પરિશિષ્ટ 2

ગાણિતિક મોડેલનો પરિચય

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં ધોરણોથી તમે તમારી આસપાસ રહેલા વાસ્તવિક જગતના કૂટપ્રશ્નો ઉકેલતાં આવ્યાં છો. ઉદાહરણ તરીકે તમે સાદા વ્યાજને લગતાં કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ તેનું સૂત્ર વાપરી મેળવ્યા છે. સૂત્ર (અથવા સમીકરણ)એ વ્યાજ અને તેની સાથે સંકળાયેલ બીજી ત્રણ રાશિઓ, મુદલ, વ્યાજનો દર અને સમયગાળા વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. આ સૂત્ર એ ગાણિતિક મોડેલનું ઉદાહરણ છે.

ગાણિતિક મોડેલ એ કેટલીક વ્યવહારુ પરિસ્થિતિ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ દર્શાવે છે.

ગાણિતિક મોડેલ જીવનની ઘણીબધી વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓ ઉકેલવામાં ઉપયોગી છે, જેવી કે...

- ઉપગ્રહનું પ્રક્ષેપણ કરવામાં
- ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવા માટે
- વાહનો દ્વારા થતા પ્રદૂષણનું નિયંત્રણ કરવા માટે
- મોટાં શહેરોમાં સ્થગિત વાહનવ્યવહારની સ્થગિતતા ઘટાડવા માટે

આ પ્રકરણમાં ગાણિતિક મોડેલની રચના કરવાનાં સોપાનોની સમજ તમને આપીશું. તે ગાણિતિક મોડેલિંગ તરીકે ઓળખાય છે. ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે જગતની વાસ્તવિક સમસ્યા લઈશું અને તેને ગાણિતિક કોયડાની જેમ જ લખીશું. આપણે તેને ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નોની જેમ ઉકેલીશું અને આ ઉકેલનું અર્થઘટન જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાના સંદર્ભે કરીશું. આથી ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સૂત્ર બનાવવું, ઉકેલ, અર્થઘટન અને યથાર્થતા જેવાં સોપાનોનો સમાવેશ થાય છે.

A2.2. વિભાગમાં આપણે આપેલા શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટે હાથ ધરાતી પ્રક્રિયાને નિહાળીને પ્રારંભ કરીશું. અહીં

આપણે તમે અગાઉના ધોરણમાં ઉકેલ્યા હોય એવા કેટલાક શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું. આપણે આગળ એ પણ જોઈશું કે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટેનાં જે સોપાનો છે તેમાંનાં કેટલાંક સોપાનો ગાણિતિક મોડેલિંગના ઉકેલમાં પણ વપરાય છે.

બીજો વિભાગ એટલે કે A2.3 માં આપણે કેટલાંક સાદાં મોડેલ્સની ચર્ચા કરીશું.

વિભાગ A2.4 માં આપણે મોડેલિંગની સમગ્ર પ્રક્રિયા, તેનાં ફાયદા અને કેટલીક મર્યાદાઓની ચર્ચા કરીશું..

A2.2 શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની સમીક્ષા

આ વિભાગમાં, આપણે અગાઉના ધોરણમાં ઉકેલ્યા હોય તેના જેવા કેટલાક શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું. ચાલો આપણે સમચલનના કૂટપ્રશ્નથી પ્રારંભ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : મેં મારી કારમાં 48 લિટર પેટ્રોલમાં 432 કિલોમીટરની મુસાફરી કરી. મારે મારી કાર દ્વારા 180 કિલોમીટર દૂર એક સ્થળે જવાનું છે. મારે કેટલા પેટ્રોલની જરૂર પડશે ?

ઉકેલ : આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલવા માટેનાં પગલાંઓની આપણે યાદી બનાવીએ.

સોપાન 1 : તમે જાણો છો કે જેમ વધુ મુસાફરી કરીશું તેમ વધારે પેટ્રોલની જરૂરિયાત થશે. એટલે કે પેટ્રોલનો જે જથ્થો જરૂરી છે તે કાપેલાં અંતરનાં સમપ્રમાણમાં છે.

432 કિમી મુસાફરી માટે જરૂરી પેટ્રોલ = 48 લિટર

180 કિમી મુસાફરી માટે જરૂરી પેટ્રોલ = ?

ગાણિતિક વર્ણન : ધારો કે

x = મેં કાપેલું અંતર

y = મારી પેટ્રોલની જરૂરિયાત

આથી, y એ x ના સમચલનમાં છે.

$y = kx$, જ્યાં k એ અચળાંક છે.

હું 432 કિલોમીટર મુસાફરી 48 લિટર પેટ્રોલમાં કરી શકું છું.

આથી, $y = 48,\ x = 432$

માટે, $k = \dfrac{y}{x} = \dfrac{48}{432} = \dfrac{1}{9}$

પરંતુ, $y = kx$,

માટે, $y = \dfrac{1}{9}x$ (1)

સમીકરણ અથવા સૂત્ર (1) પેટ્રોલની જરૂરિયાત અને કાપેલ અંતર વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

સોપાન 2 : ઉકેલ **:** આપણે 180 કિલોમીટર મુસાફરી કરવા માટે કેટલું પેટ્રોલ જોઈએ તે શોધવા માંગીએ છીએ. જ્યારે $x = 180$ હોય ત્યારે y ની કિંમત આપણે શોધવી પડે. સમીકરણ (1) માં $x = 180$ મૂકતાં...

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન **:** $y = 20$

આથી, આપણને 180 કિલોમીટરની મુસાફરી કરવા માટે 20 લિટર પેટ્રોલની જરૂર પડે.

એવું બને કે તમે દરેક પરિસ્થિતિમાં સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ ન કરી શકો ? ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે 432 કિલોમીટરનો રસ્તો પહાડી માર્ગે હોય અને 180 કિલોમીટરનો રસ્તો સપાટ માર્ગ પર હોય. પ્રથમ માર્ગમાં કાર વધુ દરે પેટ્રોલનો ઉપયોગ કરે. આથી જ્યાં પેટ્રોલ અગાઉના માર્ગ કરતાં ઓછા દરે વપરાશે ત્યાં આપણે 180 કિલોમીટર માટે પણ તે જ દરે પેટ્રોલ ન વાપરી શકીએ. આથી સૂત્ર ત્યારે જ વપરાય કે આવી બધી જ પરિસ્થિતિઓ જે પેટ્રોલના વપરાશના દર પર અસર કરતી હોય તેવી બધી જ પરિસ્થિતિઓ બંને મુસાફરીમાં સમાન હોય અથવા જો પરિસ્થિતિઓમાં ફેરફાર હોય તો કારમાં વપરાતા પેટ્રોલ પર તે તફાવતની અસર ખૂબ જ ઓછી થતી હોય. આવી જ પરિસ્થિતિમાં વપરાતું પેટ્રોલ એ કાપેલા અંતરના સમચલનમાં હોય. આ કૂટપ્રશ્ન ઉકેલતી વખતે આપણે આવી ધારણા કરી હશે.

