પ્રકરણ **2**

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો

❖ ***Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things. — FELIX KLEIN*** ❖

2.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 1માં આપણે શીખી ગયાં કે જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો fનું પ્રતિવિધેય મળે અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય છે. વ્યાપ્ત, એક-એક કે બંને પૈકી કોઈ પણ ન હોય એવાં ઘણાં વિધેય હોય છે અને આથી આપણે તેમના પ્રતિવિધેયની ચર્ચા ન કરી શકીએ. ધોરણ 11માં આપણે અભ્યાસ કરી ગયાં કે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો તેમના પ્રદેશ અને વિસ્તારમાં એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી તથા આથી તેમના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ નથી. આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના પ્રદેશ અને વિસ્તાર પર તેમનાં પ્રતિવિધેયો શક્ય બને તે રીતે અંકુશ મૂકીશું. આલેખ દ્વારા તેમની રજૂઆતથી તેમની વર્તણૂકનું અવલોકન કરીશું. તદુપરાંત તેમના કેટલાંક પ્રાથમિક ગુણધર્મોની પણ ચર્ચા કરીશું.

ARYABHATTA
(C.E. 476 - C.E. 550)

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, કલનશાસ્ત્રમાં અગત્યનો ભાગ ભજવે છે, કારણ કે તેની મદદથી ઘણાબધા સંકલિત વ્યાખ્યાયિત થાય છે. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની સંકલ્પનાનો વિજ્ઞાન અને ઈજનેરી શાખામાં પણ ઉપયોગ થાય છે.

2.2 પાયાની સંકલ્પના

ધોરણ 11માં આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો :

sine વિધેય અર્થાત્ $sin : R \rightarrow [-1, 1]$.

cosine વિધેય અર્થાત્ $cos : R \rightarrow [-1, 1]$.

tangent વિધેય અર્થાત્ $tan : R - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \rightarrow R$.

cotangent વિધેય અર્થાત્ $cot : R - \{x : x = n\pi, n \in Z\} \rightarrow R$.

secant વિધેય અર્થાત્ $sec : R - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \rightarrow R - (-1, 1)$.

cosecant વિધેય અર્થાત્ $cosec : R - \{x : x = n\pi, n \in Z\} \rightarrow R - (-1, 1)$.

આપણે પ્રકરણ 1 માં એ પણ શીખી ગયાં કે જો વિધેય $f : X \to Y$ માટે $f(x) = y$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો એક અને માત્ર એક વિધેય $g : Y \to X$, $g(y) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. અહીં $x \in X$ અને $y = f(x)$, $y \in Y$. અત્રે g નો પ્રદેશ $=$ fનો વિસ્તાર અને g નો વિસ્તાર $=$ fનો પ્રદેશ. વિધેય g એ fનું પ્રતિવિધેય કહેવાય અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય. વળી, g પણ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે અને gનું પ્રતિવિધેય f છે. આમ, $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$.

વળી, $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

અને $(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

sin વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. જો પ્રદેશ પર આપણે મર્યાદા મૂકી મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈએ, તો તે એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *sine* વિધેય મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ વગેરેમાં એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. આથી, આપણે આ પ્રત્યેક અંતરાલ માટે *sine* વિધેયની શાખા વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

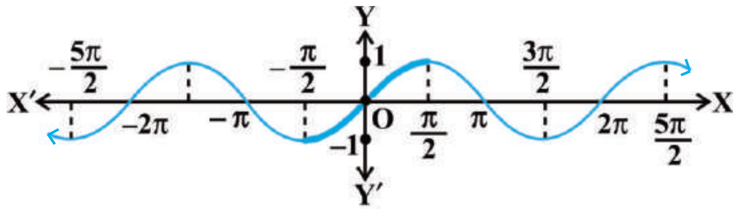
આથી આપણે *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને sin^{-1} (*arcsine* વિધેય) સંકેત વડે દર્શાવીશું. આમ, sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોઈ શકે. આ પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ આપણને sin^{-1} વિધેયની એક શાખા મળે છે. તેની $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ વિસ્તારવાળી શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. બાકીના અંતરાલ વિસ્તાર તરીકે લેતાં sin^{-1}ની *ભિન્ન શાખાઓ* મળે છે. આપણે હવે પછીથી જ્યારે sin^{-1} નો ઉલ્લેખ કરીશું, ત્યારે તેનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈશું. આપણે $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ એમ લખીશું.

પ્રતિવિધેયની વ્યાખ્યા પરથી કહી શકાય કે, $sin\,(sin^{-1}x) = x$, જ્યાં $-1 \le x \le 1$ અને $sin^{-1}(sin\,x) = x$ જ્યાં $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. બીજા શબ્દોમાં, જો $y = sin^{-1}x$ તો $sin y = x$.

