નિશ્ચાયક

- **દ્વિહાર નિશ્ચાયક :** જો $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$; તો $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ને દ્વિહાર નિશ્ચાયક કહે છે.

મૂલ્ય : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & \text{પ્રથમ હાર} & R_1 \\ \hline a_2 & b_2 & \text{દ્વિતીય હાર} & R_2 \end{array} \quad \left.\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{પ્રથમ} \\ \text{સ્તંભ}\end{array} C_1, \quad \left|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{દ્વિતીય} \\ \text{સ્તંભ}\end{array} C_2, \quad \left|\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{અગ્રવિકર્ણ}} \\ a_1 & \\ & b_2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{પ્રતિવિકર્ણ}} \\ & b_1 \\ a_2 & \end{array}$$

- **ત્રિહાર નિશ્ચાયક :** જો $a_i, b_i, c_i \in R$; $i = 1, 2, 3$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ને ત્રિહાર નિશ્ચાયક કહે છે.

- **ત્રિહાર નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

- **ઉપનિશ્ચાયક :** ત્રિહાર નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક જે હાર અને જે સ્તંભમાં હોય, તે હાર અને તે સ્તંભને દૂર કરી બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખવાથી મળતા નિશ્ચાયકને તે ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે.
- **સહ અવયવ :** નિશ્ચાયકના વિસ્તરણમાં કોઈ પણ ઘટકના સહગુણકને તે ઘટકનો સહઅવયવ કહે છે.
  i મી હાર અને j મા સ્તંભના ઘટકના ઉપનિશ્ચાયકના વિસ્તરણને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણતાં તે ઘટકનો સહઅવયવ મળે છે.
- **પ્રમેય :** ત્રિહાર નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે.
- **પ્રમેય :** ત્રિહાર નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો વડે ગુણી ઉમેરતાં મળતો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.
- **સારસની રીત :**

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \quad = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

સંકેતો : (1) R_{ij} (C_{ij}); $i \neq j$; i મી હાર અને j મી હાર (i માં સ્તંભ અને j માં સ્તંભ)ની અદલાબદલી.

(2) $R_i \leftrightarrow C_i$ પ્રત્યેક હારનું અનુરૂપ સ્તંભમાં રૂપાંતર કરવાની ક્રિયા.

(3) R_i (k); [C_i (k)]; i મી હાર (સ્તંભ)ના દરેક ઘટકને k વડે ગુણવાની ક્રિયા.

(4) R_{ij} (k); [C_{ij} (k)]; $i \neq j$; i મી હાર (સ્તંભ)ના દરેક ઘટકને k ($k \in R$) વડે ગુણી jમી હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરવાની ક્રિયા.

- **નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો**

(1) નિશ્ચાયકની બધી જ હારનું અનુરૂપ સ્તંભમાં રૂપાંતર કરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી. $D' = D$ $(R_i \leftrightarrow C_i)$

(2) નિશ્ચાયકની બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતાં મળતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે. $D' = D$

(3) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને $(k \in R)$ વડે ગુણતા મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય એ મૂળ નિશ્ચાયકના મૂલ્યથી k ગણું થાય છે. $D' = kD$

(4) $$\begin{vmatrix} a_1+p_1 & b_1+p_2 & c_1+p_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(5) જો કોઈ નિશ્ચાયકમાં બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો તે નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(6) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને $k \in R$ વડે ગુણી અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

i.e. $R_{ij}(k)$ = i મી હારના ઘટકોને $k \in R$ વડે ગુણી j મી હારના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

તે જ રીતે $C_{ij}(k)$ લઈ શકાય.

- **બે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણની સંહતિનો ઉકેલ :** બે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ

$a_ix + b_iy + c_i = 0$ જ્યાં $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $a_i, b_i, c_i \in R$, $i = 1, 2$ એટલે કે $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે,

(**નોંધ :** દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ રેખા દર્શાવે છે.)

(1) જો $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ તો સમીકરણનો અનન્ય ઉકેલ મળે. રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે.

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \;;\quad y = -\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$; અથવા $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$; તો ઉકેલ ખાલીગણ $(\emptyset)$ મળે. રેખાઓ સમાંતર થાય.

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ એટલે કે $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

તો ઉકેલ અનંતગણ છે. રેખાઓ સંપાતિ છે.

- **ત્રિચલ સુરેખ સંહતિ :**

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

જો $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, તો અનન્ય ઉકેલ મળે.

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$\frac{x}{D_1} = \frac{-y}{D_2} = \frac{z}{D_3} = \frac{1}{D}$ અને D_1, D_2 અથવા $D_3 \neq 0$

જો $D = 0$ થાય તો ઉકેલ $\emptyset$ મળે. $D_1 = 0, D \neq 0$ તો $x = 0$ તે જ રીતે $y = 0, z = 0$ બને.

(1) **સંમિત નિશ્ચાયક :** $\begin{vmatrix} x & p & q \\ p & y & r \\ q & r & z \end{vmatrix} = xyz + 2pqr - p^2z - q^2y - r^2x$

- **અયુગ્મ કક્ષા ધરાવતો વિસંમિત નિશ્ચાયક**

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- **વૃત્તિય નિશ્ચાયક :** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = -(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

- **ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ :** જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) હોય, તો

  તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2}\ |D|$

  જ્યાં $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

  ઊગમબિંદુના સ્થાનાંતરથી ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના મૂલ્યમાં ફેરફાર થતો નથી.

- જો $D = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}$ જ્યાં $p, q, r, s\ t, u \in R$ (અચળ સંખ્યાઓ)

  જ્યાં $f(x)$, $g(x)$ અને $h(x)$ એ I પર વિકલનીય છે, તો

$$\frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

- જો $f_i(x)$, $g_i(x)$ અને $h_i(x)$ એ અંતરાલ I ના પ્રત્યેક x પર વિકલનીય વિધેયો છે. $i = 1, 2, 3$ તથા

$$D = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$ તો,

$$\frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = 0$ અને $ax^2 + 2bxy + cy^2 \neq 0$, તો ......