ઉદાહરણ 2 : ધારો કે સુધીરે વાર્ષિક 8 ટકાના સાદા વ્યાજે ₹ 15,000 નું રોકાણ કર્યું. આ રોકાણના વળતર સહિતની રકમમાંથી તે ₹ 19,000 ની કિંમતનું એક વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માગે છે. તો તેણે ₹ 15,000 કેટલી મુદત માટે રોકવા જોઈએ જેથી વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે પૂરતી રકમ મળી રહે ?

ઉકેલ : સોપાન 1 : કૂટપ્રશ્નનું નિર્માણ : અહીં, આપણે મુદત અને વ્યાજનો દર જાણીએ છીએ. સુધીરને ₹ 15,000 ઉપરાંત વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે જે રકમ જોઈએ છે તે વ્યાજની રકમ થાય. આપણે હવે વર્ષની સંખ્યા શોધવી પડે.

ગાણિતિક વર્ણન : સાદા વ્યાજ માટેનું સૂત્ર $I = \frac{Pnr}{100}$,

જ્યાં, P = મુદ્દલ

n = વર્ષની સંખ્યા

$r\,\%$ = વ્યાજનો દર

I = મેળવેલ વ્યાજ

અહીં, મુદ્દલ = ₹ 15,000

સુધીરને વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે જરૂરી રકમ = ₹ 19,000

આથી, મેળવવા પાત્ર વ્યાજ = ₹ (19,000 – 15,000)

= ₹ 4000

15,000 નું રોકાણ કરવા માટે જરૂરી મુદત = n

15,000 નું 8 ટકાના દરે n વર્ષ માટેનું વ્યાજ = I

આથી, $$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

માટે, $$I = 1200n \qquad (1)$$

આ સમીકરણ જો 15000 વાર્ષિક 8 ટકાના દરે રોક્યાં હોય, તો તે વર્ષની સંખ્યા અને વ્યાજ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

આપણે ₹ 4000 વ્યાજ થાય તે માટેનો સમયગાળો શોધવો પડે.

સમીકરણ (1) માં I = 4000 મૂકતાં આપણને નીચેનું પરિણામ મળે :

$$4000 = 1200n \qquad (2)$$

સોપાન 2 : કૂટપ્રશ્નનો ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને ઉકેલતાં આપણને

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $n = 3\frac{1}{3}$ મળે છે અને વર્ષનો એક તૃતીયાંશ ભાગ 4 માસ છે. આથી આથી સુધીર 3 વર્ષ અને 4 માસ બાદ વૉશીંગ મશીન ખરીદી શકશે.

તમે અનુમાન લગાવી શકો કે ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે શું ધારણા કરી છે ? આપણે જે સમયગાળા માટે વ્યાજની ગણતરી કરી તે ગાળામાં વ્યાજનો દર સમાન જ રહેશે તેવી ધારણા કરી છે. નહિ તો, $I = \frac{Pnr}{100}$ સૂત્ર માન્ય ગણાય નહિ. આપણે એ પણ ધારણા કરેલ છે જે સમયગાળામાં સુધીર નાણાં એકઠાં કરે છે તે દરમિયાન વૉશીંગ મશીનનો ભાવ પણ વધતો નથી.

ઉદાહરણ 3 : એક મોટરબૉટ નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં જઈ બે શહેરના નદીકિનારા વચ્ચેનું અંતર 6 કલાકમાં કાપે છે. આ બૉટ આટલું જ અંતર નદીના પ્રવાહની દિશામાં જઈ 5 કલાકમાં કાપે છે. જો નદીના પ્રવાહની ઝડપ 2 કિમી/કલાક હોય, તો મોટરબૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ શોધો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 : નિર્માણ: આપણે નદીના પ્રવાહની ઝડપ અને બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર કાપવા માટે બંને દિશામાં આવતાં-જતાં લીધેલો સમય જાણીએ છીએ. આપણે સ્થિર પાણીમાં બૉટની ઝડપ શોધવાની છે.

ગાણિતિક વર્ણન : ધારો કે બૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x , લીધેલ સમય માટે t અને કાપેલ અંતર માટે y લઈએ તો.

$$y = tx \qquad (1)$$

ધારો કે બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર d છે.

નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં જતા બૉટની ખરેખર ઝડપ

= સ્થિર પાણીમાં બૉટની ઝડપ – નદીના પ્રવાહની ઝડપ

કારણ કે બૉટ નદીના પ્રવાહની સામે મુસાફરી કરે છે.

આથી, નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં બૉટની ઝડપ = $(x - 2)$ કિમી/કલાક

નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં બે શહેર વચ્ચે અંતર કાપતાં 6 કલાક લાગે છે. આથી સમીકરણ (1) પરથી

$$d = 6(x - 2) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

પ્રવાહની દિશામાં જતાં બૉટની ઝડપમાં, નદીના પ્રવાહની ઝડપ ઉમેરાશે.

આથી, પ્રવાહની દિશામાં બૉટની ઝડપ = $(x + 2)$ કિમી/કલાક

પ્રવાહની દિશામાં તેટલું જ અંતર કાપવા માટે બોટને 5 કલાક લાગે છે.

$$d = 5(x + 2) \quad (3)$$

સમીકરણ (2) અને (3) પરથી આપણને નીચેનું સમીકરણ મળશે :

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \quad (4)$$

સોપાન 2 : ઉકેલ મેળવવો. સમીકરણ (4) પરથી x ની કિંમત મેળવતાં આપણને $x = 22$ મળશે.

સોપાન 3 : અર્થઘટન

$x = 22$ મળે છે.