નોંધ :

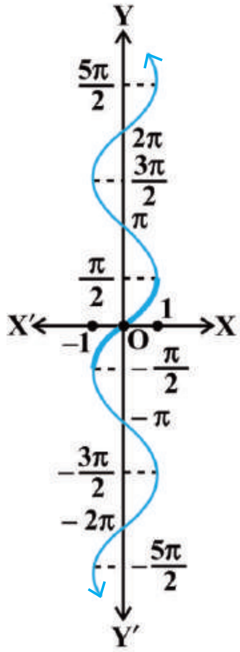
(1) આપણે પ્રકરણ 1 પરથી જાણીએ છીએ કે જો વિધેય $y = f(x)$ નું પ્રતિવિધેય શક્ય હોય તો $x = f^{-1}(y)$. આમ, sin^{-1} વિધેયનો આલેખ મૂળ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલ-બદલ કરી દોરી શકાય. અર્થાત્ જો (a, b) એ *sin* વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ હોય, તો (b, a) તેને અનુરૂપ sin^{-1} વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ બને. આમ, $y = sin^{-1}x$ વિધેયનો આલેખ $y = sinx$ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલ-બદલ કરી મેળવી શકાય. $y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.1(i), (ii), (iii) માં દર્શાવેલ છે. $y = sin^{-1}x$ આલેખનો ઘેરો ભાગ એ તેની મુખ્ય કિંમત દર્શાવતી શાખા છે.

(2) એવું દર્શાવી શકાય કે કોઈ વિધેયના પ્રતિવિધેયનો આલેખ મુખ્ય વિધેયના આલેખના $y = x$ રેખામાં મળતા ***આરસી પ્રતિબિંબ (mirror image)*** સ્વરૂપે મળે છે. સમાન અક્ષો પર દોરવામાં આવતા $y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ પરથી તે જોઈ શકાય છે. (આકૃતિ 2.1(iii))



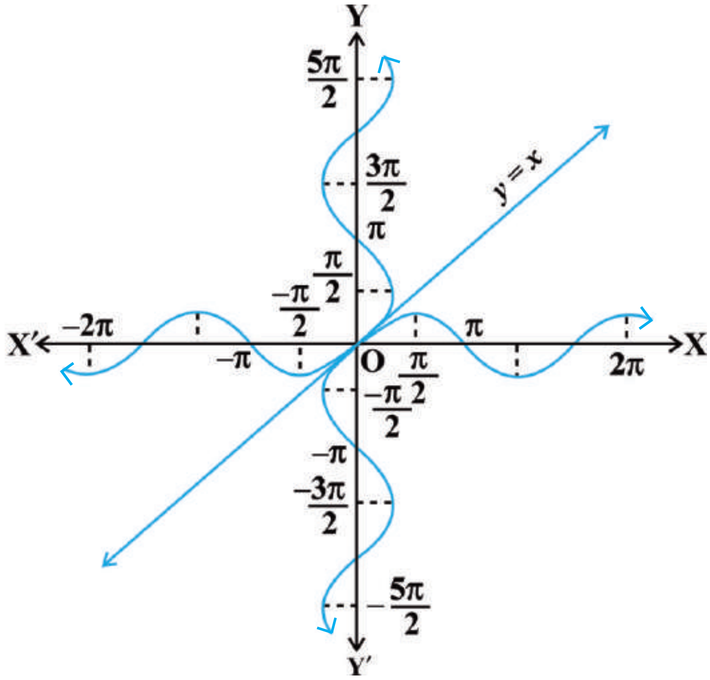
y = sin x

આકૃતિ 2.1 (i)



y = sin⁻¹x

આકૃતિ 2.1 (ii)

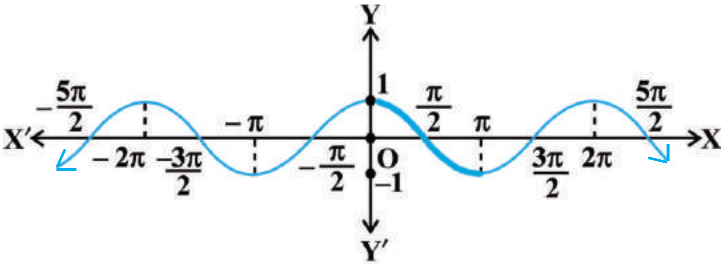


y = sinx અને y = sin⁻¹x

આકૃતિ 2.1 (iii)

