m s^{-2} લો અને દોરડાનું દળ અવગણો.)

(A) વાંદરો 5 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી ઉપર ચઢે, તો
(B) વાંદરો 2 m s^{-2}ના અચળ પ્રવેગથી ઉપર ચઢે, તો
(C) વાંદરો 5 m s^{-2}ના અચળ પ્રવેગથી ઉપર ચઢે, તો
(D) વાંદરો 12 m s^{-1}ના અચળ વેગથી ઉપર ચઢે, તો

16. $0.5\ kg\ m\ s^{-1}$ના વેગમાનથી આવી રહેલા એક દડાને બૅટ્સમેન દ્વારા ફટકારતાં તે $0.3\ kg\ m\ s^{-1}$ ના વેગમાનથી તે જ માર્ગ પર વિરુદ્ધ દિશામાં પાછો ફેંકાય છે. જો દડાનો બૅટ સાથેનો સંપર્કસમય 0.02 s હોય, તો બૅટ વડે તેના પર લાગેલું બળ શોધો.
(A) 10 N (B) 40 N (C) 75 N (D) 30 N

17. 1000 kg દળના એક બ્લૉકને ટેબલની સમક્ષિતિજ સપાટી પર સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિમાં લાવવા માટે 200 N સમક્ષિતિજ બળની જરૂર પડે છે, તો બ્લૉક અને ટેબલની સપાટી વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક કેટલો હશે ? [$g = 10\ m\ s^{-2}$ લો.]
(A) 0.2 (B) 0.02 (C) 0.5 (D) 0.05.

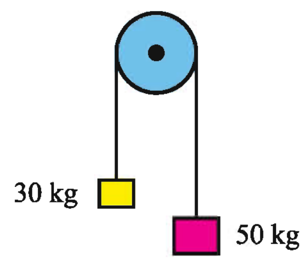
18. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ ઘર્ષણરહિત સપાટી પર મૂકેલા 4 kg, 2 kg અને 1 kg દળના બ્લૉકના તંત્ર પર 70 Nનું સમક્ષિતિજ બળ લગાડવામાં આવે છે. જો એક દોરીમાં તણાવ T_1 = 60 N હોય, તો બીજી દોરીમાં તણાવ T_2 કેટલો હશે ?



આકૃતિ 5.27

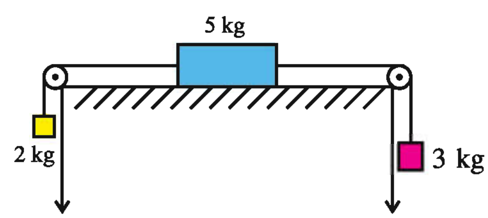
(A) 40 N (B) 60 N (C) 20 N (D) 10 N

19. ઘર્ષણરહિત ગરગડી પરથી પસાર કરેલી દોરીના એક છેડે 30 kg અને બીજા છેડે 50 kg દળના પદાર્થ લટકાવેલ છે, તો આ તંત્રનો પ્રવેગ કેટલો થશે ? [$g = 10\ m\ s^{-2}$ લો.]
(A) $8\ m\ s^{-2}$ (B) $6\ m\ s^{-2}$
(C) $2.5\ m\ s^{-2}$ (D) $2\ m\ s^{-2}$



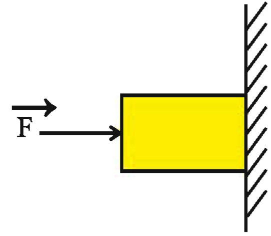
આકૃતિ 5.28

20. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 2 kg, 5 kg અને 3 kg દળના બ્લૉકને ઘર્ષણ રહિત સમક્ષિતિજ સપાટી પર બે છેડે જોડેલી ઘર્ષણરહિત ગરગડી પરથી પસાર થતી હલકી દોરીઓ સાથે જોડેલા છે. આ તંત્રનો પ્રવેગ કેટલો હશે ? [$g = 10\ m\ s^{-2}$ લો.]
(A) $1\ m\ s^{-2}$ (B) $2\ m\ s^{-2}$
(C) $5\ m\ s^{-2}$ (D) $8\ m\ s^{-2}$



આકૃતિ 5.29

21. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ દીવાલ સાથે સંપર્કમાં રહેલા 5 kg બ્લૉકને નીચે પડતો અટકાવવા માટે સમક્ષિતિજ દિશામાં લગાડવા પડતા જરૂરી બળ $\vec{F}$નું મૂલ્ય કેટલું હશે ? ($g = 10\ m\ s^{-2}$ લો.) બ્લૉક અને દીવાલ વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.4 છે.
(A) 200 N (B) 20 N
(C) 12.5 N (D) 125 N



આકૃતિ 5.30

22. એક સ્થિર બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થતાં ત્રણ ટુકડા થાય છે. જો બે ટુકડાઓનાં વેગમાન અનુક્રમે $2\hat{i}$ એકમ અને $3\hat{j}$ એકમ હોય, તો ત્રીજા ટુકડાના વેગમાનનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?

(A) $\sqrt{13}$ એકમ (B) 5 એકમ (C) 6 એકમ (D) 13 એકમ

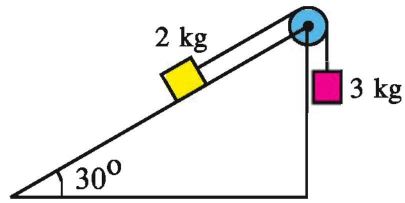
23. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 2.0 kg અને 3.0 kg દળના બે બ્લૉકને ઘર્ષણ રહિત ગરગડી પરથી પસાર કરેલી હલકી દોરીના બે છેડે જોડેલ છે. જો આ તંત્ર સ્થિર રહેતું હોય, તો ઘર્ષણબળનું મૂલ્ય અને દિશા શોધો. ($g = 10$ m s^{-2} લો.)

(A) 20 N, ઢાળ પર નીચે તરફ

(B) 20 N, ઢાળ પર ઉપર તરફ

(C) 10 N, ઢાળ પર નીચે તરફ

(D) 10 N, ઢાળ પર ઉપર તરફ



આકૃતિ 5.31

24. નિયમિત (અચળ) ઝડપથી ગતિ કરતી ટ્રેનમાં બેઠેલ એક મુસાફર તેના હાથમાં રહેલા સિક્કાને ઊર્ધ્વ દિશામાં ઉછાળે છે અને થોડી વારે સિક્કો તેના હાથમાં પાછો આવે છે. આ દરમિયાનની સિક્કાની ગતિ ટ્રેનની બહાર જમીન પર સ્થિર ઊભેલા નિરીક્ષકને કેવી દેખાશે ?

(A) પરવલયાકાર (B) સમક્ષિતિજ

(C) ઊર્ધ્વ દિશામાં સુરેખ અને પછી અધોદિશામાં સુરેખ (D) વર્તુળમય

25. એક ઓરડાની છતમાંથી લટકાવેલ અને ઊર્ધ્વતલમાં દોલનો કરતા લોલક માટે (i) ગોળો ગતિપથના અંત્યબિંદુએ હોય, (ii) ગોળો ગતિપથના મધ્યમાન સ્થાને હોય તેવા કિસ્સાઓમાં અચાનક દોરી તૂટી જાય, ત્યારે જમીનને અડકે ત્યાં સુધીમાં ગોળાના ગતિપથ અનુક્રમે કેવા હશે ?

(A) અધોદિશામાં વક્ર, અધોદિશામાં સુરેખ (B) અધોદિશામાં સુરેખ, પરવલયાકાર

(C) ઊર્ધ્વદિશામાં સુરેખ, પરવલયાકાર (D) ઊર્ધ્વદિશામાં સુરેખ, અધોદિશામાં વક્ર

26. આકૃતિ 5.32માં દર્શાવ્યા મુજબ દરેકનું દળ 1.0 *kg* હોય તેવા સાત એક સમાન બ્લોકને એક પર એક ગોઠવીને મૂકેલા છે. આ સ્થિર તંત્રમાં ત્રીજા બ્લોક પર ચોથા બ્લોક વડે અને બીજા બ્લોક વડે લાગતાં સંપર્કબળના મૂલ્યો અનુક્રમે કેટલાં કેટલાં હશે ? ($g = 10$ m s^{-2} લો)

(A) 40 N, 50 N (B) 50 N, 40 N

(C) 40 N, 20 N (D) 50 N, 30 N

આકૃતિ 5.32

જવાબો

1. (B)	**2.** (D)	**3.** (D)	**4.** (A)	**5.** (C)	**6.** (A)
7. (D)	**8.** (D)	**9.** (A)	**10.** (C)	**11.** (A)	**12.** (A)
13. (B)	**14.** (C)	**15.** (C)	**16.** (B)	**17.** (B)	**18.** (A)
19. (C)	**20.** (A)	**21.** (D)	**22.** (A)	**23.** (A)	**24.** (A)
25. (B)	**26.** (A)				

નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

1. 0.2 kg દળના એક દડાને 2 m s^{-1}ના વેગથી ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. તેના ગતિપથના ટોચના બિંદુએ (i) તેના વેગનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? (ii) તેના પ્રવેગનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? (iii) તેના પર લાગતા બળનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? [$g = 10$ m/s^2 લો.]

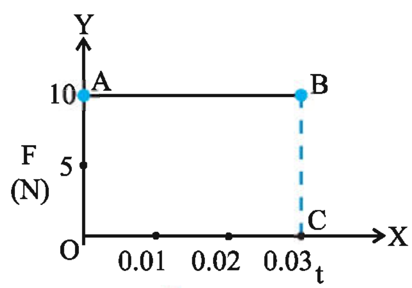
[**જવાબો :** 0, 10 m/s^2, 2N]

2. જડત્વની વ્યાખ્યા આપો.

3. અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ એટલે શું ?

4. સમક્ષિતિજ ટેબલ પર સ્થિર રહેલું પુસ્તક અને અચળ ઝડપથી અધોદિશામાં ગતિ કરતું વરસાદનું ટીપું, એ બેમાં ગતિશાસ્ત્રની દૃષ્ટિએ શું સામ્ય છે ?

5. એક પદાર્થ માટે F $\rightarrow$ t નો આલેખ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. આરંભથી 0.03 s ના ગાળામાં વેગમાનના ફેરફારનું મૂલ્ય (Δp) કેટલું થશે ?



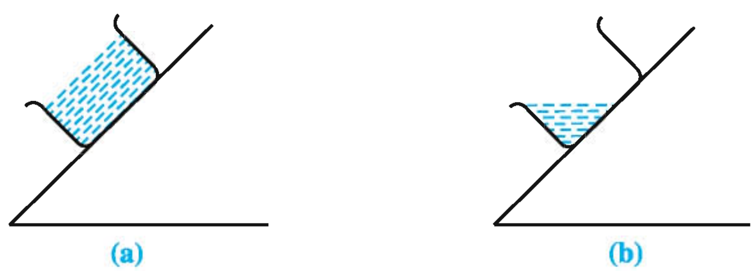
આકૃતિ 5.33

[**જવાબ :** 0.3 kg m s^{-1}]

6. અપેક્ષિત ગતિ એટલે શું ?

7. બળના આઘાતનું પારિમાણિક સૂત્ર આપો.

8.



આકૃતિ 5.34

આકૃતિમાં દર્શાવેલા પાણી ભરેલાં બે બીકરોમાંથી કયું સ્થિર છે અને કયું પ્રવેગથી ઢાળ પર ઊતરી રહ્યું છે તે તમે કહી શકશો ? (**સૂચન :** સ્થિર પ્રવાહીની સપાટી સમક્ષિતિજ રહે છે. પ્રવેગિત બીકરમાંના પ્રવાહી પર બીકરના પ્રવેગની વિરુદ્ધ દિશામાં આભાસી બળ લાગતું ગણવાનું છે.)

9. નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિમાં (i) વેગનું માત્ર મૂલ્ય અચળ હોય છે. (ii) વેગસદિશ અચળ હોય છે. (iii) વેગની દિશા અચળ હોય છે - સત્ય હોય તે પસંદ કરો. [**જવાબ :** (i)]

[આ જ પ્રમાણે પ્રવેગ, વેગમાન અને બળ અંગે પ્રશ્નો તમે જાતે બનાવો અને તેના જવાબ પણ જાતે જ આપો.]

10. નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ દરમિયાન પદાર્થના (i) વેગનું મૂલ્ય, (ii) પ્રવેગનું મૂલ્ય, (iii) બળનું મૂલ્ય, (iv) વેગમાનનો સદિશ એ બધામાંથી કયું અચળ નથી હોતું ? [જવાબ : (iv)]

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વેગમાનની વ્યાખ્યા આપો. ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ લખો. તે પરથી $\vec{F} = m\vec{a}$ મેળવો.

2. વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ લખો અને એક ઉદાહરણ વડે સમજાવો.

3. ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ અને બીજો નિયમ આપો. બંને નિયમો બળ વિશે કઈ-કઈ માહિતી આપે છે તે જણાવો.

4. સ્થિતઘર્ષણ વિશે ટૂંકમાં સમજાવો અને તે અંગેના નિયમો આપો.

5. સમતલ વક્રાકાર માર્ગ પર વાહનની મહત્તમ સલામત ઝડપ (v_{max}) માટેનું સૂત્ર મેળવો.

6. ઢોળાવવાળા વક્રાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતા વાહન માટે (FBD)ની મદદથી મહત્તમ સલામત ઝડપ (v_{max}) નું સૂત્ર મેળવો.

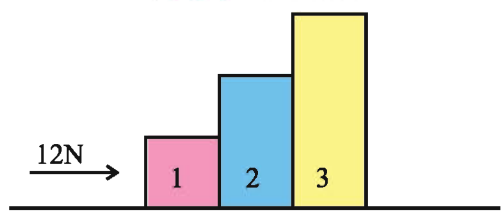
7. ઘર્ષણના લાભ અને ગેરલાભ જણાવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એકબીજા તરફ 5 m s^{-1} ના વેગથી ગતિ કરતા બે 80 g દળના સમાન ગોળાઓ એકબીજા સાથે અથડાઈને પોતપોતાની ગતિની દિશા ઉલટાવીને પાછા તેટલી જ ઝડપે ગતિ કરતા હોય, તો કોઈ એક ગોળાએ બીજા ગોળા પર લગાડેલ બળનો આઘાત કેટલો હશે ? દરેક ગોળાના વેગમાનના ફેરફારનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? [જવાબ : 0.8 N s, 0.8 kg m s^{-1}]

2. 6 kg અને 2 kg દળના બે બ્લૉક્સને સમક્ષિતિજ લીસી સપાટી પર એકબીજાને સ્પર્શે તે રીતે મૂકેલા છે. જો 6 kg દળના બ્લૉક પર 2 N નું બળ સમક્ષિતિજ દિશામાં બંને બ્લૉક્સને એક સાથે ગતિ થાય તેમ લગાડવામાં આવે, તો 2 kg દળના પદાર્થનો પ્રવેગ કેટલો હશે ? આ બ્લૉક પર લાગતું બળ કેટલું હશે ? [જવાબ : 0.25 m s^{-2}, 0.5 N]

3. 1 kg, 2 kg અને 3 kg દળના ત્રણ બ્લૉક્સને સમક્ષિતિજ લીસી સપાટી પર એકબીજાને સ્પર્શે તે રીતે મૂકીને 1 kg દળના બ્લૉક પર 12 Nનું બળ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ લગાડવામાં આવે તો,

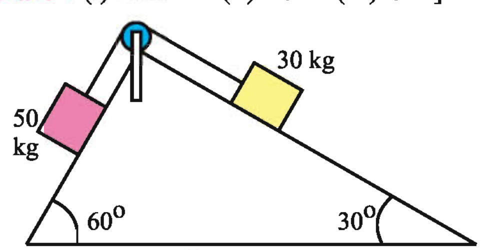


આકૃતિ 5.35

(i) ત્રણ બ્લૉકના બનેલા આ તંત્રનો પ્રવેગ (ii) 2 kg દળના બ્લૉક પર પ્રથમ બ્લૉક વડે લાગતું સંપર્ક બળ અને (iii) 3 kg ના બ્લૉક પર લાગતું સંપર્કબળ શોધો.

[જવાબ : (i) 2 m s^{-2} (ii) 10 N (iii) 6 N]

4. આકૃતિ 5.35માં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ સાથે 60^{o} ના લીસા ઢાળ પર એક 50 kg દળનો બ્લૉક અને 30^{o} ના લીસા ઢાળ પર એક 30 kg દળનો બ્લૉક મૂકી તેમને એક દળરહિત દોરી વડે જોડીને દોરીને એક હલકી ઘર્ષણરહિત ગરગડી પરથી પસાર કરીને ઢાળની બે બાજુઓ પર ગોઠવેલા છે, તો આ બ્લૉક્સથી બનેલા તંત્રનો પ્રવેગ અને દોરીમાં ઉદ્‌ભવતો તણાવ શોધો. [g = 10 m s^{-2}, $\sqrt{3}$ = 1.7 લો.]

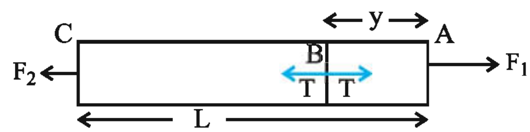


આકૃતિ 5.36

[જવાબ : 3.437 m s^{-2} , 253.11 N]

5. 3 kg જેટલા સમાન દળના બે બ્લૉકને એકબીજા સાથે હલકી દોરી વડે બાંધીને એક સમક્ષિતિજ સપાટી પર મૂકેલા છે. આમાંથી કોઈ એક બ્લૉક પર સમક્ષિતિજ દિશામાં 20 Nનું બળ લગાડવામાં આવે, તો દરેક બ્લૉકનો પ્રવેગ 0.5 m s^{-2} જેટલો મળે છે. બંને બ્લૉક પર લાગતું ઘર્ષણબળ સમાન છે, તેમ ધારીને દોરીમાં ઉદ્ભવતું તણાવ શોધો. [જવાબ : 10 N]

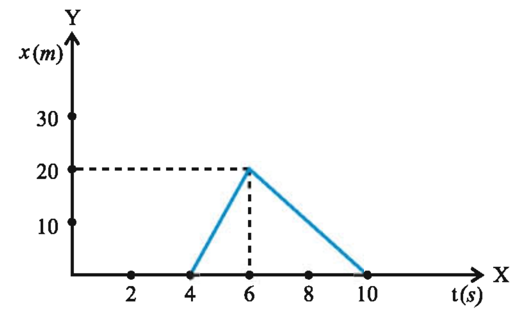
6. આકૃતિ 5.36માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે L લંબાઈના સળિયાના બે છેડા પર અસમાન બળો F_1 અને F_2 ($F_2 < F_1$) લાગે છે, તો A છેડાથી y અંતરે સળિયામાં ઉદ્ભવતો તણાવ શોધો.



આકૃતિ 5.37

[જવાબ : $T = F_1\left(1 - \frac{y}{L}\right) + F_2\left(\frac{y}{L}\right)$]

7. એક જ સુરેખામાં ગતિ કરતા 2.0 kg દળના એક પદાર્થ માટે, તેના આરંભબિંદુથી અંતર $x \rightarrow$ સમય tનો આલેખ આકૃતિ (5.39)માં દર્શાવ્યો છે. તો (i) $t = 2$ s અને (ii) $t = 6$ s આગળ સૂક્ષ્મ સમયગાળા માટે બળના આઘાતનાં મૂલ્યો શોધો.



આકૃતિ 5.38

[જવાબ : (i) 0, (ii) 30 N s]

8. m_1 અને m_2 દળના બે પદાર્થો માત્ર એકબીજા પર લગાડેલા ગુરુત્વાકર્ષી બળની અસર હેઠળ, એક સાથે સ્થિર સ્થિતિથી શરૂ કરી એકબીજાને મળે ત્યારે તેમણે કાપેલાં અંતરો અનુક્રમે s_1 અને s_2 હોય, તો $\frac{s_1}{s_2}$ ગુણોત્તર શોધો.

[જવાબ : $\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1}$]

9. θ કોણવાળા ઢાળની ઉપરની અડધી લંબાઈ લીસી (ઘર્ષણરહિત) સપાટીવાળી અને નીચેની અડધી લંબાઈ રફ (ખરબચડી) સપાટીવાળી છે. આ ઢાળની ટોચથી એક બ્લૉક ગતિ શરૂ કરીને જ્યારે તળિયે આવે છે. ત્યારે સ્થિર થઈ જતો હોય તો બ્લૉકની સપાટી અને ઢાળની રફ સપાટી વચ્ચેનો ગતિ ઘર્ષણાંક કેટલો હશે ?

[જવાબ : $\mu = 2\tan\theta$]

પ્રકરણ 6

કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર

6.1 પ્રસ્તાવના

6.2 કાર્ય અને અચળ બળ દ્વારા થતું કાર્ય

6.3 ચલ બળ દ્વારા થતું કાર્ય

6.4 ગતિ-ઊર્જા

6.5 સ્થિતિ-ઊર્જા

6.6 સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા

6.7 સંરક્ષણબળો માટે બળ અને સ્થિતિ-ઊર્જા વચ્ચેનો સંબંધ

6.8 પાવર

6.9 સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાતો

6.10 દ્વિ-પરિમાણમાં સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત

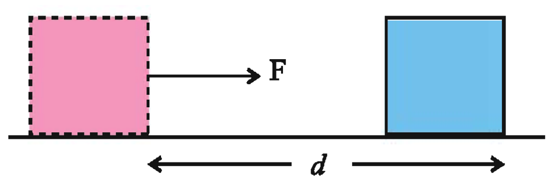
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

6.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર શબ્દોથી આપણે સૌ પરિચિત છીએ. જ્યારે શિક્ષક તમને ભણાવતા હોય, તમે ભણતા હો અથવા કોઈ માણસ ટેબલને ધક્કો મારતો હોય, તો આ બધા કિસ્સામાં તેઓ કામ (કાર્ય) કરે છે તેમ કહેવાય. પરંતુ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં 'કાર્ય'નો એકદમ ચોક્કસ અર્થ છે. 'કાર્ય' શબ્દ સાંભળતા આપણાં મગજમાં ઊભરતાં ચિત્ર કરતાં તેનો અર્થ, ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં ઘણો જુદો પડે છે. રોજિંદા જીવનમાં કાર્ય કરવા માટે, આપણે ઊર્જા ખર્ચીએ છીએ. આપણે આ માટે બળ લગાડવું પડે છે અને ત્યારે કાર્ય થાય છે. ભૌતિક વિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ 'કાર્ય' થવા માટે બળની દિશામાં સ્થાનાંતર થવું જરૂરી છે. બેઠા બેઠા વાંચવું એ ભૌતિક વિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ કાર્ય નથી. તેને કદાચ 'માનસિક કાર્ય' ગણી શકાય. ઘણી વાર વધુ કાર્યક્ષમ વ્યક્તિ નક્કી કરવા માટે આપણે બે કે તેથી વધુ વ્યક્તિઓ દ્વારા સમયના સમાન ગાળામાં થતું કાર્ય સરખાવીએ છીએ. તો હવે આપણે ભૌતિક વિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ કાર્યનો શું અર્થ છે તે સમજીએ.

6.2 કાર્ય અને અચળ બળ દ્વારા થતું કાર્ય (Work and Work done by a Constant Force)

આગળ જણાવ્યા મુજબ ભૌતિક વિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ જો બળની દિશામાં સ્થાનાંતર થાય અથવા સ્થાનાંતરની દિશામાં બળનો કોઈ ઘટક હોય તો કાર્ય થયું કહેવાય છે. થયેલાં કાર્યના મૂલ્યનો અંદાજ પદાર્થના વેગના મૂલ્યમાં થતાં ફેરફાર પરથી જાણી શકાય છે.



આકૃતિ 6.1

આકૃતિ 6.1માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ બ્લૉક પર બળ $\vec{F}$ લાગતાં બળની દિશામાં થતું સ્થાનાંતર $\vec{d}$ છે. સ્પષ્ટ છે કે આ બળની અસર હેઠળ પદાર્થ વધુ અંતર કાપે, તો તેની ઝડપના મૂલ્યમાં થતો ફેરફાર વધુ હોય ($v^2 - v_0^2 = 2ad$) વળી, જો બળનું મૂલ્ય વધુ હોય તોપણ ઝડપમાં થતો

ફેરફાર વધુ હોય. આમ, વેગના મૂલ્યમાં થતો ફેરફાર અને તેથી થતું કાર્ય સ્થાનાંતરના મૂલ્ય અને બળના મૂલ્ય પર આધારિત છે. જો બળ અને સ્થાનાંતર એક જ દિશામાં હોય તો કાર્યની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય.

બળના મૂલ્ય અને બળ લાગતું હોય તે સમયગાળા દરમિયાન થતાં સ્થાનાંતરના મૂલ્યના ગુણાકારને કાર્ય કહે છે. આમ, કાર્યનું મૂલ્ય

$W = (F) \times (d)$

સૂત્રથી મળે.

કાર્યનો એકમ N m અથવા જૂલ(joule) છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1 L^2 T^{-2}$ છે. (1 J કાર્ય ક્યારે થયું કહેવાય ? વિચારો.)

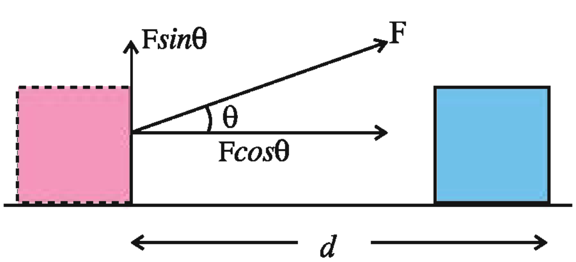
માત્ર જાણકારી માટે :

કાર્યનો એકમ 'જૂલ' બ્રિટિશ ભૌતિક વિજ્ઞાની જેમ્સ પ્રેસ્કોટ જૂલના નામ પરથી રાખવામાં આવેલ છે. તેઓનું મૂખ્ય પ્રદાન ઉષ્માના ક્ષેત્રમાં છે. તેઓએ કાર્ય અને ઉષ્મા વચ્ચે સમતુલ્યતા પ્રસ્થાપિત કરી. શ્રેણીબદ્ધ પ્રયોગોને અંતે તેમણે દર્શાવ્યું કે 1 કેલરી ઉષ્મા પેદા કરવા માટે 4.186 J કાર્ય કરવું પડે. એટલે કે 1 cal = 4.186 J આ અચળાંક ઉષ્માનો યાંત્રિક તુલ્યાંક અથવા જૂલના અચળાંક તરીકે ઓળખાય છે. અત્રે એ નોંધવું જરૂરી છે કે, ઉષ્માનું માપન જૂલ સિવાય કેલરીમાં પણ થાય છે. (1 g શુદ્ધ પાણીનું તાપમાન 14.5°C થી 15.5°C સુધી વધારવા માટે આપવી પડતી ઉષ્મા 1 કેલરી કહેવાય છે.)

આ તો થઈ સ્થાનાંતરની દિશામાં લાગતા બળ વડે થતા કાર્યની વાત. પણ દરેક કિસ્સામાં સ્થાનાંતર અને બળ એક દિશામાં હોય તેવું બનતું નથી. આકૃતિ 6.2.

તેથી વ્યાપક રીતે કાર્યની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે.

બળ વડે થતાં સ્થાનાંતરના મૂલ્ય અને સ્થાનાંતરની દિશામાં બળના ઘટકના મૂલ્યના ગુણાકારને કાર્ય કહે છે. આકૃતિ 6.2 માં થયેલા સ્થાનાંતરનું મૂલ્ય d છે. જ્યારે સ્થાનાંતરની દિશામાં બળના ઘટકનું મૂલ્ય $F\cos\theta$ છે.



આકૃતિ 6.2

આમ, કાર્ય

$$W = F\cos\theta \times d \qquad (6.1.1)$$
$$= F\,d\cos\theta$$

અહીં $\vec{F}$ અને $\vec{d}$ અનુક્રમે બળ અને સ્થાનાંતરનાં મૂલ્ય છે. બળ $\vec{F}$ અને સ્થાનાંતર $\vec{d}$ સદિશ હોવા છતાં કાર્ય W અદિશ છે. તેથી સમીકરણ 6.1.1 નીચે મુજબ પણ લખી શકાય :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad (6.2.2)$$

હવે આપણે કાર્યના કેટલાક વિશિષ્ટ કિસ્સાઓ જોઈએ.

(i) જો $\theta = 0$ હોય, તો અગાઉ જણાવ્યા મુજબ બળ અને સ્થાનાંતરની દિશા સમાન છે, તેથી કાર્ય

$$W = Fd$$

ઉદાહરણ તરીકે મુક્ત પતન કરતો પદાર્થ. આ પદાર્થ પર ગુરુત્વાકર્ષણનું બળ અધોદિશામાં લાગે છે તથા સ્થાનાંતર પણ તે જ દિશામાં છે, તેથી થતું કાર્ય

$$W = Fd$$
$$= mg\,d$$

જ્યાં d સ્થાનાંતરનું મૂલ્ય, m પદાર્થનું દળ અને g ગુરુત્વપ્રવેગ છે.

(ii) જો $\theta = \pi/2$ હોય, તો બળ સ્થાનાંતરને લંબ બને અને તેથી કાર્ય

$$W = F\cos\pi/2\,d$$
$$= F(0)\,d = 0$$

આમ, બળ અને સ્થાનાંતર પરસ્પર લંબ હોય, તો પદાર્થ પર બળ દ્વારા કોઈ કાર્ય થતું નથી. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં બળ વડે ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ વેગને લંબ છે અને તેથી તે માત્ર વેગની દિશા બદલી શકે છે. પણ વેગના મૂલ્યમાં ફેરફાર કરી શકતો નથી. નિયમિત વર્તુળગતિમાં પણ કેન્દ્રગામી બળ પદાર્થના તત્કાલીન વેગને લંબ હોવાથી અને તેથી તત્કાલીન સ્થાનાંતરને લંબ હોવાથી કોઈ કાર્ય થતું નથી. પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરના ભૂસ્થીર ઉપગ્રહો પર પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણના બળને કારણે કોઈ કાર્ય થતું નથી.

(iii) જો $\theta = \pi$, હોય તો $\vec{F}$ અને સ્થાનાંતર $\vec{d}$ પરસ્પર વિરોધી દિશામાં હોય આમ,

$W = F cos(\pi) d$

$= F(-1) d$

$= -Fd$

આ હકીકત દર્શાવે છે કે બળ અને સ્થાનાંતર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોય, તો થતું કાર્ય ઋણ છે અને પદાર્થ દ્વારા બળની વિરુદ્ધ કાર્ય થાય છે તેમ કહેવાય. પૂરઝડપથી જતી મોટરકારની ઝડપ ઘટાડવા બ્રેક લગાવવામાં આવે, ત્યારે બ્રેક દ્વારા ઉદ્‌ભવતું ઘર્ષણબળ સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ દિશામાં છે, તેથી મોટરકાર દ્વારા ઘર્ષણબળની વિરુદ્ધ કાર્ય થયું છે, તેમ કહેવાય.

વળી, જો $0 \le \theta < \pi/2$ તો $cos\theta$ નું મૂલ્ય ધન થવાથી કાર્યનું મૂલ્ય ધન થાય તેમ કહેવાય. પણ જો $\pi/2 < \theta \le \pi$ તો $cos\theta$ નું મૂલ્ય ઋણ થવાથી થતું કાર્ય ઋણ મળે.

અત્રે એક બાબત નોંધનીય છે કે જો બળ અને સ્થાનાંતર એક જ દિશા ન ધરાવતા હોય, તો તે અન્ય કોઈ બળની હાજરી સૂચવે છે અથવા પદાર્થ શરૂઆતમાં બળની દિશામાં ન હોય તેવો પ્રારંભિક વેગ ધરાવતો હોય છે.

ઉદાહરણ 1 : એક પદાર્થ પર (3, 2, 1) N બળ લગાડતાં તે X–અક્ષની દિશામાં 5*m* સ્થાનાંતર કરે છે, તો પદાર્થ પર બળ વડે થતું કાર્ય ગણો.

ઉકેલ :

અહીં, સ્થાનાંતર $\vec{d} = 5\hat{i}$

$\therefore \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

$= (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (5\hat{i})$

$= 15J$

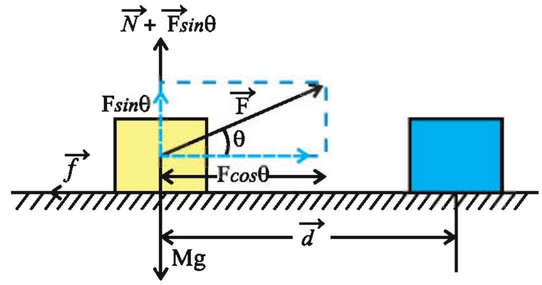
[આટલું જ સ્થાનાંતર Y અને Z અક્ષની દિશામાં હોય તો કાર્ય કેટલું થાય ? જાતે ગણો.]

ઉદાહરણ 2 : નટવરલાલની સાઇકલ રસ્તા પર 10 m સુધી ઘસડાઈને થોભે છે. આ ક્રિયા દરમિયાન રસ્તા વડે સાઇકલ પર તેની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં 200 N જેટલું ઘર્ષણબળ લાગે છે. સાઇકલ વડે ઘર્ષણની વિરુદ્ધ થતું કાર્ય અને સાઇકલને કારણે રસ્તા પર લાગતા બળ વડે રસ્તા પર થતું કાર્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં ઘર્ષણબળ અને સાઇકલનું સ્થાનાંતર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી, $\theta = \pi$. આમ, ઘર્ષણબળની વિરુદ્ધમાં સાઇકલ વડે થતું કાર્ય $W = Fd cos\theta = (200)(10)(-1) = -2000$ J. ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ અનુસાર સાઇકલ પણ રસ્તા પર વિરુદ્ધ દિશામાં તેટલું જ બળ લગાડે છે. પણ આ બળની અસર હેઠળ રસ્તાનું કોઈ સ્થાનાંતર થતું નથી. પરિણામે આ બળ વડે રસ્તા પર થતું કાર્ય શૂન્ય મળે છે. ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે એક અગત્યનું તારણ નીચે પ્રમાણે નોંધીશું :

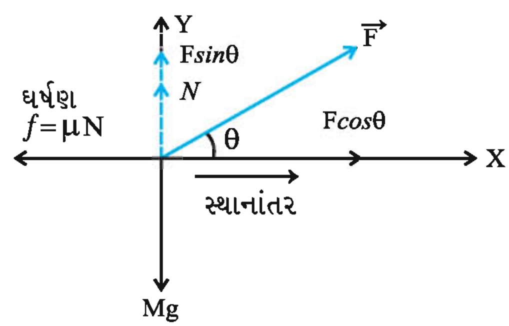
પદાર્થ A વડે પદાર્થ B પર લાગતું બળ, તે હંમેશાં B પર A વડે લાગતા બળ જેટલું જ તથા વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. પરંતુ B વડે A પર થતું કાર્ય તે A વડે B પર થતાં કાર્ય જેટલું જ હોવું જોઈએ, તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.3માં સમક્ષિતિજ રફ સપાટી પર પડેલા M દળના બ્લૉકને સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાં લાગતા બળ $\vec{F}$ વડે ખસેડવામાં આવે છે. જો બ્લૉક $\vec{d}$ જેટલું સ્થાનાંતર કરે, તો થતું કાર્ય શોધો. બ્લૉક અને સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક μ છે.



આકૃતિ 6.3

ઉકેલ : બ્લૉક FBD (free body diagrams) આકૃતિ 6.4માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.4

Y–દિશામાં કોઈ સ્થાનાંતર થતું ન હોવાથી $N + F sin\theta = Mg$

$\therefore \quad N = Mg - F sin\theta \qquad (1)$

અત્રે સ્થાનાંતર *x* દિશામાં થતું હોવાથી, આ સ્થાનાંતર માટે જવાબદાર પરિણામી બળ

$= F cos\theta - \mu N = F cos\theta - \mu(Mg - F sin\theta)$

(સમીકરણ (1) પરથી)

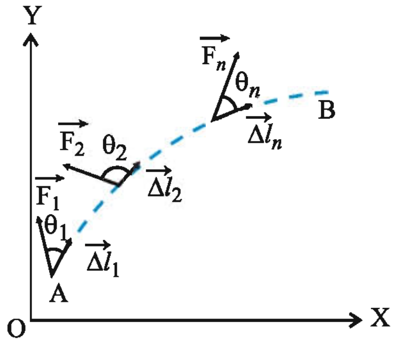
$\therefore$ કાર્ય $= [F cos\theta - \mu(Mg - F sin\theta)]\, d$

$= [F(cos\theta + \mu sin\theta) - \mu Mg]\, d$

6.3 ચલ બળ દ્વારા થતું કાર્ય (Work done by Variable Force)

સામાન્ય રીતે વ્યવહારમાં થતાં કાર્ય માટે ચલ બળ જવાબદાર હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે સમક્ષિતિજ સપાટી પર એક છેડેથી જડિત સ્પ્રિંગને બ્લૉક વડે દબાવતાં થતું કાર્ય એ ચલ બળની અસર હેઠળ થતું કાર્ય છે. જે આગળ આ પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું.

આકૃતિ 6.5માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે કોઈ કણ બિંદુ Aથી બિંદુ B સુધી વક્રમાર્ગે ચલ બળની અસર હેઠળ ગતિ કરે છે.



આકૃતિ 6.5

ધારો કે આ વક્રમાર્ગ પરનાં જુદાં-જુદાં બિંદુઓએ બળનાં મૂલ્યો અને દિશા જુદાં-જુદાં છે. આ સ્થિતિમાં કાર્ય ગણવા માટે A થી B સુધીના સમગ્ર માર્ગને મોટી સંખ્યાના સૂક્ષ્મ સદિશ રેખાખંડો $\Delta \vec{l}_1, \Delta \vec{l}_2, ..., \Delta \vec{l}_n$. માં વિભાજિત થયેલો ગણો.

અત્રે દરેક ખંડ એટલો સૂક્ષ્મ છે કે તેને સુરેખ ગણી સદિશ તરીકે લઈ શકાય છે.

આ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરો (ખંડો) પાસે લાગતાં બળો ધારો કે અનુક્રમે $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ છે. અત્રે ખંડો સૂક્ષ્મ હોવાથી આ બળોને, જે-તે ખંડ માટે લગભગ અચળ ગણી શકાય.

તે દરમિયાન દરેક સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર માટે થતું કાર્ય તે સ્થાનાંતર અને લાગતા બળનો અદિશ (ડોટ) ગુણાકાર કરીને મેળવી શકાય. આવાં બધાં સ્થાનાંતરો માટેનાં કાર્યોનો સરવાળો, કણની A થી B સુધીની ગતિ દરમિયાન થતું કુલ કાર્ય દર્શાવે છે. એટલે કે,

કુલ કાર્ય, $W = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 + ... + \vec{F}_n \cdot \Delta \vec{l}_n$

$$\therefore W = \sum_{A}^{B} \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l}_i \qquad (6.3.1)$$

સમીકરણ (6.2.1)માં લક્ષ $\lim\limits_{|\Delta \vec{l}| \to 0}$ લેતાં આ સરવાળો સંકલનમાં પરિણમે છે અને નીચે મુજબ લખાય છે :

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{A}^{B} F cos\theta dl \qquad (6.2.2)$$

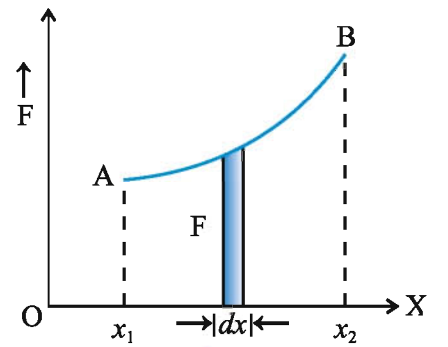
અહીં $\int_{A}^{B}$ એ A થી B સુધીનું વક્રમાર્ગ AB પર બળનું રેખા સંકલન (line integral) દર્શાવે છે.