(A) a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

(B) a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(C) a, b, c સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

(D) a, b, c એ સમગુણોત્તર, સમાંતર કે સ્વરિત શ્રેણીમાં નથી.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ ax+by & bx+cy & -ax^2-2bxy-cy^2 \end{vmatrix} = 0$ અથવા $C_{13}\ (-x)\ \ C_{23}\ (-y)$, $(C_3 \to C_3 + (-x)C_1$ $C_3 \to C_3 + (-yC_2)$

$\therefore (-ax^2 - 2bxy - cy^2)(ac - b^2) = 0$

$\therefore ac - b^2 = 0$ કારણ કે $ax^2 + 2bxy + cy^2 \neq 0$

$\therefore ac = b^2$

$\therefore a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(2) જો $s = p + q + r$, તો $\begin{vmatrix} s+r & p & q \\ r & s+p & q \\ r & p & s+q \end{vmatrix}$ ની કિંમત ...... છે.

(A) $2s^2$ (B) $2s^3$ (C) s^3 (D) $3s^3$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} s+r & p & q \\ r & s+p & q \\ r & p & s+q \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} s+p+q+r & p & q \\ s+p+q+r & s+p & q \\ s+p+q+r & p & s+q \end{vmatrix}$$ $C_{21}(1) \quad C_{31}(1)$
$[C_1 \to C_1 + C_2 \; C_1 \to C_1 + C_3]$

$$= 2s \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 1 & s+p & q \\ 1 & p & s+q \end{vmatrix}$$ $C_1\left(\frac{1}{2s}\right) \quad (s = p + q + r,)$

$$= 2s \begin{vmatrix} 0 & -s & 0 \\ 1 & s+p & q \\ 0 & -s & s \end{vmatrix}$$ $R_{21}(-1) \;\; R_{23}(-1)$
$[R_1 \to R_1 + (-1)\, R_2$
$R_3 \to R_3 + R_2(-1)]$

$= 2s^3$ **જવાબ :** (B)

(3) જો $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$ જ્યાં $x \neq 0, y \neq 0$ તો D એ ...... $x, y \in N$ (AIEEE : 2007)

(A) x અને y વડે વિભાજ્ય છે.
(B) x વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ y વડે વિભાજ્ય નથી.
(C) x વડે વિભાજ્ય નથી પરંતુ y વડે વિભાજ્ય છે.
(D) x અને y પૈકી એક પણ વડે વિભાજ્ય નથી.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ 0 & x & -y \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$ $R_{21}(-1) \qquad R_{32}(-1)$

$= xy.$

આથી, D એ x અને y વડે વિભાજ્ય છે. **જવાબ :** (A)

(4) જો w એ 1 નું ઘન મૂળ હોય, અને $w \neq 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+i+w^2 & w^2 \\ 1-i & -1 & w^2-1 \\ -i & -1+w-i & -1 \end{vmatrix} = ...$$ (AIEEE : 2002)

(A) 0 (B) 1 (C) w (D) w^2

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1+i+w^2 & w^2 \\ 1-i & -1 & w^2-1 \\ -i & -1+w-i & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1-i & w+w^2 & w^2-1 \\ 1-i & w+w^2 & w^2-1 \\ -i & -1+w-i & -1 \end{vmatrix} = 0$$

R_{31} (1) **જવાબ :** (A)

(5) જો 1, w, w^2 એ 1 નાં ઘન મૂળ હોય, તો

$$\begin{vmatrix} 1 & w^n & w^{2n} \\ w^n & w^{2n} & 1 \\ w^{2n} & 1 & w^n \end{vmatrix} = ...$$

(AIEEE : 2003)

(A) 0 (B) 1 (C) w (D) w^2

ઉકેલ : w એ 1 નું ઘન મૂળ છે, તેથી $w^3 = 1$; $w^{3n} = 1^n = 1$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & w^n & w^{2n} \\ w^n & w^{2n} & 1 \\ w^{2n} & 1 & w^n \end{vmatrix}$$

$= 1\ (w^{3n} - 1) - w^n\ (w^{2n} - w^{2n}) + w^{2n}\ (w^n - w^{4n})$

$= 1\ (0) - w^n\ (0) + w^{3n}\ (1 - w^{3n}) = 0$ **જવાબ :** (A)

(6) જો $x + 2ay + az = 0$; $x + 3by + bz = 0$, $x + 4cz + cz = 0$ સમીકરણો સુસંગત હોય, તો a, b, c એ ...... છે. $(x, y, z\ = 0)$ (AIEEE : 2003)

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં (B) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં (C) સ્વરિત શ્રેણીમાં (D) ત્રણમાંથી એક પણ નહિ

ઉકેલ : ત્રણે સમીકરણ સુસંગત છે.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2a & a \\ 1 & 3b & b \\ 1 & 4c & c \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ 3bc - 4bc - 2ac + 2ab + 4ac - 3ab = 0$

$\therefore\ -bc + 2ac - ab = 0$

$\therefore\ b = \dfrac{2ac}{a+c}$

$\therefore\ a, b, c$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (C)

(7) જો $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$ અને સદિશો $(1, a, a^2)$; $(1, b, b^2)$ અને $(1, c, c^2)$ એ અસમતલીય હોય, તો

$abc = ...$ (AIEEE : 2003)

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$

(C_{13})

$$\therefore \quad -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad R_1\left(\frac{1}{a}\right), \; R_2\left(\frac{1}{b}\right), R_3\left(\frac{1}{c}\right)$$

(C_{23})

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \; (abc + 1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

આપેલ સદિશો અસમતલીય છે. આથી $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore \; abc + 1 = 0$

$\therefore \; abc = -1$ **જવાબ :** (A)

(8) a ની કઈ કિંમત માટે સમીકરણ સંહતિ

$ax + y + z = a - 1$

$x + ay + z = a - 1$

$x + y + az = a - 1$ ને એક પણ ઉકેલ નથી. (AIEEE : 2005)

(A) 1 (B) -2 સિવાય (C) 2 અથવા 1 (D) -2

ઉકેલ : ધારો કે $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \quad (a + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{21}(1), \; C_{31}\,(1) \text{ અને } C_1 \left(\frac{1}{a+2}\right)$$

$\therefore \; (a+2) \; [a^2 - 1 - 1 \; (a - 1) + 1 \; (1 - a)] = 0$

$(a+2)(a^2 - 1 - a + 1 + 1 - a) = 0$

$(a+2)(a^2 - 2a + 1) = 0.$ આથી $(a+2)(a-1)^2 = 0$

$\therefore\ a = -2$ અથવા $a = 1$

$a = 1$ લેતાં, ત્રણેય સમીકરણ સમાન બને છે. આથી ઉકેલગણ અનંતગણ મળે.