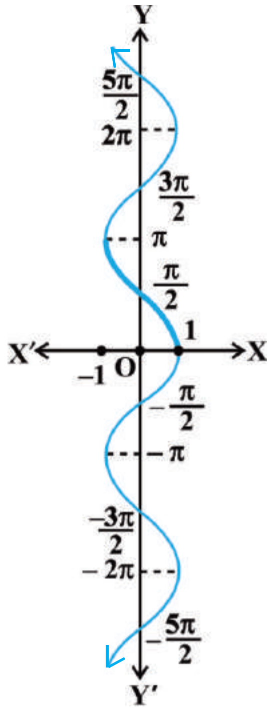
sin વિધેયની જેમ *cosine* વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર [–1, 1] છે. જો *cosine* વિધેયના પ્રદેશને મર્યાદિત બનાવી [0, π] ને પ્રદેશ તરીકે લઈએ તો તે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. અહીં વિસ્તાર [–1, 1] છે. ખરેખર તો મર્યાદિત પ્રદેશ [–π, 0], [0, π], [π, 2π] વગેરેમાં *cosine* વિધેય એક-એક અને [–1, 1] માં વ્યાપ્ત બને. આથી, આપણે *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય આમાંના કોઈ પણ અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ. *cosine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને cos^{-1}(*arc cosine* વિધેય) સંકેત વડે દર્શાવીશું. આમ cos^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ [–1, 1] અને વિસ્તાર [–π, 0], [0, π], [π, 2π] વગેરેમાંનો કોઈ પણ અંતરાલ છે. આ પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ cos^{-1} વિધેયની એક શાખા મળશે. [0, π]ને અનુરૂપ મળતી cos^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આપણે $cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ એમ લખીશું.

જે રીતે $y = sin^{-1}x$ ના આલેખની ચર્ચા કરી તે જ રીતે $y = cos^{-1}x$ નો આલેખ પણ દોરી શકાય. આકૃતિ 2.2(i) અને 2.2(ii)માં $y = cosx$ અને $y = cos^{-1}x$ ના આલેખ દર્શાવેલ છે.



$y = cos\, x$

આકૃતિ 2.2 (i)



$y = cos^{-1}x$

આકૃતિ 2.2 (ii)

ચાલો, આપણે નીચે પ્રમાણે $cosec^{-1}x$ અને $sec^{-1}x$ નો વિચાર કરીએ :

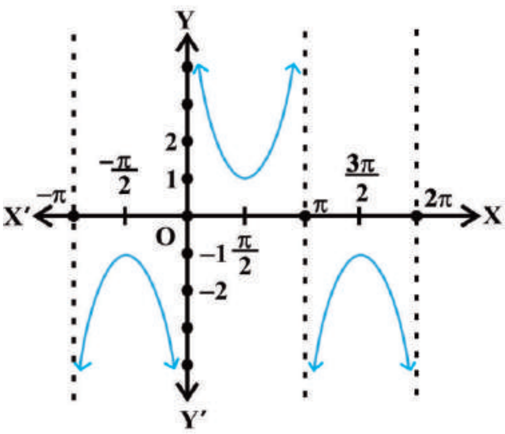
$cosecx = \frac{1}{sin\, x}$ હોવાથી, $cosec$ વિધેયનો પ્રદેશગણ

$\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi,\ n \in Z\}$ અને વિસ્તારગણ

$\{y : y \in R,\ y \geq 1$ અથવા $y \leq -1\}$ અર્થાત્ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ થાય.

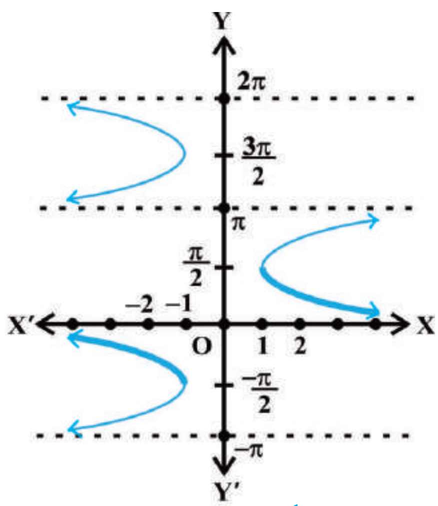
આમ, $y = cosec\, x$, $-1 < y < 1$ હોય તેવી y સિવાયની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા ધારણ કરશે અને તે π ના પૂર્ણાંક ગુણિતો પર વ્યાખ્યાયિત નહીં થાય. જો $cosec$ વિધેયના પ્રદેશને $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ માં મર્યાદિત કરીએ તો તે વિસ્તાર $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માટે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો $cosec$ વિધેય, $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ વગેરે મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. અને તેનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ થાય. આમ, $cosec^{-1}$ વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ લઈ શકાય. આપણે $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી $cosec^{-1}$ વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આમ, આપણે મુખ્ય શાખાના સંદર્ભમાં $cosec^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ એમ લખી શકીએ.

આકૃતિ 2.3(i) અને 2.3(ii)માં $y = cosec\ x$ અને $y = cosec^{-1}x$ ના આલેખ બતાવેલ છે.