જો કણની ગતિ એક જ પરિમાણમાં હોય અને બળ પણ કણની ગતિની દિશામાં જ લાગતું હોય તો, (ગતિની દિશા X-અક્ષ પર લેતાં),

$$W = \int_{A}^{B} F dx \ cos0 = \int_{A}^{B} F dx$$

જો બિંદુ A અને B ના x-યામો (આકૃતિ 6.6) અનુક્રમે x_1 અને x_2 હોય તો,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx \qquad (6.2.3)$$



આકૃતિ 6.6

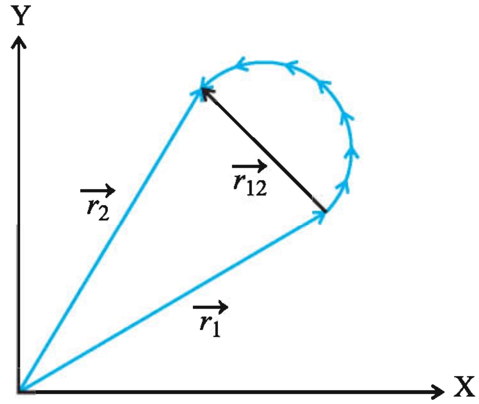
આકૃતિ 6.6 માં કોઈ એક ખાસ કિસ્સામાં બળ F એ x પર કેવી રીતે આધાર રાખે છે તે દર્શાવ્યું છે. અત્રે dx જેટલા એક નાના સ્થાનાંતર માટે થતું કાર્ય, Fdx એ આકૃતિમાં દર્શાવેલ પટ્ટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું છે. આમ, x_1 થી x_2 સુધીની ગતિ દરમિયાન થતું કાર્ય x_1 અને x_2 વચ્ચેની આવી પટ્ટીઓના ક્ષેત્રફળના સરવાળા રૂપે મેળવી શકાય. બીજા શબ્દોમાં બળ F $\rightarrow$ x ના આલેખ વડે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ એ x_1થી x_2 સુધીની ગતિ દરમિયાન કાર્યનું મૂલ્ય આપે છે.

પદાર્થ પર લાગતું બળ અચળ હોય તથા તેનો ગતિમાર્ગ વક્ર હોય, તેવા કિસ્સામાં કાર્યની ગણતરી સરળ હોય છે. ધારો કે આકૃતિ 6.7 દર્શાવ્યા અનુસાર એક પદાર્થ અચળ બળ $\vec{F}$ની અસર હેઠળ $\vec{r}_1$ થી $\vec{r}_2$ પર વક્રમાર્ગે ગતિ કરે છે. હવે,

$$\text{કાર્ય } W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$\vec{F}$ બળ અચળ હોવાથી,

$$W_{12} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{dr} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$



આકૃતિ 6.7

આમ, અચળ બળની અસર હેઠળ વક્રમાર્ગે થતાં પદાર્થના સ્થાનાંતર દરમિયાન થતું કાર્ય એ અચળ બળ અને સ્થાનાંતર સદિશના ડોટ ગુણાકાર (અદિશ ગુણાકાર) જેટલું હોય છે.

ઉદાહરણ 4 : બળ $\vec{F}(x) = (3x^2 - 2x + 7)\ \hat{i}$ N ની અસર હેઠળ એક કણનું સ્થાનાંતર X-અક્ષ પર $x = 0$ થી $x = 10$ m થાય છે, તો કાર્યની ગણતરી કરો. $\left[\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$

ઉકેલ :

$$W = \int_0^{10} F dx \qquad ((6.3.3) \text{ પરથી})$$

$$\therefore W = \int_0^{10} (3x^2 - 2x + 7)dx$$

$$W = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^{10} - \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{10} + [\ 7x\ ]_0^{10}$$

$$W = 1000 - 100 + 70 = 970 \text{ J.}$$

6.4 ગતિ-ઊર્જા (Kinetic Energy)

ઊર્જા એટલે કાર્ય કરવાની ક્ષમતા. પદાર્થની ગતિના કારણે તેમાં રહેલ કાર્ય કરવાની ક્ષમતાને પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા કહે છે. તાર્કિક રીતે વિચારતાં કહી શકાય કે વધુ ઝડપથી ગતિ કરતાં પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા, ઓછી ઝડપથી ગતિ કરતાં તે જ પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા કરતાં વધુ હોવી જોઈએ.

પદાર્થ પર બળ લાગતાં તેમાં પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે. આમ, વેગમાં ફેરફાર થતાં પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં પણ ફેરફાર થાય છે. વળી, પદાર્થ પર બળ લાગતાં તેનું સ્થાનાંતર પણ થાય છે. માટે પદાર્થ પર કાર્ય થયું તેમ કહેવાય. આ હકીકતો દર્શાવે છે કે પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય અને તેની ગતિ-ઊર્જામાં થતાં ફેરફાર વચ્ચે કોઈ સંબંધ હોવો જોઈએ. તો હવે આપણે પદાર્થ પર બળ વડે થતા કાર્ય અને પરિણામે પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં થતાં ફેરફાર વચ્ચે સંબંધ મેળવીશું.

બળ $\vec{F}$ વડે થતું કાર્ય,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad (\text{જ્યાં, } \vec{d} = \text{સ્થાનાંતર})$$

પણ $\vec{F} = m\vec{a}$ (m = પદાર્થનું દળ, $\vec{a}$ = પ્રવેગ)

$$\therefore W = m\vec{a} \cdot \vec{d} \qquad (6.4.1)$$

પણ ગતિના સમીકરણ

$v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{d}$ અનુસાર

$$W = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right)$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (6.4.2)$$

અહીં v_0 અને v અનુક્રમે બળ લાગ્યા અગાઉ અને બળ લાગ્યા પછીની પદાર્થની ઝડપો છે.

અત્રે જમણી બાજુ સમાન પ્રકારનાં, ઊર્જાનાં પરિમાણો ધરાવતાં, બે પદો વચ્ચેનો તફાવત છે, જે ગતિ સાથે સંકળાયેલ ઊર્જામાં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે. **પદાર્થના દળ અને તેના વેગના વર્ગના ગુણાકારના અર્ધા મૂલ્યને પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા (K) કહે છે.** તેથી,

$$\text{ગતિ-ઊર્જા } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \qquad (6.4.3)$$

અત્રે, p તે પદાર્થનું રેખીય વેગમાન (linear momentum) છે. સમીકરણ (6.4.2) પરથી,

$$W = K - K_0 = \text{ગતિ ઊર્જામાં થતો ફેરફાર} = \Delta K \qquad (6.4.4)$$

જ્યાં K_0 અને K અનુક્રમે પ્રારંભિક અને અંતિમ ગતિ-ઊર્જાઓ છે. **પદાર્થ પર પરિણામી બળ વડે થતું કાર્ય, પદાર્થની ગતિ-ઊર્જાના ફેરફાર જેટલું હોય છે." આ કથનને કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય (Work energy theorem) કહે છે.** સમીકરણ (6.3.4) પરથી સ્પષ્ટ છે કે ગતિ-ઊર્જાનો એકમ કાર્યનો જ એકમ છે. (SI પદ્ધતિમાં જૂલ).

જો પદાર્થની ઝડપ અચળ રહેતી હોય, તો તેની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર ΔK શૂન્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતા કણની ઝડપ અચળ હોય છે અને સમગ્ર વર્તુળમાર્ગ પર તેની ગતિ-ઊર્જા અચળ હોય છે.

ચલ બળ માટે એકપરિમાણીય ગતિ માટે કાર્ય ઊર્જા પ્રમેય :

ધારો કે, કોઈ પદાર્થ પર X-અક્ષની દિશામાં લાગતું બળ $F(x)$ છે. [($F(x)$ દર્શાવે છે ને F, x નું વિધેય છે, એટલે કે Fનું મૂલ્ય x પર આધારિત છે.]

આ બળની અસર હેઠળ થતું કાર્ય

$$W = \int_i^f F(x)\, dx$$

$$= \int_i^f m \frac{dv}{dt} dx$$

$$= \int_i^f m\ dv \frac{dx}{dt}$$

$$= m \int_i^f v dv \quad (\because \frac{dx}{dt} = v)$$

જો x જેટલાં સ્થાનાંતર દરમિયાન પદાર્થનો વેગ v_1 થી v_2 થતો હોય તો,

$$\therefore W = m \int_{v_1}^{v_2} v dv$$

$$= m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{m}{2} [v_2^2 - v_1^2]$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad (6.4.5)$$

$$\therefore W = \Delta K$$

ઉદાહરણ 5 : એક પ્રોટોન અને એક ઇલેક્ટ્રૉન 100 eV જેટલી ગતિ-ઊર્જા સાથે ગતિ કરે છે. આ બંને કણમાંથી કોની ઝડપ વધુ હશે ?

($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg)

[**નોંધ :** અહીં eV (ઇલેક્ટ્રૉન વૉલ્ટ) ઊર્જાનો વૈકલ્પિક એકમ છે. [$1eV = 1.6 \times 10^{-19}$J]

ઉકેલ : ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિ-ઊર્જા

$$= 100\ keV = \frac{1}{2} m_e V_e^2$$

પ્રોટોનની ગતિ-ઊર્જા $= 100\ keV = \frac{1}{2} m_p v_p^2$

$$\therefore m_e v_e^2 = m_p v_p^2$$

$$\therefore \frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.67 \times 10^{-27}}{9.1 \times 10^{-31}}}$$

$$= 42.824$$

આમ, ઇલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોનની ગતિ-ઊર્જા સમાન હોય તો ઇલેક્ટ્રૉનની ઝડપ પ્રોટોન કરતાં 42.84 ગણી હોય. (શા માટે ? વિચારો !)

ઉદાહરણ 6 : ઘર્ષણરહિત સમક્ષિતિજ સપાટી પર 2 kg દળ ધરાવતો એક પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિમાં રહેલો છે. આ પદાર્થ પર 0.5 N જેટલું બળ સમક્ષિતિજ દિશામાં લાગતાં પદાર્થનું સ્થાનાંતર બળની દિશામાં થાય છે. આ બળ વડે પદાર્થ પર 8.0 s માં થતું કાર્ય શોધો તથા દર્શાવો કે આ કાર્ય પદાર્થની ગતિ-ઊર્જાના ફેરફાર જેટલું છે.

ઉકેલ : ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ મુજબ, પ્રવેગ

$$a = \frac{F}{m}$$

$$\therefore a = \frac{0.5}{2} = 0.25\ m/s^2$$

8 સેકન્ડના અંતે પદાર્થનો વેગ.

$v = v_0 + at = 0 + 0.25 \times 8.0 = 2$ m/s

8 સેકન્ડમાં થતું સ્થાનાંતર,

$$d = \frac{1}{2} at^2 = \left(\frac{1}{2} \right)(0.25)(64) = 8.0m$$

બળ વડે થતું કાર્ય W = 0.5 × 8.0 = 4J (1)

પદાર્થની પ્રારંભિક ગતિ-ઊર્જા = 0J

પદાર્થની અંતિમ ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 2.0 \times [\ 2.0\ ]^2 = 4$ J

∴ પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં ફેરફાર = (ΔK) = 4 J (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી, W = ΔK

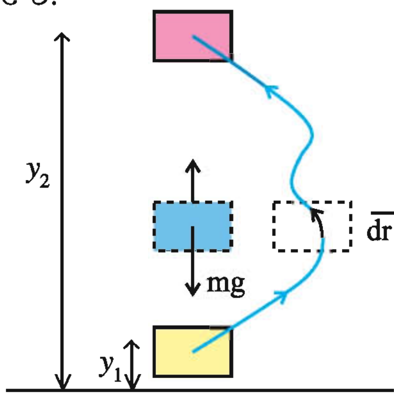
અત્રે, બળ વડે થતાં કાર્યનું સંપૂર્ણપણે ગતિ-ઊર્જામાં રૂપાંતરણ થયું.

6.5 સ્થિતિ-ઊર્જા (Potential Energy)

યંત્રશાસ્ત્રમાં ગતિ ઊર્જા ઉપરાંત ઊર્જાનું બીજું અગત્યનું સ્વરૂપ સ્થિતિઊર્જા છે. **"કોઈ પણ બળક્ષેત્રમાં રહેલો પદાર્થ પોતાના સ્થાનને કારણે અને અથવા તંત્રની સંરચના (configuration) ને કારણે કાર્ય કરવાની જે ક્ષમતા ધરાવે છે, તેને પદાર્થ/તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે."** પદાર્થ પર બળ લાગતાં તેના સ્થાનમાં કે તંત્રની સંરચનામાં ફેરફાર થાય છે. તેને કારણે તેની સ્થિતિ-ઊર્જામાં પણ ફેરફાર થાય છે.

ગુરુત્વાકર્ષી સ્થિતિ-ઊર્જા (Gravitational potential energy) : પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણના બળને કારણે પદાર્થમાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગને ગુરુત્વ પ્રવેગ (g) કહે છે. પૃથ્વીની ત્રિજ્યાની સરખામણીમાં ઘણી ઓછી ઊંચાઈ માટે gનું

મૂલ્ય લગભગ અચળ ગણી શકાય. m દળના પદાર્થ પર પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ mg જેટલું બળ લાગે છે, જેને પદાર્થનું વજન કહે છે.



આકૃતિ 6.8

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ એક પદાર્થને y_1 થી y_2 ઊંચાઈએ લઈ જવામાં આવે છે. સરળતા ખાતર આપણી યામપદ્ધતિની Y–અક્ષ શિરોલંબ દિશામાં છે. તેમ વિચારો. આ યામપદ્ધતિ માટે પદાર્થના શરૂઆતના અને અંતિમ સ્થાન y_1 અને y_2 વિચારો.

પદાર્થને શરૂઆતના સ્થાનથી અંતિમ સ્થાન સુધી ઉર્ધ્વદિશામાં સ્થાનાંતર આપીને સીધો લઈ જઈ શકાય અથવા અન્ય કોઈ માર્ગે પણ લઈ જઈ શકાય. આકૃતિમાં આવા જ બે માર્ગ દર્શાવ્યા છે. આપણે વ્યાપક રીતે વક્રમાર્ગ માટે પદાર્થને શરૂઆતના સ્થાનથી અંતિમ સ્થાને લઈ જવા માટે કરવું પડતું કાર્ય વિચારીશું. આ માટે આકૃતિમાંનો માર્ગ અતિશય નાના સ્થાનાંતરખંડ $\vec{dr}$ નો બનેલો વિચારી શકાય. આ સ્થાનાંતર માટે ગુરુત્વક્ષેત્ર વડે લાગતા બળ વડે થતું કાર્ય.

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

અહીં ગુરુત્વીય બળ અધોદિશામાં હોવાથી

$\vec{F} = -mg\,\hat{j}$ થાય.

$$\therefore\ dW = -mg\,(\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$
$$= -mgdy.$$

પ્રારંભિક સ્થાનથી અંતિમ સ્થાન સુધીની પદાર્થની યાત્રા દરમિયાન થતું કાર્ય,

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dw$$
$$= -mg \int_{y_1}^{y_2} dy$$
$$= -mg\left[y\right]_{y_1}^{y_2}$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$
$$= -(mgy_2 - mgy_1) \qquad (6.5.1)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ સૂચવે છે કે એક સ્થાનથી બીજા સ્થાને પદાર્થને લઈ જવા માટે કરવું પડતું કાર્ય પદાર્થના અંતિમ સ્થાન અને શરૂઆતના સ્થાન પર જ આધારિત છે. તેમને જોડવા માર્ગ પર આધારિત નથી. પદાર્થ ગમે તે માર્ગે ગતિ કરી શકે. આવો ગુણધર્મ ધરાવતાં બળને સંરક્ષીબળ (Conservative force) અને બળક્ષેત્રને સંરક્ષી બળક્ષેત્ર (Conservative force field) કહે છે.

હવે, પદાર્થ y_1 અને y_2 સ્થાને હોય ત્યારે તેના વેગનાં મૂલ્યો અનુક્રમે v_1 અને v_2 હોય, તો સ્પષ્ટ છે કે y_1 ઊંચાઈથી y_2 ઊંચાઈએ જતાં પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર $(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2)$ જેટલો હશે. કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય મુજબ આ ફેરફાર પદાર્થ વડે થતાં કાર્ય જેટલો થાય.

$$\therefore\ W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (6.5.2)$$

સમીકરણ (6.5.1) અને (6.5.2) ને સરખાવતાં,

$$(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2)$$
$$= -(mgy_2 - mgy_1) \qquad (6.5.3)$$

અથવા

$$(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2) = mg(y_2 - y_1) \qquad (6.5.4)$$

આ સમીકરણમાં ડાબી બાજુનાં પદો ગતિ-ઊર્જાનાં છે. આથી જમણી બાજુની રાશિઓ પણ કોઈ પ્રકારની ઊર્જાઓ જ હશે તેમ વિચારી શકાય. હકીકતમાં આ ઊર્જાઓએ પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં, પૃથ્વીની સપાટીથી y_1 અને y_2 ઊંચાઈઓએ પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જાઓ છે.

વજનબળ (mg) અને કોઈ સંદર્ભસપાટી (પ્રસ્તુત કિસ્સામાં પૃથ્વીની સપાટી)થી પદાર્થની ઊંચાઈ hના ગુણાકારથી મળતી આ ભૌતિક રાશિને પૃથ્વીની સપાટીની સાપેક્ષમાં ગુરુત્વીય સ્થિતિ-ઊર્જા U કહે છે.

આમ, પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ m દળની ગુરુત્વીય સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = mgh \qquad (6.5.5)$$

સામાન્ય વ્યવહારમાં સંદર્ભ સપાટી પાસે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લેવામાં આવે છે, કારણ કે સ્થિતિઊર્જામાં થતા ફેરફારો મહત્ત્વના છે, નહીં કે તેનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય.

સમીકરણ (6.5.4) પરથી

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \qquad (6.5.6)$$

આમ, સંરક્ષી બળક્ષેત્રમાં ગતિ દરમિયાન પદાર્થની

ગતિ-ઊર્જા ($K = \frac{1}{2}mv^2$) અને સ્થિતિ-ઊર્જા ($U = mgh$) નો સરવાળો અચળ રહે છે.

પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા અને સ્થિતિ-ઊર્જાના સરવાળાને યાંત્રિક-ઊર્જા (Mechanical energy) (E) કહે છે.

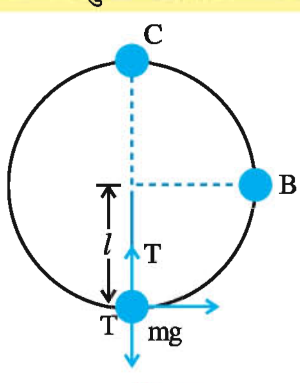
$\therefore E = K + U$

સંરક્ષી બળક્ષેત્રમાં યાંત્રિક-ઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. પ્રસ્તુત ઉદાહરણમાં પૃથ્વીની સપાટીથી ઉપર તરફ જતાં પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં જેટલો ઘટાડો થશે એટલો જ તેની સ્થિતિ-ઊર્જામાં વધારો થશે. (અહીં એ નોંધો કે પદાર્થની ગતિ દરમિયાન તેના પર લાગતું હવાનું અવરોધક બળ અવગણેલ છે.)

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે **"સંરક્ષીબળોની અસર હેઠળ યાંત્રિક રીતે અલગ કરેલા તંત્ર માટે યાંત્રિક-ઊર્જા અચળ રહે છે."** આ વિધાનને **યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણનો નિયમ** કહે છે.

નોંધ : અહીં કરેલ ચર્ચામાં પદાર્થ અને પૃથ્વીનું બનેલું એક તંત્ર છે તેના, પર કોઈ બાહ્ય બળ લાગતું નથી. તેમ સ્વીકારી લીધું છે. એ સંદર્ભમાં આ તંત્ર યાંત્રિક રીતે અલગ કરેલું તંત્ર કહી શકાય. વળી, ઉપર્યુક્ત કુલ ઊર્જા એ પૃથ્વી અને પદાર્થના બનેલા તંત્રની ઊર્જા કહેવાય, પણ અહીં પૃથ્વીની સ્થિતિ કે ગતિ-ઊર્જામાં કશો ફેરફાર ન થતો હોવાથી આપણે રૂઢિગત રીતે માત્ર પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા કે ગતિ-ઊર્જાની ભાષામાં ચર્ચા કરેલ છે.

ઉદાહરણ 7 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ m દળનો એક પદાર્થ l લંબાઈની એક હલકી (દળરહિત !) દોરીનો છેડે લટકાવેલ છે. આ પદાર્થ તેના નિમ્નતમ સ્થાને હોય, ત્યારે તેને v જેટલા વેગથી ગતિ આપતાં તે વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરે છે અને દોરી ઢીલી પડતાં માંડ-માંડ ઊર્ધ્વતમ બિન્દુ C પર પહોંચે છે. તો સાબિત કરો કે $v = \sqrt{5gl}$ છે. બિન્દુ B પાસે તેનો વેગ કેટલો હશે ?



આકૃતિ 6.9

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પદાર્થ તેના નિમ્નતમ સ્થાને હોય ત્યારે, પદાર્થ પર લાગતાં બળ દર્શાવ્યાં છે. આ સ્થિતિમાં તેની સ્થિતિ ઊર્જા યાદચ્છિક રીતે શૂન્ય લેતાં તેની યાંત્રિક-ઊર્જા

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

વળી, તેના પર લાગતું કેન્દ્રગામી બળ ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ અનુસાર $mv^2/l = T - mg$ થાય. સ્થિતિ C માં તણાવબળ, દોરી ઢીલી પડવાથી, શૂન્ય થાય. આ સ્થાન પર તેનો વેગ v' હોય તો,

$$\text{યાંત્રિક-ઊર્જાના } E = \frac{1}{2}mv'^2 + 2mgl \quad (2)$$

($2mgl$ સ્થિતિ-ઊર્જા છે.)

અને $mg = mv'^2 / l \quad (\because T = 0) \quad (3)$

સમીકરણ (2) અને (3) પરથી

$$E = \frac{1}{2}mgl + 2mgl = 5/2\ mgl \quad (4)$$

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર સમીકરણ (1) અને (4)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{2}mgl$$

$$\therefore v = \sqrt{5gl} \quad (5)$$

[અહીં થોડું વિશેષ વિચારતાં બિન્દુ B પાસે તેના વેગ v'' હોય, તો

$$E = \frac{1}{2}mv''^2 + mgl \quad (6)$$

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ સમીકરણ (1) અને (6) પરથી

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv''^2 + mgl$$

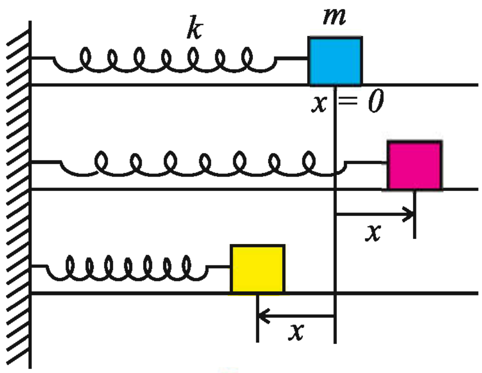
સમીકરણ 5માંથી vનું મૂલ્ય મૂકતાં

$$\frac{1}{2}m\ (5gl) = \frac{1}{2}mv''^2 + mgl$$

$$\therefore v'' = \sqrt{3gl}\ ]$$

6.6 સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા (Eleastic Potential Energy) (તંત્રની સંરચનાને કારણે તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા)

આકૃતિ 6.10માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે એક અવગણ્ય દળવાળી, હૂકના નિયમને અનુસરતી, સ્થિતિસ્થાપક સ્પ્રિંગનો એક છેડો દીવાલ સાથે જડેલ છે. સ્પ્રિંગના બીજા છેડે m દળનો બ્લૉક બાંધેલો છે. આપણે સ્પ્રિંગની લંબાઈમાં થતા ફેરફાર અને બ્લૉકની ગતિ ફક્ત X-અક્ષ પૂરતી જ મર્યાદિત



આકૃતિ 6.10

રાખીશું. સ્પ્રિંગની સામાન્ય સ્થિતિ (ખેંચાણ કે દબાણ વિનાની સ્થિતિ) વખતે બ્લૉકના સ્થાનને $x = 0$ લઈશું. હવે બ્લૉકને ખેંચી સ્પ્રિંગની લંબાઈમાં વધારો કરવામાં આવે, ત્યારે સ્પ્રિંગના સ્થિતિસ્થાપકતાના ગુણધર્મને કારણે તેમાં પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્ભવે છે, જે સ્પ્રિંગને તેની સામાન્ય સ્થિતિમાં પાછી લઈ જવા પ્રયત્ન કરે છે. જો સ્પ્રિંગને દબાવીએ તોપણ તેમાં પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્ભવે છે.

પ્રસ્તુત કિસ્સામાં પુનઃસ્થાપક બળ (F) સ્પ્રિંગની લંબાઈમાં થતા ફેરફારના સમપ્રમાણમાં અને ફેરફારની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

$\therefore$ F $\propto -x$

.. $F = -kx$ (6.6.1)

અહીં સપ્રમાણતાના અચળાંક (k) ને સ્પ્રિંગનો બળ-અચળાંક (Force constant) કહે છે.

જો સ્પ્રિંગની લંબાઈમાં થતો વધારો x હોય તો, લગાડેલ બળ વડે થતું કાર્ય

$$W = \int_0^x kx dx = k\int_0^x x dx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

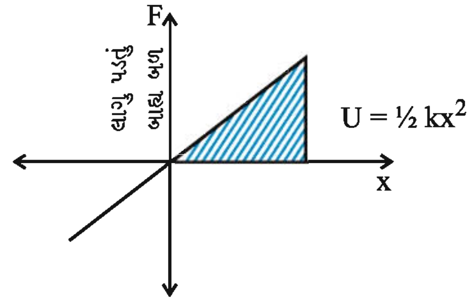
$$\therefore W = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6.6.2)$$

સ્પ્રિંગ પર થતું આ કાર્ય સ્પ્રિંગમાં ઊર્જાના સ્વરૂપમાં સંગ્રહાય છે. સ્પ્રિંગમાં સંગૃહીત આ ઊર્જાને સ્પ્રિંગની સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે.

સ્પ્રિંગની સામાન્ય સ્થિતિમાં (એટલે કે ખેંચાણ કે દબાણ વગરની સ્થિતિમાં), સ્પ્રિંગની સ્થિતિ-ઊર્જાને યાદચ્છિક રીતે શૂન્ય લેતાં, x જેટલા લંબાઈના ફેરફારની સ્થિતિમાં સ્પ્રિંગની સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \text{ થશે.} \qquad (6.6.3)$$

સ્થિતિ-ઊર્જાનું આ મૂલ્ય F – x આલેખ વડે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ પરથી પણ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ મેળવી શકાય.



આકૃતિ 6.11

અત્રે સ્પષ્ટ છે કે બાહ્યબળ દ્વારા થતું કાર્ય (સ્પ્રિંગના સંકોચન કે વિસ્તરણ માટે) તંત્રની સ્થિતિઊર્જા અને ગતિઊર્જાના સ્વરૂપમાં સંગ્રહિત થાય છે.

6.7 સંરક્ષીબળો માટે બળ અને સ્થિતિ-ઊર્જા વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Force and Potentian Energy for Conservative Field)

ધારો કે કોઈ પદાર્થ પર લાગતું સંરક્ષી બળ F છે. આ બળની અસર હેઠળ તે Δx જેટલું સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર કરે, ત્યારે તેના પર બળ વડે થતું કાર્ય,

$\Delta W = F\Delta x$

હવે, કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય અનુસાર, પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર,

$\Delta K = W = F\Delta x$

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ

$\Delta K + \Delta U = 0$

સમીકરણમાં ΔK નું મૂલ્ય અવેજ કરતાં,

$F\Delta x + \Delta U = 0$

$$\therefore F = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ લેતાં આ સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\therefore F = -\frac{dU}{dx} \qquad (6.7.1)$$

આમ, સંરક્ષી બળોની બાબતમાં સ્થાનની સાપેક્ષે સ્થિતિ-ઊર્જાના વિકલિતનું ઋણ મૂલ્ય લેવાથી બળ મળે છે. સમીકરણ (6.7.1) નો ઉપયોગ કરી સ્પ્રિંગ માટે પુનઃસ્થાપક બળનું મૂલ્ય નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

સ્પ્રિંગની સ્થિતિ-ઊર્જા $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$\therefore -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2}k(2x) = -kx$$

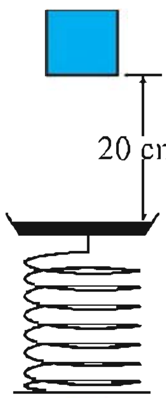
$\therefore F = -kx$

ઉપર આપેલ ચર્ચા માત્ર સંરક્ષી બળોને જ લાગુ પડે છે.

અસંરક્ષી બળો વડે થતું કાર્ય તંત્રમાં સ્થિતિ-ઊર્જા સ્વરૂપે સંગ્રહિત થતું નથી. ઘર્ષણ જેવા અસંરક્ષી બળો વડે થતું કાર્ય

ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વ્યય પામે છે. અસંરક્ષી બળોના કિસ્સામાં યાંત્રિક-ઊર્જા સંરક્ષણનો નિયમ પણ જળવાતો નથી અને બળનું મૂલ્ય સ્થિતિ-ઊર્જાનું વિકલન કરી મેળવી શકાતું નથી.

ઉદાહરણ 8 : 1 kg દળનો એક બ્લૉક 20 cm જેટલી ઊંચાઈએથી એક સ્પ્રિંગ પર મુક્ત પતન કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.13) જો સ્પ્રિંગનો બળ-અચળાંક 600 N/m હોય, તો સ્પ્રિંગ કેટલી દબાશે ? ($g = 10.0$ m/s^2)



આકૃતિ 6.12

ઉકેલ : ધારો કે સ્પ્રિંગ x મીટર જેટલી દબાય છે, તેથી 1 kg દળનો બ્લૉક $(x + 0.2)m$ ઊંચાઈએથી પડે છે તેમ કહેવાય. આ બ્લૉકને નીચે પડતા તેની સ્થિતિ-ઊર્જા સ્પ્રિંગને દબાવવા કરવા પડતા કાર્યમાં ખર્ચાય છે, અને આ કાર્ય સ્પ્રિંગમાં સ્થિતિ-ઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહાય છે.

બ્લૉકની ગુરુત્વીય સ્થિતિ-ઊર્જા

$= mg(h + x) = 1 \times 10(0.2 + x)$

સ્પ્રિંગને x મીટર દબાવવા થતું કાર્ય $= \frac{1}{2}kx^2$

$\therefore\ \frac{1}{2}kx^2 = 1 \times 10\ (0.2 + x)$

$300x^2 = 10x + 2.0$

$\therefore\ 300x^2 - 10x - 2.0 = 0$

$\therefore\ 150x^2 - 5x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4(150)(-1)}}{300}$$

$\therefore\ x = 0.0167 \pm 0.0833$

અત્રે 0.0167 m તે પદાર્થ વડે સ્પ્રિંગ દબાતાં પદાર્થનું સમતોલન સ્થાન દર્શાવે છે, જેને અનુલક્ષીને સ્પ્રિંગ પદાર્થ સાથે દોલનો કરે છે. આ દોલનો કંપવિસ્તાર 0.0833 m છે. તથા મહત્તમ સંકોચન 0.1 m એટલે કે 10 cm થાય.

6.8 પાવર (Power)

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે કાર્ય કરવામાં લાગેલા સમયનો તો વિચાર કર્યો જ નથી. એક પદાર્થને કોઈ એક સ્થાનેથી અમુક નિશ્ચિત ઊંચાઈએ લઈ જવામાં 1 સેકન્ડ કે 1 કલાક અથવા જુદો-જુદો સમય લગાડીએ તોપણ દરેક કિસ્સામાં એકસરખા મૂલ્યનું જ કાર્ય થાય છે. પરંતુ આ દરેક કિસ્સામાં કાર્ય કરવાનો દર જુદો-જુદો છે. ઘણા કિસ્સાઓમાં કાર્યના મૂલ્ય કરતાં કાર્ય કરવાનો દર આપણા માટે વધુ મહત્ત્વની બાબત હોય છે. આથી પાવર (કાર્યત્વરા) નામની રાશિને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

"કાર્ય કરવાના સમયદરને પાવર કહે છે." અથવા "એકમસમયમાં થતા કાર્યને પાવર (P) કહે છે." જો Δt સમયમાં થતું કાર્ય ΔW હોય તો, Δt સમય દરમિયાન

સરેરાશ પાવર $< P > = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

$\therefore$ t સમયે તાત્ક્ષણિક પાવર $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$

$$\therefore\ P = \frac{dW}{dt} \qquad (6.8.1)$$

ધારો કે dW એ $\vec{dr}$ સ્થાનાંતર માટે બળ $\vec{F}$ વડે થતું કાર્ય છે.

$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$

આ કિસ્સામાં અચળ બળ માટે તાત્ક્ષણિક પાવરને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય છે :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\therefore\ P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (6.8.2)$$

ભૌતિક રાશિઓ કાર્ય અને ઊર્જાની જેમ પાવર પણ અદિશ રાશિ છે. તેના પરિમાણ $M^1L^2T^{-3}$ છે. SI પદ્ધતિમાં પાવરનો એકમ J s^{-1} છે, જેને સ્ટીમ એન્જિનના શોધક જેમ્સ વૉટના માનમાં વૉટ (watt) કહે છે. 1W = 1 J s^{-1}.

વૉટ એ પાવરનો નાનો એકમ છે. વધારે મોટા પાવર માપવા માટે પાવરના વ્યાવહારિક એકમો જેવા કે કિલોવૉટ, તથા મેગાવૉટનો ઉપયોગ થાય છે.

1 kW = 10^3W

1 MW = 10^6W

વ્યવહારમાં બીજા એક મોટા એકમ-હૉર્સપાવર (horse power) જે મૂળ બ્રિટિશ પદ્ધતિનો એકમ છે, તેનો ઉપયોગ આપણાં વાહનો તથા વૉટરપમ્પના પાવર માટે વપરાય છે.

1 હૉર્સપાવર [hp] $\simeq$ 746 W

સમીકરણ (6.8.1) પરથી ફલિત થાય છે કે પાવરને સમય સાથે ગુણવાથી કાર્યનું મૂલ્ય પ્રાપ્ત થાય છે. આ રીતે કાર્યના એકમ કિલોવૉટ અવર (kWh)નો ઉદ્ભવ થયો.

"1 કિલોવૉટ જેટલા દરે 1 કલાક (hour)માં થયેલા કુલ કાર્યને 1 કિલોવૉટ અવર કહે છે."

આપણા ઘરમાં વપરાતી વિદ્યુત-ઊર્જાને કિલોવૉટ અવરના એકમમાં મપાય છે. તેને 'યુનિટ' કહે છે.

1 યુનિટ = 1 kWh = 3.6×10^6 J

અહીં ખાસ ધ્યાન રાખશો કે kWh એ ઊર્જાનો એકમ છે, પાવરનો નહિ. 100 Wના બલ્બને 10 કલાક સુધી ચાલુ (on) રાખવામાં આવે, તો 1 યુનિટ જેટલી વિદ્યુત-ઊર્જા વપરાય છે.

ઉદાહરણ 9 : m દળનો એક કણ r ત્રિજ્યાના વર્તુળમાર્ગે ગતિ કરે છે, ત્યારે તેનો ત્રિજ્યાવર્તી (કેન્દ્રગામી) પ્રવેગ kt^2 જેટલો છે, જ્યાં k અચળાંક છે તથા t સમય છે, તો પાવરને tના વિધેય રૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ : ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $\frac{v^2}{r} = kt^2$

સમીકરણ (t)ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$2v\frac{dv}{dt} = 2ktr$$

$$mv\frac{dv}{dt} = mktr$$

$\therefore$ Fv = $ktmr$ [$\because$ F = $m\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ એ સ્પર્શીય પ્રવેગ છે, તે નોંધો.]

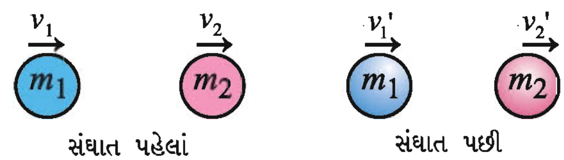
$\therefore$ P = $ktmr$

6.9 સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાતો (Elastic and Inelastic Collisions)

બે પદાર્થો વચ્ચે થતા સંઘાત દરમિયાન અથડાતા પદાર્થોની કુલ ઊર્જા અને કુલ રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થતું હોય છે.

જો સંઘાત પામતા પદાર્થોની સંઘાત પહેલાંની કુલ ગતિ-ઊર્જા અને સંઘાત પામ્યા બાદની કુલ ગતિ-ઊર્જા સમાન હોય, એટલે કે કુલ ગતિ-ઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું હોય, તો તેવા સંઘાતને સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત કહે છે.

ઘણા સંઘાતો દરમિયાન ગતિ-ઊર્જાનું (આંશિક કે સંપૂર્ણપણે) પદાર્થોની આંતરિક ઊર્જામાં રૂપાંતરણ થતું હોય છે. આવા **સંઘાતો દરમિયાન કુલ ગતિ-ઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું નથી. આવા સંઘાતને અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત કહે છે.** અત્રે એ નોંધવું અગત્યનું છે કે બંને પ્રકારના સંઘાતો દરમિયાન કુલ ઊર્જા અને વેગમાનનું સંરક્ષણ તો થતું જ હોય છે.



(a) (b)

આકૃતિ 6.13

હવે આપણે એક પરિમાણમાં થતા સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતની વાત કરીશું. આકૃતિ 6.13 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે m_1 દળવાળો પદાર્થ v_1 વેગથી X–અક્ષની દિશામાં ગતિ કરતાં m_2 દળવાળા v_2 વેગથી X–અક્ષની દિશામાં જ ગતિ કરતા બીજા પદાર્થ સાથે સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત પામે છે. તેમના અંતિમ વેગ અનુક્રમે v_1' અને v_2' છે.

વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad (6.9.1)$$

$$\therefore\ m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (6.9.2)$$

વળી, સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક હોવાથી

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$\therefore\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (6.9.3)$$

સમીકરણ (6.9.2) અને (6.9.3) પરથી

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad (6.9.4)$$

સમીકરણ (6.9.4) ને m_1 વડે ગુણીને સમીકરણ (6.9.1)માં ઉમેરતાં,

$$m_1v_1 + m_2v_2 + m_1v_1 + m_1v_1' = m_1v_1' + m_2v_2' + m_1v_2 + m_1v_2'$$

$$\therefore\ 2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2 = (m_1 + m_2)v_2'$$

$$\therefore v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2 \quad (6.9.5)$$

v_2' ની કિંમત સમીકરણ (6.9.4)માં મૂકતાં,

$$v_1' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} - 1 \right) v_1 + \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2$$

$$\therefore v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 \qquad (6.9.6)$$

સમીકરણો (6.9.5) અને (6.9.6) એક પરિમાણમાં સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતનાં સમીકરણો છે.

વિશિષ્ટ કિસ્સા (i) જો $m_1 = m_2$ હોય તો,

$m_1 = m_2$ માટે $v_1' = v_2$ અને $v_2' = v_1$ થાય એટલે બંને પદાર્થના વેગ અદલબદલ થઈ જાય છે.

(ii) $m_2 >> m_1$, આ કિસ્સામાં ગતિમાન હલકો પદાર્થ ભારે પદાર્થ સાથે અથડાય છે. હવે સમીકરણ (6.9.5) અને (6.9.6) માં m_2ની સરખામણીમાં m_1ને અવગણતાં,

$v_1' = -v_1 + 2v_2$

અને $v_2' \approx v_2$ મળે.

આ દર્શાવે છે કે ભારે પદાર્થના વેગમાં ખાસ ફર્ક પડતો નથી જ્યારે હલકા પદાર્થના વેગમાં ફેરફાર થાય છે. બીજા શબ્દોમાં ભારે પદાર્થ હલકા પદાર્થને મચક આપતો નથી.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો અને વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $v_2 = 0$ લઈએ, તો શું થાય ? (વિચારો !)

સંઘાત પહેલાં અને સંઘાત બાદના સાપેક્ષ વેગનાં મૂલ્યો માટે શું કહી શકાય ? (સમીકરણ (6.9.4)ના સંદર્ભમાં વિચારો)

હવે આપણે અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત માટે એક વિશિષ્ટ કિસ્સો જોઈએ. ગનમાંથી બુલેટને પ્રમાણમાં મોટું કદ ધરાવતા લાકડાના બ્લૉક પર 'ફાયર' કરતાં બુલેટ બ્લૉકમાં ઘૂસી જાય છે અને બુલેટ અને બ્લૉક એક જ પદાર્થ તરીકે ગતિ કરે છે. આ પ્રકારનો સંઘાત સંપૂર્ણ અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત કહેવાય. ધારો કે m_1 દળનો એક પદાર્થ v_1 વેગથી ગતિ કરીને m_2 દળવાળા v_2 વેગથી v_1 ની દિશામાં જ ગતિ કરતા બીજા પદાર્થ સાથે અથડામણ અનુભવે છે. અથડામણ સંપૂર્ણ અસ્થિતિસ્થાપક હોવાથી બંને પદાર્થનો બનેલો સંયુક્ત પદાર્થ v વેગથી અથડામણ બાદ ગતિ કરે છે.