$a = -2$ લેતાં $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ આથી $a = -2$ માટે x નો છેદ શૂન્ય હોવાથી સમીકરણનો એક પણ ઉકેલ નથી.

જવાબ : (D)

(9) જો $a^2 + b^2 + c^2 + 2 = 0$ અને $f(x) = \begin{vmatrix} 1+a^2x & (1+b^2)x & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & 1+b^2x & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & (1+b^2)x & 1+c^2x \end{vmatrix}$ તો,

$f(x)$ એ ...... ઘાતવાળી બહુપદી થાય. (AIEEE : 2005)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $C_2 \to C_2 + C_1$ $C_2 \to C_2 + C_3$

$$\therefore\ f(x) = \begin{vmatrix} 1+a^2x & 1+2x+(a^2+b^2+c^2)x & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & 1+2x+(a^2+b^2+c^2)x & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & 1+2x+(a^2+b^2+c^2)x & 1+c^2x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2x & 1 & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & 1 & (1+c^2)x \\ (1+a^2)x & 1 & 1+c^2x \end{vmatrix} \qquad (a^2+b^2+c^2=-2)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \\ (1+a^2)x & 1 & 1+c^2x \end{vmatrix} \qquad R_1 \to R_1 + (-1)\,R_2,\ R_2 \to R_2 + (-1)\,R_3$$

$= (1-x)(1-x) = 1 - 2x + x^2$ એ બે ઘાતવાળી બહુપદી છે **જવાબ :** (C)

(10) જો $a < 0$ અને $ax^2 + 2bx + c$ નો વિવેચક ઋણ હોય, તો $\begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(AIEEE : 2002)

(A) ધન (B) $(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)$ (C) ઋણ (D) 0

ઉકેલ : $ax^2 + 2bx + c$ નો વિવેચક $\Delta < 0$ અને $a < 0$

$\therefore ax^2 + 2bx + c < 0$ થાય. તથા $b^2 - ac < 0$

$$\therefore \ D = \begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ ax+b & bx+c & -(ax^2+2bx+c) \end{vmatrix} \qquad C_{13}(-x), C_{23}(-1)$$

$= (b^2 - ac)(ax^2 + 2bx + c) > 0$ **જવાબ :** (B)

(11) જો l, m અને n એ કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીના p, q અને r મા પદ હોય તથા $l > 0, m > 0, n > 0$ તો

$$\begin{vmatrix} \log l & p & 1 \\ \log m & q & 1 \\ \log n & r & 1 \end{vmatrix} = ...$$ (AIEEE : 2002)

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $l = AR^{p-1}, m = AR^{q-1}, n = AR^{r-1}$ લો.

$\log l = \log A + (p-1)\log R$, $\log m = \log A + (q-1)\log R$ તથા $\log n = \log A + (r-1)\log R$

$$\therefore \ D = \begin{vmatrix} \log A+(p-1)\log R & p & 1 \\ \log A+(q-1)\log R & q & 1 \\ \log A+(r-1)\log R & r & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log A & p & 1 \\ \log A & q & 1 \\ \log A & r & 1 \end{vmatrix} + \log R \begin{vmatrix} p-1 & p & 1 \\ q-1 & q & 1 \\ r-1 & r & 1 \end{vmatrix} = \log A \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & r & 1 \end{vmatrix} + \log R \begin{vmatrix} p & p & 1 \\ q & q & 1 \\ r & r & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0 + 0 = 0$

$\left(C_1\left(\frac{1}{\log A}\right)\text{પછી } C_1 \rightarrow C_1 + C_3\right)$ **જવાબ :** (D)

(12) જો $a_1, a_2, ..., a_n$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને $a_i > 0, \forall i \geq 1$ તો $\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$

$=$ ...... (AIEEE : 2004-5)

(A) 0 (B) –2 (C) 2 (D) 1

ઉકેલ : $a_i = AR^{i-1} \Longrightarrow \log a_i = \log A + (i-1)\log R$

$$D = \begin{vmatrix} \log A+(n-1)\log R & \log A+n\log R & \log A+(n+1)\log R \\ \log A+(n+2)\log R & \log A+(n+3)\log R & \log A+(n+4)\log R \\ \log A+(n+5)\log R & \log A+(n+6)\log R & \log A+(n+7)\log R \end{vmatrix} \quad R_{23}(-1),\ R_{12}(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} \log A+(n-1)\log R & \log A+(n)\log R & \log A+(n+1)\log R \\ 3\log R & 3\log R & 3\log R \\ 3\log R & 3\log R & 3\log R \end{vmatrix} = 0$$

જવાબ : (A)

→ **બીજી રીત**

$$\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log a_n+\log a_{n+2} & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3}+\log a_{n+5} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6}+\log a_{n+8} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix} \quad C_1 \to C_1 + C_3\,(1)$$

$$= \begin{vmatrix} \log\left(a_{n+1}\right)^2 & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log\left(a_{n+4}\right)^2 & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log\left(a_{n+7}\right)^2 & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} \log a_{n+1} & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+4} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+7} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix} = 2\,(0) = 0$$

જવાબ : (A)

(13) ધારો કે a, b, c કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. બધી જ શૂન્ય ન હોય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x, y, z માટે $x = cy + bz;\ y = az + cx$ અને $z = ay + bx$ છે. તો $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = ...$ (AIEEE : 2008)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

ઉકેલ : $x - cy - bz = 0$

$cx - y + az = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ શૂન્યેતર છે.

$bx + ay - z = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ 1 - a^2 + c(-c - ab) - b\,(ac + b) = 0$

$\therefore\ 1 - a^2 - c^2 - abc - abc - b^2 = 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ **જવાબ :** (B)

(14) ધારો કે $a, b, c \in R - \{0\}$ તથા $a + c \neq 0$

જો $\begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c-1 \\ a-1 & b-1 & c+1 \\ (-1)^{n+2}\,a & (-1)^{n+1}\,b & (-1)^n\,c \end{vmatrix} = 0$ તો n નું મૂલ્ય = ...