$y = cosec\, x$

આકૃતિ 2.3 (i)



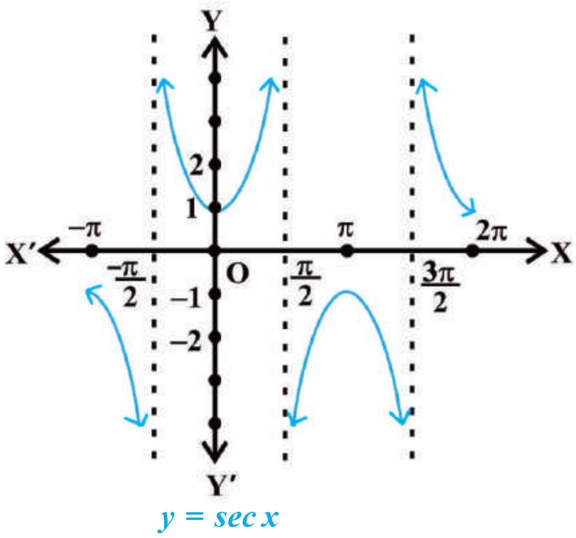
$y = cosec^{-1}x$

આકૃતિ 2.3 (ii)

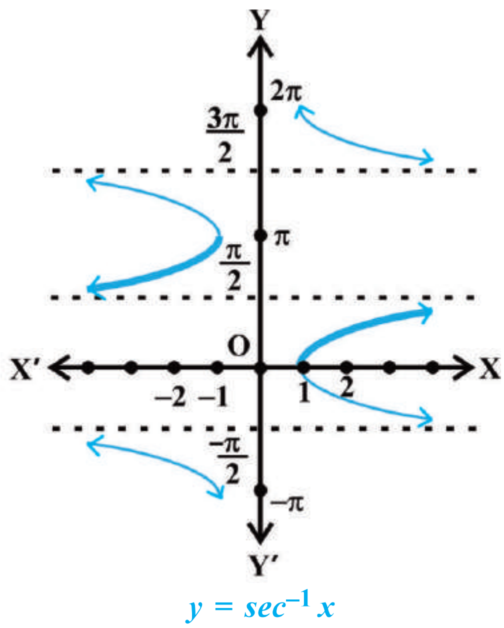
વળી, $secx = \frac{1}{cos\,x}$ હોવાથી $y = sec\ x$ નો પ્રદેશગણ $\mathbf{R} - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તારગણ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ છે. આનો અર્થ *sec* (*secant*) વિધેય $-1 < y < 1$ સિવાયની y ની પ્રત્યેક કિંમત ધારણ કરશે અને તે $\frac{\pi}{2}$ના અયુગ્મ ગુણકો માટે વ્યાખ્યાયિત નથી. જો *sec* વિધેયના પ્રદેશને $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$માં મર્યાદિત કરીએ, તો તે એક-એક અને $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માં વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *sec* વિધેય $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$, વગેરે મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માં વ્યાપ્ત બને. આમ, sec^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ વગેરે એમ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ sec^{-1} વિધેયની ભિન્ન શાખા મળશે. આપણે $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી sec^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આમ,

$$sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

આકૃતિ 2.4(i) અને 2.4(ii)માં $y = sec\ x$ અને $y = sec^{-1}x$ ના આલેખ બતાવેલ છે.



આકૃતિ 2.4 (i)



આકૃતિ 2.4 (ii)

અંતમાં આપણે tan^{-1} અને cot^{-1} નો વિચાર કરીશું.

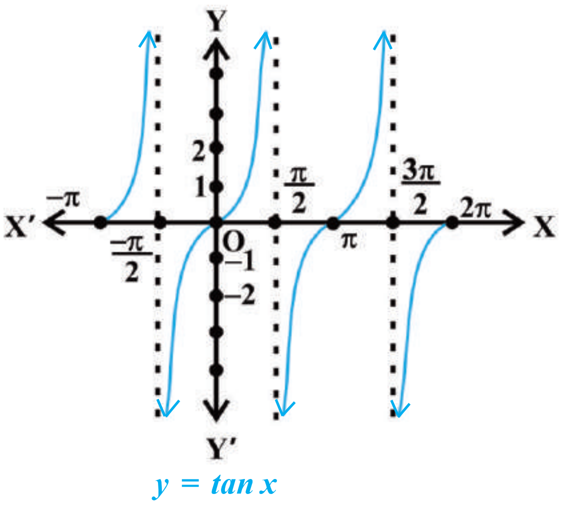
આપણે જાણીએ છીએ કે *tan* વિધેય (*tangent* વિધેય)નો પ્રદેશગણ

$\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર $\mathbf{R}$ છે. અર્થાત્ *tan* વિધેય $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ