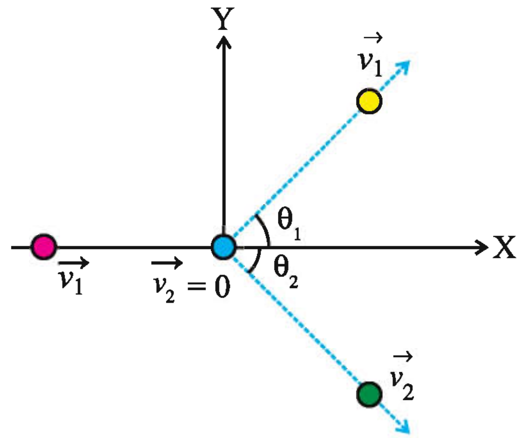
વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$\therefore v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.8.7)$$

6.10 દ્વિ-પરિમાણમાં સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત (Elastic Collision in Two Dimensions)

આકૃતિ 6.14માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે $\vec{v_1}$ જેટલા વેગથી x દિશામાં ગતિ કરતો m_1 દળનો પદાર્થ સ્થિર પડેલા [$\vec{v_2} = 0$] m_2 દળના બીજા પદાર્થ સાથે સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત અનુભવે છે. સંઘાત બાદ m_1 અને m_2 દળવાળા X-અક્ષ સાથે અનુક્રમે θ_1 અને θ_2 કોણ બનાવતી દિશામાં $\vec{v_1}'$ અને $\vec{v_2}'$ જેટલા વેગથી ગતિ કરે છે.



આકૃતિ 6.14

વેગમાન સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$m_1\vec{v_1} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' \qquad (6.10.1)$$

વેગમાનોના X દિશામાંના ઘટકો લેતાં,

$$m_1v_1 = m_1v_1'cos\theta_1 + m_2v_2'cos\theta_2 \qquad (6.10.2)$$

વેગમાનોના Y દિશામાંના ઘટકો લેતાં,

$$0 = m_1v_1'sin\theta_1 - m_2v_2'sin\theta_2 \qquad (6.10.3)$$

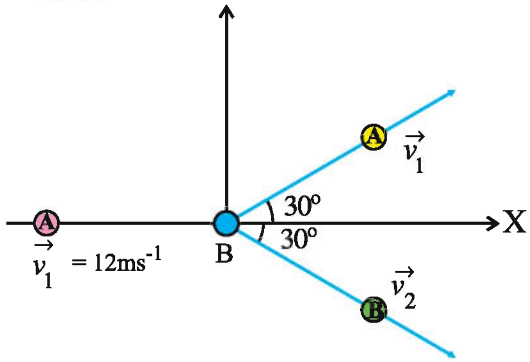
સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક હોવાથી

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad (6.10.4)$$

સામાન્ય રીતે m_1, m_2 અને v_1 નાં મૂલ્યો જ્ઞાત હોય છે. સંઘાત બાદની ગતિમાં અજ્ઞાત રાશિઓ (v_1', v_2', θ_1 અને θ_2) ચાર છે અને સમીકરણો (6.9.2, 3, 4) ત્રણ સમીકરણોની મદદથી ત્રણ જ અજ્ઞાત રાશિઓનાં મૂલ્ય નક્કી કરી શકાય. માટે આ ચાર અજ્ઞાત રાશિઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક રાશિ જ્ઞાત હોવી જરૂરી છે.

ઉદાહરણ 10 : 12 ms^{-1} ના વેગથી ગતિ કરતો એક દડો તેના જેવા જ (Identical) બીજા એક સ્થિર દડા સાથે સંઘાત અનુભવે છે. સંઘાત બાદ બંને દડા આકૃતિ 6.15.માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગતિ કરે છે. સંઘાત બાદ બંને દડાઓની ઝડપ શોધો તથા સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 6.15

ધારો કે દડાનું દળ m છે. વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$mv_1 = mv_1'cos30° + mv_2'cos30° \quad (1)$$

$$\text{અને } 0 = mv_1'sin30° - mv_2'sin30° \quad (2)$$

$$\therefore v_1' = v_2' \quad (3)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$12 = 2v_1' \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore v_1' = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$$

સંઘાત પહેલાંની કુલ ગતિ-ઊર્જા,

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\therefore K_1 = \frac{1}{2}m(12)^2 = 72\ m\ J \quad (4)$$

સંઘાત બાદની કુલ ગતિ-ઊર્જા,

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

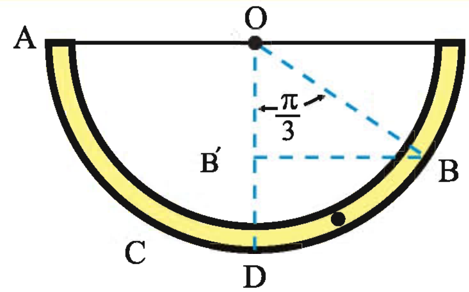
$$= \frac{1}{2}m\ (48 + 48)$$

$$\therefore K_2 = (48\ m)J \quad (5)$$

સમીકરણો (4) અને (5) પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, $K_1 > K_2$. આમ, ગતિ-ઊર્જાનું સંરક્ષણ ન થતું હોવાથી સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક નથી.

હવે અસરંક્ષી બળ દ્વારા થતા કાર્યનું ઉદાહરણ લઈને આપણે પ્રકરણનું સમાપન કરીએ.

ઉદાહરણ 11 : આકૃતિમાં શિરોલંબ સમતલમાં જડેલી એક ટ્યૂબ બતાવેલ છે. A આગળથી 0.314 kg દળવાળો એક ગોળો મુક્ત કરવામાં આવે છે. ગોળાને તેની ગતિ દરમિયાન અચળ અવરોધક બળ R નો સામનો કરવો પડે છે. ગોળો B પાસે પહોંચે ત્યારે તેનો વેગ શૂન્ય થાય છે, તો (i) અચળ અવરોધક બળ R અને (ii) આ અવરોધક બળ દ્વારા થતું કાર્ય ગણો. (અર્ધવર્તુળ ગતિમાર્ગની સરેરાશ ત્રિજ્યા 1 m છે.)



આકૃતિ 6.16

ઉકેલ : ધારો કે D ગતિમાર્ગનું નિમ્નતમ બિંદુ છે અને D આગળ તેની સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય છે. આથી A આગળ ગોળાની સ્થિતિ-ઊર્જા,

$$U_A = mgr \quad (1)$$

B આગળ તેની સ્થિતિ-ઊર્જા

$$\therefore U_B = mg\ (B'D)$$

$$\text{તથા } OB' = OBcos\frac{\pi}{3} = \frac{r}{2}$$

$$\therefore B'D = OB' = \frac{r}{2}$$

$$\therefore U_B = mg\frac{r}{2} \quad (2)$$

અવરોધક બળ અચળ છે, તેથી તેના દ્વારા થતું કાર્ય

$$W_R = R \times \frac{5\pi}{6}\ r \quad (\because \text{ચાપ} = \theta \times r) \quad (3)$$

સમીકરણ (1), (2) અને (3) પરથી,

$$mgr = \frac{mgr}{2} + R\frac{5\pi r}{6}$$

$$\therefore \frac{mgr}{2} = \pi r R\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\therefore R = \frac{3mg}{5\pi} = \frac{3 \times 0.314 \times 10}{5 \times 3.14} = 0.6N$$

અવરોધક બળ દ્વારા થતું કાર્ય

$$W_R = R \times \frac{5\pi r}{6}$$

$$= 0.6 \times \frac{5 \times 3.14 \times 1}{6} = 1.57\ J$$

માત્ર સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષાઓ માટે માહિતી

ન્યુટનનો અથડામણનો નિયમ : જ્યારે બે પદાર્થ વચ્ચેની અથડામણ 'હેડ-ઓન' હોય એટલે કે અથડામણ સમયે બંને અથડાતા પદાર્થના સાપેક્ષ વેગ અથડામણ બાજુએ દોરેલા સામાન્ય લંબ પર આવેલ હોય તો અથડામણ પછીનો સાપેક્ષ વેગ અને અથડામણ પહેલાંના સાપેક્ષ વેગનો ગુણોત્તર અચળ હોય છે અને અથડામણ પછીનો સાપેક્ષ વેગ અથડામણ પહેલાના સાપેક્ષ વેગની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

આ અચળ ગુણોત્તર રેસ્ટીટ્યુશન ગુણાંક (e) તરીકે ઓળખાય છે.

ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા પરથી પ્રવર્તમાન સંકેતોમાં

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$, 'e'નું મૂલ્ય અથડામણ પામતા પદાર્થોના દ્રવ્ય પર આધારિત છે.

સંપૂર્ણ સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત માટે $e = 1$ અને સંપૂર્ણ અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત માટે $e = 0$.

વ્યાપકરૂપે રેસ્ટીટ્યુશન ગુણાંકનો ઉપયોગ કરીને બે અથડામણ પામતા પદાર્થોના અથડામણ પછીના વેગ માટે સૂત્રો નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2 e)}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(1 + e)m_2}{m_1 + m_2} v_2 \text{ and } v_2' = \frac{(1 + e)m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{(m_1 e - m_2)}{m_1 + m_2} v_2$$

સારાંશ

1. કાર્ય અંગેના સામાન્ય ખ્યાલોથી ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં કાર્ય અંગેના ખ્યાલો એકદમ જુદા પડે છે.
2. બળના મૂલ્ય અને બળ લાગતું હોય તે સમયગાળા દરમિયાન બળની દિશામાં થતા સ્થાનાંતરના મૂલ્યના ગુણાકારને કાર્ય કહે છે. તેનો એકમ જૂલ છે અને પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^{-2}$ છે.
3. બળ અને સ્થાનાંતર વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તો,
   (i) $\theta = 0$ $\quad \therefore W = Fd$
   (ii) $\theta = \pi/2$ $\quad \therefore W = 0$
   (iii) $\theta = \pi$ $\quad \therefore W = -Fd$
   જો θ લઘુકોણ હોય, તો કાર્ય ધન મળે છે, એટલે કે બળ દ્વારા પદાર્થ પર કાર્ય થાય છે. જો θ ગુરુકોણ હોય, તો કાર્ય ઋણ મળે. એટલે કે પદાર્થ દ્વારા બળ વિરુદ્ધ કાર્ય થાય છે.
4. ચલ બળ દ્વારા થતું કાર્ય નીચેના સૂત્રથી મળી શકે :
   $$W = \int_i^f \vec{F} \cdot \vec{dl}$$
5. જો ચલ બળ અને સ્થાનાંતર એક જ દિશામાં હોય, તો $F - x$ આલેખનો આલેખ નીચેનું ક્ષેત્રફળ કાર્ય આપે છે.
6. પદાર્થની ગતિને કારણે પદાર્થની કાર્ય કરવાની ક્ષમતાને ગતિ ઊર્જા કહે છે. m દળના પદાર્થનો વેગ v હોય, તો તેની ગતિ-ઊર્જા $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$ થાય.
7. **કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય :** પદાર્થ પર પરિણામ બળ વડે થતું કાર્ય, પદાર્થની ગતિ-ઊર્જામાં થતાં ફેરફાર જેટલું હોય છે.
8. **સ્થિતિ-ઊર્જા :** કોઈ પણ બળક્ષેત્રમાં રહેલો પદાર્થ પોતાના સ્થાનને કારણે અને અથવા પદાર્થની સંરચનાને કારણે કાર્ય કરવાની જે ક્ષમતા ધરાવે છે, તેને પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે.
9. સામાન્ય રીતે સ્થિતિ-ઊર્જા સાપેક્ષ ભૌતિક રાશિ છે. તેનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય મળવું શક્ય નથી અને આમ પણ તેમાં થતાં ફેરફારની માહિતી જ મહત્ત્વની છે.

10. પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય લઈએ, તો h જેટલી ઊંચાઈ પર પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા mgh થાય, જ્યાં m પદાર્થનું દળ, g ગુરુત્વપ્રવેગ છે. h નું મૂલ્ય પૃથ્વીની ત્રિજ્યાની સરખામણીમાં અવગણી શકાય તેવું છે.
11. પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જાના સરવાળાને પદાર્થની યાંત્રિક-ઊર્જા કહે છે.
12. સ્પ્રિંગની સામાન્ય સ્થિતિમાં સ્પ્રિંગની સ્થિતિ-ઊર્જાને શૂન્ય લેતાં x જેટલી લંબાઈના ફેરફાર માટે સ્પ્રિંગની સ્થિતિ-ઊર્જા $U = \frac{1}{2}kx^2$ થાય, જ્યાં k સ્પ્રિંગનો બળ-અચળાંક છે. તેનો એકમ N/m તથા પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^0T^{-2}$ છે.
13. **સંરક્ષી બળો :** જે બળો માટે થતું કાર્ય પદાર્થના માર્ગ પર આધારિત ન હોય પણ શરૂઆતના અને અંતિમ સ્થાન પર આધારિત હોય તેવાં બળોને સંરક્ષી બળો કહે છે. ગુરુત્વાકર્ષણનું બળ અને સ્પ્રિંગના સંકોચન કે વિસ્તરણ દરમિયાન ઉત્પન્ન થતું પુનઃસ્થાપક બળ સંરક્ષી બળો છે.
14. સંરક્ષી બળનું મૂલ્ય તેને આનુષંગિક સ્થિતિ-ઊર્જા પરથી નીચેના સૂત્રથી મેળવી શકાય :

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

15. કાર્ય કરવાના સમયદરને પાવર (P) કહે છે. પાવરનો એકમ વૉટ (જૂલ-સેકન્ડ) અને પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^{-3}$ છે.

આમ, પાવર $P = W/t$ અથવા $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

1 હૉર્સપાવર $\approx$ 746 વૉટ

ઘરવપરાશ માટે વિદ્યુત-ઊર્જાનો એકમ 1 યુનિટ = 1 kWh = 3.6×10^6J
16. બે પદાર્થ વચ્ચેના સંઘાત દરમિયાન ગતિ-ઊર્જાનું પણ સંરક્ષણ થતું હોય, તો તે સંઘાત સ્થિતિ-સ્થાપક સંઘાત કહેવાય છે.
17. m_1 દળવાળો પદાર્થ v_1 વેગથી ગતિ કરીને v_2 વેગથી તે જ દિશામાં ગતિ કરતાં m_2 દળવાળા બીજા પદાર્થ સાથે સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત અનુભવે અને તેમના અંતિમ વેગ અનુક્રમે v_1' અને v_2' હોય, તો

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \text{ અને } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$$

18. જો બે પદાર્થ વચ્ચે થતો સંઘાત સંપૂર્ણ અસ્થિતિસ્થાપક હોય, તો સંઘાત બાદ બંને પદાર્થો એકબીજા સાથે ચોંટેલા રહે છે અને સમાન વેગ v થી ગતિ કરે છે. આ કિસ્સામાં,

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

19. m_1 દળવાળો એક પદાર્થ v_1 વેગથી ગતિ કરીને m_2 દળવાળા સ્થિર પદાર્થ સાથે સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત અનુભવે છે. સંઘાત બાદ બંને પદાર્થ v_1' અને v_2' વેગથી v_1 ની દિશા સાથે θ_1 અને θ_2 ખૂણો બનાવીને ગતિ કરે તો,

$$m_1v_1 = m_1v_1'cos\theta_1 + m_2v_2'cos\theta_2$$

$$0 = m_1v_1'sin\theta_1 - m_2v_1'sin\theta_2$$

અને $m_1v_1^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. જો દીવાલ પર 20N બળ લગાડતાં દીવાલનું સ્થાનાંતર ન થતું હોય, તો થતું કાર્ય ....

(A) 20 J (B) 0 J
(C) 10 J (D) કશું કહી શકાય નહિ.

2. જો પદાર્થના રેખીય વેગમાનમાં 1 ટકાનો વધારો કરવામાં આવે, તો તેની ગતિ-ઊર્જામાં થતો વધારો .... હોય છે.

(A) 10 % (B) 0 % (C) 2 % (D) 100 %

3. 60 kg દળવાળા વિદ્યાર્થીએ કેટલા વેગથી દોડવું જોઈએ કે જેથી તેની ગતિ-ઊર્જા 270 J થાય ?

(A) 10 m/s (B) 3 m/s (C) 20 m/s (D) 2.5 m/s

4. એક સ્પ્રિંગ પર 3.92 N જેટલું બળ લગાડતાં તે તેની સામાન્ય સ્થિતિમાંથી 1 cm જેટલું સંકોચન અનુભવે છે, તો સ્પ્રિંગનું સંકોચન 10 cm જેટલું હોય, ત્યારે તેની સ્થિતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) 1.96 J (B) 2.45 J (C) 19.6 J (D) 196.0 J

5. 100 kg દળના એક પદાર્થને 60 m ઊંચાઈએ 1 મિનિટમાં લઈ જવા માટે કેટલો પાવર જોઈએ ? ($g = 9.8\ m/s^2$)

(A) 100 W (B) 980 W (C) 9.8 W (D) 1980 W

6. એક પદાર્થ પર (–4, 2, 6) N બળ લગાડતાં તે Y-અક્ષની દિશામાં 2 *m* જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે, તો પદાર્થ પર થયેલું કાર્ય શોધો.

(A) 2 J (B) 4 J (C) 1 J (D) 4.5 J

7. $\vec{F} = (1, -3, 1)$ અને $\vec{d} = (2, -3, -11)$ છે તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો .... rad થશે.

(A) π (B) 0 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

8. એક બસનું દળ 2000 kg છે. તેમાં 50 km/h નો વેગ ઉત્પન્ન કરવા માટે કેટલું કાર્ય કરવું પડશે ?

(A) 1.6×10^5 J (B) 1.6×10^6 J (C) 1.93×10^5 J (D) 193 J

9. એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની તેની મહત્તમ ઊંચાઈએ સ્થિતિ-ઊર્જા તેની શરૂઆતની ગતિ-ઊર્જાની $\frac{3}{4}$ ગણી થાય છે, તો પદાર્થનો પ્રક્ષિપ્તકોણ .... છે.

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

10. અચળ પાવર ધરાવતા મશીન દ્વારા એક પદાર્થને ખસેડવામાં આવે છે. *t* સમયમાં પદાર્થને પ્રાપ્ત થતો વેગ .... ના સમપ્રમાણમાં છે.

(A) $t^{\frac{3}{4}}$ (B) $t^{\frac{3}{2}}$ (C) $t^{\frac{1}{4}}$ (D) $t^{\frac{1}{2}}$

11. એક પદાર્થ સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય તેવા પ્રતિપ્રવેગની અસર હેઠળ ગતિ કરે છે. *x* જેટલા સ્થાનાંતર દરમિયાન તેની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ઘટાડો .... ના સમપ્રમાણમા છે.

(A) x^2 (B) e^x (C) x (D) $\log e^x$

12. એક m દળવાળા સ્થિર પદાર્થને પ્રવેગ આપતાં તે T સમયમાં *v* જેટલો વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. સમયના પદમાં પદાર્થને મળતો તત્કાલીન પાવર .... છે.

(A) $\frac{mv^2}{T^2}t$ (B) $\frac{mv^2}{T^2}t^2$ (C) $\frac{mv^2t}{2T^2}$ (D) $\frac{mv^2t^2}{2T^2}$

13. 100 m ઊંચાઈવાળી ટેકરી પર 20 kg દળવાળો એક દડો સ્થિર છે. ત્યાંથી ગબડવાની શરૂઆત કરી જમીન પર આવી તે બીજી 30 m મીટર ઊંચી ટેકરી પર ચઢે છે અને ફરીથી ગબડીને જમીનથી 20 m ઊંચાઈએ આવેલા સમક્ષિતિજ આધાર પર આવે છે. આ સમયે તેનો વેગ .... હશે. ($g = 10$ m/s લો.) (ઘર્ષણબળને અવગણો.)

(A) 40 m/s (B) 20 m/s (C) 10 m/s (D $10\sqrt{30}$ m/s

14. એક દળરહિત દોરીના છેડે M kg દળવાળાં પદાર્થ લટકાવેલ છે. તે તેની મૂળ શિરોલંબ સ્થિતિ સાથે 45° નો ખૂણો બનાવે, તેટલું સ્થાનાંતર કરી શકે તે માટે જરૂરી સમક્ષિતિજ બળ .... છે.

(A) $Mg(\sqrt{2}+1)$ (B) $Mg\sqrt{2}$

(C) $Mg/\sqrt{2}$ (D) $Mg(\sqrt{2}-1)$

15. એક બાળકના હાથમાં 'ગૅસ' ભરેલ ફુગ્ગો છે. આ ફુગ્ગાને છોડી દેતાં તે ઉપરની દિશામાં ગતિ કરે છે, તો તેની સ્થિતિ-ઊર્જામાં .... થાય.

(A) વધારો (B) ઘટાડો

(C) પહેલાં વધારો અને પછી ઘટાડો (D) અચળ રહે.

16. સંરક્ષી બળ $\vec{F}$ માટે $\oint_{\text{બંધ ગાળો}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ....

(A) $\neq 0$ (B) < 0 (C) > 0 (D) $= 0$

17. નીચેનાં પૈકી કયું બળ સંરક્ષી બળ નથી ?

(A) ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (B) સ્પ્રિંગમાં ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ

(C) ઘર્ષણબળ (D) બધાં

18. 0.8 kg દળવાળા પદાર્થનો વેગ $3\hat{i} + 4\hat{j}$ *m/s*, તો તેની ગતિ-ઊર્જા .... છે.

(A) 10 J (B) 40 J (C) 32 J (D) 16 J

19. X-અક્ષની દિશામાં ગતિ કરવા માટે મુક્ત એવા એક 1 kg ના પદાર્થ માટે સ્થિતિ-ઊર્જા નીચેના સૂત્રથી મળે.

$U(x) = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$J. તેની યાંત્રિક ઊર્જા 2 J છે, તો તેની મહત્તમ ઝડપ .... m/s છે.

(A) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) 2

20. એક મશીન દ્વારા ખસેડાતા પદાર્થની *t* સમયે ગતિ ઊર્જા સમયના સમપ્રમાણમાં છે. તો *t* સમયે પદાર્થ દ્વારા કપાતું અંતર .... ના સમપ્રમાણમાં હશે.

(A) $t^{\frac{3}{2}}$ (B) $t^{\frac{2}{3}}$ (C) $t^{\frac{1}{4}}$ (D) $t^{\frac{1}{2}}$

જવાબો

1. (B)	2. (C)	3. (B)	4. (A)	5. (B)	6. (B)
7. (D)	8. (C)	9. (C)	10. (D)	11. (A)	12. (A)
13. (A)	14. (D)	15. (B)	16. (D)	17. (C)	18. (A)
19. (A)	20. (A)				

નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

1. નિયમિત વર્તુળગતિ કરતા પદાર્થ પર કેન્દ્રગામી બળ દ્વારા કેટલું કાર્ય થાય ?
2. $F - x$ આલેખ વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ શું દર્શાવે ?
3. 1 *e*V કેટલા જૂલ સમતૂલ્ય છે ?
4. અસમાન દળના બે પદાર્થનું વેગમાન સમાન છે, તો કોની ગતિ-ઊર્જા વધુ હશે ?
5. એક પદાર્થને 7 m/s ના શરૂઆતના વેગથી ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે છે, તો કેટલી ઊંચાઈએ તેની ગતિ-ઊર્જા અડધી થશે ?

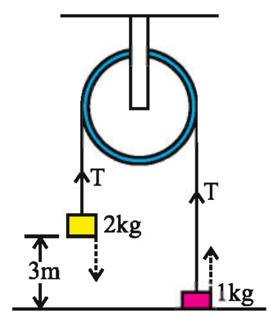
6. ગતિ-ઊર્જા અને સ્થિતિ-ઊર્જાનો સરવાળને શું કહેવાય.
7. સ્પ્રિંગના બળ-અચળાંકનું પારિમાણિક સૂત્ર આપો.
8. 1 W કેટલા હોર્સપાવરને સમતૂલ્ય છે ?
9. એક પદાર્થનું વેગમાન બમણું થાય છે. તેની ગતિ-ઊર્જામાં કેટલા ટકા વધારો થાય ?
10. અસંરક્ષી બળ એટલે શું ?
11. સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતની વ્યાખ્યા આપો.
12. પદાર્થ પર બળ લાગતું હોય ત્યારે કાર્ય થવા માટે શું જરૂરી છે ?
13. દળ અને ગતિ-ઊર્જાના પદમાં વેગમાનનું સમીકરણ આપો.
14. કયા સંજોગોમાં બળ અને સ્થાનાંતર એક દિશામાં નથી હોતાં ?
15. કાર્યઊર્જા પ્રમેય જણાવો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કાર્ય કઈ બાબતો પર આધાર રાખે છે, તેની ચર્ચા કરો અને તે પરથી કાર્યની વ્યાખ્યા આપો.
2. પદાર્થ પર ચલ બળ દ્વારા થતું કાર્ય સમજાવો.
3. કાર્યઊર્જા પ્રમેય લખો અને સમજાવો.
4. સ્થિતિ સ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા એટલે શું ? સ્પ્રિંગનાં ઉદાહરણ અને જરૂરી સમીકરણોની મદદથી ચર્ચા કરો.
5. સંરક્ષી બળ માટે સાબિત કરો કે $F = -\frac{dU}{dx}$
6. X–અક્ષની દિશામાં ગતિ કરતા બે પદાર્થ માટે સ્થિતિ સ્થાપક સંઘાતની ચર્ચા યોગ્ય સમીકરણોની મદદથી કરો.
7. દ્વિ-પરિમાણમાં સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતની ચર્ચા કરો.

નીચેના દાખલાઓ ગણો :

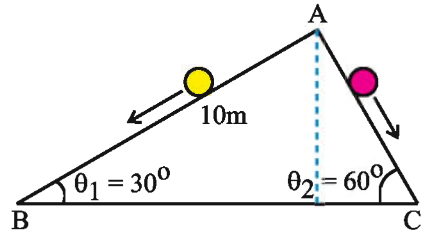
1. આકૃતિ 6.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જમીન પર રહેલા 1 kg દળ ધરાવતા પદાર્થને 2 kg દળ ધરાવતા પદાર્થ સાથે લીસી ગરગડી (pulley) પરથી પસાર થતી વજનરહિત અને અતન્ય (inextensible) દોરીના બીજા છેડે જોડવામાં આવે છે. પ્રારંભમાં તંત્ર સ્થિર સ્થિતિમાં રાખવામાં આવ્યું છે. હવે આ દળોને મુક્ત કરતાં 2 kg દળ ધરાવતો પદાર્થ જ્યારે જમીનને સ્પર્શે, ત્યારે બંને પદાર્થોની સામાન્ય ઝડપ શોધો. પ્રારંભિક સ્થિતિમાં 2 kg દળ ધરાવતો પદાર્થ જમીનથી 3 *m* ઊંચાઈએ છે. (g = 9.8 m/s^2) [જવાબ : 4.43 m/s]



આકૃતિ 6.17

2. $\vec{v_1}$ જેટલા વેગથી ગતિ કરતો *m* દળનો એક કણ સ્થિર પડેલ *m* દળના બીજા કણ સાથે દ્વિપારિમાણિક સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત અનુભવે છે. સંઘાત બાદ આ કણો $\vec{v_1}'$ અને $\vec{v_2}'$ વેગથી ગતિ કરતા હોય, તો સાબિત કરો કે તેમના વેગો વચ્ચેનો કોણ 90° હોય.
3. 12 m/s ના વેગથી X-અક્ષ પર ગતિ કરતો 15 kg દળવાળો સ્ટીલનો એક ગોળો સ્થિર પડેલ 20 kg દળવાળા ગોળા સાથે સંઘાત અનુભવે છે. જો સંઘાત બાદ પ્રથમ ગોળાનો વેગ 8 m/s તથા તેનો વેગ X-અક્ષ સાથે 45° કોણ બનાવતો હોય, તો સંઘાત બાદ બીજા ગોળાના વેગના મૂલ્ય તથા દિશા શોધો. [જવાબ : 6.37 m s^{-1}, 41°44']
4. એક પારિમાણિક ગતિ કરતા એક કણના સ્થાન x અને સમય t વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે : $t = \sqrt{x} + 3$
અહીં x મીટરમાં અને t સેકન્ડમાં છે.
(1) જ્યારે કણનો વેગ શૂન્ય થાય, ત્યારે કણનું સ્થાનાંતર શોધો.
(2) જો કણ પર અચળ બળ લાગતું હોય, તો પ્રથમ 6સેકન્ડમાં થતું કાર્ય શોધો.
[જવાબ : (1) –9 m, (2) 0 J]

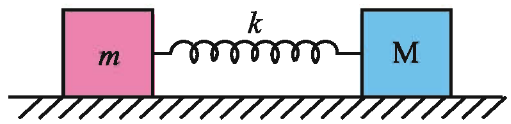
5. આકૃતિ 6.18માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે ગોળાઓને બિંદુ Aથી અનુક્રમે AB તથા AC પથ પર મુક્ત કરવામાં આવે છે. શું બંને ગોળાઓ એક જ સમયે જમીન પર પહોંચશે ? બંને ગોળાઓ માટે ઢાળને તળિયે ઝડપ તથા જમીન પર પહોંચવાનો સમય શોધો. બંને સપાટીઓ લીસી લો. $\theta_1 = 30^o$, $\theta_2 = 60^o$ અને $h = 10$ m. $g = 10$ m/s^2 લો.



આકૃતિ 6.18

[જવાબ : ના, 14.1 m/s, $2\sqrt{2}$ s, $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ s]

6. એક ઘર્ષણરહિત ટેબલની સપાટી પર k બળ-અચળાંક ધરાવતી એક દળરહિત સ્પ્રિંગને અનુક્રમે m અને M દળ ધરાવતા બે બ્લૉકની વચ્ચે દબાયેલી સ્થિતિમાં રાખેલ છે. સ્પ્રિંગને જ્યારે મુક્ત કરતાં બંને બ્લૉક એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. સ્પ્રિંગ તેની મૂળ સામાન્ય લંબાઈ પ્રાપ્ત કરતાં બંને બ્લૉક એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. સ્પ્રિંગ તેની મૂળ સામાન્ય લંબાઈ પ્રાપ્ત કરતાં બંને બ્લૉક સાથે તે સંપર્ક ગુમાવે છે. જો સ્પ્રિંગને શરૂઆતમાં x જેટલી દબાવવામાં આવી હોય, તો છૂટા પાડતી વખતે બંને બ્લૉકની ઝડપ શોધો.

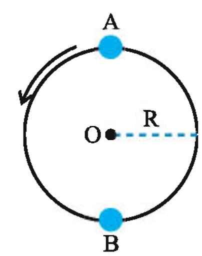


આકૃતિ 6.19

[જવાબ : m દળના બ્લૉક માટે $\sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}} \cdot x$;

M દળના બ્લૉક માટે $\sqrt{\frac{km}{M(M+m)}} \cdot x$]

7. અનુક્રમે m_1 અને m_2 દળ ધરાવતાં બે મણકાઓ A અને B ને આકૃતિ 6.20માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, ઊર્ધ્વ રાખેલ R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર લીસા તાર પર રાખેલ છે. હવે A ને ખૂબ જ ધીમેથી ધક્કો મારતાં તે નીચે ઊતરીને B સાથે અથડામણ અનુભવી સ્થિર થાય છે. અથડામણ બાદ B વર્તુળના પરિઘ પર કેન્દ્ર O ની ઊંચાઈએ પહોંચે છે, તો સાબિત કરો કે, $m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$



આકૃતિ 6.20

8. ઉદાહરણ 11માં ગોળાની ઝડપ તેના નિમ્નતમ સ્થાન માટે (i) A થી B તરફ અને (ii) B થી C તરફ ગતિ કરતો હોય ત્યારે શોધો. g = 10 m/s^2.

[જવાબ : $\sqrt{14}$ m/s અને $\sqrt{6}$ m/s]

9. એક ગનમાંથી એક બુલેટ ખૂબ જ મોટા લાકડાના બ્લૉકમાં મારતાં ગોળી બ્લૉકમાં 6 cm ગતિ કરે ત્યાં સુધી તેનાં વેગ અડધો થઈ જાય છે, તો તે વધુ કેટલું અંતર કાપીને સ્થિર બનશે ? અવરોધક બળ અચળ છે. [જવાબ : 2 cm]

10. પ્રકરણ 5ના સ્વાધ્યાયના દાખલા નંબર 9નો ઉકેલ કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

[જવાબ : 2tanθ]

પ્રકરણ 7

ઉષ્મા-પ્રસરણ

7.1 પ્રસ્તાવના
7.2 ઉષ્માવહન
7.3 ઉષ્માનયન
7.4 વિકિરણ
7.5 સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ અને તેમાંથી ઉત્સર્જન પામતાં વિકિરણો
7.6 કિર્ચોફનો નિયમ
7.7 વીનનો સ્થળાંતરનો નિયમ
7.8 સ્ટિફન બોલ્ટ્ઝમેનનો નિયમ
7.9 ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ
7.10 ગ્રીનહાઉસ અસર
- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

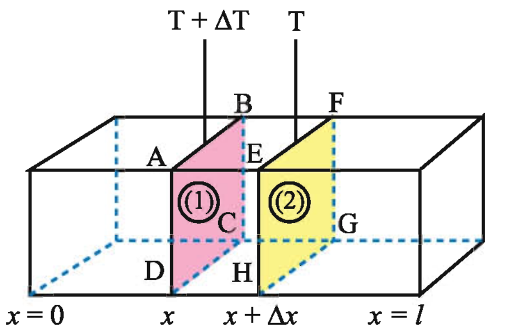
7.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપણે ઉષ્મા વિશેના પાયાના ખ્યાલોનો અભ્યાસ અગાઉ કર્યો છે. બે અસમાન તાપમાન ધરાવતા પદાર્થોને એકબીજાના સંપર્કમાં લાવતાં વધુ તાપમાનવાળા પદાર્થમાંથી ઉષ્માવહન ઓછા તાપમાનવાળા પદાર્થ તરફ થાય છે, પણ એક જ ઘન પદાર્થના બે અસમાન તાપમાનવાળા ભાગ વચ્ચે ઉષ્માનું પ્રસરણ રીતે થાય છે ? સૂર્યમાં પેદા થતી વિપુલ ઉષ્મા-ઊર્જાનો થોડો અંશ પૃથ્વી સુધી કેવી રીતે પહોંચે છે ? સૌર-ઊર્જાનો ઉપયોગ કરીને સોલરકુકરમાં દાળ-ભાત રાંધી શકીએ છીએ, તો બિરબલ તેની ખીચડી કેમ (ઇરાદાપૂર્વક !!!) પકવી શક્યો નહિ ? ગરમ પદાર્થને ખુલ્લો રાખતાં થોડા સમય પછી કેમ ઠંડો પડે છે ? વગેરે પ્રશ્નોના જવાબ તમે કદાચ આ પ્રકરણના અંતે આપી શકશો.

7.2 ઉષ્માવહન (Thermal Conduction)

પદાર્થના પાસપાસેના ભાગો વચ્ચે તાપમાનના તફાવતને કારણે થતા ઉષ્માના વહનને ઉષ્માવહન કહે છે. ઘન પદાર્થોમાં તેના બંધારણીય કણો (અણુઓ, પરમાણુઓ કે આયનો) પદાર્થના તાપમાનને અનુસાર યોગ્ય કંપવિસ્તારથી પોતાની સંતુલન-સ્થિતિની આસપાસ દોલનો કરે છે. પદાર્થનું તાપમાન વધતાં આ કણોનાં દોલનોનો કંપવિસ્તાર પણ વધે છે. આમ, ઘન પદાર્થને ઉષ્મા આપતાં તેનાં દોલનોની ગતિ-ઊર્જામાં વધારો થાય છે. વળી, આ કણો વચ્ચે ખાસ પ્રકારનાં આંતર અણુબળો પણ લાગતાં હોય છે. આ બળો કણોની વધેલી દોલનગતિ ઊર્જાની અસર બાજુમાં રહેલા અન્ય કણોને પહોંચાડે છે, જેને કારણે હવે 'પાડોશી' કણોનો પણ કંપવિસ્તાર વધે છે અને આ રીતે ઘન પદાર્થને આપેલ ઉષ્મા-ઊર્જાનું પદાર્થમાં પ્રસરણ થાય છે. આ રીતે ઘન પદાર્થમાં થતા ઉષ્મા-ઊર્જાના વહનને 'ઉષ્માવહન'ની ઘટના કહે છે. ધાતુતત્ત્વોમાં મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન ઉષ્મા-ઊર્જાના પ્રસરણમાં મુખ્ય ભાગ ભજવે છે.

આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ ઘન પદાર્થના નિયમિત આડછેદ A વાળા ચોસલાને ધ્યાનમાં લો. આ લંબઘનના એક છેડાથી x અને $x + \Delta x$ અંતરે આવેલા બે સમતલો ABCD અને EFGH નાં તાપમાન અનુક્રમે $T + \Delta T$ અને T છે. એટલે કે Δx અંતર માટે તાપમાનનો તફાવત ΔT છે. $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ ને તાપમાન-પ્રચલન (Temperature gradient) કહે છે. Δx અને



આકૃતિ 7.1

ΔTનાં નાનાં મૂલ્યો માટે બે સમતલો વચ્ચેથી સમતલોને લંબરૂપે Δt સમયમાં પસાર થતો ઉષ્માનો જથ્થો ΔQ. સમય Δt તાપમાન-પ્રચલન $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ અને આડછેદના ક્ષેત્રફળ Aના સમપ્રમાણમાં હોય છે. એટલે કે,

$$\Delta Q \ \alpha \ A\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta t$$

$$\therefore \ \Delta Q = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta t$$

$$\therefore \ \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad (7.2.1)$$

અહીં, k સપ્રમાણતા અચળાંક છે અને તેને આપેલ પદાર્થની ઉષ્માવાહકતા (Thermal conductivity) કહે છે. તેનું મૂલ્ય દ્રવ્યના પ્રકાર અને અમુક અંશે તાપમાન પર આધારિત છે. ઉષ્માના સુવાહકોની ઉષ્માવાહકતાનું મૂલ્ય મોટું હોય છે. સામાન્ય સંજોગોમાં પદાર્થના જુદા જુદા ભાગોના તાપમાન વચ્ચેનો તફાવત બહુ મોટો ન હોય, તો આપેલ પદાર્થ માટે ઉષ્માવાહકતાને અચળ ગણી શકાય..

ઉપર્યુક્ત સમીકરણોમાં આવતી ઋણ નિશાની તમને ખટકતી નથી ? ખટકે, પણ તે અનિવાર્ય છે, કેમકે જેમ x વધે છે, તેમ T ઘટે છે, તેથી $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ ઋણ મળે પણ $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ધન હોવાથી ઉપર્યુક્ત સમીકરણોમાં ઋણ નિશાની '–' મૂકેલી છે.

જો બે ક્રમિક સ્તર વચ્ચેનું અંતર ખૂબ ઓછું હોય તો Δtનું મૂલ્ય પણ ખૂબ જ નાનું મળે તેથી સમીકરણ (7.2.1)માં $\Delta x \rightarrow 0$ અને $\Delta t \rightarrow 0$ લેતાં સમીકરણને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad (7.2.2)$$

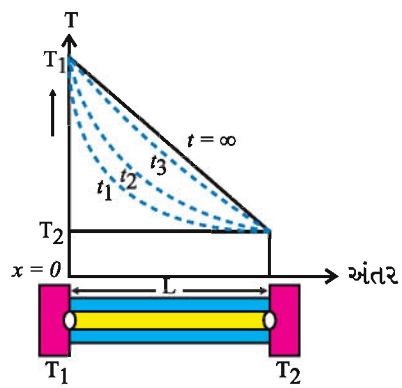
$$\therefore \ H = -kA\frac{dT}{dx} \qquad (7.2.3)$$

અહીં $\frac{dQ}{dt}$ = H ઉષ્માપ્રવાહ ઓળખાય છે. ઉષ્માપ્રવાહ એટલે કોઈ આડછેદમાંથી એકમ સમયમાં પસાર થતી ઉષ્મા-ઉર્જા.

સમીકરણ (7.2.1)માં જો $A = 1m^2$ તથા $\frac{dT}{dx} = -1\,Km^{-1}$, હોય, તો $\frac{dQ}{dt} = k$ થાય. એટલે કે **"પદાર્થના એકમ આડછેદવાળા એકમ તાપમાન-પ્રચલન ધરાવતા સમતલમાંથી સમતલને લંબરૂપે ઉષ્માપ્રવાહના મૂલ્યને તે પદાર્થની આપેલા તાપમાને ઉષ્માવાહકતા કહે છે."**

ઉષ્માવાહકતાનો એકમ cal s^{-1} m^{-1} K^{-1} અથવા watt m^{-1} K^{-1} છે.