(AIEEE : 2009)

(A) શૂન્ય (B) કોઈક શૂન્યેતર યુગ્મ પૂર્ણાંક (C) કોઈક અયુગ્મ પૂર્ણાંક (D) અસંમેય સંખ્યા

ઉકેલ : $D + D_1 = \begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c-1 \\ a-1 & b-1 & c+1 \\ a & -b & c \end{vmatrix} = 0$

$\therefore\ D + (-1)^n \begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a \\ b+1 & b-1 & -b \\ c-1 & c+1 & c \end{vmatrix} = 0 \qquad R_i \leftrightarrow C_i$ જ્યાં $D = \begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix}$

$\therefore\ D + (-1)^n \begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix} = 0$ (C_{13} પછી C_{23} લેતાં). આથી $D + (-1)^n D = 0$

અહીં $D = \begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ -b & b+1 & b-1 \\ c & c-1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 & -2 \\ -b & b+1 & -2 \\ c & c-1 & 2 \end{vmatrix} \qquad C_{23}(-1)$

$= 2\begin{vmatrix} a & a+1 & -1 \\ -b & b+1 & -1 \\ c & c-1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -b & b & -1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{31}(1)$

$= 2\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ -2b & b & -1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{21}(-1)$

$= 4b(a + c) \neq 0$

$(1 + (-1)^n)D = 0$ હોવાથી n અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે. **જવાબ :** (C)

(15) સુરેખ સમીકરણની સંહતિ નીચે મુજબ છે :

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$ સંહતિના ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે. (AIEEE : 2010)

(A) 3 (B) એક (C) શૂન્ય (D) 3 થી વધુ

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $C_{12}(-1)$ C_{32}

(-1)

$\therefore$ ઉકેલ અનન્ય નથી.. સમીકરણ (2) – સમીકરણ (1) કરતાં, $x_1 + x_2 = 0$

$\therefore x_1 + x_2 = 0$ પરથી સમીકરણો, $x_2 + x_3 = 3$ તથા $2x_2 + 2x_3 = 1$

આનો ઉકેલ ન મળે. આ ઉકેલોની સંખ્યા શૂન્ય છે. **જવાબ :** (C)

(16) નીચેની સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય હોય, તો k ની કિંમતનો ગણ ...... છે.

$x - ky + z = 0$

$kx + 3y - kz = 0$

$3x + y - z = 0$ (AIEEE : 2011)

(A) $R - \{-3\}$ (B) $R - \{2\}$ (C) $\{2, -3\}$ (D) $\{2, -3\}$

ઉકેલ : ઉકેલ અનન્ય મળે તે માટે $D \neq 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & -k & 1 \\ k & 3 & -k \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore -3 + k + k(2k) + k - 9 \neq 0$

$\therefore 2k^2 + 2k - 12 \neq 0$

$\therefore 2(k+3)(k-2) \neq 0$

$\therefore k \neq -3$ તથા $k \neq 2$

$k \in R - \{-3, 2\}$ **જવાબ :** (D)

(17) k ની કેટલી કિંમતો માટે સમીકરણ સંહતિ

$(k+1)x + 8y = 4k$

$kx + (k+3)y = 3k - 1$ ને એક પણ ઉકેલ નથી. (JEE : 2013)

(A) અનંત (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : ધારો કે $\begin{vmatrix} k+1 & 8 \\ k & k+3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore k^2 + 4k + 3 - 8k = 0$

$\therefore k^2 - 4k + 3 = 0$

$\therefore k = 3$ અથવા $k = 1$, $k \neq 3, k \neq 1$ માટે અનન્ય ઉકેલ મળે.

જો $k = 3$ લઈએ તો $4x + 8y = 12$ અને $3x + 6y = 8$

એટલે કે $x + 2y = 3$ અને $x + 2y = \frac{8}{3}$

સમાંતર રેખાઓ દર્શાવે છે. ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.

$k = 1$ લેતાં $x + 4y = 2$

$x + 4y = 2$ નો ઉકેલ અનંતગણ છે.

$\therefore$ k ની એક કિંમત ($k = 3$) માટે આપેલ સંહતિને એકપણ ઉકેલ નથી. **જવાબ :** (B)

(18) જો $a + b + c = 0$ હોય, તો $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$ નો એક ઉકેલ ...... છે.

(A) $a^2 + b^2 + c^2$ (B) 0 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : હવે $\begin{vmatrix} a+b+c-x & c & b \\ a+b+c-x & b-x & a \\ a+b+c-x & a & c-x \end{vmatrix} = 0$ $\qquad C_{21}(1),\ C_{31}(1)$

$$\therefore \begin{vmatrix} -x & c & b \\ -x & b-x & a \\ -x & a & c-x \end{vmatrix} = 0 \qquad a + b + c = 0 \text{ મૂકતાં,}$$

$$\therefore -x\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

એક ઉકેલ $x = 0$ થાય. **જવાબ :** (B)

(19) જો $a \neq p,\ b \neq q,\ c \neq r$ અને $\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 2

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} p-a & b-q & 0 \\ 0 & q-b & c-r \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0$ $\qquad [R_1 \to R_1 - R_2,\ R_2 \to R_2 - R_3]$

$$\therefore (p-a)(q-b)(r-c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{a}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{r}{r-c} \end{vmatrix} = 0 \qquad C_1\left(\frac{1}{p-a}\right), C_2\left(\frac{1}{q-b}\right), C_3\left(\frac{1}{r-c}\right)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{a}{p-a}+\frac{b}{q-b}+\frac{r}{r-c} & \frac{b}{q-b} & \frac{r}{r-c} \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{21}(1),\ C_{31}(1)$$

$$\therefore \frac{a}{p-a} + \frac{b}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 0 \qquad [C_1 \to C_1 + C_2,\ C_1 \to C_1 + C_3]$$

$$1 + \frac{a}{p-a} + 1 + \frac{b}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2$$

$$\therefore \frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2$$

જવાબ : (D)

(20) જો a, b, c ભિન્ન અને ધન સંખ્યાઓ હોય, તો $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) ધન (B) શૂન્ય (C) ઋણ (D) સંકર

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

$$= -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

$$= -\frac{1}{2}(a+b+c)\,[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] < 0 \quad a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a, \quad a+b+c > 0$$

નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ઋણ છે.