આથી મોટર બૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ 22 કિમી/કલાક છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે જાણીએ છીએ કે નદીના પ્રવાહની ઝડપ દરેક જગ્યાએ સમાન હોતી નથી. તે કિનારાની નજીક ધીમે વહે છે અને મધ્ય ભાગમાં ઝડપી વહે છે. બૉટ કિનારાથી શરૂ થઈ નદીના મધ્ય ભાગ તરફ જાય છે. જ્યારે તે નિશ્ચિત સ્થળની નજીક હોય છે, ત્યારે તે ધીમી પડે છે અને કિનારાની નજીક જાય છે. આથી બોટની નદીના મધ્ય ભાગમાં અને કિનારાની નજીકના ભાગમાં ઝડપમાં થોડો તફાવત હોય છે. જોકે તે કિનારાની નજીક થોડા સમય માટે જ હોય. આ નદીની ઝડપનો તફાવત બોટની ઝડપ પર ટૂંકા સમય પૂરતો જ અસર કરે છે. આથી આપણે નદીની ઝડપના આ તફાવતને અવગણી શકીએ. વળી નદીના પ્રવાહની ઝડપ ઉપરાંત પાણી અને બોટની સપાટી વચ્ચેનું ઘર્ષણ પણ બોટની મૂળ ઝડપને અસર કરે છે. આપણે એવું સ્વીકારી લઈએ છીએ કે આ અસર પણ ખૂબ જ ઓછી છે.

આથી, આપણે એવું અનુમાન કરીએ કે,

1. નદીના પ્રવાહની ઝડપ અને બોટની ઝડપ દરેક સમયે અચળ રહે છે.

2. બોટ અને પાણી વચ્ચેના ઘર્ષણ તથા હવાને કારણે થતા ઘર્ષણની અસર અવગણ્ય છે.

આપણે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ ઉપર્યુક્ત ધારણાઓ (ઉત્કલ્પનાઓ)ના આધારે મેળવી છે.

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો માટે આપણે જોયું કે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટે ત્રણ સોપાનો જરૂરી છે. તે આ પ્રમાણે છે :

1. **નિર્માણ :** આપણે કૂટપ્રશ્નનું પૃથક્કરણ કર્યું અને જોયું કે કૂટપ્રશ્નના ઉકેલ પર કયા પરિબળોની મુખ્ય અસર છે. આ બધાં સંબંધિત પરિબળો છે. આપણા પ્રથમ ઉદાહરણમાં, કાપેલ અંતર અને વપરાયેલ પેટ્રોલ એ ***સંબંધિત પરિબળો*** છે. આપણે રસ્તાનો પ્રકાર, ડ્રાઈવિંગ ઝડપ વગેરે પરિબળોને અવગણ્યા. નહિ તો આ કૂટપ્રશ્ન ઉકેલવો વધુ કઠિન બની જાય. જે પરિબળોને આપણે અવગણ્યા તે બધાં ***અસંબંધિત પરિબળો*** છે.

   ત્યાર બાદ આપણે કૂટપ્રશ્નને એક કે વધારે ગાણિતિક સમીકરણ દ્વારા ગાણિતિક સ્વરૂપે વર્ણવી શકીએ.

2. **ઉકેલ :** પ્રથમ સોપાનમાં મેળવેલ ગાણિતિક સમીકરણને યોગ્ય પદ્ધતિ વડે ઉકેલવાથી આપણને ઉકેલ મળશે.

3. **અર્થઘટન :** મૂળભૂત શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નના સંદર્ભ બીજા સોપાનમાં મળેલ ઉકેલનો અર્થ (મહત્ત્વ) આપણે જોઈ શકીએ છીએ.

અહીં તમારા માટે કેટલાક સ્વાધ્યાય છે. નીચેના કૂટપ્રશ્નો માટે ઉપર્યુક્ત ત્રણ સોપાનો વડે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં સંકળાયેલાં સોપાનો માટેની તમારી સમજની ચકાસણી થશે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નમાં સોપાન 1, 2 અને 3 દરમિયાન સંબંધિત અને અસંબંધિત પરિબળો સ્પષ્ટ દર્શાવો.

1. ધારો કે એક કંપનીને કેટલાક સમય માટે એક કમ્પ્યૂટરની આવશ્યકતા છે. કંપની કાં તો માસિક ₹ 2000 ના ભાડે કમ્પ્યૂટર લે અથવા ₹ 25,000 માં ખરીદે છે. જો કંપનીને કમ્પ્યૂટરનો લાંબા સમય માટે ઉપયોગ હોય તો કંપનીએ ખૂબ ઊંચું ભાડું ભરવું પડે. તેના કરતાં કમ્પ્યૂટર ખરીદવું વધારે સસ્તુ પડે. બીજી બાજુ જો કંપનીને કમ્પ્યૂટરનો ઉપયોગ એક માસ પૂરતો જ હોય તો કમ્પ્યૂટર ભાડે લેવું સસ્તું પડે. કેટલા મહિનાના ઉપયોગ બાદ કમ્પ્યૂટર ખરીદવું સસ્તું પડશે તે શોધો.

2. ધારો કે એક કાર સ્થળ A થી 40 કિમી/કલાકની ઝડપે સ્થળ B તરફ મુસાફરી કરે છે. તે જ સમયે બીજી કાર સ્થળ B થી 30 કિમી/કલાકની ઝડપે સ્થળ A તરફ મુસાફરી કરે છે. જો સ્થળ A અને સ્થળ B વચ્ચેનું અંતર 100 કિમી હોય, તો કેટલા સમય બાદ બંને કાર ભેગી થશે ?

3. ચંદ્ર આશરે પૃથ્વીથી 3,84,000 કિલોમીટર દૂર છે અને તેનો પૃથ્વી ફરતે ગતિમાર્ગ લગભગ વર્તુળાકાર છે. તે પૃથ્વીને ફરતે કઈ ઝડપે પરિભ્રમણ કરે છે? ધારો કે તેનો પૃથ્વીને ફરતે પરિભ્રમણનો સમય 24 કલાક છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક કુટુંબ જે મહિનાઓ દરમિયાન વૉટર હીટર નથી વાપરતું, તેનું સરેરાશ માસિક વીજબિલ ₹ 1000 ભરે છે અને જે મહિનાઓ દરમિયાન વૉટર હીટર વાપરે તે દરમ્યાન તેનું સરેરાશ માસિક વીજબિલ ₹ 1240 ભરે છે. વૉટર હીટર વાપરવાનો ખર્ચ ₹ 8.00 પ્રતિ કલાક છે. દિવસ દરમિયાન સરેરાશ કેટલા કલાક વૉટર હીટર વપરાય છે તે શોધો.