સળિયામાં ઉષ્માવહન (Thermal Conduction in a Bar) : આકૃતિ 7.2 માં એક ઉષ્મીય રીતે અલગ કરેલી બાજુઓવાળો (એટલે કે બે છેડા સિવાય લંબાઈને સમાંતર સપાટીમાંથી ઉષ્માની આપ-લે ન થતી હોય તેવા) L લંબાઈનો સળિયો દર્શાવેલ છે. તેનો નિયમિત આડછેદ A છે. બે છેડાનાં તાપમાન T_1 અને T_2 અચળ છે. ($T_1 > T_2$). $t = 0$ સમયે સળિયાના $x = 0$ આગળના છેડા પાસે T_1 તાપમાનવાળુ ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાન મૂકતાં ધીરેધીરે ઉષ્માવહનને લીધે સળિયાના દરેક ભાગનું તાપમાન વધવા લાગે છે. સળિયાના જુદા જુદા ભાગનાં તાપમાન સમય સાથે કેવી રીતે વધે છે તે આકૃતિ 7.2 માં આપેલ આલેખમાં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 7.2

અમુક સમય બાદ (વધારે સચોટતા સાથે કહીએ તો $t = \infty$ સમયે) સળિયાના દરેક ભાગનાં તાપમાનો સમય સાથે અચળ થઈ જાય છે. આ અચળ થઈ ગયેલાં તાપમાનો ગરમ છેડાથી શરૂ કરી ઠંડા છેડા તરફ ક્રમશઃ ઘટતા મૂલ્યનાં હોય છે. આ સ્થિતિમાં ગરમ છેડા દ્વારા સળિયો જેટલા સમયમાં જેટલી ઉષ્મા મેળવે છે, તેટલા સમયમાં તેટલી જ ઉષ્મા ઠંડા છેડા પાસેથી ગુમાવે છે. સળિયાની બાજુઓ ઉષ્મીય રીતે અલગ કરી હોવાથી બાજુઓ પરથી ઉષ્માનો વ્યય થતો નથી. આથી, સળિયાનો દરેક વિભાગ પોતાની પાસેના ગરમ વિભાગ પાસેથી જેટલા સમયમાં જેટલી ઉષ્મા મેળવે છે તેટલા જ સમયમાં તેટલી જ ઉષ્મા પોતાની પાસેના ઓછા તાપમાનવાળા વિભાગને આપી દે છે. આમ, આ સ્થિતિમાં સળિયાના દરેક આડછેદ માટે ઉષ્માપ્રવાહ $\frac{dQ}{dt}$ સમગ્ર સળિયા પર લંબાઈની દિશામાં એકમૂલ્ય હોય છે. ઉપરાંત સમગ્ર સળિયાની લંબાઈ પર $\frac{dT}{dx}$ પણ એકમૂલ્ય

હોય છે. વળી, $\frac{dQ}{dt}$ અને $\frac{dT}{dx}$ નાં મૂલ્યો હવે સમય સાથે અચળ રહે છે. આવી સ્થિતિને સળિયાની **સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા (Thermal Steady State)** કહે છે.

અત્રે, સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં સળિયાના છેડાનાં તાપમાનો અનુક્રમે T_1 અને T_2 છે. અહીં $T_1 > T_2$ છે. હવે $\frac{dT}{dx}$ સમગ્ર લંબાઈ પર એકમૂલ્ય હોવાથી,

$$\frac{dT}{dx} = -\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right] \quad (7.2.4)$$

આથી, આ કિસ્સામાં સમીકરણ (7.2.2) નીચે પ્રમાણે લખાશે :

$$\frac{dQ}{dt} = kA\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right] \quad (7.2.5)$$

અહીં $\frac{dQ}{dt}$ સમય સાથે અચળ હોવાથી તેને $\frac{Q}{t}$ લઈ શકાય.

$$\therefore \ \frac{Q}{t} = kA\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right]$$

$$\therefore \ Q = kA\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right]t \quad (7.2.6)$$

સમીકરણ (7.2.6) સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં, સળિયામાંથી t સમયમાં પસાર થતો ઉષ્માનો જથ્થો આપે છે.

ટેબલ : 7.1

કેટલાક પદાર્થોની ઉષ્માવાહકતા (માત્ર જાણકારી માટે)

પદાર્થ	ઉષ્માવાહકતા $W\ m^{-1}\ K^{-1}$
ચાંદી	406
તાંબું	385
ઍલ્યુમિનિયમ	205
પિત્તળ	109
લોખંડ	50.2
સીસું	34.7
પારો	8.3
કાચ	0.8
પાણી	0.8
લાકડું	0.12–0.04
શરીરમાંની ચરબી	0.2
હાઇડ્રોજન વાયુ	0.14
હવા	0.024

ઉપર્યુક્ત ટેબલમાં દર્શાવેલ માહિતી દર્શાવે છે કે મોટા ભાગનાં ધાતુઓ ઉષ્માની સુવાહક છે. આ ધાતુઓ વિદ્યુત માટે પણ સુવાહક છે. આ બન્ને પ્રકારની સુવાહકતા માટે તેમાં રહેલા મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન જવાબદાર છે.

ઉષ્મીય અવરોધ (Thermal Resistance)

સમીકરણ (7.2.5) પરથી

$$H = kA\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right]$$

$$\therefore \ H = \left[\frac{T_1 - T_2}{L/kA}\right]$$

આ સમીકરણને વિદ્યુતપ્રવાહ માટેના સમીકરણ $I = \frac{V}{R}$ સાથે સરખાવતાં I વિદ્યુતપ્રવાહ છે, તો H ઉષ્મા પ્રવાહ છે. V વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત છે, તો $T_1 - T_2$ તાપમાનનો તફાવત છે, તો L/kA પદ ઉષ્મીય અવરોધ દર્શાવે છે, તેમ કહી શકાય.

આમ, ઉષ્મીય અવરોધ (R_H) નીચેના સૂત્રથી મળે છે.

$$R_H = L / kA$$

ઉષ્મીય અવરોધ (R_H) નો એકમ કેલ્વિન/વૉટ છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^{-1}L^{-2}T^3K$ થાય.

ઉષ્મીય વાહકોને શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણમાં જોડતાં મળતાં સમતુલ્ય ઉષ્મીય અવરોધનાં સૂત્રો પણ, વિદ્યુતનાં અવરોધનાં સૂત્રોને મળતાં જ આવે છે. એટલે કે,

$$(R_H)_s = (R_H)_1 + (R_H)_2$$

અને $$\frac{1}{(R_H)_P} = \frac{1}{(R_H)_1} + \frac{1}{(R_H)_2}$$

(જાતે ચકાસી જુઓ.)

અહીં $(R_H)_s$ શ્રેણીજોડાણ માટે અને $(R_H)_p$ સમાંતર જોડાણ માટેનો સમતુલ્ય ઉષ્મીય અવરોધ છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં એક મુદ્દો એ પણ ઉમેરી શકાય કે જેમ વિદ્યુતપ્રવાહ માટે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત જરૂરી છે, તેમ ઉષ્મીય પ્રવાહ માટે તાપમાનનો તફાવત પણ જરૂરી છે.

માત્ર જાણકારી માટે :

નોંધ : કેટલાંક પુસ્તકોમાં ઔદ્યોગિક હેતુ માટે ઉષ્મીય અવરોધ $R = \frac{l}{k}$ તરીકે પણ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે, જે R–value તરીકે પણ ઓળખાય છે. R–value બિલ્ડિંગ મટિરિયલનો ઉષ્મીય અવરોધ દર્શાવવા માટે વપરાય છે.

ઉદાહરણ 1 : 1.5 cm^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તેમજ 25 cm લંબાઈના એક સળિયાનો એક છેડો 100 °C તાપમાન ધરાવતી વરાળ અને બીજો છેડો 0 °C તાપમાનવાળા બરફમાં રાખેલ છે. સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં (1) સળિયા પરનું તાપમાન-પ્રચલન (2) ઉષ્માવહનનો દર અને (3) ઊંચા તાપમાનવાળા છેડાથી 18 cm આવેલા સળિયા પરના બિંદુએ તાપમાન ગણો. (સળિયાની ઉષ્મા-વાહકતા $k = 0.9\ cal\ s^{-1}\ cm^{-1}\ °C^{-1}$ છે.)

ઉકેલ :

$A = 1.5\ cm^2 \quad T_1 = 100\ °C \quad \frac{dT}{dx} = ?$

$L = 25\ cm \quad T_2 = 0\ °C \quad \frac{dQ}{dt} = ?$

(1) તાપમાન-પ્રચલન $\frac{dT}{dx} = -\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right]$

$$= -\left[\frac{100 - 0}{25}\right] = -4\ °C\ cm^{-1}$$

(2) ઉષ્માવહનનો દર $\frac{dQ}{dt} = kA\left[\frac{T_1 - T_2}{L}\right]$

$$= 0.9 \times 1.5 \times \left[\frac{100 - 0}{25}\right]$$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = 5.4\ cal\ s^{-1}$$

(3) ઊંચા તાપમાનવાળા છેડાથી l = 18 cm દૂર આવેલા સળિયા પરના બિંદુએ તાપમાન ધારો કે T_l છે.

$\frac{dT}{dx}$ સમગ્ર સળિયા પર અચળ હોવાથી T_1 તાપમાન-વાળા છેડાથી l અંતરે તાપમાન,

$$T_l = T_1 + \left(\frac{dT}{dx}\right)l$$

$$= 100 - 4 \times 18 = 28\ °C$$

અથવા

દર સેમી અંતરે તાપમાન 4 °C ઘટે છે. (1) પરથી

$\therefore$ 18 cm અંતરે તાપમાન 72 °C ઘટે.

$\therefore$ માંગેલ તાપમાન = 100 − 72 = 28 °C

ઉદાહરણ 2 : એક સંયુક્ત ચોસલું અનુક્રમે L_1 અને L_2 જાડાઈના k_1 અને k_2 ઉષ્માવાહકતાવાળા તેમજ સમાન આડછેદ ($A_1 = A_2 = A$) ના બે ઘટક ચોસલાનું બનેલું છે. જો સંયુક્ત ચોસલાની છેડાની સપાટીઓનાં તાપમાન અનુક્રમે T_1 અને T_2 હોય તેમજ બંને ઘટક ચોસલાની સંપર્કસપાટીનું તાપમાન T_x હોય, તો સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં સંપર્કસપાટીનું તાપમાન

$$T_x = \frac{\frac{L_2 T_1}{k_2} + \frac{L_1 T_2}{k_1}}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$ અને ઉષ્માપ્રવાહ

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A(T_1 - T_2)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

છે તેમ સાબિત કરો. (ઉષ્માવ્યયને અવગણો.)

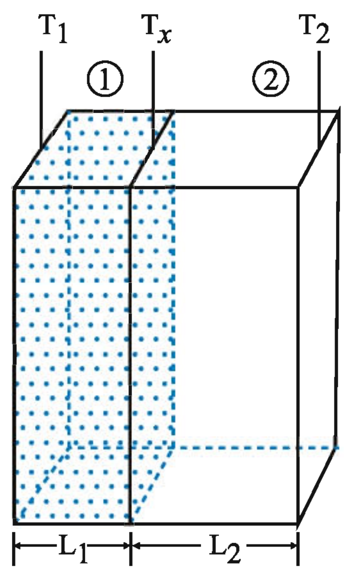
ઉકેલ :

ચોસલા (1) માટે ઉષ્મીય અવરોધ

$R_1 = \frac{L_1}{k_1 A}$ અને

ચોસલા (2) માટે ઉષ્મીય અવરોધ

$R_2 = \frac{L_2}{k_2 A}$



આકૃતિ 7.3

ચોસલાંઓ શ્રેણીમાં હોવાથી કુલ અવરોધ $R = R_1 + R_2$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2}$$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A}}$$

$$= \frac{A(T_1 - T_2)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

સંપર્કસપાટીનું તાપમાન,

$$T_x = T_1 - \frac{dQ}{dt} \times R_1$$

$$= T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{(R_1 + R_2)} R_1$$

$$= \frac{T_1R_2 + T_2R_1}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{\frac{L_2T_1}{k_2A} + \frac{L_1T_2}{k_1A}}{\frac{L_1}{k_1A} + \frac{L_2}{k_2A}}$$

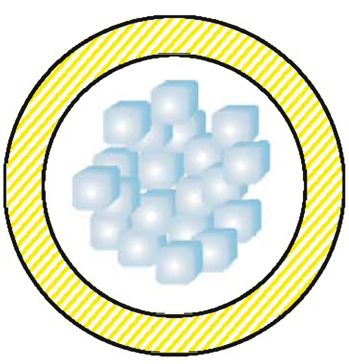
$$\therefore T_x = \frac{\frac{L_2T_1}{k_2} + \frac{L_1T_2}{k_1}}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

ઉદાહરણ 3 : એક થર્મોકોલના બનેલા ગોળાકાર પાત્રમાં 5 kg બરફ છે. પાત્રની દીવાલની જાડાઈ 23.14 cm છે. પાત્રની અંદરની ત્રિજ્યા 20 cm છે. જો 1 kg બરફને પિગળાવવા માટે 335 k J ઉષ્મા ઊર્જા જરૂરી હોય તો 1 દિવસમાં કેટલો બરફ પિગળે ? બહારનું તાપમાન 30 °C છે. થર્મોકોલની ઉષ્માવાહકતા 0.0275 SI એકમ છે. પાત્રની દીવાલ ઉષ્માની સ્થાયી અવસ્થામાં છે.

ગોળાકાર કવચની સ્થાયી ઉષ્મા અવસ્થા માટે ઉષ્માપ્રવાહના મૂલ્ય માટેનું સૂત્ર :

$$\frac{Q}{t} = \frac{4\pi k r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_1 - r_2}$$

જ્યાં T_1 અને T_2 પાત્રની અંદરની સપાટી અને બહારની સપાટીના તાપમાન છે. r_1 અને r_2 અંદરની અને બહારની ત્રિજ્યા છે.



આકૃતિ 7.4

ઉકેલ : ધારો કે 1 દિવસમાં *m* kg બરફ ઓગળે છે.

1 kg બરફને પિગળવા માટે 335×10^3 J ઉષ્મા ઊર્જા જરૂરી હોવાથી *m* kg માટે જરૂરી ઉષ્મા

$$Q = m \times 335 \times 10^3 \text{ J}$$

હવે $$\frac{Q}{t} = \frac{4\pi k r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_1 - r_2}$$

$$\therefore \frac{m \times 335 \times 10^3}{24 \times 3600} = \frac{4 \times 3.14 \times 0.0275 \times 20 \times 10^{-2} \times 23.14 \times 10^{-2} \times (30-0)}{3{\cdot}14 \times 10^{-2}}$$

$$\therefore m = \frac{4 \times 0.0275 \times 20 \times 10^{-2} \times 23.14 \times 30 \times 24 \times 3600}{335 \times 10^3}$$

$$= 3.939 \text{ kg}$$

નોંધ : r_1 અને r_2 બહારની અને અંદરની ત્રિજ્યા હોય તેવા નળાકાર કવચ માટે સ્થાયી ઉષ્મા અવસ્થા માટે ઉષ્માપ્રવાહનું સૂત્ર :

$$\frac{Q}{t} = \frac{2\pi k L (T_1 - T_2)}{ln\ r_1 - ln\ r_2}$$

L લંબાઈ અને T_1 અને T_2 અંદરનું અને બહારનું તાપમાન છે.

ઉદાહરણ 4 : સમાન લંબાઈ અને સમાન આડછેદ ધરાવતા લોખંડ અને ઍલ્યુમિનિયમના સળિયાના છેડાઓને એકબીજા સાથે જોડેલા છે. લોખંડના મુક્ત છેડાને 100 °C અને ઍલ્યુમિનિયમના મુક્ત છેડાને 0 °C તાપમાને રાખવામાં આવે છે. જો ઍલ્યુમિનિયમની ઉષ્માવાહકતા લોખંડની ઉષ્માવાહકતા કરતાં ચાર ગણી હોય, તો સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં બંને સળિયાની સંપર્કસપાટીનું તાપમાન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બંને સળિયાની લંબાઈ L અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે.

ધારો કે, લોખંડની ઉષ્માવાહકતા k છે.

∴ ઍલ્યુમિનિયમની ઉષ્માવાહકતા 4k થશે.

ધારો કે, બંને સળિયાની સંપર્કસપાટીનું તાપમાન T_x છે.

સંયુક્ત સળિયાની સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા માટે,

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{લોખંડ}} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{ઍલ્યુમિનિયમ}}$$

$$\therefore \frac{kA(100 - T_x)}{L} = \frac{4kA(T_x - 0)}{L}$$

$$\therefore 100 - T_x = 4T_x$$

$$\therefore 100 = 5T_x$$

$$\therefore T_x = 20\ ^\circ\text{C}$$

ઉદાહરણ 5 : એક સળિયાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 12.56 cm^{-2} છે. આ સળિયાના એક છેડાને વરાળપાત્રમાં રાખવામાં આવેલ છે. સળિયા પર એકબીજાથી 13 cm દૂર ગોઠવવામાં આવેલાં થરમૉમિટરમાં તાપમાન અનુક્રમે 56 °C અને 45 °C છે. સળિયાના બીજા છેડે વીંટાળેલ તાંબાની નળીમાં દાખલ થતા અને બહાર આવતા પાણીના તાપમાનનો તફાવત 30 °C હોય અને 3 મિનિટમાં 800 g પાણી વહેતું હોય, તો સળિયાના દ્રવ્યની ઉષ્માવાહકતા શોધો.

(પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા = 1 cal g^{-1} $°C^{-1}$)

ઉકેલ :

$A = 12.56\ cm^2$ $\quad m = 800\ g$

$L = 13\ cm$ $\quad \theta_1 - \theta_2 = 30\ °C$

$T_1 = 56\ °C$ $\quad t = 3\ min = 180\ s$

$T_2 = 45\ °C$ $\quad \therefore T_1 - T_2 = 11\ °C$

$$\therefore Q = mc\Delta\theta \text{ અને } Q = \frac{kA(T_1 - T_2)t}{L}$$

$$k = \frac{mc(\theta_1 - \theta_2)L}{A(T_1 - T_2)t}$$

$$= \frac{800 \times 1 \times 30 \times 13}{12.56 \times 11 \times 180}$$

$$= 12.54\ cal\ s^{-1}\ cm^{-1}\ °C^{-1}$$

ઉદાહરણ 6 : વાતાવરણના દબાણે સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં રહેલા 1 m લંબાઈના ધાતુના સળિયાના એક છેડાને 100 °C તાપમાનવાળા પાણીમાં અને બીજા છેડાને 0 °C તાપમાનવાળા બરફમાં મૂકેલ છે. હવે, 2000 °C તાપમાનવાળી જ્યોતને સળિયાના ગરમ છેડાથી કેટલા અંતરે મૂકવી જોઈએ કે જેથી 100 °C તાપમાનવાળા સળિયાને છેડે સમાન દરથી અનુક્રમે પાણીની વરાળ અને બરફનું પાણી બને. પાણીની ઉત્કલનગુપ્ત ઉષ્મા 540 cal g^{-1} અને બરફની ગલનગુપ્ત ઉષ્મા 80 cal g^{-1}. (**સૂચન :** જો પદાર્થના તાપમાનમાં ફેરફાર થાય તો વિનીમય પામતી ઉષ્માઊર્જા $\Delta Q = mc\Delta T$ થાય, જ્યાં c વિશિષ્ટ ઉષ્મા છે અને જો અચળ તાપમાને પદાર્થની ભૌતિક અવસ્થા બદલાય તો વિનીમય પામતી ઉષ્માઊર્જા $\Delta Q = mL$ જ્યાં L ગુપ્ત ઉષ્મા છે.)

ઉકેલ : ધારો કે જ્યોતને ગરમ છેડાથી x અંતરે મૂકવી પડે છે.

ધારો કે 1 s માં m દળના પાણીની વરાળ બને છે અને એટલા જ દળના બરફનું પાણી બને છે.

$$\therefore m(540) = kA\left[\frac{2000 - 100}{x}\right]$$

$$= \frac{1900kA}{x} \qquad (1)$$

$$\text{અને } m(80) = kA\left[\frac{2000 - 0}{100 - x}\right]$$

$$= \frac{2000kA}{100 - x} \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{540}{80} = \frac{1900(100 - x)}{2000(x)}$$

$$\therefore \frac{27}{4} = \frac{19}{20}\left(\frac{100 - x}{x}\right)$$

$$\therefore 540x = 7600 - 76x$$

$$\therefore 616x = 7600$$

$$\therefore x = 12.33\ cm$$

7.3 ઉષ્માનયન (Convection)

ઉષ્માવહનની ઘટનામાં ઘન પદાર્થના ઘટકકણો પોતપોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરતા હોય છે અને તેમની વચ્ચે લાગતા આંતર-અણુ બળો દ્વારા ઉષ્માનું પ્રસરણ થાય છે. જ્યારે ઉષ્માનયનમાં દ્રવ્યના ઘટકકણો ખરેખર ગતિ કરીને એક સ્થાનથી બીજા સ્થાને જાય છે. આ બાબત પરથી સમજી શકાય કે ઉષ્માનયનની ઘટના માત્ર તરલ પદાર્થો (પ્રવાહી અને વાયુ)માં જ એટલે કે તરલોમાં જ જોવા મળે, ઘનપદાર્થોમાં નહિ. વળી, એ પણ એટલું સાચું છે કે તરલમાં પણ ઉષ્મા-પ્રસરણમાં બહુ થોડા અંશે ઉષ્માવહન પણ ભાગ ભજવે છે.

સામાન્ય રીતે ઉષ્માનયનમાં નીચેના ભાગમાં રહેલ તરલ ગરમ થવાથી તેનું કદ વધે છે અને તેની ઘનતા ઘટે છે. આથી ઉત્પ્લાવક બળની અસર હેઠળ આ હળવું તરલ ઉપર જાય છે અને ગુરુત્વાકર્ષણની અસર હેઠળ ઉપરનું વધુ ઘનતાવાળું ભારે તરલ નીચેના ભાગમાં આવે છે. આ પ્રકારની સતત ચાલતી પ્રક્રિયાથી તરલ ગરમ થાય છે. કોઈ પણ દવાવાળાની દુકાનેથી પોટૅશિયમ પરમૅંગેનેટ લાવીને ફ્લાસ્કમાં પાણી ગરમ કરતી વેળા આ પોટૅશિયમ પરમૅંગેનેટ નાખીને આ ઘટના તાદશ કરી શકાય.

ઉષ્માનયન પ્રાકૃતિક (Natural) અથવા પ્રેરીત (Breezes) હોઈ શકે છે. જો દ્રવ્યની ગતિ ઘનતાના તફાવતને કારણે થતી હોય તો તેને પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયન કહે છે. સમુદ્રકિનારે જોવા મળતી ઠંડી લહેરો (Cool current)ની ઘટના તપાસીએ. સૂર્ય કિરણો દ્વારા જમીન ગરમ થતાં તેના સંપર્કમાં રહેલી હવા ગરમ થતાં તેનું કદ વધે છે અને ઘનતા ઘટે છે. પરિણામે તે ઉપરની તરફ ગતિ કરે છે. હવે જમીનની સપાટી પાસે હવાનું દબાણ ઘટતાં સમુદ્ર તરફથી ઠંડી હવા જમીન તરફ ગતિ કરે છે અને આમ શીત લહેરોનું નિર્માણ થાય છે. રાત્રી દરમિયાન આવા વિસ્તારમાં શું થતું હશે ? (જાતે વિચારો)

પ્રેરિત ઉષ્માનયનમાં કોઈ સાધન જેમકે, પંપ, ભેળક કે અન્ય કોઈ સાધન વડે તરલના દ્રવ્યની ગતિ કરાવવામાં

આવે છે. મનુષ્યના શરીરમાં રહેલ નાનકડું (મુઠ્ઠી જેટલા કદનું) હૃદય પંપ તરીકે કામ કરીને શરીરના વિવિધ ભાગોમાં રુધિર ભ્રમણ ચાલુ રાખીને પ્રેરિત ઉષ્માનયન વડે શરીરનું તાપમાન જાળવી રાખે છે.

પાણીનું તાપમાન 4°C to 0°C કરતાં તેનું કદ ઘટવાને બદલે વધે છે. આને પાણીનું અનિયમિત પ્રસરણ કહે છે. પરિણામસ્વરૂપ 4°C તાપમાને પાણીની ઘનતા મહત્તમ હોય છે. પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયન અને પાણીના અનિયમિત પ્રસરણના કારણે તો માછલીઓ જેવાં જળચરોનું જીવન સંભવી શકે છે. શિયાળામાં વાતાવરણનું તાપમાન ઘટતાં સપાટી નજીકનું પાણી ઠંડું થતાં ઘનતા વધવાથી તે નીચે જાય છે. તળિયે રહેલ ઓછું ઠંડું પાણી સપાટી પર આવીને વધુ ઠંડું થાય છે. આ રીતે ઉષ્માનયનની પ્રક્રિયા દ્વારા પાણીના સમગ્ર જથ્થાનું તાપમાન 4°C સુધી ઘટે છે. હવે સપાટી પર રહેલ 4°C વાળું પાણી વધું ઠંડું થતાં તેનું કદ સંકોચાવાને બદલે વધે છે અને પરિણામે તેની ઘનતા ઘટે છે. આથી તે સપાટી પર જ રહી વધુ ઠંડું થતું જાય છે અને 0°C તાપમાને બરફમાં રૂપાંતરિત થાય છે. આમ થયા પછી હવે બરફની નીચે રહેલ પાણી માત્ર ઉષ્માવહનની પ્રક્રિયા દ્વારા ઉષ્મા ગુમાવે છે. બરફની ઉષ્માવાહકતાનું મૂલ્ય ઘણું જ ઓછું હોઈને હવે પછી વધુ ઠારણ થવાની ક્રિયા ઘણી જ ધીમી પડી જાય છે. પરિણામસ્વરૂપ તળિયે રહેલ પાણીનું તાપમાન ઘણા લાંબા સમય સુધી આશરે 4°C જેટલું જળવાઈ રહે છે અને સામાન્ય સંજોગોમાં આટલા સમયમાં તો વાતાવરણના તાપમાનમાં પણ વધારો થતો હોઈને જળચર પ્રાણીઓ બચી જાય છે.

7.4 વિકિરણ (Radiation)

ઉષ્માવહન અને ઉષ્માનયનની ઘટનામાં માધ્યમના કણો ખૂબ જ સક્રિય ભાગ ભજવે છે. સૂર્યથી પૃથ્વી સુધીના વિસ્તારમાં મહદ્ અંશે શૂન્યાવકાશ (માધ્યમની ગેરહાજરી) છે. તો સૂર્યથી પૃથ્વી સુધી સૂર્યમાં ઉત્પન્ન થતી ઊર્જા કેવી રીતે પહોંચે છે ? શિયાળામાં તાપણું કરતી વેળા તાપણાથી દૂર ઊભા રહીને પણ ગરમી અનુભવી શકાય છે. સૂર્યમાંથી ઉષ્માનું પૃથ્વી સુધી પહોંચવા માટે અને તાપણામાં ઉત્પન્ન થતી ઉષ્મા આપણા સુધી પહોંચવા માટે ઉષ્મા-પ્રસરણનો ત્રીજો પ્રકાર કારણભૂત છે. આ પ્રકાર ઉષ્મીય વિકિરણ છે.

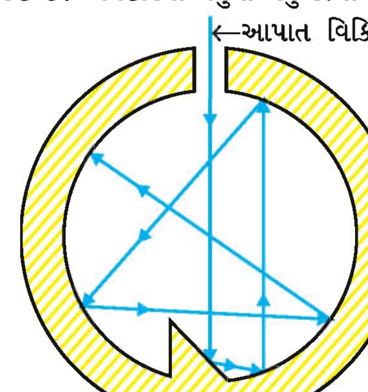
દરેક પદાર્થ પોતાના તાપમાનને અનુરૂપ અમુક ચોક્કસ આવૃત્તિઓવાળા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનું ઉત્સર્જન કરે છે. આ વિકિરણ ઉષ્મીય વિકિરણ (Thermal radiation) કહેવાય છે. ઉષ્મીય વિકિરણ વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણ છે. આ વિકિરણમાં રહેલા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો સાથે સંકળાયેલી ઊર્જાને વિકિરણ-ઊર્જા (Radiant–energy) કહે છે.

પ્રિવોસ્ટ (Prevost) નામના વિજ્ઞાનીના મતે દરેક પદાર્થ કોઈ પણ તાપમાને ઉષ્મીય વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરતો જ હોય છે. તાપમાન વધતાં સાથે ઉત્સર્જનનો દર પણ વધે છે અને સાથે-સાથે કોઈ પણ પદાર્થ તેના પર આપાત થતાં અન્ય વિકિરણોનું શોષણ પણ કરે છે. જો કોઈ પદાર્થમાં શોષાતા ઉષ્મીય વિકિરણનો દર ઉત્સર્જાતા વિકિરણના દરથી વધુ હોય, તો તે પદાર્થના તાપમાનમાં વધારો નોંધાય છે, અને જો પદાર્થ દ્વારા શોષાતા ઉષ્મીય વિકિરણનો દર ઉત્સર્જાતા વિકિરણના દરથી ઓછો હોય તો તે પદાર્થના તાપમાનમાં ઘટાડો નોંધાય છે. જ્યારે કોઈ પદાર્થનું તાપમાન પરિસરના તાપમાન જેટલું થાય ત્યારે તે પદાર્થ માટે વિકિરણ-ઉત્સર્જન અને વિકિરણ-શોષણના દર સમાન હોય છે.

પદાર્થ દ્વારા ઉત્સર્જાતાં ઉષ્મીય વિકિરણોમાં રહેલા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની આવૃત્તિઓનું પ્રમાણ વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરતી સપાટીના પ્રકાર અને તાપમાન પર છે. ઉદાહરણ તરીકે મીણબત્તી અથવા બન્શન બર્નરની જ્યોતમાં સૌથી અંદરના ભાગમાંથી બહારની તરફ જતાં તાપમાન વધતું જાય છે, તેથી સૌથી બહારના ભાગનું તાપમાન વધુ હોવાથી તે ભૂરા કે જાંબલી રંગનો દેખાય છે.

7.5 સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ અને તેમાંથી ઉત્સર્જન પામતાં વિકિરણો (Perfect Black Body and Black Body Radiation)

જે પદાર્થ પોતાના પર આપાત થતી બધી જ વિકિરણ-ઊર્જાનું શોષણ કરે તેને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ કહે છે. વ્યવહારમાં વધુમાં વધુ કાળો પદાર્થ દીવાની મેશ (Lamp black or soot) છે. તે તેના પર આપાત થતી વિકિરણ-ઊર્જાના લગભગ 98 % ટકાનું શોષણ કરે છે. એટલે કે તે 98 % સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ ગણાય. આ અર્થમાં ચાંદી 2 % સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ છે. વ્યવહારમાં 100 % સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ મેળવવો અશક્ય છે. યાદ રાખો કે સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થને કાળા રંગ સાથે કોઈ જ સંબંધ નથી.



આકૃતિ 7.5

તો પછી સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થમાંથી ઉત્સર્જન પામતાં વિકિરણોનો અભ્યાસ કઈ રીતે કરવો ? આ માટે આકૃતિમાં દર્શાવેલ એક પાત્ર વિચારો. આ પાત્ર અંદરના ભાગે ખરબચડી, કાળા રંગે રંગેલી દીવાલવાળું છે અને આ પાત્રમાં એક નાનકડું (પાત્રનાં પરિમાણોને સાપેક્ષ) છિદ્ર છે. આ છિદ્ર પર આપાત થતું વિકિરણ અંદરની દીવાલો વડે અનેક પરાવર્તનો અનુભવે છે અને દરેક પરાવર્તન વખતે તેનું અંશતઃ શોષણ અને અંશતઃ પરાવર્તન થાય છે અને તે

છિદ્રમાંથી પાછા બહાર નીકળવાની સ્થિતિમાં આવે ત્યાં સુધી તેની પાસે લગભગ કોઈ ઊર્જા રહે નહીં અને પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થવાની શક્યતા પણ નહિવત્ છે. છિદ્રની બરાબર સામે અંદરનો ભાગ એવો છે, જેથી કાણામાંથી આપાત થતું વિકિરણ ત્યાંથી જ પરાવર્તન પામીને તરત જ પાછું છિદ્રબહાર ન નીકળી શકે. આ સંદર્ભમાં આવા સૂક્ષ્મ છિન્દ્રને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ કહેવાય. આ પાત્રને સમાંગ રીતે બહારથી ગરમ કરતાં છિદ્રમાંથી બહાર આવતાં વિકિરણો સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થમાંથી ઉત્સર્જિત વિકિરણ કહેવાય. **તેને કેવિટી (બખોલ) વિકિરણ (Cavity radiations) પણ કહે છે.**

સૂર્યમાંથી મળતાં વિકિરણોમાં બધી જ તરંગલંબાઈઓ પર સતત રીતે પથરાયેલું વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણ મળતાં હોવાથી સૂર્યને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ કહી શકાય. વળી, સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન આશરે 5800 K છે. આ તાપમાને રાખેલ સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થમાંથી અને સૂર્યમાંથી મળતાં વિકિરણો લગભગ સમાન છે. આમ સૂર્ય 5800 K તાપમાનવાળા સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થ તરીકે વર્તે છે તેમ કહી શકાય. હવે સમજાયુંને કે કાળા પદાર્થને કાળા રંગ સાથે કોઈ ખાસ સગપણ નથી !

કોઈ પણ પદાર્થમાંથી ઉત્સર્જિત વિકિરણના ગુણધર્મો તે પદાર્થની સપાટીના તાપમાન અને પદાર્થની સપાટીની જાત પર આધારિત છે, જ્યારે સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થનાં વિકિરણોના ગુણધર્મો ફક્ત તેના તાપમાન પર આધારિત છે. આ સંદર્ભમાં સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થનાં વિકિરણો એક સાર્વત્રિક ગુણધર્મ ધરાવે છે તેમ કહી શકાય. આ હકીકત સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થના વિકિરણના અભ્યાસનું મહત્ત્વ દર્શાવે છે.

7.6 કિર્ચોફનો નિયમ (Kirchoff's Law)

સપાટીનું ક્ષેત્રફળ સમાન હોય તેવા સમાન દ્રવ્યના બે ગોળાઓ A અને B એક ઓરડામાં લટકાવેલ છે. ગોળા A ની સપાટી પૉલીશ કરેલી છે અને B ની સપાટી કાળી છે. તેમની ઉપર એકસરખી વિકિરણ-ઊર્જા આપાત થાય છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે ગોળા A ની સપાટી પૉલિશ કરેલી હોવાથી તે મોટા ભાગની ઊર્જાનું પરાવર્તન કરશે. જ્યારે ગોળા B ની સપાટી કાળી હોવાથી મોટા ભાગની વિકિરણ-ઊર્જાનું શોષણ કરશે. પણ બન્ને ગોળાનાં તાપમાન સમાન (ઓરડાના તાપમાન જેટલાં) જોવા મળે છે, તેથી ગોળા A માંથી ઊર્જાનું ઉત્સર્જન (તાપમાનને અનુલક્ષીને થતું ઉત્સર્જન) ઓછા દરથી થતું હોવું જોઈએ અને ગોળા B માં આ ઉત્સર્જનનો દર વધુ હોવો જોઈએ. આમ કહી શકાય કે જે સપાટી સારી શોષક હોય તે સપાટી સારી ઉત્સર્જક પણ હોય છે. આજ હકીકત કિર્ચોફનો વિકિરણ અંગેનો નિયમ રજૂ કરે છે. પરંતુ તે સમજતાં પહેલાં કેટલીક વ્યાખ્યાઓ સ્પષ્ટ કરી લઈએ.

શોષકતા (Absorptivity) : આપેલ તાપમાને કોઈ સપાટી પર વિકિરણ આપાત થતાં, શોષાતી વિકિરણ-ઊર્જા અને આપાત થતી વિકિરણ-ઊર્જાના ગુણોત્તરને તે સપાટીની શોષકતા (*a*) કહે છે.

$$\therefore\ a = \frac{\text{શોષાતી વિકિરણ - ઊર્જા}}{\text{આપાત થતી વિકિરણ - ઊર્જા}}$$

સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થ માટે $a = 1$.

કુલ ઉત્સર્જન પાવર (Total emissive power) : નિયત તાપમાને આપેલ પદાર્થની એકમ ક્ષેત્રફળવાળી સપાટીમાંથી દર સેકન્ડે ઉત્સર્જાતી વિકિરણ-ઊર્જાને આપેલ સપાટીનો કુલ ઉત્સર્જન-પાવર (W) કહે છે.

કુલ ઉત્સર્જન-પાવરની વ્યાખ્યામાં ઉત્સર્જન પામતા દરેક આવૃત્તિના વિકિરણનો સમાવેશ થઈ જાય છે.

સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર (Spectral emissive power) : કુલ ઉત્સર્જન-પાવરમાં ઉત્સર્જાતી બધી જ આવૃત્તિઓવાળા વિકિરણની ઊર્જા લેવામાં આવે છે. આપણે દરેક આવૃત્તિવાળા વિકિરણની ઊર્જાના સંદર્ભમાં, આવૃત્તિને અનુરૂપ ઉત્સર્જન-પાવરની વ્યાખ્યા આપી શકીએ છીએ. આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થતા ઉત્સર્જન-પાવરને સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર (W_f) કહે છે.

"નિયત તાપમાને આપેલ પદાર્થની એકમ ક્ષેત્રફળવાળી સપાટીમાંથી દર સેકન્ડે ઉત્સર્જાતી, આપેલ આવૃત્તિ (*f*) પાસેના આવૃત્તિના એકમ-ગાળાવાળા વિકિરણની ઊર્જાને તે આવૃત્તિને અનુરૂપ તે સપાટીનો તે તાપમાને સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર (W_f) કહે છે."

જો આવૃત્તિને બદલે તરંગલંબાઈ (λ) વાપરવાનું પસંદ કરીએ તો W_f ને બદલે W_λ સંજ્ઞા વાપરવી જોઈએ. અહીં, f એ λ તરંગલંબાઈને અનુરૂપ આવૃત્તિ છે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવરનો સરવાળો કરવાથી કુલ ઉત્સર્જન-પાવર મળે છે.

$$\therefore\ W = \sum_f W_f$$

W_f નું મૂલ્ય સપાટીનાં તાપમાન, જાત અને આવૃત્તિ f પર આધાર રાખે છે.

ઉત્સર્જકતા (Emissivity) : આપેલ સપાટીના કુલ ઉત્સર્જન-પાવર અને તે જ સંજોગોમાં રહેલ સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થની સપાટીના કુલ ઉત્સર્જન-પાવરના ગુણોત્તરને આપેલ સપાટીની ઉત્સર્જકતા (*e*) કહે છે. સિલ્વર માટે e નું મૂલ્ય 0.02 થી 0.03 જેટલું હોય છે.

સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થની સપાટી માટે $e = 1$ છે.

કિર્ચોફનો નિયમ (Kirchhoff's law) : "કોઈ પણ સપાટી માટે શોષકતા અને ઉત્સર્જકતાનાં મૂલ્યો સમાન હોય છે."

$\therefore\ a = e$

આમ, આ નિયમ પરથી સ્પષ્ટ છે કે સપાટી સારી શોષક હોવાની, તે સારી ઉત્સર્જક પણ હોવાની જ અને જે સપાટી સારી પરાવર્તક (એટલે કે ઓછી શોષક) હોવાની

તે ઓછી ઉત્સર્જક પણ હોવાની. આથી હવે તમે સમજી શકશો કે થરમૉસ ફ્લાસ્કની કાચની બૉટલની સપાટી શા માટે ચકચકિત (અરીસા જેવી) રાખવામાં આવે છે.

7.7 વીનનો સ્થળાંતરનો નિયમ

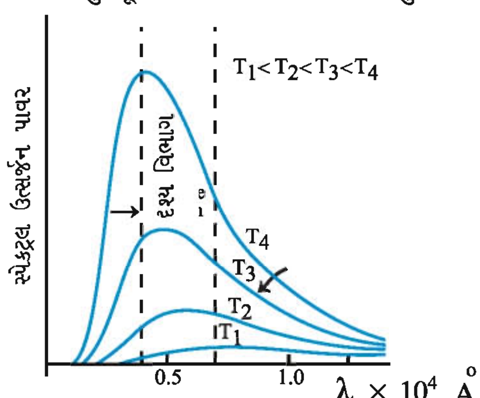
(Wien's Displacement Law)

કોઈ પણ સપાટી વડે ઉત્સર્જિત ઉષ્મીય વિકિરણમાં જુદી જુદી તરંગલંબાઈ (આવૃત્તિ)વાળા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો હોય છે અને આ તરંગોની તરંગલંબાઈ સતત હોય છે. પરંતુ આમાંથી અમુક જ તરંગલંબાઈવાળા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનું પ્રમાણ વધુ હોય છે. જેમકે ઓરડાના તાપમાને (300 K) રહેલા કાળા પદાર્થમાંથી ઉત્સર્જિત વિકિરણમાં 95,550 Å તરંગલંબાઈવાળા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો (કે જેને ઈન્ફ્રારેડ તરંગો કહે છે)નું પ્રમાણ સૌથી વધુ હોય છે. પદાર્થનું તાપમાન વધારતાં આના કરતાં ઓછી તરંગલંબાઈવાળા તરંગોનું પ્રમાણ વધે છે. આશરે 1100 K જેટલા તાપમાને રાતા રંગની તરંગલંબાઈને અનુરૂપ તરંગોનું પ્રમાણ વધતાં તે પદાર્થ રાતો દેખાય છે.