જવાબ : (C)

(21) $\begin{vmatrix} 10! & 11! & 12! \\ 11! & 12! & 13! \\ 12! & 13! & 14! \end{vmatrix} = ...$

(A) 2 (10! × 13!) (B) 2 (10! 11!) (C) 2 (10! 11! 12!) (D) 2 (10! 12! 13!)

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 10! & 11\times(10!) & 12\times11\times10! \\ 11! & 12\times11! & 13\times12\times11! \\ 12! & 13\times12! & 14\times13\times12! \end{vmatrix} = 10! \times 11! \times 12! \begin{vmatrix} 1 & 11 & 132 \\ 1 & 12 & 156 \\ 1 & 13 & 182 \end{vmatrix}$

$= 10! \times 11! \times 12! \begin{vmatrix} 0 & -1 & -24 \\ 1 & 12 & 156 \\ 0 & 1 & 26 \end{vmatrix}$ $R_{21}(-1), R_{23}(-1)$

$= 10! \times 11! \times 12!\,[1\,(26-24)] = 2\,(10! \times 11! \times 12!)$

જવાબ : (C)

(22) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^k$ તો $k = ...$ $(a+b+c \neq 1)$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$ $C_{21}(-1), C_{32}(-1)$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$ (વિસ્તરણ કરતાં)

$\therefore k = 3$ **જવાબ :** (C)

(23) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = 0$ તો $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \ldots\ldots$

(A) abc (B) 1 (C) -1 (D) $(abc)^{-1}$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ 0 & b & -c \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = 0$ $R_{21}(-1), R_{32}(-1)$

$\therefore a(b+bc+c) + b(c) = 0$

$ab + abc + ac + bc = 0$

$ab + bc + ca = -abc$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1$ **જવાબ :** (C)

(24) $\begin{vmatrix} \sqrt{14}+\sqrt{3} & \sqrt{20} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{28} & \sqrt{25} & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{70} & \sqrt{15} & \sqrt{25} \end{vmatrix} = \ldots\ldots$

(A) $15\sqrt{2} - 25\sqrt{3}$ (B) $15\sqrt{2} + 25\sqrt{3}$ (C) $25\sqrt{3} - 15\sqrt{2}$ (D) $-25\sqrt{3} - 15\sqrt{2}$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} \sqrt{14}+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{28} & \sqrt{5}\sqrt{5} & \sqrt{2\times 5} \\ 3+\sqrt{70} & \sqrt{3\times 5} & \sqrt{5}\sqrt{5} \end{vmatrix}$

$$= 5 \begin{vmatrix} \sqrt{14}+\sqrt{3} & 2 & 1 \\ \sqrt{15}+\sqrt{28} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 3+\sqrt{70} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \qquad C_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) C_3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 5 \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 & 1 \\ \sqrt{15} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \qquad C_{31}\left(-\sqrt{14}\right)$$

$$= 5 \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \qquad C_{21}\left(-\sqrt{3}\right)$$

$= -5\sqrt{3}\ [5 - \sqrt{6}\,] = -25\sqrt{3} + 5\sqrt{18} = 15\sqrt{2} - 25\sqrt{3}$ **જવાબ :** (A)

(25) $\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ ...... છે.

(A) $\{1\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{4\}$ (D) $\{3\}$

ઉકેલ :

$$\therefore \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ x-4 & -1 & -4 \\ x-8 & -11 & -40 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{12}(-2),\ C_{13}(-3)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ -6 & -12 & -42 \end{vmatrix} = 0 \qquad R_2 \to R_2 + R_1\ (-1),\quad R_3 \to R_3 + R_1\ (-1)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad (R_2 \left(-\frac{1}{2}\right),\ R_3 \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$\therefore x - 2 - 4 + 2 = 0$

$\therefore x = 4$

જવાબ : (C)

(26) જો $D_r = \begin{vmatrix} 1 & n & n \\ 2r & n^2+n+1 & n^2+n \\ 2r-1 & n^2 & n^2+n+1 \end{vmatrix}$ અને $\sum_{r=1}^{n} D_r = 56$ તો $n = ...$ $(n \in N)$

(A) 7 (B) 8 (C) 4 (D) 6

ઉકેલ : $$\sum_{r=1}^{n} D_r = \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^{n} 1 & n & n \\ \sum_{r=1}^{n} 2r & n^2+n+1 & n^2+n \\ \sum_{r=1}^{n}(2r-1) & n^2 & n^2+n+1 \end{vmatrix} = 56$$

$$\therefore 56 = \begin{vmatrix} n & n & n \\ n^2+n & n^2+n+1 & n^2+n \\ n^2 & n^2 & n^2+n+1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore 56 = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 \\ n^2+n & 1 & 0 \\ n^2 & 0 & n+1 \end{vmatrix} \qquad C_{12}\ (-1),\ C_{13}\ (-1)$$

$\therefore 56 = n(n+1)$

$\therefore 7 \times 8 = n(n+1)$

$\therefore n = 7$

જવાબ : (A)

નોંધ : $n(n+1) = (-8)(-7)$ પરથી $n = -8$ શક્ય નથી.

(27) $\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+y & c \\ a & b & c+z \end{vmatrix} = ...$

(A) $xyz\left(1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$ (B) $xyz\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$ (C) $abc\left(1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$ (D) $abc\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} x & -y & 0 \\ 0 & y & -z \\ a & b & c+z \end{vmatrix}$ $R_{21}(-1), R_{32}(-1),$

$= x\,[cy + yz + bz] + yaz$

$= cxy + xyz + ayz + bzx$

$= xyz\left(\frac{c}{z}+1+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$ **જવાબ :** (B)

((28) જો l, m, n એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, કે જેથી $l^2 + m^2 + n^2 = 0$ તો $\begin{vmatrix} 1+l^2 & lm & ln \\ lm & 1+m^2 & mn \\ nl & mn & 1+n^2 \end{vmatrix} = ...$

(A) $lmn - 1$ (B) $l + m + n + 2$ (C) 0 (D) 1

ઉકેલ : અહીં $l^2 + m^2 + n^2 = 0$ હોવાથી $l = 0$, $m = 0$ અને $n = 0$ થાય.