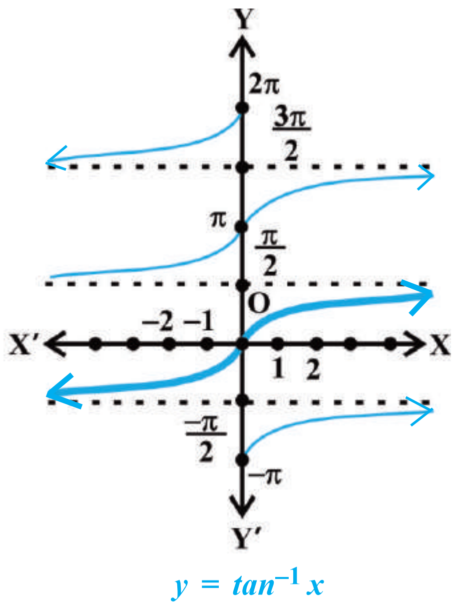
ગુણિતો માટે વ્યાખ્યાયિત નથી. જો આપણે *tan* વિધેયના પ્રદેશ પર મર્યાદા મૂકી તેને $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ લઈએ, તો તે એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને છે. ખરેખર તો, *tan* વિધેય $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ વગેરેમાંના કોઈ પણ મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને. આમ, tan^{-1} ને જેનો પ્રદેશ R અને વિસ્તાર $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોય એવા વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. આ અંતરાલોને અનુરૂપ tan^{-1} વિધેયની ભિન્ન શાખાઓ મળે. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી tan^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહી શકાય. આમ,

$$tan^{-1} : \mathrm{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = tan\ x$ અને $y = tan^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.5(i) અને 2.5(ii)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.5 (i)

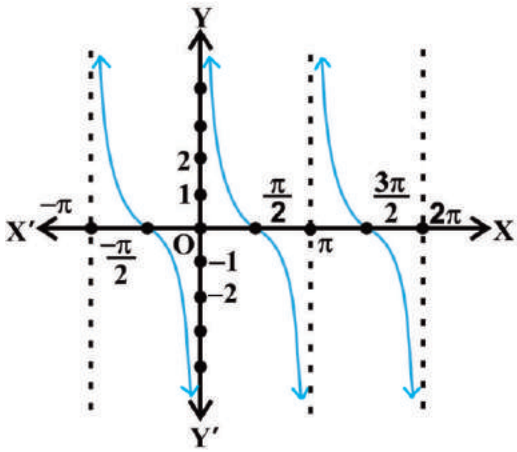


આકૃતિ 2.5 (ii)

આપણે જાણીએ છીએ કે *cot* વિધેય (*cotangent* વિધેય)નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ તથા વિસ્તાર **R** છે. અર્થાત્ *cotangent* વિધેય π ના પૂર્ણાંક ગુણિતો માટે અવ્યાખ્યાયિત છે. જો *cotangent* વિધેયનો મર્યાદિત પ્રદેશ $(0, \pi)$ લઈએ, તો તે એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને છે. ખરેખર *cotangent* વિધેય મર્યાદિત અંતરાલ $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ વગેરેમાં એક-એક અને R માં વ્યાપ્ત બને. આમ, cot^{-1}ને જેનો પ્રદેશ **R** અને વિસ્તાર $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોય એવા વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. $(0, \pi)$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી cot^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહી શકાય. આમ,

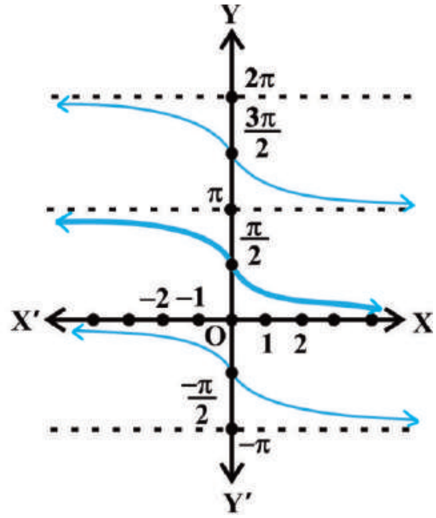
$$cot^{-1} : \mathrm{R} \to (0, \pi)$$

$y = cot\ x$ અને $y = cot^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.6(i) અને 2.6(ii)માં દર્શાવેલ છે.



$y = cot\,x$

આકૃતિ 2.6 (i)



$y = cot^{-1}\ x$

આકૃતિ 2.6 (ii)

નીચે આપેલ કોષ્ટક ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોને (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા) તેમના પ્રદેશ અને વિસ્તાર સાથે દર્શાવેલ છે :

sin^{-1}	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos^{-1}	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
$cosec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
sec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
tan^{-1}	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cot^{-1}	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$(0, \pi)$

નોંધ :

(1) $sin^{-1}x$ અને $(sin\,x)^{-1}$ સંબંધી ગેરસમજ ના થવી જોઈએ. હકીકતે, $(sin\,x)^{-1} = \frac{1}{sin\ x}$ અને આ તથ્ય બાકીના ત્રિકોણમિતીય વિધેયો માટે પણ સત્ય છે.

(2) જ્યારે પણ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની કોઈ શાખાનો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય ત્યારે આપણે તે વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા જ સમજીશું.