કાળા પદાર્થમાંથી ઉત્સર્જિત ઉષ્મીય વિકિરણમાં જુદી-જુદી તરંગલંબાઈઓનું સાપેક્ષ પ્રમાણ જાણવા માટે આકૃતિ 7.6 જુઓ કે જેમાં સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર W_{λ} વિરુદ્ધ તરંગલંબાઈનો આલેખ દોરેલ છે. આ આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે તાપમાનના વધવા સાથે મહત્તમ W_{λ} ને અનુરૂપ તરંગલંબાઈ (λ_m) માં ઘટાડો થાય છે. વીન (Wien) નામના ભૌતિકવિજ્ઞાનીએ દર્શાવ્યું કે આ તરંગલંબાઈ   એ ઉત્સર્જક સપાટીના નિરપેક્ષ તાપમાનના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે, અર્થાત્

$$\lambda_m \ T = \text{અચળ} \qquad (7.7.1)$$

આ સમીકરણ વીનના સ્થળાંતરના નિયમનું ગાણિતિક સ્વરૂપ કહે છે. સૂત્રમાં આવતા અચળાંકને વીનનો અચળાંક કહે છે અને તેનું મૂલ્ય 2.9×10^{-3} mK જેટલું મળે છે.



આકૃતિ 7.6

7.8 સ્ટિફન બોલ્ટ્ઝમેનનો નિયમ

(Stefan – Bottzmann's Law)

ઈ.સ. 1879માં સ્ટિફન નામના વિજ્ઞાનીએ પ્રાયોગિક માહિતીના આધારે અને ઈ.સ. 1884 માં બોલ્ટ્ઝમેન નામના વિજ્ઞાનીએ સૈદ્ધાંતિક રીતે દર્શાવ્યું કે, **"પદાર્થની સપાટીમાંથી એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ દર સેકન્ડે ઉત્સર્જતી વિકિરણ-ઊર્જા એટલે કે કુલ ઉત્સર્જન-પાવર W તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના ચતુર્ઘાતના સમપ્રમાણમાં હોય છે." આ વિધાનને સ્ટિફન બોલ્ટ્ઝમેનનો નિયમ કહે છે.**

$$\therefore \ W = \sigma e T^4 \qquad (7.8.1)$$

અહીં T નિરપેક્ષ તાપમાન દર્શાવે છે. e સપાટીની ઉત્સર્જકતા છે અને σ એ અચળાંક છે, જેને સ્ટિફન-બોલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક કહે છે. તેનું મૂલ્ય $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ $Wm^{-2}K^{-4}$ છે.

જો T તાપમાનવાળો પદાર્થ T_s ($T > T_s$) તાપમાનવાળા પરિસરમાં મૂકેલ હોય તો સમીકરણ (7.8.1) ને આધારે એવું સાબિત કરી શકાય કે પદાર્થનો ઊર્જા ગુમાવવાનો ચોખ્ખો દર

$$\frac{dQ}{dt} = e\sigma A \ (T^4 - T_s^4) \qquad (7.8.2)$$

જ્યાં A પદાર્થની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ છે. (આ પરિણામ 7.8.1 પરથી કેવી રીતે મેળવી શકાય, જાતે વિચારો.)

7.9 ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ

(Newton's Law of Cooling)

જો કોઈ એક વસ્તુનું તાપમાન T°C અને તેના પરિસરનું તાપમાન T_s°C હોય તેમજ $T > T_s$ હોય, તો સમય જતાં તે વસ્તુ ઉષ્મા ગુમાવે છે અને પરિણામે તેના તાપમાનમાં ઘટાડો થાય છે. સમયાંતરે પ્રેરિત ઉષ્માનયન દ્વારા વસ્તુના તાપમાનમાં કેટલો ઘટાડો થશે તે સમજાવવા ન્યૂટને આપેલા નિયમને ન્યૂટનના શીતનના નિયમ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ગરમ પદાર્થનો ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર અને તેથી તાપમાનમાં થતા ઘટાડાનો દર (એટલે પદાર્થના શિતનનો દર) પદાર્થના તાપમાન અને આસપાસના (પરિસરના) તાપમાનના તફાવતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે m દળના, c વિશિષ્ટ ઉષ્મા ધરાવતા પદાર્થના તાપમાનમાં ΔT જેટલા ફેરફાર માટે જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો,

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

તેથી, પદાર્થનો ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર,

$$\frac{dQ}{dt} = -mc\frac{dT}{dt} \qquad (7.9.1)$$

ન્યૂટનના નિયમ અનુસાર, પદાર્થનો ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર પદાર્થ અને તેની આસપાસના પરિસરના તાપમાનના તફાવત ($T - T_s$)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore \ \frac{dQ}{dt} = -mc\frac{dT}{dt} \ \alpha \ (T - T_s) \qquad (7.9.2)$$

$$\therefore \frac{dT}{dt} = -k'(T - T_s) \quad (7.9.3)$$

અહીં, $\frac{dT}{dt}$ એ T તાપમાને રહેલ પદાર્થના તાપમાનના ઘટાડાનો દર છે. સમીકરણ (7.9.3) એ ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ છે. k' અચળાંક છે અને તે ઠંડા પડી રહેલ પદાર્થના દળ અને વિશિષ્ટ ઉષ્મા પર આધાર રાખે છે. અહીં ઋણ નિશાની દર્શાવે છે કે ઉષ્મા ગુમાવવાથી સમય સાથે તાપમાનમાં ઘટાડો થાય છે. **"પદાર્થનો ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર અને તેથી તાપમાનના ઘટાડાનો દર (એટલે કે પદાર્થના ઠંડા પડવાનો દર) એ પદાર્થના અને તેના પરિસરના તાપમાનના તફાવતના સમપ્રમાણમાં હોય છે."**

અહીં નોંધો કે ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ એ પદાર્થ અને પરિસર વચ્ચેના તાપમાનના તફાવતના નાના ગાળા માટે જ સાચો છે. જોકે વિકિરણ દ્વારા ગુમાવાતી ઉષ્માનો જથ્થો ખૂબ જ ઓછો હોય, તો આ નિયમ તાપમાનના મોટા તફાવત માટે પણ સાચો છે. વળી, જ્યારે પ્રેરિત ઉષ્માનયન દ્વારા વસ્તુ ઠંડી થતી હોય, ત્યારે જ આ નિયમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયનના સંદર્ભમાં લૅંગમૂર-લૉરેન્ટ્ઝે નીચે મુજબ શીતનનો નિયમ આપેલ છે :

$$-\frac{dT}{dt} \propto (T - T_s)^{\frac{5}{4}} \quad (7.9.4)$$

ઉદાહરણ 7 : 80 °C તાપમાને રહેલી કોઈ એક વસ્તુ 5 મિનિટમાં 64 °C તાપમાન સુધી ઠંડી પડે છે. અને 10 મિનિટમાં 52 °C તાપમાન સુધી ઠંડી પડે છે, તો 20 મિનિટ બાદ વસ્તુનું તાપમાન કેટલું થશે ? પરિસરનું તાપમાન કેટલું હશે ?

ઉકેલ : પ્રથમ 5 મિનિટનો તબક્કો

$\Delta T = T_2 - T_1 = 64 - 80 = -16$ અને $\Delta t = 5$

$$\therefore \frac{+16}{5} = +k'\left(\frac{80 + 64}{2} - T_s\right) \quad (1)$$

અત્રે આપણે પદાર્થના તાપમાન તરીકે પ્રારંભિક અને અંતિમ તાપમાનની સરેરાશ લીધેલ છે. હવે આ જ રીતે બીજી 5 મિનિટના તબક્કા માટે,

$\Delta T = 52 - 64 = -12$

$$\therefore \frac{12}{5} = k'\left(\frac{52 + 64}{2} - T_s\right) \quad (2)$$

સમીકરણ (1) ને સમીકરણ (2) વડે ભાગતાં,

$$\frac{16}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{72 - T_s}{58 - T_s}$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{72 - T_s}{58 - T_s}$$

$\therefore 232 - 4T_s = 216 - 3T_s$

$\therefore 232 - 216 = T_s$

$\therefore T_s = 16$ °C

T_s નું આ મૂલ્ય સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$\frac{16}{5} = k'(72 - 16)$$

$$= k'(56)$$

$$\therefore k' = \frac{16}{5 \times 56} = \frac{2}{35}$$

હવે, ત્રીજો તબક્કો $\Delta t = 10$ મિનિટ

$\Delta T = T - 52$, જ્યાં T અંતિમ તાપમાન છે.

$$\therefore \frac{52 - T}{10} = \frac{2}{35}\left(\frac{52 + T}{2} - 16\right)$$

$$\therefore 52 - T = \frac{4}{7}\left(\frac{52 + T - 32}{2}\right)$$

$$\therefore 52 - T = \frac{2}{7}(20 + T)$$

$\therefore 364 - 7T = 40 + 2T$

$\therefore 364 - 40 = 9T$

$$\therefore T = \frac{324}{9} = 36 \text{ °C}$$

7.10 ગ્રીનહાઉસ અસર (Greenhouse Effect)

ગ્રીનહાઉસ એ વનસ્પતિના નાના છોડ (રોપા) યોગ્ય અને ઝડપી વિકાસ માટે ઉપયોગમાં લેવાતી, કાચની કે પ્લાસ્ટિક જેવા પારદર્શક પદાર્થની છત અને દીવાલો ધરાવતું માળખું છે. આ દીવાલો અને છતમાંથી આવતાં સૌર વિકિરણોની ઊર્જા તેમાં રહેલ વનસ્પતિ અને માટી દ્વારા શોષાય છે. વનસ્પતિ અને માટી આ ઊર્જાને ઇન્ફ્રારેડ વિકિરણો (તરંગલંબાઈ 8000A° થી 20,000A°)ના સ્વરૂપમાં પુનઃઉત્સર્જિત કરે છે. આ ઇન્ફ્રારેડ વિકિરણો માટે ગ્રીનહાઉસની છત અને દીવાલ અંશતઃ અપારદર્શી છે. તેથી આ વિકિરણોનો મોટો ભાગ ગ્રીનહાઉસના માળખામાં રહેલી હવામાં જળવાઈ રહે છે અને આમ અંદરની હવામાં એક પ્રકારે 'ગરમાવો' (Warmth) ઉત્પન્ન થાય છે.

આ દૃષ્ટિએ આપણી પૃથ્વી અને તેની આસપાસનું વાતાવરણ પણ એક ગ્રીનહાઉસની માફક વર્તે છે. સૌર વિકિરણો UV, V, NrIR તરંગલંબાઈઓ ધરાવે છે. આપણું વાતાવરણ દૃશ્યપ્રકાશનું પારગમન થવા દે છે. દિવસ દરમિયાન પૃથ્વીની સપાટી અને અન્ય પદાર્થો ગરમ થાય

અને ત્યાર બાદ ઇન્ફ્રારેડ વિકિરણોને ઉત્સર્જિત કરે છે. આ ઇન્ફ્રારેડ વિકિરણો વાતાવરણને ભેદીને બહાર નીકળી શકતા નથી. વાતાવરણમાં રહેલા CO_2 અને H_2O જેવા અણુઓ આ વિકિરણોનું શોષણ કરે છે અને પુનઃ ઉત્સર્જન કરે છે. જેમાંથી થોડો ભાગ પૃથ્વીની સપાટી પર પાછો ફરે છે. આ રીતે, પૃથ્વીના વાતાવરણના નીચેના ભાગમાં ઉષ્મા-ઊર્જાનો થોડો ભાગ 'સપડાઈ' જાય છે અને તેના પરિણામે તેનું તાપમાન જળવાઈ રહે છે. આ ઘટનાને ગ્રીનહાઉસ અસર કહે છે. ઇન્ફ્રારેડ કિરણો ગરમીની અસર પેદા કરવા માટે જવાબદાર હોઈ 'ઉષ્માકિરણો' પણ કહેવાય છે. આ જ કારણે રાત્રી દરમિયાન પણ 'ગરમાવો' જળવાઈ રહે છે.

કેટલાક પ્રદૂષક વાયુઓ આ ગ્રીનહાઉસ અસરમાં વધારો કરે છે. જો ગ્રીનહાઉસ અસર ન હોત તો વાતાવરણના નીચેના ભાગનું સરેરાશ તાપમાન ખૂબ નીચું હોત અને રાત્રી અને દિવસના તાપમાનમાં બહુ મોટો તફાવત પણ હોત (શું જીવન શક્ય બની શક્યું હોત ?) એટલે બધી જ ચીજવસ્તુની જેમ ગ્રીનહાઉસ અસર પણ પ્રમાણસરની હોય તો સારી ! ગ્રીનહાઉસ અસર, પ્રદૂષકોને કારણે વધવાથી ઠંડા પ્રદેશોનો બરફ પીગળવાથી, સમુદ્રની સપાટી પણ ઊંચી આવવાથી ભૂચર પ્રાણીના વસવાટ માટે જમીન ઓછી થવાની શક્યતા છે, તેથી પ્રદૂષકો ઓછા થાય તેવું કંઈક કરવું જોઈએ.

।। अति सर्वत्र वर्जयेत ।।

સારાંશ

1. ઉષ્મા-પ્રસરણ ત્રણ રીતે થાય :
   (1) ઉષ્માવહન (2) ઉષ્માનયન (3) વિકિરણ
2. ઉષ્માવહન સામાન્ય રીતે ઘન પદાર્થોમાં જોવા મળે છે. અહીં પાસપાસેના ભાગોના તાપમાનના તફાવતને કારણે ઉષ્માનું પ્રસરણ થાય છે. જો પાસપાસે જ $x = 0$ અને $x = x + \Delta x$ અંતરે આવેલા ભાગોનાં તાપમાન $T + \Delta T$ અને T હોય, તો ઉષ્માપ્રવાહ (H) નીચેના સૂત્રથી મળે :
   $$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$
   અહીં A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ છે. k પદાર્થની ઉષ્માવાહકતા છે.
3. $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ તાપમાન પ્રચલન તરીકે ઓળખાય છે.
4. પદાર્થની ઉષ્માવાહકતા પદાર્થની જાત અને કંઈક અંશે તાપમાન આધારિત છે. તેનો એકમ $Wm^{-1}k^{-1}$ છે.
5. કોઈ પદાર્થથી ઉષ્માવહન થવા છતાં જો દરેક ભાગનું તાપમાન અચળ રહેતું હોય, તો તે પદાર્થ સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં છે. તેમ કહેવાય.
   સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં
   $$H = \frac{Q}{t} = \frac{kA(T_1 - T_2)}{L} \qquad (T_1 > T_2)$$
6. વિદ્યુતના સુવાહકો ઉષ્માના પણ સારા વાહકો છે.
7. ઉષ્મીય અવરોધ $(R_H) = \frac{L}{kA}$
8. ઉષ્મીય અવરોધ શ્રેણીજોડાણ અને સમાંતર-જોડાણના નિયમોનું પાલન કરે છે.
9. ઉષ્માવહનમાં પદાર્થના ઘટકકણોનું કુલ સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય છે અને ઉત્તમ વહન માટે આંતરઅણુબળો ખૂબ જ મહત્ત્વનો ભાગ ભજવે છે.
10. ઉષ્માનયનમાં તરલના ઘટકકણો ખરેખર ગતિ કરીને એક સ્થાનથી બીજા સ્થાને જાય છે, તેથી ઉષ્માનયન માત્ર તરલોમાં શક્ય છે.
11. ઉષ્માનયન બે પ્રકારે થઈ શકે : (1) પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયન અને (2) પ્રેરિત ઉષ્માનયન.
12. ઉષ્માનયન ઠંડા પ્રદેશોમાં જળચર પ્રાણીની જિંદગી બચાવવામાં અગત્યનો ભાગ ભજવે છે.
13. ઉષ્માના વિકિરણ દ્વારા થતાં પ્રસરણ માટે માધ્યમ જરૂરી નથી.

14. દરેક પદાર્થ પોતાના તાપમાનને વિદ્યુતચુંબકીય અનુરૂપ વિકિરણોનું ઉત્સર્જન કરે છે.
15. પદાર્થનું તાપમાન વધુ હોય, તો વિકિરણ-ઊર્જાનો દર વધુ હોય.
16. જે પદાર્થ દરેક પ્રકારનાં વિકિરણોનું શોષણ કે ઉત્સર્જન કરી શકે તે પદાર્થને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ કહે છે.
17. કુદરતી સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ પૃથ્વી પર મળવો શક્ય નથી.
સૂર્ય લગભગ 5800° K તાપમાનવાળો સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ છે.
18. **શોષકતા :** આપેલ તાપમાને કોઈ સપાટી પર વિકિરણ આપાત થતાં શોષાતી વિકિરણ-ઊર્જા અને આપાત થતી વિકિરણ-ઊર્જાના ગુણોત્તરને પદાર્થની શોષકતા (a) કહે છે.
19. **કુલ ઉત્સર્જન-પાવર :** નિયત તાપમાને આપેલ પદાર્થની એકમક્ષેત્રફળવાળી સપાટીમાંથી દર સેકન્ડે ઉત્સર્જાતી વિકિરણ-ઊર્જાને આપેલ સપાટીનો કુલ ઉત્સર્જન-પાવર (W) કહે છે.
20. **સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર :** નિયત તાપમાને આપેલ પદાર્થની એકમ ક્ષેત્રફળવાળી સપાટીમાંથી દર સેકન્ડે ઉત્સર્જાતી આપેલ આવૃત્તિ (f) પાસેના આવૃત્તિના એકમગાળાવાળા વિકિરણની ઊર્જાને તે આવૃત્તિને અનુરૂપ તે સપાટીનો તે તાપમાને સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર કહેવાય.
જો સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર (W_f) હોય, તો કુલ ઉત્સર્જન પાવર

$$W = \sum_f W_f$$

21. **ઉત્સર્જકતા :** આપેલ સપાટીના કુલ ઉત્સર્જન-પાવર અને તે જ સંજોગોમાં રહેલ સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થની સપાટીના કુલ ઉત્સર્જન-પાવરના ગુણોત્તરને સપાટીની ઉત્સર્જકતા (e) કહે છે.
22. **કિર્ચોફનો નિયમ :** કોઈ પણ સપાટી માટે શોષકતા અને ઉત્સર્જકતાનાં મૂલ્યો સમાન હોય છે. એટલે કે $a = e$ સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થ માટે $a = e = 1$
23. **વીનનો સ્થળાંતરનો નિયમ :** કાળા પદાર્થમાં ઉષ્મીય વિકિરણમાં જે તરંગલંબાઈના વિકિરણ માટે સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર મહત્તમ હોય તે તરંગલંબાઈ અને ઉત્સર્જક સપાટીના નિરપેક્ષ તાપમાનનો ગુણાકાર અચળ હોય છે. $\lambda_m T =$ અચળ
આ અચળની કિંમત 2.9×10^{-3} m K છે.
24. **સ્ટિફન બોલ્ટ્ઝમેનનો નિયમ :** પદાર્થની સપાટીમાંથી એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ દર સેકન્ડે ઉત્સર્જિત વિકિરણ-ઊર્જા એટલે કે કુલ ઉત્સર્જન-પાવર તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના ચતુર્ઘાતના સમપ્રમાણમાં હોય છે. $W = \sigma e T^4$
σ સ્ટિફન બોલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક છે, જેનું મૂલ્ય $5.67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^4$.
25. **ન્યૂટનનો શિતનનો નિયમ :** ગરમ પદાર્થમાં પ્રેરિત ઉષ્માનયન તાપમાનમાં ઘટાડાનો દર પદાર્થના તાપમાન અને પરિસરના તાપમાનના તફાવતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_s)$$

26. **લૅંગમૂર-લૉરેન્ટ્ઝનો નિયમ :** ગરમ પદાર્થમાં પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયન દ્વારા તાપમાનમાં ઘટાડાનો દર પદાર્થના તાપમાન અને પરિસરના તાપમાનના $\left(\frac{5}{4}\right)^{th}$ ઘાતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. ધાતુના એક સળિયાનો એક છેડો ઊકળતા પાણીમાં અને બીજો છેડો પીગળતાં બરફમાં મૂકેલો છે, તો ....
(A) સળિયાના બધા વિભાગો એકબીજા સાથે ઉષ્મીય સંતુલનમાં છે.
(B) સળિયાને કોઈ એક તાપમાન હોવાનું કહી શકાય છે.
(C) સળિયો જ્યારે સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા પ્રાપ્ત કરે ત્યારે તેને કોઈ એક તાપમાન હોવાનું કહી શકાય છે.
(D) સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા પ્રાપ્ત કર્યા બાદ સળિયાની ઉષ્મીય અવસ્થા બદલાતી નથી.

2. એક સ્લેબ બે જુદાં-જુદાં દ્રવ્યોના સમાન જાડાઈનાં બે ચોસલાંઓનો બનેલ છે. જો આ ચોસલાંઓની ઉષ્માવાહકતા અનુક્રમે k_1 અને k_2 હોય અને તેમના આડછેદનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય, તો સમતુલ્ય ઉષ્માવાહકતા .... હોય. (શ્રેણી જોડાણ ગણો.)

(A) $k_1 + k_2$ (B) $\frac{k_1 - k_2}{2}$

(C) $\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$ (D) $\frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

3. એક સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ T K તાપમાને 1 m^2 ક્ષેત્રફળ દીઠ, 1 s માં E જેટલી વિકિરણ-ઊર્જાનું ઉત્સર્જન કરે છે. જો તેનું તાપમાન અડધું કરવામાં આવે, તો વિકરણ-ઊર્જાનું મૂલ્ય .... થાય.

(A) $\frac{E}{16}$ (B) $\frac{E}{4}$ (C) $\frac{E}{2}$ (D) 2E

4. સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થામાં એક મીટરપટ્ટી (સળિયાના)ના છેડાનાં તાપમાનો 30 °C અને 20 °C છે, તો ગરમ છેડાથી 60 cm અંતરે તાપમાન .... છે.

(A) 25 °C (B) 24 °C (C) 23 °C (D) 22 °C

5. લોખંડના એક બ્લૉકનું તાપમાન t_1 સમયમાં 100 °C થી 90 °C, t_2 સમયમાં 90 °Cથી 80 °C અને t_3 સમયમાં 80 °Cથી 70 °C થાય છે, તો, ...

(A) $t_1 < t_2 < t_3$ (B) $t_1 > t_2 > t_3$

(C) $t_1 = t_2 = t_3$ (D) $t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$

6. વિકિરણ-ઉત્સર્જન કરતાં કાળા પદાર્થો A અને B માટે મહત્તમ તીવ્રતા (સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન-પાવર)ને અનુરૂપ તરંગલંબાઈઓ અનુક્રમે 11×10^{-5} cm અને 5.5×10^{-5} cm છે, તો $\frac{T_A}{T_B}$ = ...

(A) 2 (B) 4 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

7. જેમના ઉષ્મીય અવરોધો R_1 અને R_2 છે, તેવા બે સળિયાને સમાંતરમાં જોડતાં સમતુલ્ય ઉષ્મીય અવરોધ .... છે.

(A) $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (B) $\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$

(C) $R_1 + R_2$ (D) ઉપરમાંથી એક પણ નહિ.

8. કાચનો એક મોટો ટુકડો ગરમ કરીને ઠંડો પાડવામાં આવે છે. તે ઠંડો પડે છે, ત્યારે તેમાં તિરાડ પડે છે. આમ થવાનું એક શક્ય કારણ .... છે.

(A) ઓછી ઉષ્માવાહકતા (B) વધુ ઉષ્માવાહકતા

(C) વધુ વિશિષ્ટ ઉષ્મા (D) ઊંચું ગલનબિંદુ

9. સ્ટીલના એક ગોળાને અને એક બીજા તેવા જ લાકડાના ગોળાને અડકતાં તેઓ નીચેનામાંથી .... તાપમાને સમાન ઠંડા કે ગરમ લાગશે.

(A) 98.4 °C (B) 98.4 K

(C) 98.4 °F (D) ઓરડાના તાપમાને

10. નીચેના પૈકી સૌથી વધુ કાળા પદાર્થ (Black body) તરીકે કયો પદાર્થ વર્તે છે ?

(A) બ્લૅકબોર્ડનો પેઇન્ટ (B) લીલું પર્ણ

(C) દીવાની મેશ (D) બ્લૅક હોલ

11. એક જ પ્રકારના દ્રવ્ય ધરાવતા બે ગોળાની ત્રિજ્યાઓ 1 m અને 4 m છે અને તેમની સપાટીનાં તાપમાન 4000 K અને 2000 K છે. તો એકમસમયમાં ઉત્સર્જાતી વિકિરણ-ઊર્જાની કિંમતનો પહેલા અને બીજા ગોળા માટે ગુણોત્તર .... છે.

(A) 1 : 1 (B) 16 : 1 (C) 4 : 1 (D) 1 : 9

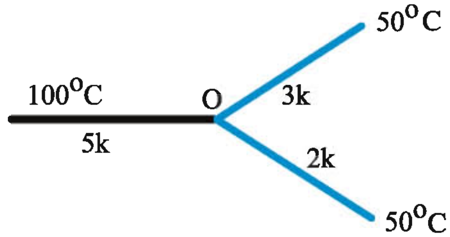
12. ન્યૂટનના શીતનના નિયમ મુજબ શીતનદર $(\Delta T)^n$ પર આધારિત છે. ΔT તાપમાનનો પદાર્થના તાપમાન અને વાતાવરણના તાપમાનનો તફાવત છે, તો $n =$ ....

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

13. સૂર્યનું તાપમાન T થી વધીને 2T થાય અને તેની ત્રિજ્યા R થી 2R થાય. તો પૃથ્વી પર પ્રાપ્ત થતી વિકિરણ સૌર-ઊર્જાનો પહેલા મળતી સૌર-ઊર્જા સાથેનો ગુણોત્તર .... થાય.

(A) 4 (B) 16 (C) 32 (D) 64

14. ત્રણ સમાન પરિમાણવાળા સળિયાને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ જોડ્યા છે. તેમની ઉષ્મા-વાહકતા 5k, 3k અને 2k હોય તો જંક્શન O નું તાપમાન .... છે.



આકૃતિ 7.7

(A) 75 °C (B) $\frac{200}{3}$ °C (C) 40 °C (D) $\frac{100}{3}$ °C

15. એક ગોળો, સમઘન અને પાતળી વર્તુળાકાર તકતી સમાન દળ અને સમાન પ્રકારનું દ્રવ્ય ધરાવે છે. જો તેઓની સપાટીનું તાપમાન સમાન હોય, તો નીચેના પૈકી કયું સૌથી ઓછી ઝડપથી ઠંડું પડશે ?

(A) વર્તુળાકાર તકતી (B) ગોળો (C) સમઘન (D) ત્રણેય

16. એક પદાર્થને 1000K તાપમાન સુધી ગરમ કરેલ છે. તેની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ 10cm^2 છે. જો તે 340.2 J ઊર્જા પ્રતિ મિનિટ ઉત્સર્જિત કરે, તો તેની ઉત્સર્જકતા .... છે.

$(\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K$^{-4})$

(A) 0.1 (B) 0.02 (C) 0.01 (D) 0.2

17. k અને 2k ઉષ્માવાહકતા અને x અને $4x$ જાડાઈ ધરાવતા બે બ્લૉકના બનેલાં સંયુક્ત ચોસલાં બે છેડાનાં તાપમાન T_2 અને T_1 $(T_2 > T_1)$ છે. તો આ સ્લેબમાંથી પસાર થતી ઊર્જાનો દર $\frac{A(T_2 - T_1)k}{x} f$ હોય તો, $f =$ ....

આકૃતિ 7.8

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

18. r_1 અને r_2 ત્રિજ્યા ધરાવતાં બે સમકેન્દ્રી ગોલીય કવચોનાં તાપમાન T_1 અને T_2 છે. $(r_1 < r_2)$ આ બે કવચ વચ્ચેના પદાર્થમાંથી પસાર થતી ઉષ્માનો દર......... ના સમપ્રમાણમાં હશે.

(A) $\frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$ (B) $ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

(C) $\frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)}$ (D) $r_2 - r_1$

જવાબો

1. (D)	2. (D)	3. (A)	4. (B)	5. (A)	6. (C)
7. (A)	8. (A)	9. (C)	10. (C)	11. (A)	12. (D)
13. (D)	14. (A)	15. (A)	16. (A)	17. (D)	18. (C)

નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

1. ઉષ્માવહન એટલે શું ?
2. તાપમાન-પ્રચલનનું પારિમાણિક સૂત્ર આપો.
3. ઉષ્માપ્રવાહનો SI એકમ જણાવો.
4. ઉષ્માપ્રવાહ જેવો જ એકમ ધરાવતી ભૌતિક રાશિ જણાવો.
5. ઉષ્માવાહકતાનું પારિમાણિક સૂત્ર આપો.
6. ઉષ્મીય-અવરોધ એટલે શું ?
7. પ્રેરિત ઉષ્માનયન શું છે ?
8. ઉષ્મીય વિકિરણની આવૃતિ કઈ બાબતો પર આધાર રાખે છે ?
9. સૂર્યનું તાપમાન 5800 K છે, તો સૂર્ય માટે કઈ તરંગલંબાઈનું વિકિરણ મહત્તમ સ્પેક્ટ્લ ઉત્સર્જન પાવર ધરાવે ?
10. ઉત્સર્જકતાનો એકમ જણાવો.
11. 27 °C તાપમાન ધરાવતા પદાર્થના ઉષ્મીય વિકિરણોમાં કઇ તરંગલંબાઇનું વિકિરણ મહત્તમ સ્પેક્ટ્લ ઉત્સર્જન પાવર ધરાવે છે ?
12. વીનના સ્થાનાંતરના નિયમ મુજબ f_m α......અહીં f_m મહત્તમ સ્પેક્ટ્લ ઉત્સર્જન પાવર ધરાવતા વિકિરણની આવૃતિ છે.
13. 0 °C તાપમાને કુલ ઉત્સર્જન-પાવર W_1 છે, તો 546 °C તાપમાને કુલ ઉત્સર્જન-પાવર કેટલો હોય ?
14. ન્યૂટનના શીતનના નિયમમાં આવતો અચળાંક k' શાના પર આધારિત છે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વાહકના પાસપાસેના ભાગોમાંથી લંબ રૂપે પસાર થતી ઉષ્મા-ઊર્જા કઈ બાબતો પર આધાર રાખે છે, તેની ચર્ચા કરો અને તે પરથી ઉષ્માપ્રવાહનું સમીકરણ મેળવો.
2. યોગ્ય ઉદાહરણની મદદથી સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા સમજાવો.
3. તરલોમાં ઉષ્માનયન સમજાવો.
4. શોષકતા અને ઉત્સર્જકતાની વ્યાખ્યા આપો અને તે પરથી કિર્ચોફનો નિયમ સમજાવો.
5. કેવિટી અને કેવિટી વિકિરણોની સમજૂતી આપો.
6. કુલ ઉત્સર્જન-પાવર અને સ્પેક્ટ્લ ઉત્સર્જન-પાવરની સમજૂતી આપો.
7. વીનનો સ્થાનાંતરનો નિયમ લખો અને સમજાવો.
8. ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ લખો અને તેનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલાઓ ગણો :

1. A અને B સમાન લંબાઈના જુદાં-જુદાં દ્રવ્યના સળિયાઓ છે. દરેક સળિયાના બે છેડાઓનાં તાપમાન T_1 અને T_2 છે. જો આ બંનેમાંથી ઉષ્માવહનનો દર એકસરખો જોઈતો હોય, તો કઈ શરત પળાવી જોઈએ ?

[**જવાબ :** $\frac{K_A}{K_B} = \frac{A_B}{A_A}$]

2. એક રૂમના ધાબાનાં પરિમાણ 4 m × 4 m × 10 cm છે. આ ધાબાના ક્રૉંકિટની ઉષ્માવાહકતા 1.26 W m^{-1} $°C^{-1}$ છે. કોઈ એક સમયે રૂમની બહાર અને અંદરનાં તાપમાનો અનુક્રમે 46 °C અને 32 °C છે, તો (i) ધાબામાંથી 1 sમાં વહન પામતી ઉષ્માનો જથ્થો શોધો. (ii) જેમની ઉષ્માવાહકતા 0.65 W m^{-1} $°C^{-1}$ છે, તેવી 7.5 cm જાડાઈની ઈંટોનું એક સ્તર ધાબા ઉપર કરવામાં આવે, તો હવે ઉષ્માવહનનો નવો દર શોધો.

[**જવાબ :** (1) 2822 J (2) 1150 W]

3. એક તળાવની સપાટી પર બરફના સ્તરની જાડાઈ 5 cm છે અને વાતવરણનું તાપમાન −10 °C છે, તો બરફના સ્તરની જાડાઈ બમણી થવા માટે લાગતો સમય શોધો. બરફની ઉષ્માવાહકતા 0.004 cal/cm s °C, બરફની ઘનતા 0.92 g/cm³ અને ગલન ગુપ્ત ઉષ્મા 80 cal/gm છે.

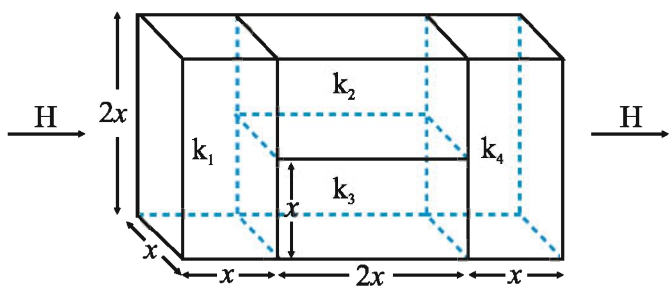
(**સૂચન :** $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$) [**જવાબ :** 19.1 કલાક 10 મીનીટ]

4. સૂર્યની 1 m² સપાટીમાંથી પ્રત્યેક સેકન્ડમાં 6.3×10^7 J વિકિરણ-ઊર્જા ઉત્સર્જિત થાય છે. $\sigma = 5.669 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}, તો સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન ગણો. [**જવાબ :** 5773]

5. ચાના એક કપનું 373 K તાપમાને 303 K તાપમાન કરતાં કેટલા ગણી ઝડપથી 1 °C જેટલું તાપમાન ઓછું થશે ? ચાને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ ગણો. ઓરડાનું તાપમાન 293 K લો.

($\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}) [**જવાબ :** 11.3]

6. આકૃતિમાં દર્શાવેલ સંયુક્ત ચોસલા માટે અસરકારક ઉષ્માવાહકતા શોધો.



આકૃતિ 7.9

$$\left[\textbf{જવાબ :}\ \frac{4k_1k_4(k_2 + k_3)}{(k_1 + k_4)(k_2 + k_3) + 4k_1k_2}\right]$$

7. અવાહક આવરણ ધરાવતા L લંબાઈના એક વાહક સળિયા છે. સ્થાયી ઉષ્મા - અવસ્થામાં તેના છેડાના તાપમાન T_1 અને T_2 છે. ($T_1 > T_2$) જો સળિયાની ઉષ્માવાહકતા જુદા જુદા વિસ્તારમાં $k = a + bT$ સૂત્રથી મળતી હોય તો ઉષ્માપ્રવાહનું સૂત્ર મેળવો. A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ છે.

$$[\textbf{જવાબ :}\ H = \frac{Q}{t} = \frac{A}{L}(T_1 - T_2)\left(a + b\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)\right]$$

8. સૂર્ય-પૃથ્વી વચ્ચેના સરેરાશ અંતરે, પૃથ્વીની સપાટી પર (વાતાવરણની અનુપસ્થિતિમાં) એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લંબ રૂપે એકમસમયમાં આપાત થતી સૌર-ઊર્જાને સોલર-અચળાંક કહે છે. તેનું મૂલ્ય 1340 W/m² છે, તો સૂર્યનું તાપમાન ગણો.

સૂર્યની ત્રિજ્યા $R_s = 7 \times 10^8$m $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર

$R_0 = 1.5 \times 10^{11}$m

[**જવાબ :** 5739 K]

•

પ્રકરણ 8

વાયુનો ગતિવાદ

8.1 પ્રસ્તાવના

8.2 વાયુઓની વર્તણૂક

8.3 ઍવોગેડ્રો અંક

8.4 આદર્શ વાયુ અવસ્થા સમીકરણ અને તેના વિવિધ સ્વરૂપો

8.5 વાયુનો ગતિવાદ, આદર્શ વાયુનું અણ્ણું મોડેલ : પૂર્વ ધારણાઓ

8.6 આદર્શ વાયુનું દબાણ અને વાયુના અણુઓની *rms* ઝડપ

8.7 ગતિ-ઊર્જા અને તાપમાન

8.8 ઊર્જાના સમવિભાજનનો નિયમ તથા મુક્તતાના અંશો

8.9 સરેરાશ મુક્ત પથ

- સારાંશ
- સ્વાધ્યાય

8.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, બૉઇલ, ન્યૂટન અને બીજા વૈજ્ઞાનિકોએ વાયુ સૂક્ષ્મ અણુઓનો બનેલો છે તેવું ધારીને વાયુઓની વર્તણૂક સમજાવવા પ્રયત્ન કર્યો. કોઈ પણ ભૌતિક પદાર્થની રચનામાં તેના ઘટકકણો એવા પરમાણુઓ, અણુઓ કે આયનો સતત ગતિ કરતા હોય છે. ઘન પદાર્થમાં તેના ઘટકકણો એકબીજાની ખૂબ જ નજીક નજીક આવેલા હોય છે અને તેઓ તેમના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ કંપન કરતા હોય છે. પ્રવાહી પદાર્થના ઘટકકણો વચ્ચેનું અંતર, ઘન પદાર્થના ઘટકકણો વચ્ચેના અંતર કરતાં વધુ હોય છે. વાયુ પદાર્થના ઘટકકણો વચ્ચેનું અંતર ઘન કે પ્રવાહીની સરખામણીમાં ખૂબ જ વધુ હોય છે. વાયુના ઘટકકણો વચ્ચે ઉદ્‌ભવતાં આંતરક્રિયા બળો ઘન અને પ્રવાહીમાં ઘટકકણો વચ્ચે લાગતા આંતરિક બળોની સરખામણીમાં અવગણી શકાય તેવા હોય છે. આથી વાયુના ઘટકકણો મુક્ત રીતે કોઈ પણ દિશામાં સતત અને અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતાં હોય છે.

પદાર્થનાં આ ત્રણેય સ્વરૂપો પૈકી વાયુઓની તેના ઘટકકણોના અનુસંધાનમાં વર્તણૂક સમજવી સહેલી છે, જેનો વાયુના ગતિવાદમાં અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. વાયુનો ગતિવાદ અવલોકનો પર આધારિત પૂર્વધારણાઓ પર સ્થપાયેલ છે.

વાયુ સાથે દબાણ, તાપમાન, કદ, આંતરિક ઊર્જા જેવી ભૌતિક રાશિઓ સંકળાયેલી હોય છે. આ રાશિઓ તંત્રમાં સૂક્ષ્મ સ્તરે બનતી ઘટનાઓની સરેરાશ સંયુક્ત અસરરૂપે મળતી હોવાથી આ ભૌતિક રાશિઓને **સ્થૂળ રાશિઓ (Macroscopic Quantities)** કહે છે. સ્થૂળ રાશિઓ સીધેસીધી માપી શકાય છે અથવા માપી શકાય તેવી બીજી સ્થૂળ રાશિઓની મદદથી ગણી શકાય છે. દા.ત., વાયુનું દબાણ સીધેસીધું માપી શકાય છે, જ્યારે વાયુની આંતરિક ઊર્જા, તેના દબાણ, કદ અને તાપમાન જેવી સ્થૂળ રાશિઓની મદદથી ગણી શકાય છે. જ્યારે તંત્ર અને તેની સાથે સંકળાયેલી ઘટનાઓનું વર્ણન સ્થૂળ રાશિઓના સંદર્ભમાં કરવામાં આવે છે ત્યારે તેને **સ્થૂળ વર્ણન** કહે છે.

વાયુતંત્રમાં સૂક્ષ્મ સ્તરે તેના ઘટકકણો વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાઓ અને તેના પરિણામે થતી ઘટનાઓ પરથી સ્થૂળ રાશિઓની અને તેમની વચ્ચેના આંતર-સંબંધોની સમજૂતી મેળવી શકાય છે. દા.ત., વાયુનું દબાણ, તેના

અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ, તેમના પાત્રની દીવાલો સાથે થતા સંઘાત અને તેમના વેગમાનના ફેરફારોના સંદર્ભમાં સમજી શકાય છે. આમ, સૂક્ષ્મ સ્તરે ઘટકકણો સાથે સંકળાયેલી રાશિઓ જેવી કે અણુની ઝડપ, વેગમાન, તેની ગતિ-ઊર્જા વગેરેને **સૂક્ષ્મ રાશિઓ (microscopic quantities)** કહે છે. જ્યારે તંત્ર અને તેની સાથે સંકળાયેલી ઘટનાઓનું વર્ણન સૂક્ષ્મ રાશિઓના સંદર્ભમાં કરવામાં આવે ત્યારે તેને **સૂક્ષ્મ વર્ણન** કહે છે.