A2.3 કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલ

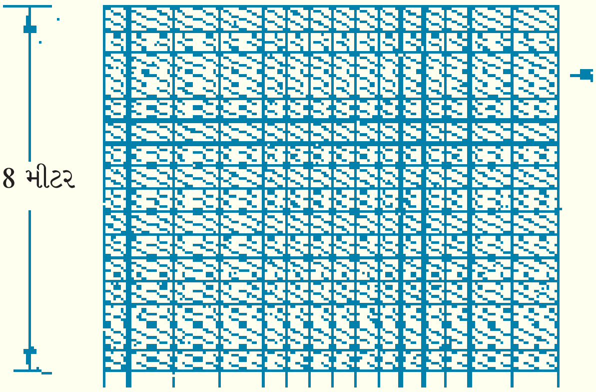
હજી સુધી આપણી ચર્ચામાં કાંઈ જ નવું નથી. આ વિભાગમાં આપણે અગાઉ જેની ચર્ચા કરેલી તે ત્રણ સોપાનોમાં એક બીજું સોપાન ઉમેરવા જઈ રહ્યાં છીએ. આ સોપાનને યથાર્થતા કહે છે. *યથાર્થતા* એટલે શું ? ચાલો આપણે જોઈએ, જીવનની વ્યવહારુ પરિસ્થિતિમાં, આપણે એવું મોડેલ ન સ્વીકારી શકીએ કે જે માત્ર ઉકેલ આપતું હોય અને તે વાસ્તવિકતાને અનુરૂપ ન હોય. વાસ્તવિકતાની સાપેક્ષ ઉકેલને ચકાસવાની પ્રક્રિયા અને જો જરૂરી હોય તો ગાણિતિક વર્ણનમાં સુધારા-વધારા કરવાની ક્રિયાને *યથાર્થતા* કહે છે. મોડેલિંગનું આ અગત્યનું સોપાન છે. આ વિભાગમાં તમને આ સોપાનનો પરિચય કરાવીશું.

પ્રથમ, જેમાં *યથાર્થતા* બાદ આપણા મોડેલને સુધારવું નહિ પડે એવું સ્વીકારીશું. ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે તમારી પાસે 6 મીટર લંબાઈ અને 5 મીટર પહોળાઈનો એક ઓરડો છે. તમે આ રૂમના ભોયતળિયાને 30 સેમી લંબાઈની ચોરસ લાદીથી ઢાંકવાનો છે. તો કેટલી લાદી જોઈએ ? ગાણિતિક મોડેલ રચી આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલો.

ઉકેલ : નિર્માણ : આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલવા માટે આપણે ઓરડાનું ક્ષેત્રફળ અને એક લાદીનું ક્ષેત્રફળ ધ્યાનમાં લેવું પડશે.

લાદીની બાજુનું માપ 0.3 મીટર છે. ઓરડાની લંબાઈ 6 મીટર હોવાથી, આપણે $\frac{6}{0.3}$ = 20 લાદીઓ લંબાઈની એક હારમાં ગોઠવી શકાય. (જુઓ આકૃતિ A2.1.)



આકૃતિ A2.1

ઓરડાની પહોળાઈ 5 મીટર હોવાથી આપણને $\frac{5}{0.3}$ = 16.67 મળે. આથી આપણે એક સ્તંભમાં (ઊભી હારમાં) 16 લાદીઓ ગોઠવી શકીએ. જોકે $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ મીટર પહોળાઈવાળો ભાગ લાદીઓથી ઢંકાશે નહિ. આ ભાગને આપણે બીજી લાદીઓ કાપીને ઢાંકવો પડશે, ભોયતળિયાની પહોળાઈનો 0.2 મીટર ભાગ ઢાંક્યા વગરનો રહી ગયો અને તે લાદીની લંબાઈ 0.3 મીટરના અડધા કરતા વધારે છે. આથી આપણે લાદીને બે સમાન ટુકડામાં તોડી શકીશું નહિ અને તેના બંને ટુકડાઓનો બાકી રહેતો ભાગ ઢાંકવામાં ઉપયોગ કરી શકીશું નહિ.

ગાણિતિક વર્ણન : આપણી પાસે

જરૂરી લાદીઓની કુલ સંખ્યા = (લંબાઈમાં રહેલી લાદીઓની સંખ્યા × પહોળાઈમાં રહેલી લાદીઓની સંખ્યા)

+ બાકીના ખુલ્લા ભાગમાં જરૂરી લાદીઓની સંખ્યા (1)

ઉકેલ : આપણે આગળ કહ્યું એ પ્રમાણે, લંબાઈમાં વપરાતી લાદીઓની સંખ્યા 20 અને પહોળાઈમાં વપરાતી લાદીઓની સંખ્યા 16 છે. છેલ્લી હાર માટે આપણે વધુ 20 લાદીઓની જરૂર પડશે. આ કિંમતો પરિણામ (1)માં મૂકતાં આપણને $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$ મળશે.

અર્થઘટન : ભોયતળિયું ઢાંકવા માટે આપણને 340 લાદીઓની જરૂર પડશે.

યથાર્થતા : વ્યવહારુ જીવનમાં તમારો કડિયો તમને કેટલીક વધારે લાદીઓ લાવવાનું કહેશે. કારણ કે લાદીઓની તેમના માપમાં કાપવા જતાં કેટલીક લાદીઓ તૂટી જશે (નુકસાન થશે) અને આ સંખ્યા તમારા કડિયાની આવડત પર નિર્ભર છે. પરંતુ, આ માટે આપણે સમીકરણ (1)માં સુધારો કરવાની જરૂર નથી. આ સમીકરણ આપણને કેટલી લાદીઓની જરૂર પડશે તેનો અંદાજિત ખ્યાલ આપે છે. આથી આપણે અહીં અટકીએ.

ચાલો, આપણે એક બીજી પરિસ્થિતિ જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : વર્ષ 2000 માં યુ.એસ.ના 191 સભ્યદેશોએ એક જાહેરનામા પર હસ્તાક્ષર કર્યા. આ જાહેરનામામાં, વર્ષ 2015 સુધીમાં વિકાસના ચોક્કસ ધ્યેયને પહોંચવા આ દેશો સહમત થયા. તેને સહસ્ત્રાબ્દિ વિકાસ ધ્યેયો (*Millenium Development Goals*) કહે છે. એમાંનો એક ધ્યેય જાતીય સમાનતા છે. આ ધ્યેય સિદ્ધ થયો છે કે નહિ તે માટેનો એક

સંકેત પ્રાથમિક, માધ્યમિક અને તૃતીય શિક્ષણમાં રહેલા કુમારો અને કન્યાઓનો ગુણોત્તર છે. ભારતે પણ જાહેરનામામાં હસ્તાક્ષર કરેલા હોવાથી તે આ ગુણોત્તર વધારવા માટે પ્રતિબદ્ધ છે. પ્રાથમિક શાળાઓમાં નોંધાયેલી કન્યાઓની ટકાવારી નીચે કોષ્ટક A2.1 માં આપેલી છે :

કોષ્ટક A2.1

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

મૂળ : શૈક્ષણિક આંકડાશાસ્ત્ર, શિક્ષણવિભાગનું વૅબ પેજ, GOI.

* આ માહિતી કામચલાઉ છે.