$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **જવાબ :** (D)

(29) જો $\begin{vmatrix} a & b & a-b \\ b & c & b-c \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ તો a, b, c એ ...... માં છે.

(A) સમાંતર શ્રેણી (B) સ્વરિત શ્રેણી (C) સમગુણોત્તર શ્રેણી (D) આ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : $2[b^2 - bc - ac + bc] - 1\,[ab - ac - ab + b^2) = 0$

$\therefore 2b^2 - 2ac + ac - b^2 = 0$

$\therefore b^2 - ac = 0$

$\therefore b^2 = ac$

$\therefore a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (C)

(30) જો $A_r = \begin{vmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{vmatrix}$ જ્યાં $r \in N$ તો $\sum_{r=1}^{15} A_r = ...$

(A) 15 (B) 225 (C) $\sqrt{15}$ (D) 25

ઉકેલ : $A_r = r^2 - (r-1)^2$

$\therefore \sum_{r=1}^{15} A_r = \sum_{r=1}^{15}\left[r^2-(r-1)^2\right] = \sum_{r=1}^{15}(2r-1) = (15)^2 = 225$ **જવાબ :** (B)

(31) જો $D = \begin{vmatrix} 1 & 3\cos\theta & 1 \\ \sin\theta & 1 & 3\cos\theta \\ 1 & \sin\theta & 1 \end{vmatrix}$ તો D નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે.

(A) 9 (B) 1 (C) 10 (D) 16

ઉકેલ : $D = 1 - 3\sin\theta\cos\theta - 3\cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta) + 1(\sin^2\theta - 1)$

$= 1 - 3\sin\theta\cos\theta - 3\cos\theta\sin\theta + 9\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1$

$= (9\cos^2\theta - 6\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta)$

$= (3\cos\theta - \sin\theta)^2$

$3\cos\theta - \sin\theta$ નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{9+1}, \sqrt{9+1}\right] = \left[-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right]$

$\therefore (3\cos\theta - \sin\theta)^2$ નો વિસ્તાર $[0, 10]$ **જવાબ :** (C)

(32) જો સમીકરણો $a(y+z) = x$; $b(z+x) = y$, $c(x+y) = z$ નો અનન્ય ઉકેલ મળે, તો

$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = ...$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$

(A) 1 (B) 2 (C) –1 (D) –2

ઉકેલ : $x \neq 0$, $y \neq 0$ અને $z \neq 0$

ધારો કે $a = \frac{x}{y+z}$ $\quad b = \frac{y}{z+x}$ $\quad c = \frac{z}{x+y}$

$1 + a = \frac{x+y+z}{y+z}$; $1 + b = \frac{x+y+z}{z+x}$ $\quad 1 + c = \frac{x+y+z}{x+y}$

હવે $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$ **જવાબ :** (B)

(33) જો $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ તો $k = ...$ ($x = y = z$ નથી, $x+y+z \neq 0$)

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) –4

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2(x+y+z) & z+x & x+y \\ 2(x+y+z) & y+z & z+x \\ 2(x+y+z) & x+y & y+z \end{vmatrix}$ $\quad C_{21}(1), C_{31}(1)$

$= 2\begin{vmatrix} x+y+z & -y & -z \\ x+y+z & -x & -y \\ x+y+z & -z & -x \end{vmatrix}$ $\quad (C_3 \to C_3 - C_1, C_2 \to C_2 - C_1)$

$= 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ $\quad$ ($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ પછી $C_2(-1), C_3(-1)$)

$k = 2$

નોંધ : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x=y=z$ અથવા $x+y+z = 0$.

પરંતુ $x=y=z$ નથી તથા $x+y+z \neq 0$ હોવાથી $k = 2$ આમ ન બને તો k સ્વૈર રહે. **જવાબ :** (B)

(34) જો $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix}$ તો $f(100) = ...$

(A) –100 (B) 100 (C) 0 (D) 1

ઉકેલ : $f(x) = x(x-1)\ (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x-1 & x \\ 3x & x-2 & x \end{vmatrix}$ $\quad C_2\left(\frac{1}{x}\right),\ C_3\left(\frac{1}{x+1}\right),\ R_3\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$= x(x-1)\ (x+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x+1 & -1 & x \\ 2(x+1) & -2 & x \end{vmatrix}$ $\quad C_{21}\ (-1),\ C_{32}\ (-1)$

$= -x\ (x-1)\ (x+1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

$\therefore f(100) = 0$ **જવાબ :** (C)

(35) જો $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$ હોય તો $f\left(\sqrt[3]{3}\right) = ...$

(A) –2 (B) 2 (C) –4 (D) 4

ઉકેલ : $f(x) = x^3 - 1 - x\ (x^2 - x^2) + x^2\ (x - x^4)$

$f(x) = x^3 - 1 + x^3\ (1 - x^3) = (x^3 - 1)\ (1 - x^3)$

$f(x) = -(x^3 - 1)^2$

$x^3 = 3$ મૂકતાં

$f\left(\sqrt[3]{3}\right) = -(3-1)^2 = -4$ **જવાબ :** (C)

(36) $D = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ અને $D' = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$ તો ......

(A) $D = D'$ (B) $aD + bD' = 0$ (C) $bD + aD' = 0$ (D) $D + D' = 0$

ઉકેલ : $D' = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix}$ $R_1(a), R_2(b), R_3(c)$

$D' = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ba \end{vmatrix}$ $C_1\left(\frac{1}{a}\right), C_2\left(\frac{1}{b}\right), C_3\left(\frac{1}{c}\right)$

$\therefore \quad D' = D$ **જવાબ :** (A)

(37) જો $D = \begin{vmatrix} 1 & cos\theta & 1 \\ -cos\theta & 1 & cos\theta \\ -1 & -cos\theta & 1 \end{vmatrix}$ તો D ...... અંતરાલમાં છે.