(3) ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાના વિસ્તારમાં હોય, તો તેને આપણે તે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધિયની *મુખ્ય કિંમત* કહીશું.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. આથી, $sin\, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. આપણે જાણીએ છીએ કે, sin^{-1} વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાનો વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે અને $sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત $\frac{\pi}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$. આથી, $cot\, y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$= cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે, cot^{-1} વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાનો વિસ્તાર $(0, \pi)$ છે અને $cot\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

આથી, $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત $\frac{2\pi}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેના પ્રતિવિધેય માટે તેની મુખ્ય કિંમત શોધો :

1. $sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **2.** $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $cosec^{-1}(2)$

4. $tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **6.** $tan^{-1}(-1)$

7. $sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $cosec^{-1}(-\sqrt{2})$

નીચેની અભિવ્યક્તિઓનું મૂલ્ય મેળવો :

11. $tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

12. $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

પ્રશ્નો 13 તથા 14 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો $sin^{-1}x = y$ હોય, તો

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના ગુણધર્મો

આ વિભાગમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો સાબિત કરીશું. અહીં, એક સ્પષ્ટ નોંધ કરીએ કે આ ગુણધર્મો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો તેમને સંગત મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા પર વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યારે સત્ય છે. કેટલાંક પરિણામો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના પ્રદેશનાં તમામ મૂલ્યો માટે સત્ય ના પણ હોય. અલબત્ત, x નાં જે મૂલ્યો માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત હોય તેના માટે જ તે સત્ય હશે. આપણે પ્રદેશના x નાં આવાં મૂલ્યોની વિસ્તૃત ચર્ચા નહીં કરીએ, કારણ કે તે આ પુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.

યાદ કરો કે જો $y = sin^{-1}x$ તો, $x = sin\, y$ અને જો $x = sin\, y$ તો $y = sin^{-1}x$. આમ,

$sin\,(sin^{-1}x) = x,\ x \in [-1, 1]$ અને $sin^{-1}(sin\,x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

આ જ વાત બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો માટે પણ સત્ય છે. હવે, આપણે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીએ :

1. (i) $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x,\ x \ge 1$ અથવા $x \le -1$

(ii) $cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x,\ x \ge 1$ અથવા $x \le -1$

(iii) $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x,\ x > 0$

પ્રથમ પરિણામ સાબિત કરવા, આપણે $cosec^{-1}x = y$ અર્થાત્ $cosec\,y = x$ લઈએ.

$\therefore \frac{1}{x} = sin\,y$ $(x \ne 0)$

આથી, $sin^{-1}\frac{1}{x} = y$.

અથવા $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x$.

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

2. (i) $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x,\ x \in [-1, 1]$

(ii) $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x,\ x \in \mathbf{R}$

(iii) $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x,\ |x| \ge 1$

ધારો કે $sin^{-1}(-x) = y$ અર્થાત્ $-x = sin\,y$

આથી, $x = -sin\,y$ અર્થાત્ $x = sin\,(-y)$

આથી, $sin^{-1}x = -y = -sin^{-1}(-x)$

આથી, $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

3. (i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, \quad x \in [-1, 1]$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x, \quad |x| \geq 1$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x, \quad x \in \mathbf{R}$

ધારો કે $\cos^{-1}(-x) = y$ અર્થાત્ $-x = \cos y$

આથી, $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

આમ, $\cos^{-1}x = \pi - y = \pi - \cos^{-1}(-x)$

$\therefore \quad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

4. (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$

(iii) $\mathrm{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \geq 1$

ધારો કે $\sin^{-1}x = y$. આથી, $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$\therefore \quad \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$

આથી, $\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

5. (i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1$

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}, \quad xy > -1$

ધારો કે $\tan^{-1}x = \theta$ અને $\tan^{-1}y = \phi$

આથી, $x = \tan\theta$ અને $y = \tan\phi$

હવે, $\tan(\theta + \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta \cdot \tan\phi} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

આથી, આપણને $\theta + \phi = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ મળશે.

આથી, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

ઉપરના પરિણામમાં, જો આપણે y ને $-y$ લઈએ તો, બીજું પરિણામ મળે અને y ના બદલે x લઈએ, તો આગળનાં પરિણામો પૈકીનું ત્રીજું પરિણામ મળે.

6. (i) $2tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$, $|x| \le 1$

(ii) $2tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \ge 0$

(iii) $2tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$

ધારો કે $tan^{-1}x = y$. આથી, $x = tan\,y$

હવે, $sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = sin^{-1}\frac{2\,tany}{1+tan^2y}$

$= sin^{-1}(sin\,2y)$

$= 2y$

$= 2tan^{-1}x$

તથા $cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = cos^{-1}\frac{1-tan^2y}{1+tan^2y}$

$= cos^{-1}(cos\,2y)$

$= 2y$

$= 2tan^{-1}x$

(iii) આ જ રીતે, સાબિત કરી શકાય.

આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે,

(i) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2sin^{-1}x$, $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2cos^{-1}x$, $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1.$

ઉકેલ : (i) ધારો કે, $sin^{-1}x = \theta$. આથી $x = sin\theta$

હવે, $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = sin^{-1}(2sin\theta\sqrt{1-sin^2\theta})$

$= sin^{-1}(2sin\theta\;cos\theta)$

$= sin^{-1}(sin\,2\theta)$

$= 2\theta$

$= 2sin^{-1}x$

(ii) $x = cos\theta$ લો. ઉપર પ્રમાણેની રીતે આગળ વધતાં, આપણને $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2cos^{-1}x$ મળે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{2}{11} = tan^{-1}\frac{3}{4}$.