આ માહિતીનો ઉપયોગ કરીને ગાણિતિક રીતે વર્ણવો કે કયા દરે કન્યાઓનો પ્રાથમિક શાળામાં નોંધણીનો ગુણોત્તર વધી રહ્યો છે. વળી કયા વર્ષમાં કન્યાઓનો નોંધણી ગુણોત્તર 50 ટકાએ પહોંચશે તેનો અંદાજ લગાવો.

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ આ સમસ્યાને ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નમાં રૂપાંતરિત કરીએ.

સોપાન 1 : નિર્માણ : કોષ્ટક A2.1 વર્ષ 1991-92, 1992-93 વગેરેમાં થયેલ નોંધણી દર્શાવે છે. વિદ્યાર્થીઓ શૈક્ષણિક વર્ષની શરૂઆતમાં જોડાયા હોવાથી આપણે વર્ષોને 1991, 1992 વગેરે લઈ શકીએ. ચાલો આપણે ધારીએ કે પ્રાથમિક શાળામાં જોડાતી કન્યાઓની ટકાવારી કોષ્ટક A2.1 માં દર્શાવેલ દરે જ સતત વધતી જાય છે. આથી વર્ષોની સંખ્યા અગત્યની છે, નહિ કે ચોક્કસ વર્ષ. (આવી સમાન પરિસ્થિતિ વિચારીએ. જ્યારે ₹ 1500 નું 8 ટકાના દરે ત્રણ વર્ષ માટે સાદુ વ્યાજ શોધીએ ત્યારે તે ત્રણ વર્ષનો ગાળો 1999 થી 2002 અથવા 2001 થી 2004 હોય તેનાથી કોઈ જ ફરક પડતો નથી. અગત્યનું શું છે, જે-તે વર્ષો માટે નક્કી કરેલ વ્યાજનો દર) અહીં પણ, આપણે જોઈએ 1991 બાદ નોંધણી વધતી જાય છે. જે 1991 બાદ પસાર થયેલા વર્ષોની સંખ્યા અને તેની નોંધણીની તુલના ચાલો આપણે 1991 ના વર્ષને 0 વર્ષ તરીકે લઈએ અને 1992 માટે 1 લખીએ. કારણ કે 1991 બાદ 1992 માં એક વર્ષ પસાર થયું હોય. આ જ પ્રમાણે આપણે 1993 માટે 2, 1994 માટે 3 વગેરે લખી શકીએ. કોષ્ટક A2.1 હવે કોષ્ટક A2.2 જેવું બની જશે.

કોષ્ટક A2.2

વર્ષ	નોંધાયેલ સંખ્યા (ટકામાં)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

નોંધણીમાં થયેલ વધારો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

કોષ્ટક A2.3

વર્ષ	નોંધાયેલ સંખ્યા (ટકામાં)	વધારો
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 થી 1992 ના એક વર્ષના સમયગાળાના અંતે નોંધણી 41.9 ટકાથી 42.6 % એટલે કે 0.7% વધી. બીજા વર્ષના અંતે તે 42.6 ટકાથી 42.7 % એટલે કે 0.1% વધી. ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે વર્ષોની સંખ્યા અને ટકાવારી વચ્ચે ચોક્કસ સંબંધ શોધી ન શકીએ, પરંતુ વધારો યોગ્ય રીતે સ્થિર છે. માત્ર પ્રથમ વર્ષ અને દસ વર્ષમાં કૂદકો જોવા મળે છે.

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

આપણે ધારી શકીએ કે નોંધણીનો દર સ્થાયી રીતે 0.22 ટકા વધી રહ્યો છે.

ગાણિતિક વર્ણન : આપણે એવું ધાર્યું કે નોંધણીનો દર સ્થાયી રીતે 0.22 % પ્રતિવર્ષ વધી રહ્યો છે. આથી, નોંધણીની ટકાવારી પ્રથમ વર્ષમાં $= 41.9 + 0.22$

નોંધણીની ટકાવારી બીજા વર્ષે $= 41.9 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 2 \times 0.22$

નોંધણીની ટકાવારી ત્રીજા વર્ષે $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22$

આથી, પ્રત્યેક $n \geqslant 1$ માં નોંધણીની ટકાવારી n માં વર્ષે $= 41.9 + 0.22n$, (1)

હવે, આપણે નોંધણી 50 ટકાએ પહોંચે તે વર્ષોની સંખ્યા શોધવાની છે.

માટે આપણે આ સમીકરણ કે સૂત્રમાં n ની કિંમત શોધવી પડશે.

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad (2)$$

સોપાન 2 : ઉકેલ : સમીકરણ (2) n માટે ઉકેલતાં...

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} - \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન :

વર્ષોની સંખ્યા પૂર્ણાંક હોવાથી આપણે ત્યાર બાદનો ઉચ્ચતમ પૂર્ણાંક 37 લઈશું. આથી, નોંધણીની ટકાવારી 50 % $1991 + 37 = 2028$ માં થશે.

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નમાં સામાન્ય રીતે આપણે અહીં અટકી જઈએ. પરંતુ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યા સાથે કાર્ય કરીએ છીએ માટે આપણે જોવું જોઈએ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ કિંમત કેટલી મર્યાદામાં મેળવી શકાય.

સોપાન 4 : યથાર્થતા :

ચાલો ચકાસીએ કે સૂત્ર (1)એ વાસ્તવિકતાની કેટલું નજીક છે. ચાલો સૂત્ર (1)નો ઉપયોગ કરીને આપણે જે વર્ષો જાણીએ છીએ તે માટે કિંમત મેળવીએ અને તેની આપેલી કિંમતો સાથે તુલના કરી તફાવત શોધીએ. કોષ્ટક A2.4 માં આ કિંમતો આપેલી છે.

કોષ્ટક A2.4

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)	(1) દ્વારા મળતી કિંમત (ટકામાં)	તફાવત (ટકામાં)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

તમે જોઈ શકો છો કે સૂત્ર (1) દ્વારા મેળવેલ કેટલીક કિંમતો મૂળ કિંમત કરતાં 0.3 % અથવા 0.5 % થી પણ ઓછી છે. હકીકતે પ્રતિ વર્ષ વધારો 1 % થી 2 % હોવાથી આશરે 3 થી 5 વર્ષનો તફાવત વધી શકે છે. આપણે કદાચ એવું સૂત્ર (1) સ્વીકારીએ અને અટકીએ. આ વિકલ્પમાં (1) એ આપણું ગાણિતિક મોડેલ છે.

ધારો કે આપણે એવું નક્કી કરીએ કે આ ભૂલ ઘણી મોટી છે અને આપણે આ નમૂનો સુધારવો છે. તો આપણે સોપાન (1)ના નિર્માણમાં પાછા જવું જોઈએ. સમીકરણ (1) બદલવું જોઈએ. ચાલો આપણે તેમ કરીએ.