વાયુના ગતિવાદમાં તંત્રના ઘટક કણોને ન્યૂટનના ગતિના નિયમો (classical Mechanics) રીતે અંકશાસ્ત્રીય રીતે સરેરાશો મેળવીને ગાણિતીય યોજના વડે સૂક્ષ્મ રાશિઓ પરથી તંત્રની સ્થૂળ રાશિઓ મેળવી શકાય છે.

વાયુનો ગતિવાદ વાયુના દબાણ, તાપમાન અને કદ ઉપરાંત તે વાયુના શ્યાનતા, વહન, પ્રસરણ અને વિશિષ્ટ ઉષ્મા જેવા ગુણધર્મો વિશે પણ માહિતી પૂરી પાડે છે.

8.2 વાયુઓની વર્તણૂક (Behaviour of Gases)

પ્રયોગો દ્વારા જાણી શકાયું છે કે, વાયુઓની ઘનતા ખૂબ ઓછી હોય ત્યારે, તેમના થર્મોડાયનેમિક ચલ જેવા કે દબાણ, કદ અને તાપમાન વચ્ચે સરળ આંતર સંબંધો અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

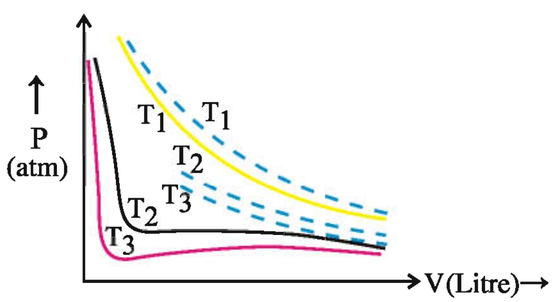
8.2.1 બૉઇલનો નિયમ (Boyle's law)

અચળ તાપમાને પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળા નિશ્ચિત જથ્થાના (દળના) વાયુનું દબાણ તેના કદના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. એટલે કે,

$$P \propto \frac{1}{V} \qquad (8.2.1)$$

(અચળ તાપમાન, અચળ દળ)

$$\therefore PV = \text{અચળ} \qquad (8.2.2)$$



વરાળ માટે, ત્રણ તાપમાનનાં મૂલ્યો માટે, પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ P → V ના વક્રો (સળંગ રેખાઓ) અને બૉઇલના નિયમનો ઉપયોગ કરીને મેળવેલ વક્રો (ત્રુટક રેખાઓ)

આકૃતિ 8.1

આકૃતિ 8.1માં વરાળ માટે, દબાણ વિરુદ્ધ કદના પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ વક્રો (સળંગ રેખાઓ) અને બૉઇલના નિયમનો ઉપયોગ કરીને મેળવેલ વક્રો (ત્રુટક રેખાઓ) દર્શાવ્યા છે. પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ વક્રો ઊંચા તાપમાન અને નીચે દબાણ માટે બૉઇલના નિયમ વડે મેળવેલ વક્રોને મળતા આવે છે.

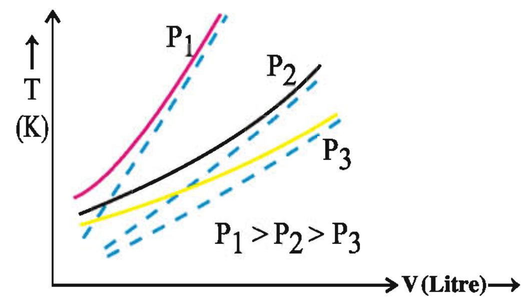
8.2.2 ચાર્લ્સનો નિયમ (Charle's law)

અચળ દબાણે, પૂરતી ઓછી ઘનતા વાળા નિશ્ચિત જથ્થાના (દળના) વાયુનું કદ તેના નિરપેક્ષ તાપમાન (absolute temperature)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે. એટલે કે,

$$V \propto T \qquad (8.2.3)$$

(અચળ દબાણ, અચળ દળ)

$$\therefore \frac{V}{T} = \text{અચળ} \qquad (8.2.4)$$



CO_2 વાયુ માટે દબાણના ત્રણ મૂલ્યો માટે T → V ના પ્રાયોગિક વક્રો (સળંગ રેખાઓ) અને ચાર્લ્સના નિયમ વડે મેળવેલ વક્રો (ત્રુટક રેખાઓ)

આકૃતિ 8.2

આકૃતિ 8.2 પરથી લખી શકાય કે, અચળ દબાણે પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળો નિશ્ચિત જથ્થા (દળ)નો વાયુ ચાર્લ્સના નિયમને અનુસરે છે.

ગૅલ્યુસેકનો નિયમ : આપેલ કદ માટે પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળા નિશ્ચિત જથ્થાના વાયુનું દબાણ તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે. એટલે કે,

$$P \propto T \text{ (અચળ કદ, અચળ જથ્થો)}$$

$$\therefore \frac{P}{T} = \text{અચળ} \qquad (8.2.5)$$

8.3 ઍવોગેડ્રો અંક

જો P, V અને T એકસરખા હોય, તો બધા જ વાયુઓ માટે અણુઓની સંખ્યા (N) પણ એક સરખી હોય છે, જે ઍવોગેડ્રોનો અધિતર્ક છે. એટલે કે, **"આપેલ અચળ તાપમાન અને દબાણ માટે એકમ કદ દીઠ અણુઓની સંખ્યા દરેક વાયુઓ માટે એક સરખી હોય છે."**

પ્રમાણિત તાપમાન (273 K) અને દબાણે (1 atm), 22.4 લિટર કદમાં રહેલા વાયુના જથ્થાનું દ્રવ્યમાન (દળ), તેના અણુભાર (ગ્રામમાં) જેટલું હોય છે. વાયુના આ જથ્થાને **1 મોલ** કહે છે. (આપેલ તાપમાન અને દબાણે એકસરખા કદમાં રહેલા વાયુના અણુઓની સંખ્યા એકસરખી હોય છે,

તેવું ઍવોગેડ્રોએ રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓ પરથી ધાર્યું હતું, આ અધિતર્કનું સમાધાન વાયુના ગતિવાદમાં થાય છે.)

1 મોલ પદાર્થ (વાયુ) માં રહેલા ઘટકકણો (પરમાણુઓ કે અણુઓ) ની સંખ્યાને ઍવોગેડ્રો અંક (N_A) કહે છે, જેનું મૂલ્ય $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

આધુનિક વ્યાખ્યા મુજબ 12.0 g કાર્બનમાં રહેલા પરમાણુઓની સંખ્યાને ઍવોગ્રેડ્રો અંક કહે છે.

જો વાયુપાત્રમાં આપેલ વાયુના કુલ N અણુઓ હોય, તો

આપેલ વાયુની મોલ સંખ્યા $\mu = \frac{N}{N_A}$ (8.3.1)

બીજી રીતે વિચારીએ તો, જો વાયુપાત્રમાંના વાયુનું કુલ દળ M હોય તેમજ 1 મોલ વાયુનું દળ (એટલે કે વાયુનો અણુભાર કે પરમાણુભાર) M_0 હોય, તો

વાયુની મોલ સંખ્યા $\mu = \frac{M}{M_0}$ (8.3.2)

8.4 આદર્શ વાયુ અવસ્થા સમીકરણ અને તેના વિવિધ સ્વરૂપો (Ideal gas state equation and its different forms)

જો આપણે બૉઇલના નિયમ અને ચાર્લ્સના નિયમનો સમન્વય કરીએ તો,

$$\frac{PV}{T} = K \text{ (અચળ)} \quad (8.4.1)$$

(વાયુના નિશ્ચિત જથ્થા માટે)

જે દર્શાવે છે કે, જો આપેલ વાયુનું દબાણ અને તાપમાન અચળ રાખીને વાયુનો જથ્થો જુદો જુદો લેવામાં આવે, તો વાયુનું કદ તેના જથ્થાના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આમ સમીકરણ (8.4.1)માં જમણી બાજુનો અચળાંક વાયુના જથ્થા પર આધાર રાખે છે. જો વાયુના જથ્થાને મોલમાં દર્શાવીએ તો

$$\frac{PV}{T} = \mu R$$

અથવા $PV = \mu RT$ (8.4.2)

જ્યાં, μ = મોલ સંખ્યા

R = સાર્વત્રિક વાયુ નિયતાંક (universal gas contant)

= 8.314 J mol^{-1} K^{-1}

જે વાયુ દબાણ અને તાપમાનનાં બધાં જ મૂલ્યો માટે $PV = \mu RT$ સમીકરણનું સંપૂર્ણપણે પાલન કરતો હોય, તેવા (કાલ્પનિક) વાયુને આદર્શ વાયુ કહે છે. વ્યવહારમાં એક પણ વાયુ દરેક સંજોગોમાં આદર્શ વાયુ નથી.

સ્થૂળ ભૌતિક રાશિઓ P, V અને T નાં મૂલ્યોની મદદથી સમીકરણ (8.4.2) વડે વાયુની થર્મોડાયનેમિક અવસ્થા નક્કી કરી શકાતી હોવાથી, સમીકરણ (8.4.2)ને **આદર્શ વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ** કહે છે.

જો આપણે સમીકરણ (8.4.2)માં $\mu = \frac{N}{N_A}$ મૂકીએ તો

$$PV = \frac{N}{N_A} RT \quad (8.4.3)$$

સમીકરણ (8.4.3)માં

$\frac{R}{N_A} = k_B$ લઈએ તો

$$R = N_A k_B \quad (8.4.4)$$

જ્યાં k_B = બૉલ્ટ્ઝમાનનો અચળાંક (Boltzmann's Constant) = 1.38×10^{-23} J K^{-1}

જે એક અણુ માટે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\therefore PV = k_B NT \quad (8.4.5)$$

$$\text{અથવા } P = k_B \frac{N}{V} T = k_B nT \quad (8.4.6)$$

જ્યાં $n = \frac{N}{V}$ = વાયુના અણુઓની સંખ્યા ઘનતા

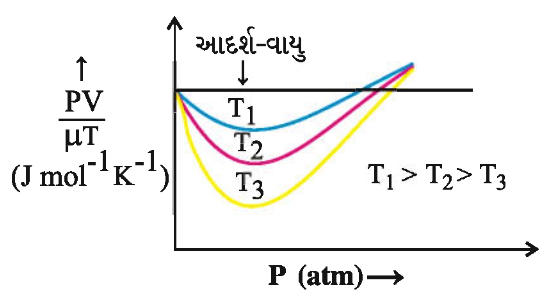
= પાત્રના એકમ કદ દીઠ વાયુના અણુઓની સંખ્યા

આ ઉપરાંત, સમીકરણ (8.3.2) અને (8.4.5) પરથી

$$PV = \frac{M}{M_0} RT$$

$$\therefore P = \frac{M}{V}\frac{RT}{M_0} = \frac{\rho RT}{M_0} \quad (8.4.7)$$

જ્યાં, $\rho = \frac{M}{V}$ = વાયુની દળ ઘનતા



ઓછા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને વાસ્તવિક વાયુઓ આદર્શ-વાયુની જેમ વર્તે છે.

આકૃતિ 8.3

આકૃતિ 8.3માં વાસ્તવિક વાયુની વર્તણૂક જુદાં-જુદાં ત્રણ તાપમાન માટે દર્શાવી છે, જે આદર્શ વાયુ કરતાં જુદા પડે છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે નીચા દબાણ અને

ઊંચા તાપમાને વાસ્તવિક વાયુ, આદર્શવાયુની જેમ વર્તે છે. આદર્શવાયુ એ ખરેખર તો એક સૈદ્ધાંતિક મૉડેલ છે.

વાયુના કદમાં થતા ફેરફાર દરમિયાન થતું કાર્ય :

પ્રકરણ 6માં આપણે $F - x$ના આલેખ પરથી કાર્ય મેળવ્યું. આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી વાયુની બાબતમાં $P - V$ આલેખનો ઉપયોગ કરી વાયુના કદમાં થતા ફેરફાર દરમિયાન થતું કાર્ય મેળવી શકાય છે. આ રીતે કાર્ય માટે $W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$ સૂત્ર આપણને મળે છે. આ વિશેનો વિગતવાર અભ્યાસ થર્મોડાઇનેમિક્સના પ્રકરણમાં ભવિષ્યમાં કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : એક ઓરડાના ભોંયતળિયાનું ક્ષેત્રફળ $20\ m^2$ છે તથા તેની દીવાલો 3 m ઊંચી છે. ઓરડામાં હવાનું દબાણ 1 atm તથા તાપમાન $27^\circ C$ છે, તો ઓરડામાં રહેલી હવાનું દળ શોધો. એક મોલ હવાનું દળ 29 g લો. $1\ atm = 1.01 \times 10^5\ N\ m^{-2} = 1.01 \times 10^5\ Pa$, તથા $R = 8.31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

ઉકેલ : $P = 1\ atm = 1.01 \times 10^5\ N\ m^{-2}$

V = ઓરડાનું કદ $= 20 \times 3 = 60\ m^3$

$R = 8.31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

$T = 27\ ^\circ C = 273 + 27 = 300\ K$

આદર્શ-વાયુ અવસ્થા સમીકરણ મુજબ

$PV = \mu RT$

$$\therefore \mu = \frac{PV}{RT} = \frac{1.01 \times 10^5 \times 60}{8.31 \times 300}$$

$\therefore \mu = 2.43 \times 10^3$ મોલ (1)

આથી હવાનું દળ

$m = 29\ \mu = 29 \times 2.43 \times 10^3$

$= 70.5 \times 10^3\ g$

$\therefore m = 70.5\ kg$ (2)

જે ઓરડામાં રહેલી હવાનું દળ છે.

ઉદાહરણ 2 : 20 L કદ ધરાવતા એક વાયુપાત્રમાં $2.5 \times 10^5\ N\ m^{-2}$ દબાણે ઑક્સિજન વાયુ ભરેલો હોય, તો વાયુપાત્રમાં રહેલા ઑક્સિજન વાયુનું દળ શોધો. વાયુપાત્રમાં ઑક્સિજનનું તાપમાન $27\ ^\circ C$ છે તથા ઑક્સિજનનો અણુભાર $32\ g\ mol^{-1}$ છે.

$R = 8.31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

ઉકેલ : M_{O_2} = ઑક્સિજનનો અણુભાર

$= 32\ g\ mol^{-1}$

$= 32 \times 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}$

$P = 2.5 \times 10^5\ N\ m^{-2}$

$V = 20\ L = 20 \times 10^{-3}\ m^3$

μ = મોલસંખ્યા

$R = 8.31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

$T = 27 + 273 = 300\ K$

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ

$PV = \mu RT$

$$\therefore \mu = \frac{PV}{RT}$$

$$\therefore \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} = \mu = \frac{PV}{RT}$$

$\therefore m_{O_2}$ = ઑક્સિજનનું દળ

$$= M_{O_2} \times \frac{PV}{RT}$$

$$= \frac{32 \times 10^{-3} \times 2.5 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{8.31 \times 300}$$

$= 0.064$

$= 64 \times 10^{-3}\ kg$

$\therefore m_{O_2} = 64\ g$

ઉદાહરણ 3 : એક ગૅસ સિલિન્ડરમાં 15 kg ગૅસ, $10^7\ N\ m^{-2}$ દબાણે ભરેલો છે. આ સિલિન્ડરમાંથી ગૅસ લીક થાય છે. એક તબક્કે ગૅસનું દબાણ $3 \times 10^6\ N\ m^{-2}$ માલૂમ પડે છે, તો કેટલો ગૅસ લીક થઈ ગયો હશે ? અહીંયાં તાપમાન અચળ ધારો.

ઉકેલ : $P_1 = 10^7\ N\ m^{-2}$

$P_2 = 3 \times 10^6\ N\ m^{-2}$

$M_1 = 15\ kg$

$M_2 = ?$

અચળ કદ અને તાપમાન માટે આદર્શ-વાયુ અવસ્થા સમીકરણ પરથી,

$P_1V = \mu_1RT$

$P_2V = \mu_2RT$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

$$\therefore M_2 = \frac{P_2}{P_1} \times M_1 = \frac{3 \times 10^6 \times 15}{10^7}$$

$= 4.5\ kg$

આમ, 15 kg માંથી 4.5 kg ગૅસ રહ્યો હોવાથી $15 - 4.5 = 10.5$ kg ગૅસ લીક થયો હશે.

ઉદાહરણ 4 : શિયાળામાં $7\ ^\circ C$ તાપમાને તમારા ક્લાસરૂમમાં રહેલી હવાનું દળ, ઉનાળામાં $37\ ^\circ C$ તાપમાને રહેલી હવાના દળ કરતાં કેટલા ગણું હશે ? (દબાણ અચળ ધારો.)

ઉકેલ : $T_1 = 7 + 273 = 280$ K

$T_2 = 37 + 273 = 310$ K

આદર્શ-વાયુ અવસ્થા-સમીકરણ પરથી,

$PV = \mu_1 RT_1$

$PV = \mu_2 RT_2$

$\therefore \mu_1 T_1 = \mu_2 T_2$

$$\therefore \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\therefore \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{310}{280} = 1.1$$

આમ, ઉનાળા કરતાં શિયાળામાં હવાનું દળ 1.1 ગણું હશે.

ઉદાહરણ 5 : બૂચ (cork)થી બંધ કરેલી એક શીશીમાં 7 °C તાપમાને હવાનું દબાણ 1 atm છે. આ બૂચ 1.3 atm જેટલું દબાણ સહન કરી શકે તે રીતે શીશી પર ફિટ કરેલું છે, તો શીશીને ઓછામાં ઓછા કેટલા તાપમાન સુધી તપાવીએ, તો બૂચ ઊખડી જાય ? શીશીનું તાપીય વિસ્તરણ અવગણો.

ઉકેલ : $P_1 = 1$ atm

$P_2 = 1.3$ atm

V = અચળ

$T_1 = 7$ °C $= 280$ K

$T_2 = ?$

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ

$P_1 V = \mu RT_1$

$P_2 V = \mu RT_2$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\therefore T_2 = \frac{P_2}{P_1} T_1 = \frac{1.3 \times 280}{1}$$

$\therefore T_2 = 364$ K

$\therefore T_2 = 364 - 273 = 91$ °C

ઉદાહરણ 6 : 0 °C તાપમાને અને 1 atm દબાણે એક મોલ આદર્શવાયુનું કદ શોધો.

ઉકેલ : $T = 0$ °C $= 0 + 273 = 273$ K

$\mu = 1$ મોલ

$P = 1$ atm $= 1.01 \times 10^5$ N m^{-2}

$R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1}

$V = ?$

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ,

$PV = \mu RT$

$$\therefore V = \frac{\mu RT}{P} = \frac{1 \times 8.31 \times 273}{1.01 \times 10^5}$$

$= 0.0224$

$\therefore V = 22.4 \times 10^{-3}$ m^3 $= 22.4$ L

8.5 વાયુનો ગતિવાદ (Kinetic Theory of Gases)

અત્યાર સુધી આપણે આદર્શ વાયુની સ્થૂળ વ્યાખ્યા, તેની સ્થૂળ રાશિઓ જેવી કે કદ, દબાણ, તાપમાન વગેરે વચ્ચેના આંતર-સંબંધ દ્વારા આપી. હકીકતમાં ગતિવાદ મુજબ આ ગણતરીઓ વાયુના ઘટકકણો સાથે સંકળાયેલી સૂક્ષ્મ રાશિઓ જેવી કે અણુની ઝડપ, વેગમાન, તેની ગતિ-ઊર્જા વગેરેને અનુલક્ષીને આપવામાં આવે છે. આ ગણતરીઓ પરથી સ્થૂળ રાશિઓ સમજી શકાય, જે માટે વિજ્ઞાનીઓએ આદર્શવાયુ માટેનું વૈચારિક મૉડેલ ઉપજાવી કાઢ્યું જે **પૂર્વધારણાઓ** પર આધારિત છે. આમ, આદર્શવાયુ માટે કરવામાં આવેલી પૂર્વધારણાઓ આદર્શવાયુની સૂક્ષ્મ વર્ણન પર આધારિત વ્યાખ્યા પૂરી પાડે છે. આ પૂર્વધારણાઓ વડે રચાતું વૈચારિક માળખું આદર્શવાયુનું અણુમૉડેલ (Molecular Model of Ideal Gas) કહેવાય છે.

8.5.1 આદર્શ વાયુનું અણુમૉડેલ : પૂર્વધારણાઓ (Molecular Model of an Ideal Gas : Postulates)

(1) વાયુ સૂક્ષ્મ કણોનો બનેલો છે. આ કણોને વાયુના અણુઓ (Molecules) કહે છે.

વાયુના અણુઓ એક-પરમાણ્વિક, દ્વિ-પરમાણ્વિક કે બહુ પરમાણ્વિક હોઈ શકે છે. જો વાયુ કોઈ એક જ તત્ત્વ (Element) કે સંયોજન (Compound)નો બનેલો હોય તથા રાસાયણિક દૃષ્ટિએ સ્થિર હોય, તો તેના બધા જ અણુઓ એકસમાન હોય છે.

(2) વાયુના અણુઓ આંતરિક બંધારણ વિનાના સંપૂર્ણ દૃઢ ગોળાઓ/કણો (Rigid spheres) ગણી શકાય છે.

(3) વાયુના અણુઓ સતત અસ્તવ્યસ્ત ગતિ (Incessant random motion) કરે છે.

આ ગતિ દરમિયાન અણુઓ એકબીજા સાથે તેમજ વાયુપાત્રની દીવાલ સાથે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ અનુભવે છે.

(4) વાયુના અણુઓ ન્યૂટનના ગતિના નિયમોને અનુસરે છે.

અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ દરમિયાન બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચે અણુઓ ન્યૂટનના ગતિના પહેલા નિયમ અનુસાર સુરેખપથ પર મુક્ત રીતે અચળ ઝડપે ગતિ કરતાં હોય છે. અથડામણ દરમિયાન ન્યૂટનના ગતિના બીજા અને ત્રીજા નિયમ અનુસાર વાયુના અણુઓની ગતિની ઝડપ અને દિશા બદલાય છે.

(5) વાયુ ઘણી મોટી સંખ્યામાં અણુઓ ધરાવે છે.

અણુઓની સંખ્યા ઘણી મોટી છે, તેમ કહેવાનો મતલબ એ કે આપણે દરેક અણુની વ્યક્તિગત ગતિનો અભ્યાસ કરી શકતા નથી. વળી, અણુઓની સંખ્યા ખૂબ મોટી ધારીએ,

તો ઘણી મોટી સંખ્યામાં અણુઓ વચ્ચે અથડામણો થાય અને તેમની ગતિની અસ્તવ્યસ્તતા જળવાઈ રહે.

(6) વાયુના અણુઓનું કદ વાયુના (વાયુપાત્રના) કદની સરખામણીમાં અવગણી શકાય તેવું (નજીવું) હોય છે.

એટલે કે અણુઓ વચ્ચેના સરેરાશ અંતરની સરખામણીમાં અણુનો વ્યાસ ખૂબ જ નાનો હોય છે, જેથી અણુઓ વચ્ચેની આંતરક્રિયાઓ અવગણી શકાય છે.

(7) જ્યારે વાયુના બે અણુઓ એકબીજાની ખૂબ જ નજીક આવે છે કે અથડાય છે, ત્યારે જ તેમની વચ્ચે (ગણનાપાત્ર) આંતર-અણુબળો લાગે છે.

(8) અણુની અણુ સાથે તેમજ અણુઓની પાત્રની દીવાલ સાથે થતી અથડામણો સ્થિતિસ્થાપક હોય છે. અથડામણ દરમિયાનનો સમયગાળો બે ક્રમિક અથડામણો (સંઘાત) વચ્ચેના સમયગાળાની સરખામણીમાં નજીવો હોય છે.

સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાન ગતિ-ઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

ઉદાહરણ 7 : આપેલ દ્રવ્યમાનના પાણીના કદ કરતાં તેટલા જ દ્રવ્યમાનના પાણીની વરાળનું કદ આશરે 10^3 ગણું વધારે હોય, તો પાણીની વરાળમાં રહેલા અણુઓ વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર શોધો. પાણીના અણુની ત્રિજ્યા R = 2Å લો.

ઉકેલ : આપેલ દ્રવ્યમાનના પાણીના કદ કરતાં તેટલા જ દ્રવ્યમાનના પાણીની વરાળનું કદ 10^3 ગણું વધારે હોવાથી, પાણીની વરાળના અણુઓને મળતી કદની ત્રિજ્યા (અણુઓને ગોળાકાર ધારતાં, તેમજ જગ્યા પણ ગોળાકાર ધારતાં, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R \propto V^{\frac{1}{3}}$ પ્રમાણે)

$\therefore R \propto (10^3)^{\frac{1}{3}} = 10$ ગણી વધુ હોય છે.

આમ, પાણીની વરાળના દરેક અણુઓને મળતી કુલ ત્રિજ્યા (જગ્યા)

= 10 × પાણીના અણુની ત્રિજ્યા

= 10 × 2 Å

= 20 Å

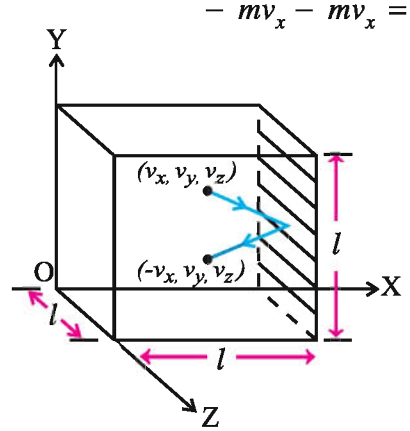
આથી, પાસપાસે રહેલા પાણીની વરાળના બે અણુઓ વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર 2 × 20 = 40 Å

8.6 આદર્શ વાયુનું દબાણ (Pressure of an Ideal Gas) અને વાયુના અણુઓની rms ઝડપ (and rms speed of gas molecules)

આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે l લંબાઈની દરેક બાજુઓવાળા સમઘન પાત્રમાં એક આદર્શ વાયુ ભરેલો છે અને સમઘન આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વાયુનો એક અણુ કે જેનો વેગ (v_x, v_y, v_z) છે, તે સમઘનની YZ સમતલને સમાંતર સપાટી, કે જેનું ક્ષેત્રફળ $A = l^2$ છે, સાથે અથડાય છે. અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોવાથી વેગના Y અને Z દિશામાંના ઘટકો બદલાતા નથી, પરંતુ ફક્ત X દિશામાંના ઘટકની દિશા બદલાય છે. આમ, અથડામણ બાદ અણુનો વેગ $(-v_x, v_y, v_z)$ છે.

$\therefore$ અણુના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર =

$$-mv_x - mv_x = -2mv_x$$



પાત્રની દીવાલ સાથે વાયુના અણુની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ

આકૃતિ 8.4

આથી, વેગમાન સંરક્ષણના નિયમ મુજબ પાત્રની દીવાલને મળેલું વેગમાન $= +2mv_x$

પાત્રની દીવાલ પર લાગતું બળ (અને દબાણ) મેળવવા માટે, એકમસમયમાં દીવાલને મળતું વેગમાન શોધવું પડે. v_x જેટલો વેગ ધરાવતા જે અણુઓ દીવાલથી $\Delta d = v_x.\Delta t$ જેટલા અંતરે હશે, તે જ અણુઓ Δt સમયમાં દીવાલ સાથે અથડાઈ શકશે.

આમ, પાત્રની દીવાલ નજીકના $Av_x\Delta t$ જેટલા કદમાં રહેલા અણુઓ જ Δt સમયમાં દીવાલ સાથે અથડાશે. પરંતુ આ અણુઓમાંથી સરેરાશ અડધા અણુઓ દીવાલ તરફ ગતિ કરતા હશે અને અડધા અણુઓ દીવાલથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા હશે. આમ, (v_x, v_y, v_z) વેગ ધરાવતાં અને Δt સમયમાં દીવાલ સાથે અથડાતા અણુઓની સંખ્યા $\frac{1}{2}nAv_x\Delta t$ થશે.

જ્યાં n = એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા

આ અણુઓ વડે Δt સમયમાં દીવાલને પ્રાપ્ત થયેલ કુલ વેગમાન

$$p_1 = (2mv_x)\left(\frac{1}{2}nAv_x\Delta t\right) \quad (8.6.1)$$

$$\therefore p_1 = nmAv_x^2\Delta t \quad (8.6.2)$$

આથી Δt સમય દરમિયાન પાત્રની દીવાલ પર લાગતું કુલ બળ $F = \frac{p_1}{\Delta t}$.

આથી પાત્રની દિવાલ પર એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું દબાણ

$$P = \frac{F}{A} = \frac{p_1}{\Delta t \cdot A} = nmv_x^2 \qquad (8.6.3)$$

ખરેખર તો વાયુના દરેક અણુનો વેગ એકસરખો હોતો નથી. આથી સમીકરણ (8.6.3) ફક્ત v_x વેગ ધરાવતા તથા એકમ કદમાં રહેલા n અણુઓના સમૂહ વડે દીવાલ પર લાગતું દબાણ દર્શાવે છે.

આથી v_x^2 નું સરેરાશ મૂલ્ય લેતાં મળતું કુલ દબાણ

$$P = nm < v_x^2 > \qquad (8.6.4)$$

$$\therefore \ P = \rho < v_x^2 > \qquad (8.6.5)$$

જ્યાં, $< v_x^2 > = v_x^2$ નું સરેરાશ મૂલ્ય,

તથા $nm = \rho$ = વાયુની ઘનતા

વાયુ (સમદિગ્ધર્મી) હોવાથી, વાયુના અણુઓ દરેક દિશામાં જુદા-જુદા વેગથી ગતિ કરતા હશે તથા દરેક દિશામાં તેમના સરેરાશ વર્ગિત વેગનાં મૂલ્યો સમાન હશે. એટલે કે,

$$< v_x^2 > = < v_y^2 > = < v_z^2 > \qquad (8.6.6)$$

$$\text{હવે } < v^2 > = < v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >$$
$$= 3 < v_x^2 > = 3 < v_y^2 > = 3 < v_z^2 >$$

$$\therefore \ < v_x^2 > = < v_y^2 > = < v_z^2 > = \frac{1}{3} < v^2 > \qquad (8.6.7)$$

જ્યાં $< v^2 >$ = વાયુના અણુઓનો સરેરાશ વર્ગિત વેગ

સમીકરણ (8.6.7)નો ઉપયોગ સમીકરણ (8.6.5)માં કરતાં

$$\therefore \ P = \left(\frac{1}{3}\right)\rho < v^2 > \qquad (8.6.8)$$

સમીકરણ (8.6.5) અને (8.6.8) આદર્શ વાયુના દબાણનું મૂલ્ય આપે છે.

v_{rms} : સરેરાશ વર્ગિત ઝડપ $< v^2 >$ ના વર્ગમૂળને v_{rms} (root mean squared speed) કહે છે. આ એક ખાસ પ્રકારની આણ્વિક ઝડપ છે. સમીકરણ (8.6.8) પરથી

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \qquad (8.6.9)$$

બે સ્પષ્ટતાઓ :

(1) આપણે વાયુપાત્રને સમઘન ધાર્યું છે, પરંતુ વાસ્તવમાં આકારનું કોઈ મહત્ત્વ નથી. કોઈ પણ આકારના પાત્ર માટે આપણે અતિ સૂક્ષ્મ સપાટીખંડ (સપાટ) ધારી શકીએ અને આગળ સમજાવ્યા મુજબ ગણતરી કરી શકીએ. સમીકરણ (8.6.8)માં A અને Δt બંને આવતા નથી. પાસ્કલના નિયમ મુજબ ઉષ્મીય અને યાંત્રિક સંતુલનમાં રહેલા વાયુ માટે દરેક જગ્યાએ દબાણ એકસરખું હોય છે.

(2) ઉપરની ગણતરીમાં આપણે અણુઓ વચ્ચેની અથડામણો ગણતરીમાં લીધી નથી. Δt સમયમાં દીવાલ સાથે અથડાતા અણુઓની સંખ્યા $\frac{1}{2}nAv_x\Delta t$ છે. સંતુલન સ્થિતિમાં વાયુના અણુઓ એકબીજા સાથે અસ્તવ્યસ્ત રીતે અથડાતાં હોય છે. જ્યારે (v_x, v_y, v_z) વેગ ધરાવતો અણુ બીજા કોઈ અન્ય વેગ ધરાવતાં અણુ સાથે અથડાય છે, ત્યારે બીજો અણુ (v_x, v_y, v_z) વેગ ધારણ કરે છે અને પહેલા અણુનો વેગ બદલાય છે. આમ, કોઈ પણ અથડામણ દરમિયાન $< v_x^2 >$ (એટલે કે $< v^2 >$) નું મૂલ્ય બદલાતું નથી. આમ, વાયુના અણુઓની આંતરિક અથડામણોની અસર દબાણ P (સમીકરણ 8.6.8) પર થતી નથી.

8.7 ગતિઊર્જા અને તાપમાન (Kinetic Energy and Temperature)

સમીકરણ (8.6.8) પરથી આપણે લખી શકીએ કે,

$$PV = \frac{1}{3} nVm < v^2 > \qquad (8.7.1)$$

$$\therefore \ PV = \frac{2}{3} N \cdot \frac{1}{2} m < v^2 > \qquad (8.7.2)$$

જ્યાં $N = nV$ = આપેલ વાયુના અણુઓની સંખ્યા,

અને $\frac{1}{2} m < v^2 >$ = વાયુના અણુઓની સરેરાશ રેખીય ગતિ-ઊર્જા

આદર્શ વાયુની ઊર્જા, કુલ ગતિ-ઊર્જા જેટલી હોય છે. એટલે કે,

$$E = N \frac{1}{2} m < v^2 > \qquad (8.7.3)$$

સમીકરણ (8.7.2) અને (8.7.3) પરથી,

$$PV = \frac{2}{3} E \qquad (8.7.4)$$

સમીકરણ (8.7.4) ને આદર્શ વાયુના સમીકરણ (8.4.5) ($PV = k_BNT$) સાથે સરખાવતાં,

$$\frac{2}{3}E = k_BNT$$

$$\therefore \ E = \frac{3}{2}k_BNT \qquad (8.7.5)$$

સમીકરણ (8.7.3) અને (8.7.5) પરથી,

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2} m < v^2 > = \frac{3}{2} k_BT \qquad (8.7.6)$$

$$\therefore \ v_{rms} = \sqrt{\frac{3K_BT}{m}}$$

આમ, વાયુના અણુની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા, વાયુના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે તથા તે વાયુનાં દબાણ, કદ કે પ્રકાર (પ્રકૃતિ) પર આધાર રાખતી નથી.

આ અગત્યનું પરિણામ વાયુના તાપમાન (જે સ્થૂળ રાશિ છે અને તે તંત્રમાં સૂક્ષ્મ સ્તરે બનતી ઘટનાઓની સરેરાશ સંયુક્ત અસર રૂપે જોવા મળે છે) ને વાયુના અણુઓની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા સાથે સાંકળે છે. સમીકરણ (8.7.5) દર્શાવે છે કે (આદર્શ) વાયુની આંતરિક ઊર્જા ફક્ત તેના તાપમાન પર આધાર રાખે છે, જ્યારે તે દબાણ અને કદ પર આધાર રાખતી નથી. તાપમાનના આ અર્થઘટન પરથી કહી શકાય કે (આદર્શ) વાયુનો ગતિવાદ, આદર્શ વાયુના સમીકરણ અને વાયુ માટેનાં બીજાં સમીકરણોનું સમાધાન કરે છે.

8.8 ઊર્જાના સમવિભાજનનો નિયમ તથા મુક્તતાના અંશો (Law of Equipartition of Energy and Degrees of Freedom)

આપેલો અણુ જેટલી સ્વતંત્ર પ્રકારની ગતિ ધરાવી શકે તેને તે વાયુ તંત્રની મુક્તતાના અંશો (degress of freedom) કહેવાય છે.

વાયુ પાત્રમાં વાયુના દરેક અણુની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા

$$<E> = \frac{1}{2}m<v_x^2> + \frac{1}{2}m<v_y^2> + \frac{1}{2}m<v_z^2>$$

$<E> = \frac{3}{2}k_BT$ જેટલી હોય છે. (8.8.1)

પરંતુ વાયુ સમદિગધર્મી (isotropic) હોવાથી

$$\therefore <v_x^2> = <v_y^2> = <v_z^2> = \frac{1}{3}<v^2>$$

$$\therefore <E> = \frac{3}{2}m<v_x^2> = \frac{3}{2}k_BT \quad (8.8.2)$$

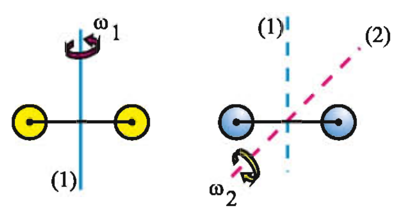
$$\therefore \frac{1}{2}m<v_x^2> = \frac{1}{2}k_BT \quad (8.8.3)$$

આમ, વાયુપાત્રમાં વાયુના અણુઓ જેટલી સ્વતંત્ર રીતે (સ્વતંત્ર પ્રકારની અને દિશામાં) ગતિ કરી શકે, તે દરેક ગતિ સાથે ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ હોય છે.

સમીકરણ (8.8.1) માં દર્શાવ્યા મુજબ વાયુના અણુઓ x, y અને z દિશામાં સ્વતંત્ર રીતે રેખીય ગતિ કરી શકે છે. જો વાયુ દ્વિ-પરમાણ્વિક અણુઓનો બનેલો હોય, તો અણુઓને રેખીય ગતિ ઉપરાંત ચાકગતિ અને કંપન (પોતાના સ્થાનની આસપાસ પરમાણુઓનું આંદોલન) ગતિ પણ હોઈ શકે છે. આ અણુઓની ચાકગતિ બે સ્વતંત્ર દિશામાં હોઈ શકે :

(1) અણુમાંના બે પરમાણુઓને જોડતી રેખાને લંબ રૂપે રહેલ એક અક્ષને અનુલક્ષીને અને

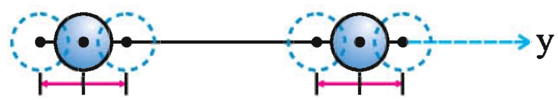
(2) આ રેખા તેમજ ઉપર્યુક્ત અક્ષને લંબરૂપે રહેલ બીજા અક્ષને અનુલક્ષીને (જુઓ આકૃતિ 8.5).



દ્વિ-પરમાણ્વિક અણુની બે સ્વતંત્ર દિશાઓમાં ચાકગતિ

આકૃતિ 8.5

આ ઉપરાંત દ્વિ-પરમાણ્વિક અણુના પરમાણુઓ તેમને જોડતી રેખા પર પોતાના સ્થાનની આસપાસ કંપન (આવર્ત-દોલનો) પણ કરતાં હોય. (જુઓ આકૃતિ 8.6.)



દ્વિ-પરમાણ્વિક અણુના પરમાણુઓનું તેમને જોડતી રેખા (y) પર તેમના સ્થાનની આસપાસ કંપન

આકૃતિ 8.6

આ કંપન (આવર્તદોલનો) દરમિયાન પરમાણુઓને સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જા હોય છે.

એક પરમાણ્વીય અણુની મુક્તતાના અંશો ફક્ત 3 હોય છે, જ્યારે દ્વિ-પરમાણ્વિક અણુની (દા.ત., CO) મુક્તતાના અંશો 7 હોય છે. જો દ્વિ-પરમાણ્વિક અણુને rigid rotator (ચાકગતિ કરી શકે તેવો દૃઢ અણુ) તરીકે લેવામાં આવે (દા.ત., સામાન્ય તાપમાને O_2), તો તેની મુક્તતાના અંશો 5 હોય છે. ઊર્જાના સમવિભાજનના નિયમ અનુસાર આ દરેક મુક્તતાના અંશ સાથે સંકળાયેલી ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ જેટલી હોય છે. (જ્યાં, k_B = બૉલ્ટ્ઝમાનનો અચળાંક).

ઉદાહરણ 8 : 27 °C તાપમાને 200 g ઑક્સિજનની ઉષ્મીય ગતિ સાથે સંકળાયેલી ઊર્જા શોધો. (ઑક્સિજનના અણુને rigid rotator ગણો.)

ઉકેલ : ઑક્સિજન દ્વિ-પરમાણ્વિક rigid rotator હોવાથી તેની મુક્તતાના અંશો 5 છે. દરેક મુક્તતાના અંશ સાથે સંકળાયેલી ઉષ્મીય ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ હોય છે.