ઉકેલ : ગુણધર્મ 5(i) પરથી,

ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{2}{11}$

$= tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = tan^{-1}\frac{15}{20}$

$= tan^{-1}\frac{3}{4}$

$=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5 : $tan^{-1}\left(\dfrac{cos\,x}{1-sin\,x}\right)$, $-\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}\left(\dfrac{cos\,x}{1-sin\,x}\right) = tan^{-1}\left[\dfrac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\dfrac{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}{\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\dfrac{cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\dfrac{1+tan\frac{x}{2}}{1-tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$$

બીજી રીત : $tan^{-1}\left(\dfrac{cos\,x}{1-sin\,x}\right) = tan^{-1}\left[\dfrac{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\dfrac{sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\dfrac{2sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ઉદાહરણ 6 : $cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ ને સાદા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $x = sec\theta$, તો $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{sec^2\theta-1} = tan\theta$

આથી, $cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = cot^{-1}(cot\,\theta) = \theta = sec^{-1}x$. માંગેલ સાદું સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, $tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = tan\theta$. આથી, $\theta = tan^{-1}x$.

હવે, જ.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

$$= tan^{-1}\left(\frac{3tan\theta - tan^3\theta}{1-3tan^2\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}(tan\,3\theta)$$

$$= 3\theta$$

$$= 3tan^{-1}x$$

$$= tan^{-1}x + 2tan^{-1}x$$

$$= tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \text{ડા.બા.}$$ (કેમ ?)

ઉદાહરણ 8 : $cos\,(sec^{-1}x + cosec^{-1}x)$, $|x| \geq 1$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $cos\,(sec^{-1}x + cosec^{-1}x) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

સ્વાધ્યાય 2.2

સાબિત કરો :

1. $3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3cos^{-1}x = cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3. $tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24} = tan^{-1}\frac{1}{2}$

4. $2tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\frac{31}{17}$

નીચેનાં વિધેયોને સાદા સ્વરૂપમાં લખો :

5. $tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x \neq 0$

6. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

7. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$, $0 < x < \pi$

8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$, $0 < x < \pi$

9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $|x| < a$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$, $a > 0$; $\frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

કિંમત શોધો :

11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$

13. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$, $|x| < 1$, $y > 0$ અને $xy < 1$.

14. જો $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, તો x ની કિંમત શોધો.

15. જો $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, તો x ની કિંમત શોધો.

પ્રશ્ન-ક્રમાંક 16 થી 18 ની અભિવ્યક્તિની કિંમત શોધો :

16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ **17.** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

પ્રશ્નો 19 થી 21 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) = ...$.

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = ...$.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

21. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3}) = ...$.

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 9 : $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $sin^{-1}(sin\, x) = x$.

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$ થાય તેવી અપેક્ષા રાખી શકાય.

પરંતુ, $sin^{-1}x$ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$માં $\frac{3\pi}{5}$ નથી.

$sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = sin\frac{2\pi}{5}$ અને $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $sin^{-1}\frac{3}{5} - sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{84}{85}$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ અને $sin^{-1}\frac{8}{17} = y$

આથી, $sin\, x = \frac{3}{5}$ અને $sin\, y = \frac{8}{17}$

હવે, $cos\, x = \sqrt{1 - sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

અને $cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$.

હવે, $cos(x - y) = cos\, x \cdot cos\, y + sin\, x \cdot sin\, y$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{3}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

$\therefore\ x - y = cos^{-1}\frac{84}{85}$

આથી, $sin^{-1}\frac{3}{5} - sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{84}{85}$

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $sin^{-1}\frac{12}{13} + cos^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}\frac{12}{13} = x$, $cos^{-1}\frac{4}{5} = y$, $tan^{-1}\frac{63}{16} = z$

આથી, $sin\, x = \frac{12}{13}$, $cos\, y = \frac{4}{5}$, $tan\, z = \frac{63}{16}$

$\therefore\ cos\, x = \frac{5}{13}$, $sin\, y = \frac{3}{5}$, $tan\, x = \frac{12}{5}$ અને $tan\, y = \frac{3}{4}$

હવે, $tan(x + y) = \dfrac{tan\ x + tan\ y}{1 - tan\ x \cdot tan\ y}$

$$= \frac{\frac{12}{5} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{12}{5} \times \frac{3}{4}} = -\frac{63}{16}$$

આથી, $tan(x + y) = -tan\ z$

અર્થાત્ $tan(x + y) = tan\ (-z)$ અથવા

$tan(x + y) = tan\ (\pi - z)$

$\therefore\ x + y = -z$ અથવા $x + y = \pi - z$

x, y અને z ધન હોવાથી, $x + y \neq -z$

આથી, $x + y + z = \pi$ અથવા

$$sin^{-1}\frac{12}{13} + cos^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi.$$

ઉદાહરણ 12 : $tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right]$નું સાદું રૂપ આપો, જ્યાં $\dfrac{a}{b}tan\ x > -1$.