સોપાન 1 : પુનઃ નિર્માણ : આપણે એવું ધાર્યું હતું કે કિંમતો સ્થાયી રીતે 0.22 % વધે છે. પરંતુ, આપણે ત્રુટિ ઘટાડવા માટે સુધારણા પરિબળ રજૂ કરીશું. આ માટે આપણે બધી જ ત્રુટિઓની સરાસરી શોધીએ, આ પ્રમાણે

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

આપણે ત્રુટિઓની સરાસરી લઈએ અને આપણા સૂત્રને આ કિંમતથી સુધારીએ.

સુધારેલ ગાણિતિક વર્ણન : ચાલો હવે આપણે ત્રુટિઓની સરાસરીને આપણા નોંધણીની ટકાવારીના સૂત્ર જે (1) આપેલ છે તેમાં ઉમેરીએ. આથી, આપણું સુધારેલ સૂત્ર.

$n \geq 1$ માટે n માં વર્ષમાં નોંધણીની ટકાવારી $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$ (3)

આ જ પ્રમાણે આપણે સમીકરણ (2)ને પણ યોગ્ય રીતે સુધારીએ. આથી n માટેનું નવું સમીકરણ :

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad (4)$$

સોપાન 2 : સુધારેલો ઉકેલ : સમીકરણ (4)ને n માટે ઉકેલતા આપણને

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$ મળશે.

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $n = 36$ માટે પ્રાથમિક શાળાઓમાં કન્યાઓની નોંધણી 50 % વર્ષ પછી એટલે કે 1991+36=2027 માં થશે.

સોપાન 4 : યથાર્થતા : ફરી વખત આપણે સૂત્ર (3)નો ઉપયોગ કરવાથી મળેલ કિંમતોની ખરેખર કિંમત સાથે તુલના કરીએ : કોષ્ટક A2.5 માં તુલના આપેલી છે.

કોષ્ટક A2.5

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)	આપેલ કિંમતો (1) દ્વારા	કિંમતોનો તફાવત	(3)દ્વારા મળતું મૂલ્ય	મૂલ્યોનો તફાવત
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

તમે જોઈ શકો છો કે સૂત્ર (4) દ્વારા મેળવેલ ઘણી બધી કિંમતો સૂત્ર (2) દ્વારા મેળવેલ કિંમત કરતાં વાસ્તવિક કિંમતની વધુ નજીક છે. આ કિસ્સામાં ત્રુટિઓની સરાસરી 0 છે.

આપણે આપણી પ્રક્રિયા અહીં અટકાવીશું. આથી સમીકરણ (4) આપણું ગાણિતિક મોડેલ છે. તે વર્ષો અને કુલ નોંધણીમાંથી કન્યાઓની નોંધણીની ટકાવારી વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ આપે છે.

આપણે વૃદ્ધિને દર્શાવતા ગાણિતિક મોડેલની રચના કરી છે.

ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિમાં જે પ્રક્રિયાને આપણે અનુસર્યા તેને ગાણિતિક મોડેલિંગ કહે છે.

આપણી પાસે રહેલા ગાણિતિક સિદ્ધાંતોની મદદથી આપણે ગાણિતિક મોડેલની રચના કરવા આપણે પ્રયાસ કર્યો. આપણી

પાસે રહેલ માહિતી પરથી અનુમાન લગાવવા માટે વધુ સારા ગાણિતિક સિદ્ધાંતો ઘણા છે. પરંતુ તે બધા આ અભ્યાસક્રમના ક્ષેત્રથી પર છે. આ મોડેલ રચવાનો આપણો ધ્યેય તમને મોડેલિંગ પ્રક્રિયા સમજાવવાનો હતો, નહિ કે આ તબક્કે ચોક્કસ અનુમાન લગાવતા શીખવવાનો.

હવે તમને જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિઓમાં જે સમજ આપણી ચર્ચામાં આપી તે ચકાસવી ગમશે. અહીં તમારા પ્રયત્ન માટે સ્વાધ્યાય આપેલ છે.

સ્વાધ્યાય A2.2

1. 400 મીટરની રેસ ઓલિમ્પિકમાં ઉમેરાઈ છે ત્યારથી ગોલ્ડ મૅડલ મેળવનારાઓના સમય નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલા છે. વર્ષ અને સમય વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું ગાણિતિક મોડેલ તૈયાર કરો. આગામી ઓલિમ્પિક માટેના સમયના અંદાજ માટે તેનો ઉપયોગ કરો.

કોષ્ઠક A2.6

વર્ષ	સમય(સેકન્ડમાં)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 મોડેલિંગની પ્રક્રિયા, તેના ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ

ચાલો આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગના જે ઉદાહરણોની ચર્ચા કરી તેના પાસાઓની સાથે આપણી ચર્ચા હવે પૂર્ણ કરીએ. અગાઉના વિભાગોના આધારે આપણે હવે મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ સોપાનોની સંક્ષિપ્ત રૂપરેખા આપવાની સ્થિતિમાં છીએ.

સોપાન 1 : નિર્માણ : તમે વિભાગ A2.2 ના ઉદાહરણ (1)ના નિર્માણનો ભાગ અને A2.3 નું મોડેલ જેની આપણે ચર્ચા કરી તેના નિર્માણના ભાગ વચ્ચેનો તફાવત નોંધ્યો હશે. ઉદાહરણ (1)ની બધી જ માહિતી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા તૈયાર સ્વરૂપમાં છે, પરંતુ A2.3 માં આપેલ મોડેલમાં આવું ન હતું. વધુમાં તે આપણને ક્યારેક ગાણિતિક વર્ણન શોધવા તરફ દોરી જાય. આપણે આપણું પ્રથમ સૂત્ર ચકાસ્યું અને મેળવ્યું કે તે બીજા સૂત્ર જેટલું સારુ ન હતું. આ સામાન્ય રીતે વ્યાપક સ્વરૂપે સત્ય છે. જેમકે જ્યારે વ્યવહારુ જીવનની પરિસ્થિતિના મોડેલ લઈએ ત્યારે પ્રથમ મોડેલમાં મોટે ભાગે પરિવર્તન કરવું પડે. જ્યારે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યા ઉકેલવાની હોય ત્યારે નિર્માણમાં ઘણો સમય લાગે છે. ઉદાહરણ તરીકે ન્યૂટનના ગતિના ત્રણ

નિયમો; જે ગતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે તેને સરળતાથી દર્શાવી શકાય પરંતુ ન્યૂટને ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં માહિતી અને અગાઉના વૈજ્ઞાનિકોએ કરેલાં કાર્યોનો અભ્યાસ કરી નિયમો મેળવ્યા હતા.