32 g O_2 માં 6.02×10^{23} અણુઓ હોય છે,
આથી 200 g O_2માં અણુઓની સંખ્યા

$$= \frac{6.02 \times 10^{23} \times 200}{32}$$

$$= 3.76 \times 10^{24}$$

$\therefore$ 200 g O_2ની કુલ ઉષ્મીય ઊર્જા

$$= 3.76 \times 10^{24} \times \frac{5}{2}k_BT$$

$$= 3.76 \times 10^{24} \times \left(\frac{5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{2}\right)$$

$$= 3.8 \times 10^4 \text{ J}$$

8.8.1 ઊર્જાના સમવિભાજનના નિયમ વડે વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્મા નક્કી કરવી (Estimation of the specific heat of a gas from the law of equipartition of energy)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, વાયુના અણુઓ જેટલી સ્વતંત્ર પ્રકારની ગતિ કરી શકે તેને તે વાયુના અણુઓની મુક્તતાના અંશ કહે છે. આ દરેક મુક્તતાના અંશ સાથે સંકળાયેલ ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ જેટલી હોય છે. એટલે કે જો વાયુના અણુઓની મુક્તતાના અંશો f હોય તો વાયુના અણુઓ જુદી જુદી f રીતે ઊર્જાનો સંગ્રહ કરી શકે. જો આપેલ વાયુના અણુઓની મુક્તતાના અંશ f હોય, તો વાયુના દરેક અણુ દીઠ સરેરાશ ઉષ્મીય ઊર્જા,

$$E_{avg} = f \times \frac{1}{2}k_BT = \frac{f}{2}k_BT$$

જો આદર્શ વાયુના મોલની સંખ્યા μ હોય તો તેમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા μN_A થાય. આથી, μ મોલ આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા,

$$E_{int} = \mu N_A E_{avg}$$

$$= \mu N_A \frac{f}{2}k_BT$$

$$= \frac{f}{2}\mu N_A k_BT$$

$$\therefore E_{int} = \frac{f}{2}\mu RT \quad (8.8.4)$$

જ્યાં $R = N_A k_B$ = સાર્વત્રિક વાયુ નિયતાંક

સમીકરણ (8.8.4) દર્શાવે છે કે આપેલ જથ્થાના આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા E_{int}, તે વાયુના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

આપેલ પદાર્થના એકમ દળ દીઠ તેના તાપમાનમાં એક એકમ જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે પદાર્થના દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે. વાયુઓ માટે એકમ દળ તરીકે એક મોલ જથ્થો લેવામાં આવે છે. આથી,

વાયુના એક મોલ દીઠ તેના તાપમાનમાં 1 કેલ્વિન (કે 1 °C) જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે.

વાયુના તાપમાનમાં ફેરફાર કરવા માટેની અનેક રીતો પૈકી બે રીતો અગત્યની છે :

(i) અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_V) : એક મોલ વાયુનું કદ અચળ રાખીને તેના તાપમાનમાં 1 K જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_V કહે છે.

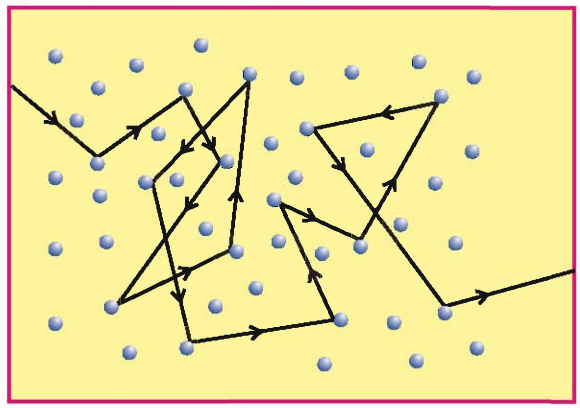
(ii) અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_P) : એક મોલ વાયુનું દબાણ અચળ રાખીને તેના તાપમાનમાં 1 K જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_P કહે છે.

આગળ ઉપર આપણે વિશિષ્ટ ઉષ્માનો વધુ અભ્યાસ કરીશું.

8.9 સરેરાશ મુક્તપથ (Mean Free path)

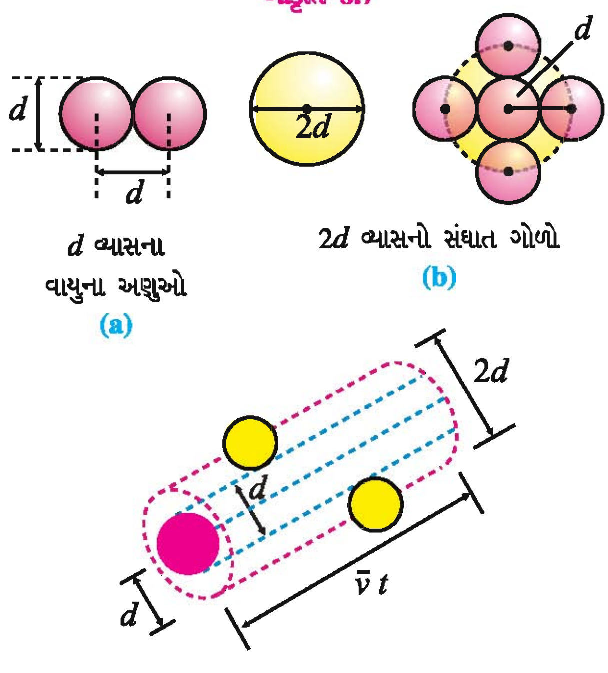
આકૃતિ 8.7 માં વાયુના કોઈ એક અણુનો ગતિપથ દર્શાવ્યો છે. આ અણુના માર્ગમાં બીજો કોઈ અણુ આવે, ત્યારે તેમની વચ્ચે અથડામણ (સંઘાત) થતાં આ અણુની ગતિની ઝડપ અને દિશા બદલાય છે. આ અથડામણ બાદ બીજી અથડામણ ન થાય, ત્યાં સુધી આ અણુ અચળ ઝડપે સુરેખપથ પર ગતિ કરે છે. વાયુઓમાં NTP સરેરાશ મુક્ત ગતિ પથ 1000 Å ના ક્રમનો હોય છે.

અણુ-અણુ વચ્ચેની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સમયગાળામાં વાયુનો અણુ અચળ ઝડપે જેટલું સુરેખ અંતર કાપે તે અંતરને તે અણુનો મુક્તપથ (free path) કહે છે. વાયુના અણુએ કાપેલા મુક્તપથોના સરેરાશ મૂલ્યને સરેરાશ મુક્તપથ (mean free path) કહે છે.



વાયુના કોઈ એક અણુનો ગતિપથ

આકૃતિ 8.7



d વ્યાસના વાયુના અણુઓ

(a)

$2d$ વ્યાસનો સંઘાત ગોળો

(b)

d ત્રિજ્યા અને $\bar{v}t$ લંબાઈનો કાલ્પનિક નળાકાર

(c)

આકૃતિ 8.8

આકૃતિ 8.8(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે વાયુના અણુઓ d વ્યાસના ગોળાઓ છે. આથી બે અણુઓ એકબીજાથી d અંતરે આવે, ત્યારે તેમની વચ્ચે અથડામણ થશે.

ધારો કે d વ્યાસનો એક અણુ સરેરાશ વેગ $\bar{v}$ થી ગતિ કરે છે અને બાકીના બધા અણુઓ સ્થિર છે. આ અણુ બીજા કોઈ અણુથી d જેટલા અંતરે આવશે ત્યારે તેમની વચ્ચે અથડામણ થશે. t સમયમાં આવી અથડામણોની સંખ્યા ગણવા માટે આકૃતિ 8.8(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ અણુના કેન્દ્રની આસપાસ અસરકારક d જેટલી ત્રિજ્યાનો ($2d$ વ્યાસનો) એક કાલ્પનિક **"સંઘાત ગોળો"** દોરો.

t સમયમાં આ ગોળો πd^2 જેટલા આડછેદ ક્ષેત્રફળ અને $\bar{v}t$ જેટલી લંબાઈવાળો નળાકાર (કાલ્પનિક) રચશે. (જુઓ આકૃતિ 8.8 (c)) એટલે કે આ અણુ t સમયમાં $\pi d^2 \bar{v} t$ જેટલા કદના કાલ્પનિક નળાકારમાંથી પસાર થશે. જો એકમ કદ દીઠ અણુઓની સંખ્યા n હોય, તો $\pi d^2 \bar{v} t$ કદના નળાકારમાં કુલ $n\pi d^2 \bar{v} t$ જેટલા અણુઓ હશે. આથી આપણે વિચારેલ અણુ t સમયમાં કુલ $n\pi d^2 \bar{v} t$ જેટલી અથડામણો અનુભવશે.

સરેરાશ મુક્ત પથ $\bar{l}$ એ બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર છે.

∴ સરેરાશ મુક્તપથ =

$$\frac{(t \text{ સમયમાં } \bar{v} \text{ જેટલી ઝડપે અણુએ કાપેલ અંતર})}{t \text{ સમયમાં થતી કુલ અથડામણો}}$$

$$\therefore \bar{l} = \frac{\bar{v}t}{n\pi d^2 \bar{v}t} \qquad (8.9.1)$$

$$\therefore \bar{l} = \frac{1}{n\pi d^2} \qquad (8.9.2)$$

આ સૂત્રની તારવણીમાં આપણે બીજા અણુઓને સ્થિર ધાર્યા છે. ખરેખર તો વાયુના બધા અણુઓ ગતિ કરતા હોય છે અને તેમની અથડામણનો દર, સમીકરણ (8.9.1)માં તેમના સરેરાશ સાપેક્ષ વેગ $< v_r >$ નો ઉપયોગ કરીને મેળવીએ તો

$$[\text{સરેરાશ મુક્તપથ}]\ \bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} \qquad (8.9.3)$$

ઉદાહરણ 9 : સામાન્ય તાપમાને અને દબાણે એક ઘન મીટર દીઠ નાઇટ્રોજન વાયુના અણુઓની સંખ્યા 2.7×10^{25} હોય, તો નાઇટ્રોજનના અણુઓનો સરેરાશ મુક્તપથ શોધો.

(નાઇટ્રોજન અણુનો વ્યાસ = 3.2×10^{-10} m)

ઉકેલ :

$n = 2.7 \times 10^{25}$ molecule m^{-3}

$d = 3.2 \times 10^{-10}$ m

$$\therefore \text{ સરેરાશ મુક્તપથ } \bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

$$\therefore \bar{l} = \frac{1}{1.41 \times 2.7 \times 10^{25} \times 3.14 \times (3.2 \times 10^{-10})^2}$$

$$\therefore \bar{l} = 8.17 \times 10^{-8} \text{ m}$$

ઉદાહરણ 10 : આર્ગન વાયુના અણુની ત્રિજ્યા 1.78 Å હોય, તો 0 °C તાપમાને અને 1 atm દબાણે આર્ગન વાયુના અણુઓનો સરેરાશ મુક્તપથ શોધો. $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}

ઉકેલ :

અહીંયાં, $r = 1.78$ Å $= 1.78 \times 10^{-10}$ m

$d = 2r = 3.56 \times 10^{-10}$ m

T = 0 °C = 237 K

P = 1 atm = 1.01×10^5 N m^{-2}

સમીકરણ (8.4.6) પરથી,

$P = nk_BT$

$$\therefore n = \frac{P}{k_BT}$$

આથી આર્ગન વાયુના અણુનો સરેરાશ મુક્તપથ

$$\therefore \bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{k_BT}{\sqrt{2}\pi P d^2}$$

$$\therefore \bar{l} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{1.414 \times 3.14 \times 1.01 \times 10^5 \times (3.56 \times 10^{-10})^2}$$

$$\therefore \bar{l} = 6.65 \times 10^{-8} \text{ m}$$

સારાંશ

1. જ્યારે વાયુતંત્ર અને તેની સાથે સંકળાયેલ ઘટનાઓનું વર્ણન સ્થૂળ રાશિઓ (જેવી કે દબાણ, તાપમાન, કદ વગેરે)ના સંદર્ભમાં કરવામાં આવે ત્યારે તેને **સ્થૂળ વર્ણન** કહે છે.
2. **ગૅલ્યુસેકનો નિયમ :** આપેલ કદ માટે પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળા નિશ્ચિત જથ્થાના વાયુનું દબાણ તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.
3. **ઍવોગેડ્રોનો અધિતર્ક (નિયમ) :** એકસરખાં તાપમાન અને દબાણે એકમ કદમાં રહેલા વાયુના અણુઓની સંખ્યા એકસરખી હોય છે.
4. પ્રમાણિત તાપમાન (273 K) અને દબાણે (1 atm), 22.4 લિટર કદમાં રહેલા વાયુના જથ્થાનું દ્રવ્યમાન તેના (ગ્રામમાં) અણુભાર જેટલું હોય છે. વાયુના આ જથ્થાને 1 mole કહે છે.
5. **આદર્શ વાયુ :** જે વાયુ દરેક તાપમાન અને દબાણે સમીકરણ $PV = \mu RT$ નું સંપૂર્ણપણે પાલન કરે, તેને આદર્શ વાયુ કહે છે. (વાસ્તવમાં કોઈ વાયુ આદર્શ વાયુ નથી.)
6. **બૉઇલનો નિયમ :** અચળ તાપમાને પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળા નિશ્ચિત જથ્થા (દળ)ના વાયુનું દબાણ તેના કદના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં બદલાય છે.
7. **ચાર્લ્સનો નિયમ :** અચળ દબાણે, પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળા નિશ્ચિત જથ્થાના વાયુનું કદ તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં બદલાય છે.
8. વાયુના અણુઓની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા વાયુના **નિરપેક્ષ તાપમાન**ના સમપ્રમાણમાં હોય છે તથા તે વાયુનાં દબાણ, કદ કે પ્રકાર (પ્રકૃતિ) પર આધાર રાખતી નથી.
9. વાયુની આંતરિક ઊર્જા ફક્ત તેના **તાપમાન** પર આધાર રાખે છે, જ્યારે તે દબાણ અને કદ પર આધાર રાખતી નથી.
10. વાયુપાત્રમાં વાયુના અણુઓ જેટલી સ્વતંત્ર રીતે (સ્વતંત્ર પ્રકારની અને સ્વતંત્ર દિશામાં ગતિ કરી શકે, તેને તે **વાયુતંત્રની મુક્તતાના અંશો** કહે છે. આ દરેક ગતિ સાથે તેમની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ સંકળાયેલ હોય છે.
11. **મુક્તપથ :** અણુ-અણુ વચ્ચેની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સમયગાળામાં વાયુનો અણુ અચળ ઝડપે જેટલું સુરેખ અંતર કાપે તે અંતરને તે અણુનો મુક્તપથ કહે છે.
12. **સરેરાશ મુક્તપથ :** વાયુના અણુએ કાપેલા મુક્તપથોના સરેરાશ મૂલ્યને સરેરાશ મુક્તપથ કહે છે.
13. વાયુના એક મોલ દીઠ તેના તાપમાનમાં 1 કેલ્વિન (કે 1 °C) જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની **મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા** કહે છે.
14. **અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_V) :** એક મોલ વાયુનું કદ અચળ રાખીને તેના તાપમાનમાં 1 K જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_V કહે છે.
15. **અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_P) :** એક મોલ વાયુનું કદ અચળ રાખીને તેના તાપમાનમાં 1 K જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_P કહે છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. જો વાયુનું કદ તેના મૂળ કદથી ચાર ગણું કરવું હોય, તો
   (A) તેનું તાપમાન 4 ગણું કરવું જોઈએ.
   (B) અચળ દબાણે તેનું તાપમાન 4 ગણું કરવું જોઈએ.
   (C) તેનું દબાણ ચોથા ભાગનું કરવું જોઈએ.
   (D) તેનું દબાણ ચાર ગણું કરવું જોઈએ.

2. એક વાયુપાત્રમાં 2 kg હવા ભરેલી છે. તેનું દબાણ 10^5 Pa છે. જો આ પાત્રમાં 2 kg જેટલી વધારાની હવા અચળ તાપમાને ભરવામાં આવે તો, હવાનું દબાણ .... થશે.
(A) 10^5 Pa (B) 0.5×10^5 Pa (C) 2×10^5 Pa (D) 10^7 Pa

3. વાયુ નિયતાંકનો SI એકમ .... છે.
(A) cal mol^{-1} (B) J mol^{-1} (C) J mol^{-1} K^{-1} (D) J mol^{-1} K

4. એક આદર્શ વાયુનું કદ V, દબાણ P અને તાપમાન T છે. દરેક અણુનું દળ m છે, તો વાયુની ઘનતાનું સૂત્ર .... થશે.
(A) mk_BT (B) $\frac{P}{k_BT}$ (C) $\frac{P}{k_BTV}$ (D) $\frac{Pm}{k_BT}$

(જ્યાં, k_B = બૉલ્ટ્ઝમાનનો અચળાંક)

5. એક વાયુનું નિરપેક્ષ તાપમાન 3 ગણું કરવામાં આવે, તો તેના અણુઓની *rms* ઝડપ v_{rms} .... થશે.
(A) 3 ગણી (B) 9 ગણી (C) $\frac{1}{3}$ ગણી (D) $\sqrt{3}$ ગણી

6. એક તાપમાને O_2 અણુ (અણુભાર = 32 g) ની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા 0.048 eV છે. આ જ તાપમાને N_2 (અણુભાર = 28 g) અણુની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા .... eV હશે.
(A) 0.048 (B) 0.042 (C) 0.056 (D) 0.42

7. એક વાયુપાત્રમાં 1 mole O_2 (અણુભાર = 32 g) વાયુ ભર્યો છે. તેનાં તાપમાન અને દબાણ અનુક્રમે T અને P છે. હવે બીજા સમાન કદ ધરાવતાં પાત્રમાં 1 mole He (પરમાણુભાર = 4 g) વાયુ 2T તાપમાને ભરવામાં આવે, તો તે વાયુનું દબાણ .... હશે.
(A) P (B) 2P (C) 4 P (D) $\frac{P}{2}$

8. ક્લોરિન વાયુના એક નમૂનામાં 300 K તાપમાને સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા (અણુ દીઠ) $= 6.21 \times 10^{-21}$ J અને v_{rms} = 325 m s^{-1} છે. તો 600 K તાપમાને આ રાશિઓનાં મૂલ્યો કેટલાં હશે ?
(A) 12.42×10^{-21} J, 650 m s^{-1} (B) 6.21×10^{-21} J, 650 m s^{-1}
(C) 12.42×10^{-21} J, 325 m s^{-1} (D) 12.42×10^{-21} J, 459.6 m s^{-1}

9. એક ખુલ્લા મોઢાવાળા પાત્રમાં 60 °C તાપમાને હવા ભરેલી છે. આ પાત્રને T તાપમાન સુધી ગરમ કરતાં પાત્રમાંથી $\frac{1}{4}$ ભાગની હવા બહાર નીકળી જાય છે, તો T = ...
(A) 80 °C (B) 444 °C (C) 333 °C (D) 171 °C

10. એક બંધ ઓરડીમાં પંખો ચાલુ રાખવામાં આવે, તો ઓરડી ....
(A) ઠંડી થાય. (B) ગરમ થાય.
(C) નું તાપમાન જળવાઈ રહે. (D) ઠંડી કે ગરમ ગમે તે થઈ શકે.

11. વાયુના અણુઓ વચ્ચે ઉદ્ભવતું આંતર-અણુબળ, ઘન અને પ્રવાહીમાં અણુઓ વચ્ચે લાગતાં આંતર-અણુબળો .... હોય છે.
(A) કરતાં વધારે (B) જેટલું
(C) ની સરખામણીમાં અવગણી શકાય તેવું (D) કરતાં ઘણું વધારે

12. આપેલ પદાર્થના એકમ દળ દીઠ તેના તાપમાનમાં એક એકમ જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે પદાર્થના દ્રવ્યની .... કહે છે.
(A) વિશિષ્ટ ઉષ્મા (B) ગતિ ઊર્જા
(C) ઉષ્મા ઊર્જા (D) આંતરિક ઊર્જા

13. આપેલ જથ્થાના આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા, તે વાયુના .... પર આધાર રાખે છે.
(A) દબાણ (B) તાપમાન (C) કદ (D) અણુભાર

14. NTP વાયુઓમાં સરેરાશ મુક્ત ગતિપથ .... ના ક્રમનો હોય છે.
(A) 1 Å (B) 10 Å (C) 10^3 Å (D) 10^5 Å

15. વાયુના અણુઓનું કદ વાયુના (વાયુ પાત્રના) કદની સરખામણીમાં .... હોય છે.
(A) વધુ (B) અવગણી શકાય તેવું
(C) ઘણું વધારે (D) બમણું

16. જો વાયુના અણુઓની મુક્તતાના અંશો f હોય, તો વાયુના અણુઓ જુદી જુદી .... રીતે ઊર્જાનો સંગ્રહ કરી શકે.
(A) $2f$ (B) f (C) $f / 2$ (D) f^2

17. આપેલ અચળ તાપમાન અને દબાણ માટે એકમ કદ દીઠ વાયુના અણુઓની સંખ્યા ....
(A) દરેક વાયુ માટે જુદી-જુદી હોય છે.
(B) વાયુના અણુઓનાં કદ પ્રમાણે બદલાય છે.
(C) વાયુના અણુભારના સમપ્રમાણમાં હોય છે.
(D) દરેક વાયુ માટે સરખી હોય છે.

18. વાયુપાત્રમાં વાયુના અણુઓની આંતરિક અથડામણોના કારણે વાયુનું દબાણ ....
(A) બદલાતું નથી. (B) સતત બદલાયા કરતું હોય છે.
(C) ધીમે-ધીમે વધે છે. (D) ધીમે-ધીમે ઘટતું જાય છે.

19. CO વાયુની મુક્તતાના અંશો .... હોય છે.
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

20. વાયુના અણુઓની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા ....
(A) વાયુના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.
(B) વાયુના દબાણ પર આધાર રાખે છે.
(C) વાયુના કદ પર આધાર રાખે છે.
(D) વાયુના પ્રકાર પર આધાર રાખે છે.

21. Ar, Ne, He વગેરે નિષ્ક્રિય વાયુઓની મુક્તતાના અંશો .... હોય છે. (અણુને rigid rotator ગણો.)
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

22. સામાન્ય તાપમાને ઑક્સિજન O_2ની મુક્તતાના અંશો .... હોય છે.
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

23. બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના વાયુના અણુઓના સુરેખ ગતિપથની લંબાઈને .... કહે છે.
(A) મુક્તતાના અંશો (B) મુક્તપથ
(C) જનમાર્ગ (D) સરેરાશ મુક્તપથ

જવાબો

1. (B)	2. (C)	3. (C)	4. (D)	5. (D)	6. (A)
7. (B)	8. (D)	9. (D)	10. (B)	11. (C)	12. (A)
13. (B)	14. (C)	15. (B)	16. (B)	17. (D)	18. (A)
19. (C)	20. (A)	21. (A)	22. (B)	23. (B)	

નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. વાયુનો ગતિવાદ કઈ સ્થૂળ રાશિઓનું અર્થઘટન સમજાવે છે ?
2. પ્રમાણિત તાપમાન અને દબાણનું મૂલ્ય કેટલું હોય છે ?

3. કયા તાપમાન અને દબાણ માટે વાસ્તવિક વાયુ આદર્શવાયુ તરીકે વર્તે છે ?
4. આદર્શ વાયુનું અણુમૉડેલ શેના પર આધારિત છે ?
5. આદર્શ વાયુનું દબાણ શોધવા માટે વાયુપાત્ર કેવા આકારનું હોવું જોઈએ ?
6. વાયુના અણુઓની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાન શેનું સંરક્ષણ થાય છે ?
7. વાયુના અણુઓની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા શેના પર આધાર રાખતી નથી ?
8. સ્થૂળ રાશિઓ કઈ-કઈ છે ?
9. સૂક્ષ્મ રાશિઓ કઈ-કઈ છે ?
10. વાયુના અણુઓની મુક્તતાના અંશો વ્યાખ્યાયિત કરો.
11. અચળ કદે વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્માની વ્યાખ્યા આપો.
12. અચળ દબાણે વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્માની વ્યાખ્યા આપો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આદર્શ વાયુ માટેનું અવસ્થા-સમીકરણ લખો તથા તેનાં વિવિધ સ્વરૂપો સમજાવો.
2. બૉઇલનો નિયમ લખો તથા આલેખ દ્વારા સમજાવો.
3. વાયુના તાપમાનનું ગત્યાત્મક અર્થઘટન આપો.

   અથવા

   વાયુના તાપમાનનું અર્થઘટન વાયુના અણુઓની ગતિ-ઊર્જાના રૂપમાં સમજાવો.
4. વાયુપાત્રમાં રહેલા વાયુના અણુઓ વડે Δt સમયમાં વાયુપાત્રની દીવાલને પ્રાપ્ત થયેલ કુલ વેગમાન માટેનું સમીકરણ મેળવો.
5. વાયુપાત્રમાં રહેલા વાયુના અણુઓ વડે Δt સમયમાં વાયુપાત્રની દીવાલને પ્રાપ્ત થયેલ કુલ વેગમાન $P_1 = nmAv_x^2\Delta t$ હોય, તો વાયુપાત્રમાં રહેલા વાયુના દબાણ માટેનું સમીકરણ મેળવો.
6. આદર્શ વાયુની સરેરાશ ઉષ્મીય ઊર્જા અને આંતરિક ઊર્જા તેના તાપમાનના સંદર્ભમાં સમજાવો.

નીચેના દાખલાઓ ગણો :

1. કોઈ એક વાયુના ચોક્કસ જથ્થાનું 3 atm દબાણે કદ 12 L છે. અચળ તાપમાને વાયુનું દબાણ કેટલું કરવામાં આવે, તો તેનું કદ ઘટીને 9 L થાય ? [**જવાબ :** 4 atm]
2. 27 m^3 કદવાળા એક ઓરડામાં 27 °C તાપમાને અને 1 atm દબાણે રહેલી હવાના અણુઓની સંખ્યા શોધો. ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}) [**જવાબ :** 6.58×10^{26} અણુઓ]
3. 27 °C તાપમાને હિલિયમ પરમાણુની સરેરાશ સુરેખ ગતિ-ઊર્જા શોધો.

   ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}) [**જવાબ :** 6.21×10^{-21} J]
4. કયા તાપમાને ઑક્સિજન વાયુના અણુનો v_{rms}, 27 °C તાપમાને હાઇડ્રોજન વાયુના v_{rms} જેટલો થશે ? (m_{O_2} = 32 g mol^{-1}, m_{H_2} = 2 g mol^{-1}) [**જવાબ :** 4800 K]

5. 30 લિટરના ઑક્સિજનના સિલિન્ડરમાં દબાણ 15 atm અને તાપમાન 27 °C છે. થોડો ઑક્સિજન વાપર્યા (કાઢ્યા) પછી સિલિન્ડરમાં ઑક્સિજનનું દબાણ 11 atm રહે છે અને તેનું તાપમાન ઘટીને 17 °C થાય છે, તો સિલિન્ડરમાંથી કાઢવામાં આવેલા ઑક્સિજનનું દ્રવ્યમાન શોધો. ($R = 8.31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$, O_2 નો અણુભાર = $32\ g\ mol^{-1}$)

[**જવાબ :** 0.141 kg]

6. કોઈ પણ વાયુ માટે કયા તાપમાને તેના અણુઓ માટે v_{rms} નું મૂલ્ય, 16 °C તાપમાને મળતા v_{rms} ના મૂલ્ય કરતાં બમણું હશે ? [**જવાબ :** 1156 K]

7. 27 °C તાપમાને અને 1 atm દબાણે હાઇડ્રોજન અને ઑક્સિજનના અણુઓ માટે v_{rms}ની સરખામણી કરો. (હાઇડ્રોજનનો અણુભાર = $2\ g\ mol^{-1}$, ઑક્સિજનનો અણુભાર = $32\ g\ mol^{-1}$) [**જવાબ :** $(v_{rms})_{H_2} = 4(v_{rms})_{O_2}$]

8. 0 °C તાપમાને અને વાતાવરણના દબાણે હાઇડ્રોજન વાયુની v_{rms} શોધો. હાઇડ્રોજનની ઘનતા $8.9 \times 10^{-2}\ kg\ m^{-3}$ છે. [**જવાબ :** $1845\ m\ s^{-1}$]

9. હાઇડ્રોજન વાયુના અણુઓની આણ્વિક ત્રિજ્યા 0.5 Å હોય, તો 0 °C તાપમાને અને 1 atm દબાણે હાઇડ્રોજન વાયુના અણુઓનો સરેરાશ મુક્તપથ શોધો.

($k_B = 1.38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$) [**જવાબ :** $\bar{l} = 8.4 \times 10^{-7}$ m]

10. દર્શાવો કે T તાપમાને અને P દબાણે રહેલા વાયુના અણુઓનો સરેરાશ મુક્તપથ l હોય, તો 2T જેટલા તાપમાને અને $\frac{P}{2}$ જેટલા દબાણે તે વાયુના અણુઓનો સરેરાશ મુક્તપથ $4\ l$ થશે.

11. વાતાવરણમાં જો પ્રત્યેક ઘન મીટર દીઠ 3×10^{25} હવાના અણુઓ હોય અને તેમની સરેરાશ ઝડપ $10^3\ m\ s^{-1}$ હોય, તો સરેરાશ મુક્તપથ અને તે પરથી 1 s માં એક અણુએ બીજા અણુઓ સાથે કરેલી અથડામણોની સંખ્યા (collision frequency) શોધો. (હવાના અણુનો વ્યાસ 2 Å લો.)

[**જવાબ :** 1.88×10^{-7} m અને 5.32×10^9 અથડામણ એક સેકન્ડમાં]

• • •

ઉકેલ (SOLUTION)

પ્રકરણ 2

1. $\overline{R} = \dfrac{4 \cdot 12 + 4 \cdot 08 + 4 \cdot 22 + 4 \cdot 14}{4} = 4 \cdot 14\ \Omega$

હવે $\Delta R_1 = \overline{R} - R_1$, $\Delta R_2 = \overline{R} - R_2$....... લઈ સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ ગણો.

$$\Delta \overline{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\Delta R_n| = 0.04\Omega$$

સાપેક્ષ ત્રુટિ $= \dfrac{\Delta \overline{R}}{\overline{R}} = \dfrac{0 \cdot 04}{4 \cdot 14} = 0.0096$

પ્રતિશત ત્રુટિ $= 0.0096 \times 100 = 0.96\ \%$

2. નળાકારના દ્રવ્યની ઘનતા $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{\pi r^2 l}$

હવે, $\dfrac{\Delta \rho}{\rho} = \dfrac{\Delta m}{m} + 2\dfrac{\Delta r}{r} + \dfrac{\Delta l}{l}$ નો ઉપયોગ કરી પ્રતિશત ત્રુટિ $\dfrac{\Delta \rho}{\rho} \times 100\ \%$ મેળવો.

3. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\ \therefore\ g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T^2}$

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} = \frac{0.1}{100} + 2\left(\frac{0.01}{2}\right) = 0.011$$

પ્રતિશત ત્રુટિ $= 0.011 \times 100 = 1.1\ \%$

4. પતરાનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 2[(l \times b) + (b \times t) + (t \times l)]$

$l = 4.234$ m, $b = 1.005$ m, $t = 2.01 \times 10^{-2}$ m, મૂકતાં

ક્ષેત્રફળ $= 2(4.3604739) = 8.7209478\ m^2 = 8.72\ m^2$

પતરાનું કદ $= l \times b \times t = 0.0855289 = 0.086\ m^3$

($t = 2.01 \times 10^{-2}$ m ને લઘુતમ સાર્થકઅંકો (3) છે. તે ધ્યાનમાં રાખી rounding off કરતાં)

5. $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_2}{r^2}\ \therefore\ \varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi} \times \dfrac{q_1 q_2}{F \cdot r^2} = \dfrac{C^2}{N\ m^2} = N^{-1}\ C^2\ m^{-2}$

$$[\varepsilon_0] = \frac{[q_1]\ [q_2]}{[F]\ [r]^2} = \frac{(A^1T^1)\ (A^1T^1)}{(M^1\ L^1\ T^{-2})(L^1)^2} = M^{-1}\ L^{-3}\ T^4\ A^2$$

7. $[c] = [L\ T^{-1}] = 3 \times 10^8\ m\ s^{-1}$

$[g] = [L\ T^{-2}] = 10\ m\ s^{-2}$

$[P] = [M^1\ L^{-1}\ T^{-2}] = 10^5\ N\ m^{-2}$

ઉપરનાં સમીકરણોને યોગ્ય રીતે ઉકેલી M, L અને T નાં મૂલ્યો મેળવો.

8. $[c] = [t] = M^0 L^0 T^1$

હવે, $[at] = [v]$ $\therefore$ $[a] = \left[\frac{v}{t}\right] = M^0 L^1 T^{-2}$

અને $\left[\frac{b}{t + c}\right] = [v]$ $\therefore$ $[b] = [v]\ [t + c] = M^0 L^1 T^0$

9. $v \propto kg^a h^b$

$(M^0 L^1 T^{-1}) = (M^0 L^1 T^{-2})^a (M^0 L^1 T^0)^b$ પરથી

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ મળશે.

$\therefore$ $v \propto kg^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$

10. $T \propto p^a \rho^b E^c$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં બંને બાજુની ભૌતિક રાશિઓનાં પારિમાણિક સૂત્રો લખી તેમને સરખાવતાં,

$a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$ મળશે.

પ્રકરણ 3

1. $t_1 = \frac{x/3}{10} = \frac{x}{30}h,\ t_2 = \frac{x/3}{20} = \frac{x}{60}h,\ t_3 = \frac{x/3}{30} = \frac{x}{90}h$

સરેરાશ વેગ $= \frac{x}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{x}{\frac{x}{30} + \frac{x}{60} + \frac{x}{90}} = 16.36\ km\ h^{-1}$

2. પ્રથમ 5 km કાપતાં લાગતો સમય $t_1 = \frac{10}{v}h$

બીજા 20 km કાપતાં લાગતો સમય $t_2 = \frac{20}{v}h$ અને

છેલ્લા 15 km કાપતાં લાગતો સમય $t_3 = \frac{30}{v}h$ થશે.

કુલ સમય $= \frac{10}{v} + \frac{20}{v} + \frac{30}{v} = 1\ h$

પરથી $v = 60\ km\ h^{-1}$

3. વાંદરાના ઉપર તરફનાં સ્થાનાંતરને ધન અને નીચે તરફના સ્થાનાંતરને ઋણ લેતાં,

$x = 5\ m + (-3\ m) + 5\ m + (-3\ m) + 5\ m + (-3\ m) + 5\ m + (-3\ m) + 5\ m$

$= 13\ m$

જરૂરી સમય

$t = (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) + 1 = 9\ s$

$x \rightarrow t$ આલેખ જાતે કરો.

4. પ્રથમ 120 m અંતર માટે $v_0 = 0,\ x = 120\ m,\ a = 2.6\ m\ s^{-2},\ 2ax = v^2 - v_0^2$

પરથી $v = \sqrt{624}\ m\ s^{-2}$ બાકીના અંતર માટે $v_0 = \sqrt{624}\ m\ s^{-1},\ v = 12m\ s^{-1}$,

$a = -1.5\ m\ s^{-2}$ $x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ પરથી $x = 160\ m$

કાપેલ કુલ અંતર $= 120 + 160 = 280\ m$

5. $x = 16$ m, $v = 0$ અને $a = -9.8$ m s^{-2} લઈ $2ax = v^2 - v_0^2$ સમીકરણ પરથી v_0 શોધો. ધારો કે h' ઊંચાઈએ પ્રારંભિક વેગ અડધો $\left(\frac{v_0}{2}\right)$ થાય છે. હવે $x = h'$, $v = \frac{v_0}{2}$ લઈ ઉપર્યુક્ત સમીકરણથી h' શોધો.

6. ધારો કે બંને પદાર્થ ટાવરના તળિયેથી h ઊંચાઈએ અને t સમયે મળે છે. મુક્તપતન કરતા પદાર્થ માટે $v_0 = 0$, $x = (39.2 - h)$ m અને ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકેલા પદાર્થ માટે, $v_0 = 19.6$ m s^{-1}, $x = h$ m લઈ $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી t અને h મેળવો.

7. $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 + 4t^2 - 2t + 5) = 3t^2 + 8t - 2$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 8t - 2) = 6t + 8$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $t = 4$ s મૂકતાં, $v = 78$ m s^{-1} અને $a = 32$ m s^{-2}
હવે સમીકરણ $x = t^3 + 4t^2 - 2t + 5$ માં $t = 0$ અને $t = 4$ s મૂકી $x(0)$ અને $x(4)$ શોધો.
$v = 3t^2 + 8t - 2$ સમીકરણમાં $t = 0$ અને $t = 4$ s મૂકી $v(0)$ અને $v(4)$ શોધો.

હવે, $< a > = \frac{v(4) - v(0)}{4 - 0} = 20$ m s^{-2}

8. ટ્રેન A એ ટ્રેન Bની સાપેક્ષે $v_A - v_B = 30 - 10 = 20$ m s^{-1} થી ગતિ કરે છે.
હવે $2ax = v^2 - v_0^2$ માં $v = 0$, $a = -2$ m s^{-2} મૂકી x શોધો.

9. બંને કિસ્સામાં $v = v_0 + at$ નો ઉપયોગ કરતાં $a = 4$ m s^{-2} અને $v_0 = 8$ m s^{-1} મળશે.
આ મૂલ્યો $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$માં મૂકતાં સ્થાનાંતર $x = 570$ m મળશે.

10. (a) $v \rightarrow t$ આલેખથી ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ એટલે કણે કાપેલું અંતર.

$\therefore$ અંતર $= \frac{1}{2}(12)(10) = 60$ m

(b) હવે OA રેખાનો ઢાળ, 0 – 5 s ગાળા દરમિયાનનો પ્રવેગ $a = 2.4$ m s^{-2} આપશે. $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ માં $a = 2.4$ m s^{-2} મૂકી 2 s થી 5 s વચ્ચેના સમયગાળામાં કાપેલ અંતર ગણો. આ જ રીતે AB રેખાના ઢાળ પરથી પ્રવેગ $a = -2.4$ m s^{-2} મળશે. ફરીથી $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ નો ઉપયોગ કરી 5 s થી 6 s વચ્ચે કાપેલ અંતર શોધો.

11. પક્ષીનો ટ્રેનની સાપેક્ષે વેગ $\vec{v}_{BT} = 5\hat{i} - (-10\hat{i}) = 15\hat{i}$ m s^{-1} પક્ષી આ વેગથી ટ્રેનની લંબાઈ જેટલું અંતર કાપે છે. માટે, સમય $t = \frac{x}{v_{BT}} = \frac{120 \text{ m}}{15 \text{ m s}^{-1}} = 8$ s.

12. $v = 4\,t$ પરથી પ્રવેગ $a = \frac{v}{t} = 4$ m s^{-2}.

હવે $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ સમીકરણમાં $t = 2$ s ત્યાર બાદ t = 4 s મૂકી અંતરનો તફાવત

મેળવો. $x(2) = 0 + \frac{1}{2}(2)(2)^2 = 8$ m

$x(4) = 0 + \frac{1}{2}(2)(4)^2 = 32$ m

આથી $t = 2$ s થી $t = 4$ s દરમ્યાન કાપેલું અંતર = 32 m − 8 m = 24 m

બીજી રીત :

$v = 4t$

$\therefore \frac{dx}{dt} = 4t$

$\therefore dx = 4t\,dt$

$\therefore \int_0^x dx = \int_2^4 4t\,dt$

$x = 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^4 = 2(4^2 - 2^2) = 24$ m

પ્રકરણ 4

1. પરિણામી બળ માટે સૂત્ર $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$ નો ઉપયોગ કરો જ્યાં A = F, B = F અને $\theta = \theta$

2. $\vec{A} - \vec{B}$ શોધો. $\vec{A} - \vec{B}$ ના એકમ સદિશ માટે સૂત્ર $\hat{n} = \frac{\vec{A} - \vec{B}}{|\vec{A} - \vec{B}|}$ નો ઉપયોગ કરો.

3. ઉદાહરણ 13 મુજબ ગણો.