(A) [0, 4] (B) [2, 4] (C) [0, 2] (D) [1, 4]

ઉકેલ : $D = (1 + cos^2\theta) - cos\,\theta\,(-cos\,\theta + cos\,\theta) + 1\,[cos^2\theta + 1] = 2 + 2\,cos^2\theta$

$0 \le cos^2\theta \le 1$

$0 \le 2\,cos^2\theta \le 2$

$2 \le 2\,cos^2\theta + 2 \le 4$

અથવા $2 + 2\,cos^2\theta$ **પરથી**

$D = 2 + 2\,\frac{1 + cos2\theta}{2} = 3 + cos\,2\theta$

$-1 \le cos\,2\theta \le 1$

$2 \le 3 + cos\,2\theta \le 4$

$\therefore$ D નો વિસ્તાર [2, 4] છે. **જવાબ :** (B)

(38) જો $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$, તો $x =$ ......

(A) 0, –3 (B) 0, 3 (C) 0, ± 3 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ -x & x & 1 \\ 0 & -x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ $C_{21}(-1), C_{32}(-1)$

$\therefore x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

$\therefore x^2\,[1 + x + 1] + 1\,[x^2] = 0$

$\therefore x^2\,(x + 3) = 0$

$\therefore\ x = 0$ અથવા $x = -3$ **જવાબ :** (A)

(39) સમીકરણો $2x + 3y + 5 = 0, x + ky + 5 = 0$ અને $kx - 12y - 14 = 0$ સુસંગત હોય તો $k =$ ......

(A) $-2, \frac{12}{5}$ (B) $-6, \frac{17}{5}$ (C) $6, -\frac{17}{5}$ (D) $-6, -\frac{17}{5}$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & k & 5 \\ k & -12 & -14 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore 2[60 - 14k] - 3[-14 - 5k] + 5[-12 - k^2] = 0$

$\therefore 120 - 28k + 42 + 15k - 60 - 5k^2 = 0$

$\therefore 5k^2 + 13k - 102 = 0$

$\therefore (k + 6)(5k - 17) = 0$

$\therefore k = -6$, અથવા $\frac{17}{5}$

વળી

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{3}{2}$

$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -12 \end{vmatrix} = -12 - k \neq 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ k & -12 \end{vmatrix} = -24 - 3k \neq 0 \Rightarrow k \neq -8$

જવાબ : (B)

(40) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} =$ ....

(A) $\begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} y & q & b \\ x & p & a \\ z & r & c \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} b & y & q \\ a & p & x \\ c & z & r \end{vmatrix}$ (D) એક પણ નહિ

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix}$ $R_i \leftrightarrow C_i$

$D = -\begin{vmatrix} b & y & q \\ a & x & p \\ c & z & r \end{vmatrix}$ R_{12}

$= \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}$ C_{12} જવાબ : (A)

(41) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix} = k(a+b+c)^m$ તો $k + m =$ ....

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 4

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$ $R_{21}(-1), R_{32}(-1)$

$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$ $R_1\left(\frac{1}{a+b+c}\right), R_2\left(\frac{1}{a+b+c}\right),$

$= (a+b+c)^2 [a + 2b + c + a + c]$

$= 2(a+b+c)^3$

$k = 2, m = 3$ હોવાથી $k + m = 5$

જવાબ : (C)

(42) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i & i \\ 1-i & i & 1+i \\ i & 1+i & 1-i \end{vmatrix} = ...$

(A) $7 + 4i$ (B) $3 + 7i$ (C) $-4 - 7i$ (D) $4 + 7i$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2+i & 1-i & i \\ 2+i & i & 1+i \\ 2+i & 1+i & 1-i \end{vmatrix}$ C_{21} (1), C_{31} (1),

$= (2 + i) \begin{vmatrix} 0 & 1-2i & -1 \\ 0 & -1 & 2i \\ 1 & 1+i & 1-i \end{vmatrix}$ R_{21} (–1), R_{32} (–1)

$= (2 + i) [2i - 4i^2 - 1] = (2 + i) (2i + 3) = 4 + 7i$ **જવાબ :** (D)

(43) જો $a = 1 + 2 + 4 + ... + n$ પદ સુધી, $b = 1 + 3 + 9 + ... + n$ પદ સુધી, $c = 1 + 5 + 25 + ... + n$ પદ સુધી, તો

$\begin{vmatrix} a & 2b & 4c \\ 2 & 2 & 2 \\ 2^n & 3^n & 5^n \end{vmatrix} = ...$

(A) $2^n + 3^n + 5^n$ (B) 0 (C) $(30)^n$ (D) $(10)^n$

ઉકેલ : $a = 1 + 2 + 4 + ... + n$ પદ સુધી $= \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1$

તે જ રીતે, $b = 1 + 3 + 9 + ... + n$ પદ સુધી $= \frac{3^n - 1}{2}$

$c = 1 + 5 + 25 + ... + n$ પદ સુધી $= \frac{5^n - 1}{4}$

$D = \begin{vmatrix} 2^n - 1 & 3^n - 1 & 5^n - 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2^n & 3^n & 5^n \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} 2^n - 1 & 3^n - 1 & 5^n - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ R_{13} (–1), $R_2 \left(\frac{1}{2}\right)$

$= 2(0) = 0$ **જવાબ :** (B)

(44) $\begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ (n+2)! & (n+3)! & (n+4)! \end{vmatrix} = ...$

(A) $2 [(n+1)!\,(n+2)!\,(n+3)!]$ (B) $2[n!\,(n+3)!]$

(C) $2[n!\,(n+2)!]$ (D) $2[n!\,(n+1)!\,(n+2)!]$

ઉકેલ : $D = n!\,(n+1)!\,(n+2)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ (n+2)(n+1) & (n+3)(n+2) & (n+4)(n+3) \end{vmatrix}$

$= n!\,(n+1)!\,(n+2)!\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & n+3 \\ -2n-4 & -2n-6 & n^2+7n+12 \end{vmatrix}$ $C_{21}(-1), C_{32}(-1)$

$= n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,[2n + 6 - 2n - 4]$

$= 2[n!\,(n+1)!\,(n+2)!]$ જવાબ : (D)

(45) જો $p, q, r > 0$ અને $x, y, z \in R$ તો $\begin{vmatrix} (p^x+p^{-x})^2 & (p^x-p^{-x})^2 & 1 \\ (q^y+q^{-y})^2 & (q^y-q^{-y})^2 & 1 \\ (r^z+r^{-z})^2 & (r^z-r^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$

(A) $p^{2x}\,q^{2y}$ (B) 0 (C) $p^{-x}\,q^{-y}\,r^{-z}$ (D) $p^x\,q^y\,r^z$

ઉકેલ : $= \begin{vmatrix} (p^x+p^{-x})^2-(p^x-p^{-x})^2 & (p^x-p^{-x})^2 & 1 \\ (q^y+q^{-y})^2-(q^y-q^{-y})^2 & (q^y-q^{-y})^2 & 1 \\ (r^z+r^{-z})^2-(r^z-r^{-z})^2 & (r^z-r^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$ $C_{21}(-1)$.