નિર્માણમાં નીચેનાં ત્રણ સોપાનો સંકળાયેલાં છે :

(i) સમસ્યા કથન : મોટે ભાગે સમસ્યા અસ્પષ્ટ રીતે રજૂ થતી હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે કુમાર અને કન્યાઓની નોંધણી સમાન થાય તેની ખાતરી કરવી તે વિશાળ ધ્યેય છે. આનો અર્થ કદાચ એ થાય કે શાળાએ જવાની ઉંમરના 50% કુમારો અને શાળાએ જવાની ઉંમરની 50% કન્યાઓની નોંધણી થવી જોઈએ. બીજી રીતે કહીયે તો શાળાએ જતા બાળકોમાં 50% કન્યાઓ હોય. આપણી સમસ્યામાં આપણે બીજો અભિગમ અપનાવેલ છે.

(ii) સંબંધિત પરિબળોને ઓળખવા : નક્કી કરો કે કયા જથ્થાઓ અને સંબંધો આપણી સમસ્યા માટે અગત્યના છે અને જેને અવગણી શકાય તેવા કયા અગત્યના નથી. ઉદાહરણ તરીકે પ્રાથમિક શાળામાં નોંધણી બાબતમાં આપણી સમસ્યામાં ગત વર્ષે નોંધાયેલ કન્યાઓની ટકાવારીની ચાલુ વર્ષે નોંધાનાર કન્યાઓની ટકાવારી પર અસર પડે છે, કારણ કે જેમ વધુ ને વધુ કન્યાઓ શાળામાં નોંધાય છે તેમ વાલીઓ એવું મહેસૂસ કરે છે કે પોતાની દીકરીઓને પણ શાળામાં મૂકવી જોઈએ. પરંતુ આપણે આ પરિબળને અવગણ્યું છે. કારણ કે આ કદાચ ત્યારે જ ઉપયોગી બને જ્યારે નોંધણી ચોક્કસ ટકાવારી કરતાં વધી જાય. વળી, આ પરિબળને ઉમેરતાં આપણો નમૂનો વધારે જટિલ બની જાય.

(iii) ગાણિતિક વર્ણન : હવે ધારો કે સમસ્યા શું છે તે બાબતે આપણે સ્પષ્ટ છીએ અને કયા પાસાઓ બીજા પાસાઓ કરતાં વધુ સંબંધિત છે, તો આપણે જે પાસાઓ સંબંધિત છે તેમની વચ્ચેનો સંબંધ સમીકરણ, આલેખ કે બીજા કોઈ યોગ્ય ગાણિતિક વર્ણન દ્વારા શોધવો પડે. અને જો તે સમીકરણ હોય, તો બધા જ અગત્યનાં પાસાઓને ગાણિતિક સમીકરણમાં ચલ તરીકે દર્શાવવાં જોઈએ.

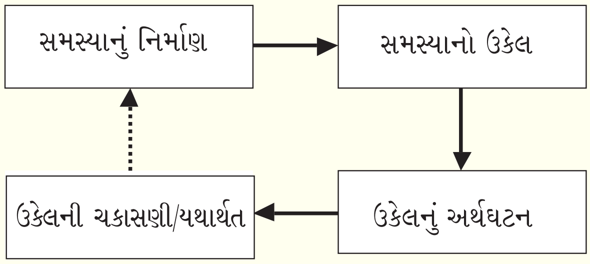
સોપાન 2 : ઉકેલ મેળવવો : ગાણિતિક નિર્માણ કંઈ ઉકેલ આપતા નથી. આપણે આ કૂટપ્રશ્નને સમકક્ષ ગાણિતિક રીતે ઉકેલવો પડશે. અહીં તમારું ગાણિતિક જ્ઞાન ઉપયોગી થશે.

સોપાન 3 : ઉકેલનું અર્થઘટન : ગાણિતિક ઉકેલ એ નમૂનામાં કેટલાક ચલની કિંમત કે કિંમતો દર્શાવે છે. આપણે જીવનના વાસ્તવિક કોયડાઓમાં જઈએ અને જોઈએ કે આ કિંમતોનો શો અર્થ થાય છે.

સોપાન 4 : ઉકેલની યથાર્થતા : આપણે A2.3 માં જોયું કે ઉકેલ મેળવ્યા બાદ તે વાસ્તવિકતાને અનુરૂપ છે કે નહિ તે આપણે ચકાસવું જોઈએ. જો તે અનુરૂપ હોય તો ગાણિતિક મોડેલ સ્વીકાર્ય છે. જો ગાણિતિક ઉકેલ અનુરૂપ ન હોય, તો આપણે ફરી નિર્માણના સોપાનમાં જઈ આપણું મોડેલ સુધારવા પ્રયત્ન કરવો જોઈએ.

પ્રક્રિયાનું આ સોપાન એ શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો અને ગાણિતિક મોડેલિંગ વચ્ચેનો મહત્ત્વનો તફાવત છે. આ મોડેલિંગનું ખૂબ જ અગત્યનાં સોપાનો પૈકીનું એક છે. તે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોમાં જોવા મળતું નથી. જોકે કેટલાક વ્યવહારુ જીવનની પરિસ્થિતિઓમાં સમસ્યા સરળ હોય તો સાચો ઉકેલ સીધો મળી જાય ત્યારે યથાર્થતાની જરૂર પડતી નથી. આપણે A2.3 ના પ્રથમ મોડેલમાં આ વિચાર્યું હતું.

પૃષ્ઠ 287 પર દર્શાવેલ આકૃતિ A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગના સોપાનોનો ક્રમ દર્શાવતો સારાંશ આપેલ છે. યથાર્થતાના સોપાનથી નિર્માણના સોપાન તરફથી ગતિને ત્રૂટક તીર વડે દર્શાવેલ છે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, આ સોપાનો દરેક વખતે ફરી કરવાની જરૂર હોતી નથી.



આકૃતિ A2.2

હવે તમે ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ તબક્કાઓનો અભ્યાસ કર્યો. ચાલો આપણે તેનાં કેટલાક પાસાઓની ચર્ચા કરીએ.

ગાણિતિક મોડેલિંગનો ધ્યેય એ છે કે વ્યવહારુ જીવનની સમસ્યા વિશેની કેટલીક અગત્યની માહિતી મેળવવી અને તેનું ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નમાં રૂપાંતર કરવું. તે ખાસ કરીને જ્યારે સીધા અવલોકન અથવા પ્રયોગો કરીને આ માહિતી મેળવવી શક્ય ન હોય અથવા વિધિ ખૂબ જ ખર્ચાળ હોય ત્યારે ઉપયોગી નીવડે છે.