4. (a) સરેરાશ ઝડપ = $\frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} = \frac{23 \text{ km}}{\left(\frac{28}{60}\right)\text{h}}$

(b) સરેરાશ વેગનું માનાંક = $\frac{\text{સ્થાનાંતરનું મૂલ્ય}}{\text{સમય}} = \frac{10 \text{ km}}{\left(\frac{28}{60}\right)\text{h}}$

5. (a) $t = 0$, $\vec{v_0} = 10\hat{j}$ m s^{-1}, $\therefore v_{0x} = 0$ m s^{-1}, $v_{0y} = 10$ m s^{-1}

અચળ પ્રવેગ $\vec{a} = 8\hat{i} + 2\hat{j}$, $\therefore a_x = 8$ m s^{-2} અને $a_y = 2.0$ m s^{-2}

$x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, $\therefore 16 = 0 + \frac{1}{2}8t^2$, $\therefore t = 2$ *sec*

$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$, $t = 2$ *sec* મૂકતાં, $y = 24$ m

(b) $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\ t;\quad \vec{v_0} = 10\hat{j},\ \vec{a} = 8\hat{i} + 2\hat{j}$

$\therefore\ \vec{v} = 16\hat{i} + 14\hat{j};\ v_x = 16\ m\ s^{-1},\ v_y = 14\ m\ s^{-1}$

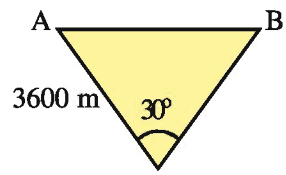
$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \Rightarrow |\ \vec{v}\ | = 21.26\ m\ s^{-1}$

6. 10 સેકન્ડમાં 3600 m ઊંચાઈએ વિમાને કાપેલ અંતર AB હોય, તો ખૂણો નાનો હોવાથી AB અંતરને 3600 m ત્રિજ્યાનો (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) ચાપ ગણતાં,

AB (ચાપ) = 3600 (ત્રિજ્યા) × ખૂણો (રેડિયનમાં)

$\therefore\ AB = 3600 \times \left(\frac{30\pi}{180}\right)$

$v = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} = \frac{AB\ m}{10\ s} \Rightarrow 60\pi\ m\ s^{-1}$



7. $\theta_0 = 30°$, R = 3 km, સૂત્ર $R = \frac{{v_0}^2 sin2\theta}{g}$ પરથી v_0 મેળવો.

જો લક્ષ્ય મહત્તમ અવધી કરતાં દૂર હોય, તો લક્ષ્ય પર ગોળી મારવાનું શક્ય બનશે નહિ.

તેથી મહત્તમ અવધિ $R_{max} = \frac{{v_0}^2}{g}$ તેના પરથી પ્રશ્નોનો જવાબ આપો.

8. $\frac{H}{R} = \frac{{v_0}^2 sin^2\theta_0}{2g} \times \frac{g}{{v_0}^2 2sin\theta_0\ cos\theta_0} = \frac{sin\theta_0}{4cos\theta_0}$

$\therefore\ tan\ \theta_0 = \frac{4H}{R}\ \therefore\ \theta_0 = tan^{-1}\frac{4H}{R}$

9. $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow |\vec{C}| = C = |\vec{A} + \vec{B}|$

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\theta}$ માં R = C

$\therefore\ C^2 = A^2 + B^2 + 2ABcos\theta$ (1)

હવે A + B = C આપેલ છે.

$\therefore\ C^2 = (A + B)^2\ \therefore\ C^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ (2)

(1) અને (2) પરથી 2AB = 2AB$cos\theta$

$\therefore\ cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0°$

$\vec{A}$ અને $\vec{B}$ ની દિશા સમાન છે. (સમાંતર સદિશો છે.)

અહીં, A + B = C હોવાથી આ ત્રણેય સદિશો એક જ દિશામાં હશે. આથી θ = 0 થશે.

10. $\vec{A}_1 = \vec{A}$ની દિશા ઉલટાવતાં $\vec{A}_2 = -\vec{A}$

$\therefore\ \Delta\vec{A} = \vec{A}_2 - \vec{A}_1 = -\vec{A} - \vec{A} = -2\vec{A}$

$|\ \Delta\vec{A}\ | = |\ -2\vec{A}\ | = 2A$

$|\ \Delta\vec{A}\ |$ એટલે સદિશ $\vec{A}$ના મૂલ્યનો ફેરફાર સદિશની દિશા ઉલટાવવાથી સદિશનું માનાંક બદલાતું નથી.

$\therefore$ માનાંકમાં ફેરફાર $\Delta|\vec{A}| = |\vec{A}_2| - |\vec{A}_1| = A - A = 0$

$\therefore \Delta|\vec{A}| = 0$

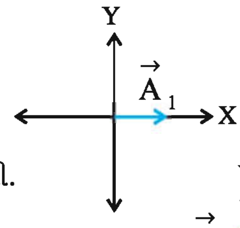
11. ધારો કે, $\vec{A}_1 = A$ અને $\vec{A}_2 = 2\vec{A}$

$\vec{A}_1$ ના X ઘટકો અને Y ઘટકો, $A_{1x} = A\cos\theta$ અને $A_{1y} = A\sin\theta$

$\vec{A}_2$ ના X અને Y ઘટકો, $A_{2x} = 2A\cos\theta$ અને $A_{2y} = 2A\sin\theta$

$\therefore A_{2x} = 2A_{1x}$ અને $A_{2y} = 2A_{1y}$

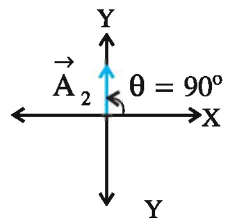
12. ધારો કે આપેલ સદિશ $\vec{A}_1$ છે.



$\therefore A_{1x} = \cos 0^0 = A_1,\ A_{1y} = A_1 \sin 0^0 = 0$

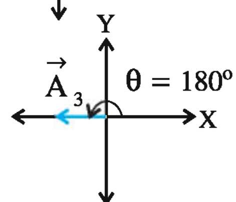
સદિશની માત્ર દિશા બદલતાં માનાંક બદલાતું નથી.

(i) $\vec{A}_1$ ને 90^o ભ્રમણ આપતાં $\vec{A}_2$ બને છે.



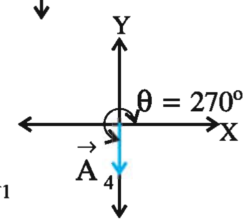
$\therefore A_{2x} = A_1\cos 90^o = 0,\ A_{2y} = A_1 \sin 90^o = A_1$

(ii) $\vec{A}_1$ ને 180^o ભ્રમણ આપતાં $\vec{A}_3$ બને છે.



$A_{3x} = A_1\cos(180^o) = -A_1,\ A_{3y} = A_1\sin(180^o) = 0$

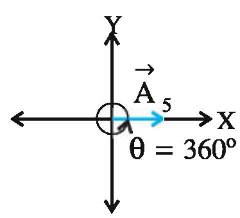
(iii) $\vec{A}_1$ ને 270^o નું ભ્રમણ આપતાં $\vec{A}_4$ બને છે.



$A_{4x} = A_1\cos(270^o) = A_1\cos(180^o + 90^o) = A_1\cos 90^o = 0$

$A_{4y} = A_1\sin(270^o) = A_1\sin(180^o + 90^o) = A_1\sin 90^o = -A_1$

(iv) $\vec{A}_1$ ને 360^o ને ભ્રમણ આપતાં $\vec{A}_5$ બને છે

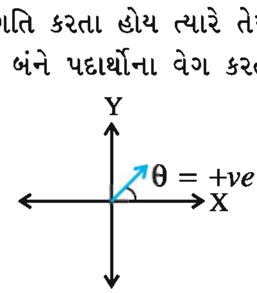


જે સદિશ $\vec{A}_1$ જ છે.

$\therefore A_{5x} = A_{1x} = A_1;\ A_{5y} = A_{1y} = 0$

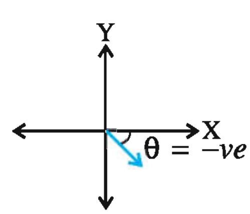
13. હા. જ્યારે બે પદાર્થો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા હોય ત્યારે તેમનો સાપેક્ષ વેગ બંને પદાર્થના વેગોના સરવાળા જેટલો થાય જે બંને પદાર્થોના વેગ કરતાં વધુ હોય.

14. $|\hat{i} + \hat{j}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$



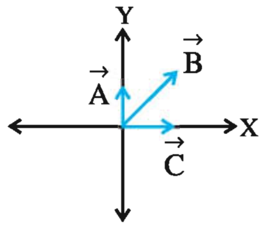
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\theta = 45^o$

$|\hat{i} + \hat{j}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$



$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1}\theta = -45^o$

15. A = 100 એકમ, B = 200 એકમ, C = 150 એકમ



X = ઘટકો	**Y = ઘટકો**
$A_x = A\cos 90^\circ = 0$ એકમ	$A_y = A\sin 90^\circ = 100$ એકમ
$B_x = B\cos 60^\circ = 100$ એકમ	$B_y = B\sin 60^\circ = 173$ એકમ
$C_x = C\cos 0^\circ = 150$ એકમ	$C_y = C\sin 0^\circ = 0$ એકમ

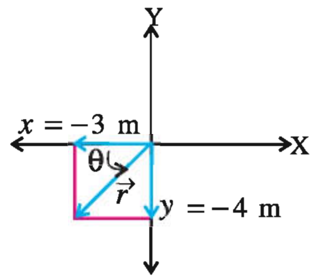
16. સ્થાન સદિશ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$x = -3, \quad y = -4$

$|\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ m}$

$\tan\theta = \frac{4}{3} = 1.333$

$\theta = \tan^{-1} 1.333$



17. અક્ષોની સ્થિતિ બદલવાથી સદિશનું મૂલ્ય અને દિશા બદલાતા નથી. અલબત્ત, અક્ષોની દિશામાંના ઘટકોના મૂલ્ય બદલાઈ જાય છે.

$\therefore$ $\vec{A} + \vec{B}$ અને $\vec{A} - \vec{B}$ અક્ષોની પસંદગીથી સ્વતંત્ર છે. જ્યારે $A_x + B_y$ નું મૂલ્ય અક્ષોની પસંદગી પર આધાર રાખશે.

18. $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}| \Rightarrow |A + B|^2 = |A - B|^2$

$\therefore A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$\therefore 2AB\cos\theta = -2AB\cos\theta$

$\therefore 4AB\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = 90^\circ$

19. $\vec{r}$ ના સૂત્રમાં $t = 0$ મૂકતાં શૂન્ય સમયે સ્થાન સદિશ $\vec{r}_0$ મેળવો અને આ જ સૂત્રમાં

$t = 0$ મૂકી 10 સેકન્ડના અંતે સ્થાન સદિશ $\vec{r}_{10}$ મેળવો.

$\therefore$ 10 સેકન્ડમાં સ્થાનાંતર $\Delta\vec{r} = \vec{r}_{10} - \vec{r}_0$ શોધો.

20. $\vec{A}$ નો સદિશ $\hat{i} + \hat{j}$ ની દિશામાંનો ઘટક એટલે જો આ બે સદિશ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તો, A $\cos\theta$ થાય. જ્યાં,

$$A\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot (\hat{i} + \hat{j})}{|\hat{i} + \hat{j}|}$$

21. અશૂન્ય સદિશની લંબ દિશાનો ઘટક શૂન્ય થાય માટે અશૂન્ય સદિશને શૂન્ય ઘટક હોઈ શકે. જો સદિશને અશૂન્ય ઘટક હોય તો સદિશને કંઈક માનાંક છે. કારણ કે સદિશનું માનાંક સદિશના ઘટકના મૂલ્ય કરતાં હંમેશાં વધારે હોય. તેથી અશૂન્ય ઘટક ધરાવતો સદિશ શૂન્ય સદિશ ન હોઈ શકે.

22. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

$\therefore |\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{C}|^2$

$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

વળી, $A^2 + B^2 = C^2$

$\therefore 2AB\cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = 90^\circ$

આથી સદિશો $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ પરસ્પર લંબ છે.

23. અહીં બંને પદાર્થોની અવધિ સમાન હોવાથી $\theta_{01} + \theta_{02} = \frac{\pi}{2}$ થશે.

ઉડ્ડયન સમય $t = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$

$$t_1 \times t_2 = \frac{2v_{01}\sin\theta_{01}}{g} \times \frac{2v_{01}\sin\theta_{02}}{g}$$

પરંતુ $\theta_{02} = \frac{\pi}{2} - \theta_{01}$

$$\therefore t_1 t_2 = \frac{2v_{01}^2}{g^2} 2\sin\theta_{01} \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_{01})$$

$$= \frac{2v_{01}^2}{g^2} 2\sin\theta_{01}\cos\theta_{01}$$

$$= \frac{2v_{01}^2}{g^2} \sin 2\theta_{01} = \frac{2}{g}R$$

પ્રકરણ 5

1. બળનો આઘાત $\vec{F} = \Delta t = m\vec{\Delta v}$ = વેગમાનનો ફેરફાર $\vec{\Delta p}$

$\vec{\Delta p_1} = m_1\vec{v_1'} - m_1\vec{v_1}$ $\qquad m_1\vec{v_1} = (0.08)(5)\hat{i}$ kg m/s

$\vec{\Delta p_2} = m_2\vec{v_2'} - m_2\vec{v_2}$ $\qquad m_2\vec{v_2} = (0.08)(5)(-\hat{i})$ kg m/s

$m_1\vec{v_1'} = (0.08)(5)(-\hat{i})$ kg m/s

$m_2\vec{v_2'} = (0.08)(5)(\hat{i})$ kg m/s હવે આગળ વધો.

2. સમગ્ર તંત્રનો પ્રવેગ $a = \frac{F}{(m_1 + m_2)}$

$F = 2N$, $m_1 = 6$ kg, $m_2 = 2$ kg

2 kg દળના પદાર્થ પર બળ = $(m_2)\ (a)$

3. સમગ્ર તંત્રનો પ્રવેગ $a = \frac{F}{(m_1 + m_2 + m_3)}$

$F = 12N$, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg

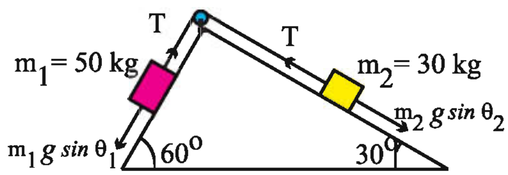
2 kg દળના બ્લૉક પર પ્રથમ બ્લૉક વડે લાગતું સંપર્ક બળ

$F_2 = (m_2 + m_3)a$ અથવા $F_2 = F - m_1 a$

3 kg ના બ્લૉક પરનું સંપર્ક બળ $F_3 = (m_3)a$ અથવા $F_3 = F - (m_1 + m_2)a$

4. $m_1 g \sin 60^\circ$ અને $m_2 g \sin 30^\circ$ શોધો.

તે બેમાંથી મોટું મૂલ્ય જે હશે તે ગતિની દિશા નક્કી કરશે.



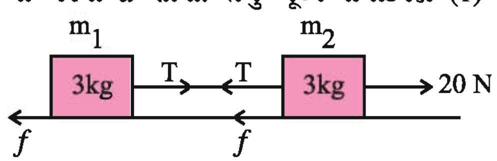
$\therefore\ m_1 g\sin\theta_1 - T = m_1 a$ (1)

અને $T - m_2 g\sin\theta_2 = m_2 a$ (2)

સરવાળો કરતાં, $m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2 = (m_1 + m_2)a$

આ પરથી a શોધો. તેનું મૂલ્ય સમીકરણ (1) અથવા (2) માં મૂકી T શોધો.

5.



$F = 20$ N, $m_1 = m_2 = 3$ kg, $a = 0.5$ m/s^2

FDB નો વિચાર કરો.

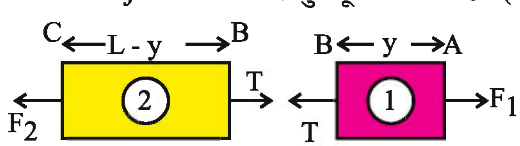
m_1 દળના બ્લૉક માટે, $T - f = m_1 a$ (1)

m_2 દળના બ્લૉક માટે, $F - T - f = m_2 a$ (2)

સરવાળો કરતાં, $F - 2f = (m_1 + m_2)a$

આ પરથી f શોધો અને તેનું મૂલ્ય સમીકરણ (1) અથવા (2) માં મૂકી T શોધો.

6.



સળિયાનું કુલ દળ = M

એકમ લંબાઈ દીઠ દળ $\lambda = \frac{M}{L}$

સળિયાના ભાગ 1 નું દળ, $m_1 = y\lambda = \frac{yM}{L}$

અને સળિયાના ભાગ 2 નું દળ, $m_2 = (L - y)\lambda = (L - y)\frac{M}{L}$

ભાગ 1 માટે, FBD પરથી, $F_1 - T = m_1 a = \left(\frac{yM}{L}\right)a$

ભાગ 2 માટે, FBD પરથી, $T - F_2 = m_2a = \left[\left(\frac{M}{L}\right)(L-y)\right]a$

સરવાળો કરતાં, $F_1 - F_2 = Ma$

$\therefore\ a = \left(\frac{F_1 - F_2}{M}\right)$

$T - F_2 = m_2a$ પરથી,

$T = F_2 + m_2a = F_2 + \left(\frac{M}{L}\right)(L-y)\left(\frac{F_1 - F_2}{M}\right)$ હવે આગળ વધો.

7. (i) 2 s અગાઉના સૂક્ષ્મ સમયગાળા માટે x અચળ છે. $\therefore\ \vec{v_1} = 0$ તે જ પ્રમાણે

2 s પછીના સૂક્ષ્મ સમયગાળા માટે પણ x અચળ છે. $\therefore\ \vec{v_2} = 0$

$\therefore$ બળનો આઘાત $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = 0$

(ii) અહીં, $\vec{v_1} = \frac{20}{2}\hat{i} = 10\hat{i}$ m/s

$\vec{v_2} = \frac{-20}{4}\hat{i} = -5\hat{i}$ m/s

$\therefore$ બળનો આઘાત $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$

$= (2)(-5\hat{i} - 10\hat{i})$

$= -30\hat{i}$ N s

$\therefore\ |\vec{F}\Delta t| = 30$ N s

8. પરસ્પર ગુરુત્વબળનાં સમાન માન = F છે.

$\therefore\ F = m_1a_1 = m_2a_2$ (માનમાં)

બંને માટે $v_0 = 0$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1t^2}{\frac{1}{2}a_2t^2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$

9. (i) પ્રથમ અડધી લંબાઈ (d) માટે $v_0 = 0$,

પ્રવેગ $a = g\sin\theta\ \ \therefore\ v^2 - 0 = 2(g\sin\theta)d$ (1)

(ii) બીજી અડધી લંબાઈ (d) માટે $mg\sin\theta$ કરતાં ઘર્ષણબળ f મોટું હશે. તેથી ઢાળ પર નીચે તરફની ગતિ પ્રતિપ્રવેગી ગતિ હશે. આ ઘર્ષણબળ $f = \mu N = \mu mg\cos\theta$

$\therefore$ પ્રતિપ્રવેગનું મૂલ્ય $a' = \frac{f - mg\sin\theta}{m}$

$= \frac{\mu mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m}$

$= g(\mu\cos\theta - \sin\theta)$

નીચે તરફની આ ગતિ માટે,

$0 - v^2 = 2(-a')d$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$-2gd\sin\theta = 2[-g(\mu\cos\theta - \sin\theta)d]$

જે $\mu = 2\tan\theta$ આપશે.

પ્રકરણ 6

1. આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિસ્થિતિ માટે યાંત્રિક-ઊર્જાનું મૂલ્ય મેળવો. 2 kg વાળો બ્લૉક સંદર્ભ-સપાટીની સંપર્કમાં આવે તે સમયની આકૃતિ વિચારો. આ પરિસ્થિતિ માટે પણ યાંત્રિક-ઊર્જાનું મૂલ્ય મેળવો. યાંત્રિક-ઊર્જાનું શરૂઆતનું અને અંતિમ મૂલ્ય સરખાવો.

2. વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$m_1\vec{v_1} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}$$

વળી, $m_1 = m_2 = m$

$$\therefore \vec{v_1} = \vec{v_1'} + \vec{v_2'}$$

$$\therefore v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1' v_2' \cos\theta$$

3. વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ વાપરો.

4. $x = t^2 - 6t + 9$ $\quad v = \frac{dx}{dt}$ શોધો.

$v = 0$ મેળવી x મેળવો.

$x - x_0$ સ્થાનાંતર મળે.

પ્રવેગ $a = \frac{dv}{dt}$ મેળવો, જે શૂન્ય છે.

$\therefore$ બળ $= 0$ $\quad \therefore$ કાર્ય $= ?$

5. યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણનો નિયમ વાપરી વેગ v મેળવો. સમય માટે સપાટીને સમાંતર પ્રવેગ $a = g\sin\theta$ થાય. હવે ગતિનાં સૂત્રો વાપરો.

6. શરૂઆતમાં તંત્ર સ્થિર હોવાથી શરૂઆતનું વેગમાન શૂન્ય છે.

$\therefore MV + mv = 0 \therefore |MV| = |-mv| = P$

વળી, યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2m}$$

હવે આગળ વધો.

7. A થી B ગતિ માટે સ્થિતિ-ઊર્જાના ગતિ-ઊર્જામાં રૂપાંતરનો ઉપયોગ કરો અને Aનો વેગ મેળવો. A અને Bની અથડામણ માટે વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ વાપરી Bનો વેગ મેળવો. અંતિમ સ્થાન માટે ફરીથી ગતિ-ઊર્જાનું સ્થિતિ-ઊર્જામાં રૂપાંતર વિચારો.

8. A આગળ સ્થિતિ-ઊર્જા $= mgr$

આગળ A થી B ની ગતિ દરમિયાન

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\pi}{4} \times r \times R$$

તે જ રીતે B થી C માટે વિચારો.

9. શરૂઆતની ગતિ-ઊર્જા ધારો કે $\frac{1}{2}mv_0^2$

વેગ અડધો થાય, ત્યારે ગતિ-ઊર્જા $\frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{4}$ થાય.

$\therefore \ \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{4} - \frac{1}{2}mv_0^2 = F \times 6$

$\therefore \ F = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) \times \frac{1}{6}$

હવે આગળ વધો.

10. શરૂઆતનો અને અંતિમ વેગ સમાન હોવાથી $K - K_0 = W = 0$
વળી, W = ઘર્ષણ બળ વિરુદ્ધ થતું કાર્ય + ગુરુત્વાકર્ષણબળ દ્વારા થતું કાર્ય
હવે આગળ વધો.

પ્રકરણ 7

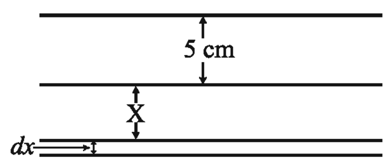
1. બંને માટે ઉષ્માપ્રવાહનું સમીકરણ લખીને સરખાવો.

2. પ્રથમ દરેક પરિમાણ SI પદ્ધતિમાં લખો.

(i) $H = kA\ \frac{T_2 - T_1}{L}$

(ii) ધાતુ અને ઈંટોનો સ્તર સંયુક્ત ચોસલું બનાવે.
સંયુક્ત ચોસલાનો ઉષ્મીય અવરોધ શ્રેણીજોડાણના સૂત્રથી મેળવી ઉષ્માપ્રવાહ શોધો.

3. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ dx જાડાઈનું અને A ક્ષેત્રફળવાળું સ્તર વિચારો. આ સ્તર બનવા માટે લઈ લેવી પડતી ઉષ્મા



$dQ = A\ dx\ \rho L'$

જ્યાં ρ બરફની ઘનતા અને L′ પાણીની ગલનગુપ્ત ઉષ્મા છે.

આટલી ઉષ્મા $5 + x$ cm જાડા સ્તરમાંથી પસાર થતાં dt સમય લાગે, તો

$dQ = kA\ \frac{\Delta T}{5 + x}\ dt$

સમીકરણો સરખાવી જરૂરી સંકલન કરી જવાબ મેળવો.

4. $H = \frac{dQ}{dt} = \sigma e A T^4$ માં $A = 1\ m^2$, $\frac{dQ}{dt} = 6.3 \times 10^7 W$

$e = 1$ લો. σની કિંમત મૂકો.

5. $H = \sigma e A\ (T^4 - T_s^4)$નો ઉપયોગ કરો.

6. સંયુક્ત ચોસલા માટે શ્રેણી અને સમાંતરના નિયમો વાપરી અસરકારક અવરોધ શોધો, જેને

$R = L'/A'k'$ સાથે સરખાવો. જ્યાં $L' = 4x$, $A' = 2x^2$

7. $K = a + bT$

$\therefore$ K અને T વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે.

$\therefore$ T ના સ્થાને T ના મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો એટલે T_1 અને T_2 ની સરેરાશ કિંમત એટલે કે $\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)$વાપરી શકાય.

$\therefore \ K = a + b\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)$

સૂત્રમાં K ની કિંમત મૂકો.

નોંધ : T ના સ્થાને સરેરાશ મૂલ્યનો ઉપયોગ ન કરવો હોય તો સંકલનની મદદથી આ જ પરિણામ મળે.

8. પૃથ્વી પરની એકમસપાટીને પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેના સરેરાશ અંતર R_0 ત્રિજ્યાવાળા ગોળાના ભાગ તરીકે વિચારો.

હવે $S = \frac{H}{4\pi R_0^2}$ તથા $H = \sigma\ 4\pi\ R_s^2\ T^4$

પ્રકરણ 8

1. આદર્શ વાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ,
$PV = \mu RT$
અચળ તાપમાને
$P_1V_1 = P_2V_2 = \mu RT$
$\therefore\ P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2}$

2. $PV = k_BNT$ પરથી
$\therefore\ N = \frac{PV}{k_BT}$

3. $< E > = \frac{3}{2}\ m < v^2 > = \frac{3}{2}\ k_BT$

4. $\frac{1}{2} m < v_{rms}^2 > = \frac{3}{2}\ k_BT$

$\therefore\ < v_{rms}^2 > = \frac{3k_BT}{m}$

પરંતુ $(v_{rms})_{O_2} = (v_{rms})_{H_2}$

$\therefore\ \frac{3k_BT_{O_2}}{m_{O_2}} = \frac{3k_BT_{H_2}}{m_{H_2}}$

$\therefore\ T_{O_2} = \left(T_{H_2} \times m_{O_2}\right) / m_{H_2}$

5. $PV = \mu RT = \frac{M}{M_0}\ RT$

$\therefore\ M = \frac{M_0PV}{RT}$

$\therefore\ \Delta M = M_1 - M_2 = \frac{M_0VP_1}{RT_1} - \frac{M_0VP_2}{RT_2}$

$= \frac{M_0V}{R}\left[\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right]$

6. $(v_{rms})_2 = 2(v_{rms})_1$

$\frac{1}{2}\ m < v_{rms}^2 >_1 = \frac{3}{2}\ k_BT_1$

$$\frac{1}{2}\ m < v_{rms}{}^{2} >_2 = \frac{3}{2}k_B T_2$$

$$\therefore \frac{< v_{rms}{}^{2} >_2}{< v_{rms}{}^{2} >_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\therefore T_2 = \frac{< v_{rms}{}^{2} >_2 \times T_1}{< v_{rms}{}^{2} >_1}$$

7. $$\frac{1}{2}\ m_{H_2} < v^2 >_{H_2} = \frac{3}{2}\ k_B T$$

$$\frac{1}{2}\ m_{O_2} < v^2 >_{O_2} = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\therefore \frac{m_{H_2} < v^2 >_{H_2}}{m_{O_2} < v^2 >_{O_2}} = 1$$

$$\therefore < v_{rms}{}^{2} >_{H_2} = \frac{m_{O_2} < v^2 >_{O_2}}{m_{H_2}}$$

$$\therefore (v_{rms})_{H_2} = \sqrt{\frac{m_{O_2}}{m_{H_2}}}\ (v_{rms})_{O_2}$$

8. $$v_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

9. $$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$$

પણ $P = nk_B T$

$$\therefore n = \frac{P}{k_B T}$$

$$\therefore \bar{l} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}P\pi d^2}$$

10. $$\bar{l}_1 = \frac{k_B T_1}{\sqrt{2}P_1 \pi d^2}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{k_B T_2}{\sqrt{2}P_2 \pi d^2}$$

11. $$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$$

1 સેકન્ડમાં થતી અથડામણ = $n\pi d^2 \bar{v} t$

•

પરિશિષ્ટ

પરિશિષ્ટ 1

ગ્રીક મૂળાક્ષરો (THE GREEK ALPHABET)

Alpha	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Y	υ
Epsilon	E	ε	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ς	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

પરિશિષ્ટ 2

કેટલાંક અગત્યનાં અચળાંકો (SOME IMPORTANT CONSTANTS)

નામ	સંજ્ઞા	કિંમત
શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર	e	1.602×10^{-19} C
ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક	G	6.673×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
પ્લાન્કનો અચળાંક	h	6.626×10^{-34} J s
બોલ્ટ્ઝ મેનનો અચળાંક	k	1.381×10^{-23} J K^{-1}
ઍવોગેડ્રોનો અંક	N_A	6.022×10^{23} mol^{-1}
સાર્વત્રિક વાયુ અચળાંક	R	8.314 J mol^{-1} K^{-1}
ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ	m_e	9.110×10^{-31} kg
ન્યૂટ્રૉનનું દળ	m_n	1.675×10^{-27} kg
પ્રોટોનનું દળ	m_p	1.673×10^{-27} kg
ઇલેક્ટ્રૉન માટે વિદ્યુતભાર અને દળનો ગુણોત્તર	e/m_e	1.759×10^{11} C/kg
ફેરડેનો અચળાંક	F	9.648×10^{4} C/mol
રિડ્બર્ગનો અચળાંક	R	1.097×10^{7} m^{-1}
બ્હોર ત્રિજ્યા	a_0	5.292×10^{-11} m
સ્ટિફન-બોલ્ટ્ઝ મેનનો અચળાંક	σ	5.670×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
વિનનો અચળાંક	b	2.898×10^{-3} m K
શૂન્યાવકાશનો પરાવિદ્યુતાંક (પરમીટિવિટી)	ε_0 $1/4\pi\varepsilon_0$	8.854×10^{-12} C^{2} N^{-1} m^{-2} 8.987×10^{9} N m^{2} C^{-2}
શૂન્યાવકાશની પારગમ્યતા (પરમીબીઆલિટી)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} $\cong 1.257 \times 10^{-6}$ Wb A^{-1}m^{-1}

પરિશિષ્ટ 3

ત્રિકોણમિતિ (TRIGONOMETRY)

જો A, B અને C કાટકોણ ત્રિકોણના ખૂણાઓ હોય અને અનુક્રમે *a*, *b* અને *c* તેમની વિરુદ્ધ બાજુઓ હોય, તો ત્રિકોણમિતીય વિધેયો નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

(i) $sin\theta = \frac{\text{સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{b}{c} = cos\phi$

(ii) $cos\theta = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{a}{c} = sin\phi$

(iii) $tan\theta = \frac{\text{સામેની બાજુ}}{\text{પાસેની બાજુ}}. = \frac{b}{a} = cot\phi$

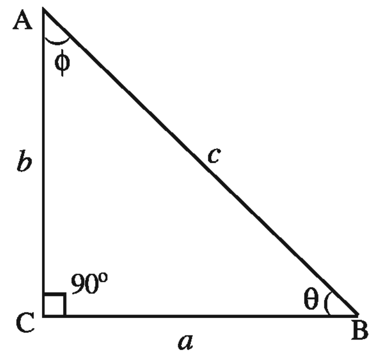
(iv) $cot\theta = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{સામેની બાજુ}} = \frac{a}{b}$

(v) $sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{c}{a}$

(vi) $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{c}{b}$

(vii) $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

(viii) $cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$



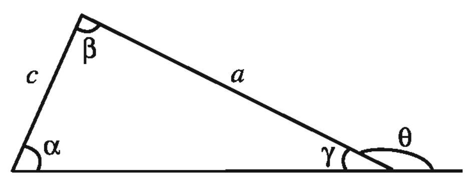
$\phi = 90^{o} - \theta$

SINE અને COSINEના નિયમો

(i) $\frac{sin\ \alpha}{a} = \frac{sin\ \beta}{b} = \frac{sin\ \gamma}{c}$

(ii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ abcos\ \gamma$

(iii) બહિર્કોણ $\theta = \alpha + \beta$



ત્રિકોણમિતીય સૂત્રો (TRIGONOMETRIC IDENTITIES)

(i) $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

(ii) $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

(iii) $1 + cot^2\theta = cosec^2\theta$

(iv) $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

(v) $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

(vi) $sin2\theta = 2sin\theta\ cos\theta$

(vii) $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta$

(viii) $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$

(ix) $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

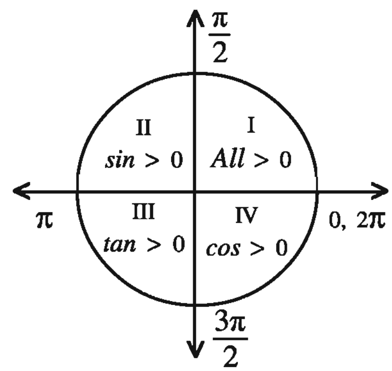
(x) $sin\alpha \pm sin\beta = 2sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$

(xi) $cos\alpha + cos\beta = 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

(xii) $cos\alpha - cos\beta = -2sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

જુદાં-જુદાં ચરણોમાં $sin\theta$, $cos\theta$ અને $tan\theta$ ની સંજ્ઞાઓ

ચરણ	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$
I	+	+	+
II	+	–	–
III	–	–	+
IV	–	+	–



$sin(-\theta) = -sin\theta$

$cos(-\theta) = cos\theta$

$tan(-\theta) = -tan\theta$

$sin(90^\circ - \theta) = cos\theta$

$cos(90^\circ - \theta) = sin\theta$

$tan(90^\circ - \theta) = cot\theta$

$sin(90^\circ + \theta) = cos\theta$

$cos(90^\circ + \theta) = -sin\theta$

$tan(90^\circ + \theta) = -cot\theta$

ખાસ ખૂણાઓ માટે sine અને cosineનાં મૂલ્યો

વિધેય	0° 0 rad	30° $\frac{\pi}{6}$ rad	45° $\frac{\pi}{4}$ rad	60° $\frac{\pi}{3}$ rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad	180° π rad	270° $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° 2π rad
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ :

જો $ax^2 + bx + c = 0$, હોય તો,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

લોગ (Log) નાં સૂત્રો :

1. જો $log\ a = x$, તો $a = 10^x$
2. $log(ab) = log(a) + log(b)$
3. $log\left(\frac{a}{b}\right) = log(a) - log(b)$
4. $log(a^n) = n\ log\ a$
5. $log_a a = 1$
6. $ln\ a = log_e a = 2.303\ log_{10} a$

અગત્યનાં વિસ્તરણો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણ :

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \pm nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \pm \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$

   જ્યારે $x < < 1$, હોય ત્યારે $e^x = 1 + x$

3. $ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots\ldots(|x| < 1)$

   જ્યારે $x << 1$, હોય, ત્યારે $ln(1 \pm x) = \pm x$

4. ત્રિકોણમિતીય વિસ્તરણો (θ રેડિયનમાં છે.)

   (i) $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\ldots$

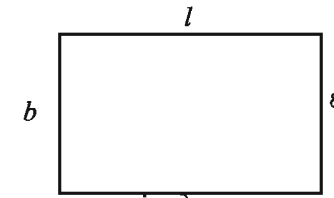
   (ii) $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\ldots$

   (iii) $\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \ldots\ldots$

   જો θ ખૂબ જ નાનો હોય, તો $sin\theta \approx \theta$; $cos\theta \approx 1$ and $tan\theta \approx \theta$ rad

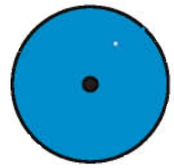
•

ભૌમિતિક સૂત્રો



લંબચોરસ

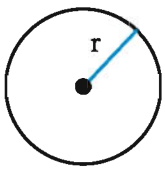
ક્ષેત્રફળ $= lb$



ગોળો

પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

કદ $= \frac{4}{3}\pi r^2$



વર્તુળ

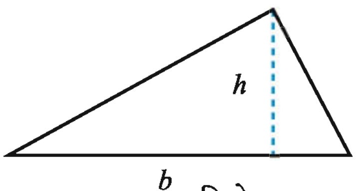
ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

પરિઘ $= 2\pi r$

નળાકાર

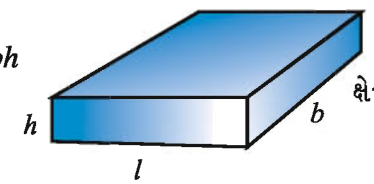
વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rl$

કદ $= \pi r^2 l$



ત્રિકોણ

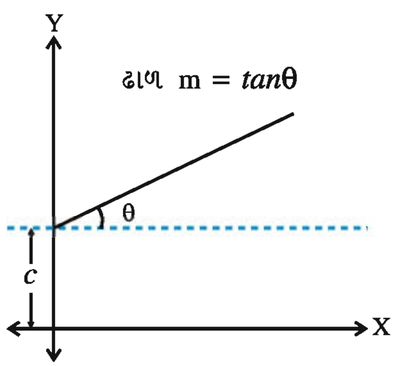
ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}bh$



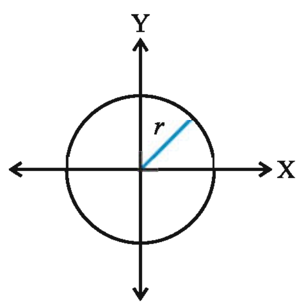
લંબઘન

ક્ષેત્રફળ $= 2(lb + lh + bh)$

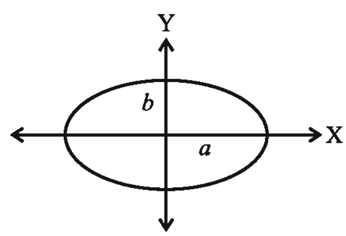
કદ $= lbh$



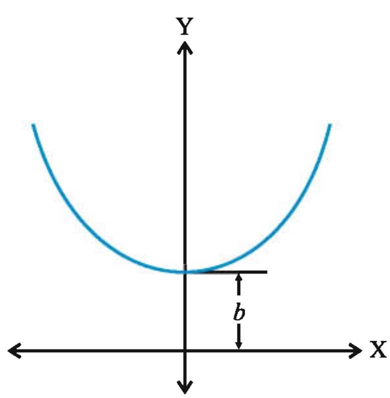
સુરેખા : $y = mx + c$



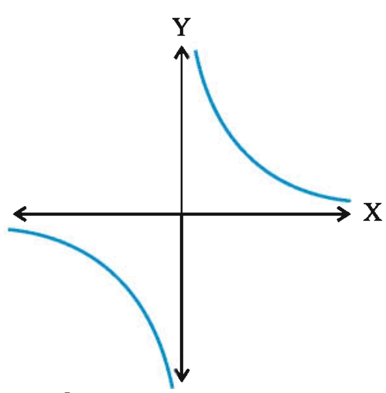
વર્તુળ : $x^2 + y^2 = r^2$



ઉપવલય : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



પરવલય : $y = ax^2 + b$



અતિવલય : $xy =$ અચળ

સંદર્ભ ગ્રંથો (REFERENCE BOOKS)

1. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, GSBST
2. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, NCERT
3. Fundamentals of PHYSICS by Halliday, Resnick and Walker
4. Universty Physics by Young, Zemansky and sears
5. CONCEPTS OF PHYSICS by H. C. Verma
6. Advanced PHYSICS by Tom Duncan
7. Advanced LEVEL PHYSICS by Nelkon and Parker
8. FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS by Alonso and Finn
9. COLLEGE PHYSICS by Weber, Manning, White and Weygand
10. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Fishbane, Gasiorowicz, Thornton
11. PHYSICS by Cutnell and Johnson
12. COLLEGE PHYSICS by Serway and Faughn
13. UNIVERSITY PHYSICS by Ronald Reese
14. CONCEPTUAL PHYSICS by Hewitt
15. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Giancoli
16. Heat Transfer by Holman

•

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5566	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6345	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7769	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9843	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1289	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6715	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	12	14	16
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

NATURAL SINES

Degree	0' 0.0°	6' 0.1°	12' 0.2°	18' 0.3°	24' 0.4°	30' 0.5°	36' 0.6°	42' 0.7°	48' 0.8°	54' 0.9°	Mean Deifferences 1'	2'	3'	4'	5'
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	.0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	.0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	.1045	1063	1080	1197	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	.1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	.1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	.1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	.1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	.2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	.2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	.2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	.2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	.2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	.3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	.3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	.3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	.3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	.3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	.4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	.4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	.4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	.4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	.4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	.5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	.5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	.5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	.5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	.5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	.6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	.6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	.6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	.6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	.6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	.6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	.6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degree	0' 0.0°	6' 0.1°	12' 0.2°	18' 0.3°	24' 0.4°	30' 0.5°	36' 0.6°	42' 0.7°	48' 0.8°	54' 0.9°	Mean Deifferences 1'	2'	3'	4'	5'
45	.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	.9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	0	0

NATURAL TANGENTS

Degree	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	Main Deifferences				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	.0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	.0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	.1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	.1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	.1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	.1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	.1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	.2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	.2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	.2493	2512	2530	2549	2568	2686	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	.2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	.3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	.3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	.3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	.3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	.4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	.4245	4265	8286	4307	4327	4748	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	.4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	.4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	.5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	.5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	.5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	.6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	.6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	.6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	.7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	.7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	.7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	.8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	.8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	.9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	.9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degree	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	Main Deifferences				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3.4824	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3465	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7.0264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4997	5958	6996	8062	9158	8.0285					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9.0579	9.2052	9.3572	Mean Differences no longer sufficiently accurate				
84	9.514	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					