ઉકેલ : અહીં $tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right] = tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x + a\sin x}{b\cos x}}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{a}{b} - tan\ x}{1 + \frac{a}{b}tan\ x}\right] = tan^{-1}\frac{a}{b} - tan^{-1}(tan\ x)$$

$$= tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

ઉદાહરણ 13 : ઉકેલો : $tan^{-1}2x + tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}2x + tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore\ tan^{-1}\left(\frac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

એટલે કે $tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1 - 6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\ \frac{5x}{1 - 6x^2} = tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$\therefore\ 6x^2 + 5x - 1 = 0$ અર્થાત્ $(6x - 1)(x + 1) = 0$

આથી, $x = \frac{1}{6}$ અથવા $x = -1$.

$x = -1$ મૂકતાં, ડા.બા.નું મૂલ્ય ઋણ આવતું હોવાથી તે સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી $x = \frac{1}{6}$ જ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

નીચેનાં પ્રતિવિધેયનાં મૂલ્ય શોધો :

1. $cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$ **2.** $tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)$

સાબિત કરો :

3. $2sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $cos^{-1}\frac{4}{5} + cos^{-1}\frac{12}{13} = cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $cos^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5} = sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $tan^{-1}\frac{63}{16} = sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

સાબિત કરો :

9. $tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}cos^{-1}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$, $x \in [0, 1]$

10. $cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+sin\,x}+\sqrt{1-sin\,x}}{\sqrt{1+sin\,x}-\sqrt{1-sin\,x}}\right] = \frac{x}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

11. $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [**સૂચન :** $x = cos2\theta$ લો.]

12. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

નીચેનાં સમીકરણ ઉકેલો :

13. $2tan^{-1}(cos\,x) = tan^{-1}(2cosec\,x)$

14. $tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}tan^{-1}x$ $(x > 0)$

પ્રશ્નો 15 થી 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. $sin\,(tan^{-1}x)$, $|x| < 1$ = ...

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16. $sin^{-1}(1 - x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, તો x = ...

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

17. $tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ = ...

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

સારાંશ

- ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

વિધેય	પ્રદેશ	વિસ્તાર (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા)
$y = sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = cosec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = sec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = tan^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = cot^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $sin^{-1}x$ ને ભૂલથી $(sin\,x)^{-1}$ તરીકે ના લેવાય. ખરેખર $(sin\,x)^{-1} = \frac{1}{sin\,x}$ અને આ જ વાત બાકીનાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો માટે સત્ય છે.
- ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય શાખામાં હોય, તો તેને તે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની *મુખ્ય કિંમત* કહેવાય.
- યોગ્ય પ્રદેશનાં મૂલ્યો માટે,
  - $y = sin^{-1}x \Rightarrow x = sin\,y$
  - $x = sin\,y \Rightarrow y = sin^{-1}x$
  - $sin\,(sin^{-1}x) = x$
  - $sin^{-1}(sin\,x) = x$
  - $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x$
  - $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$
  - $cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x$
  - $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x$
  - $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x$
  - $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x$

- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$
- $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$
- $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Historical Note

The study of trigonometry was first started in India. The ancient Indian Mathematicians, ***Aryabhatta*** (C.E. 476), ***Brahmagupta*** (C.E. 598), ***Bhaskara I*** (C.E. 600) and ***Bhaskara II*** (C.E. 1114) got important results of trigonometry. All this knowledge went from India to Arabia and then from there to Europe. The Greeks had also started the study of trigonometry but their approach was so clumsy that when the Indian approach became known, it was immediately adopted throughout the world.

In India, the predecessor of the modern trigonometric functions, known as the sine of an angle, and the introduction of the sine function represents one of the main contribution of the ***siddhantas*** (Sanskrit astronomical works) to mathematics.

Bhaskara I (about C.E. 600) gave formulae to find the values of sine functions for angles more than 90°. A sixteenth century Malayalam work ***Yuktibhasa*** contains a proof for the expansion of sin (A + B). Exact expression for sines or cosines of 18°, 36°, 54°, 72°, etc., were given by ***Bhaskara II***.

The symbols $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, etc., for $arc\ \sin x$, $arc\ \cos x$, etc., were suggested by the astronomer Sir ***John F.W. Hersehel*** (C.E. 1813) The name of ***Thales*** (about B.C.E. 600) is invariably associated with height and distance problems. He is credited with the determination of the height of a great pyramid in Egypt by measuring shadows of the pyramid and an auxiliary staff (or gnomon) of known height, and comparing the ratios :

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (sun's altitude)}$$

Thales is also said to have calculated the distance of a ship at sea through the proportionality of sides of similar triangles. Problems on height and distance using the similarity property are also found in ancient Indian works.

— ❖ —