તમને નવાઈ પણ લાગશે કે શા માટે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ હાથ ધરીએ છીએ ? ચાલો આપણે મોડેલિંગના કેટલાક ફાયદાઓ જોઈએ. ધારો કે આપણે મથુરા રિફાઈનરીમાંથી વિસર્જિત થતા પ્રદુષિત પદાર્થોની તાજમહેલ પર થતા ખવાણની અસરનો અભ્યાસ કરવો છે. આપણે તાજમહેલ પર સીધા પ્રયોગ હાથ ન ધરી શકીએ, કે તેમ કરવું કદાચ સલામત પણ નથી. આપણે પ્રમાણિત કરેલું ભૌતિક મોડેલ વાપરી શકીએ પરંતુ આ માટે આપણને કદાચ ખાસ સુવિધાઓની જરૂર પડે. તે ખર્ચાળ હોઈ શકે. અહીં ગાણિતિક નમૂનો ખૂબ જ ઉપયોગી થાય.

ધારો કે પાંચ વર્ષ બાદ આપણને કેટલી પ્રાથમિક શાળાઓની જરૂર પડશે તે જાણવા માંગીએ તો આપણે આ સમસ્યાને માત્ર ગાણિતિક નમૂનાનો ઉપયોગ કરી ઉકેલી શકીએ. આ જ પ્રમાણે, વૈજ્ઞાનિકો કેટલીક અસાધારણ ઘટનાઓનું અસ્તિત્વ પણ માત્ર મોડેલિંગથી વર્ણવવા સમર્થ છે.

તમે A2.3 વિભાગમાં જોયું કે, બીજા ઉદાહરણમાં વધુ સારી પદ્ધતિથી ઉકેલને સુધારવા આપણે પ્રયત્ન કર્યો. પરંતુ આપણે અટકી ગયા કારણ કે આપણી પાસે ગાણિતિક ઉપકરણો નથી. વ્યવહારુ જીવનમાં પણ આવું અવારનવાર બને છે કે આપણી પાસે ગાણિતિક ઉપકરણો પ્રાપ્ય ન હોવાથી અંદાજિત ઉકેલોથી સંતુષ્ટ થવું પડે છે. ચોક્કસ ઉકેલ આપતાં ગાણિતિક ઉપકરણો પ્રાપ્ય ન હોવાથી મોડેલિંગમાં ખૂબ જ જટિલ હોય તેવાં નમૂનારૂપ સમીકરણો વપરાય છે.

તમને થશે કે કઈ સીમા સુધી આપણે આપણો મોડેલિંગ સુધારવું જોઈએ. આ માટે આપણે વધુ પરિબળોને ધ્યાનમાં લેવા જરૂરી છે. જ્યારે આપણે તેવું કરીએ તો આપણે આપણાં ગાણિતિક સમીકરણોમાં વધુ ચલ ઉમેરવા પડે - જો આપણે તે ઉમેરીએ તો તે વધુ જટિલ નમૂનો બની જાય કે જેથી તેનો ઉપયોગ કરવો મુશ્કેલ થાય. મોડેલિંગ ઉપયોગમાં સરળ હોય તેવું જ હોવું જોઈએ. સારું મોડેલ બે બાબતોને સમતોલ રાખે છે :

1. ચોકસાઈ એટલે કે વાસ્તવિકતાની કેટલી નજીક છે.

2. સરળતાથી ઉપયોગ કરી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે ન્યૂટનના ગતિના નિયમો ખૂબ જ સરળ છે એટલું જ નહિ ઘણીબધી ભૌતિક પરિસ્થિતિઓમાં મોડેલિંગ માટે પૂરતા સક્ષમ છે.

આથી, શું ગાણિતિક મોડેલિંગ આપણી બધી જ સમસ્યાઓના ઉકેલ આપે છે ? તદ્દન નહિ, તેને પણ પોતાની મર્યાદાઓ છે.

આથી, આપણે ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ મોડેલ એ જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાઓનું માત્ર સરળીકરણ છે અને તે બન્ને (મોડેલ અને જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાઓ) સમાન નથી. આ કોઈ રાષ્ટ્ર અને તે રાષ્ટ્રની લાક્ષણિકતાઓ દર્શાવતા નકશા વચ્ચેના તફાવત જેવું થયું. આપણે નકશા પરથી કોઈ પ્લેનની દરિયાની સપાટીથી ઊંચાઈ શોધી શકીએ. પરંતુ ત્યાંના લોકોની લાક્ષણિકતાઓ શોધી ન શકીએ. આથી આપણે મોડેલ જે હેતુ માટે તૈયાર થયો હોય તે પૂરતો ઉપયોગ કરી શકીએ. તેને રચવા દરમિયાન અવગણેલા તમામ ઘટકો યાદ રાખવા પડે. આપણે મોડેલ જ્યાં લાગુ પાડી શકાય તે મર્યાદામાં જ તેનો ઉપયોગ કરી શકીએ. આગળના ધોરણમાં આપણે આ પાસા પર વધુ ચર્ચા કરીશું.

સ્વાધ્યાય A2.3

1. પાઠ્યપુસ્તકમાં આવતા શાબ્દિક કોયડાઓના ઉકેલ ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાથી કેમ અલગ છે ?
2. ધારો કે તમે ચાર રસ્તા પાસેના ટ્રાફિક જંક્શન પર વાહનોનો પ્રતીક્ષા સમય લઘુતમ કરવા ઈચ્છો છો. આમાંથી કયાં પરિબળો અગત્યના છે અને કયાં પરિબળો અગત્યના નથી ?

   (i) પેટ્રોલની કિંમત

   (ii) ચાર અલગ અલગ માર્ગેથી આવતાં વાહનોનો દર

   (iii) સાઈકલ અને રિક્ષા જેવા ધીમે ચાલતાં વાહનો તથા કાર અને સ્કૂટર જેવા ઝડપી ચાલતાં વાહનોનો ગુણોત્તર

A2.5 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નીચેના મુદાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં સમાવિષ્ટ સોપાનો
2. કેટલાક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ (રચના)
3. ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો નીચેના ખાનામાં દર્શાવેલ છે :

   1. નિર્માણ : (i) સમસ્યાને દર્શાવવી
      (ii) સંબંધિત પરિબળોને ઓળખવાં
      (iii) ગાણિતિક વર્ણન
   2. ઉકેલ શોધવો.
   3. જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાના સંદર્ભે ઉકેલનું અર્થઘટન કરવું.
   4. અભ્યાસ કરેલ સમસ્યાઓ માટે કઈ સીમા સુધી પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે તે ચકાસવું / માન્ય કરવું.
   5. ગાણિતિક મોડેલિંગના હેતુઓ, ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