$= \begin{vmatrix} 4 & (p^x-p^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (q^y-q^{-y})^2 & 1 \\ 4 & (r^z-r^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$ $[4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2]$

$= 0$ $C_1\left(\frac{1}{4}\right)$ પછી $C_1 = C_2$ જવાબ : (B)

(46) Δ ABC માટે $a + b + c \neq 0$ હોય અને $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો $sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C = \ldots\ldots$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D) 2

ઉકેલ : $D = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 = 0$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 - (c-a)^2] = 0$

$a + b + c \neq 0$ હોવાથી $a = b = c \Rightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

$sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ જવાબ : (C)

(47) જો m = ... હોય, તો $\begin{vmatrix} \binom{9}{4} & \binom{9}{5} & \binom{10}{m} \\ \binom{10}{6} & \binom{10}{7} & \binom{11}{m+2} \\ \binom{11}{8} & \binom{11}{9} & \binom{12}{m+4} \end{vmatrix} = 0$

(A) 6 (B) 1 (C) 5 (D) 4

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} \binom{9}{4}+\binom{9}{5} & \binom{9}{5} & \binom{10}{m} \\ \binom{10}{6}+\binom{10}{7} & \binom{10}{7} & \binom{11}{m+2} \\ \binom{11}{8}+\binom{11}{9} & \binom{11}{9} & \binom{12}{m+4} \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} \binom{10}{5} & \binom{9}{5} & \binom{10}{m} \\ \binom{11}{7} & \binom{10}{7} & \binom{11}{m+2} \\ \binom{12}{9} & \binom{11}{9} & \binom{12}{m+4} \end{vmatrix} = 0$$

જો $m = 5$ હોય, તો $C_1 = C_3$ થાય અને નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય 0 થાય.
(જો D = 0 હોય, તો $m = 5$ કહેતા નથી.) **જવાબ :** (C)

(48) જો $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = k^2 (x^2+x+1)^2$ તો k = ... (k એ x નું વિધેય છે.)

(A) $|x-1|$ (B) 1 (C) x (D) 0

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 1-x^3 & x(1-x^3) & x^2 \\ 0 & (1-x^3) & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $C_{31}(-x)$, $C_{32}(-x^2)$

$= (1-x^3)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $C_1\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$, $C_2\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$

$= (1-x^3)^2$

$= [(1-x)(1+x+x^2)]^2$

$= (1-x)^2 (x^2+x+1)^2$

$= (x-1)^2 (x^2+x+1)^2$

$\therefore\ k = |x-1|$ જવાબ : (A)

(49) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \\ (x-1)^2 & (y-1)^2 & (z-1)^2 \end{vmatrix} = k\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$, તો $k = ...$ $\quad x \ne y, y \ne z, z \ne x$

(A) 4 (B) –4 (C) 3 (D) –3

ઉકેલ :

$$= \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 2x+1 & 2y+1 & 2z+1 \\ -2x+1 & -2y+1 & -2z+1 \end{vmatrix} \qquad R_{12}(-1),\ R_{13}(-1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 2x+1 & 2y+1 & 2z+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_{23}(1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ 2(x-y) & 2(y-z) & 2z+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{21}(-1),\ C_{32}(-1)$$

$$= 2\,(x-y)\,(y-z)\begin{vmatrix} x+y & y+z & z^2 \\ 2 & 2 & 2z+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2\,(x-y)\,(y-z)\,(2x+2y-2y-2z)$

$= -4\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$

$\therefore\ k = -4$ જવાબ : (B)

નોંધ : જો $x = y$ અથવા $y = z$ અથવા $z = x$ તો k સ્વૈર રહે.

(50) $\begin{vmatrix} \sum\limits_{r=1}^{16} 2^r & a & 2^{16}-1 \\ 3\sum\limits_{r=1}^{16} 4^r & b & 2(4^{16}-1) \\ 7\sum\limits_{r=1}^{16} 8^r & c & 4(8^{16}-1) \end{vmatrix} = ...$

(A) $a+b+c$ (B) 0 (C) $ab+bc+ca$ (D) 1

ઉકેલ : $\sum_{r=1}^{16} 2^r = 2 + 4 + 8 + ... + 2^{16} = 2(2^{16} - 1)$

તે જ રીતે $\sum 4^r = \frac{4(4^{16}-1)}{3} \quad \sum_{r=1}^{16} 8^r = \frac{8(8^{16}-1)}{7}$

$$D = \begin{vmatrix} 2(2^{16}-1) & a & 2^{16}-1 \\ 4(4^{16}-1) & b & 2(4^{16}-1) \\ 8(8^{16}-1) & c & 4(8^{16}-1) \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2^{16}-1 & a & 2^{16}-1 \\ 2(4^{16}-1) & b & 2(4^{16}-1) \\ 4(8^{16}-1) & c & 4(8^{16}-1) \end{vmatrix} = 2\ (0) = 0$$

જવાબ : (B)

(51) $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ અંતરાલમાં $\begin{vmatrix} sinx & cosx & cosx \\ cosx & sinx & cosx \\ cosx & cosx & sinx \end{vmatrix} = 0$ ના ભિન્ન ઉકેલની સંખ્યા ...... છે.

(A) 3 (B) 1 (C) 0 (D) 2

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 2cosx+sinx & cosx & cosx \\ 2cosx+sinx & sinx & cosx \\ 2cosx+sinx & cosx & sinx \end{vmatrix} = 0 \qquad C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$$\therefore\ (2\ cos\ x + sin\ x)\begin{vmatrix} 0 & cosx-sinx & 0 \\ 0 & sinx-cosx & cosx-sinx \\ 1 & cosx & sinx \end{vmatrix} = 0 \qquad C_1\left(\frac{1}{2cosx+sinx}\right),\ R_{21}(-1), R_{32}(-1)$$

$\therefore\ (2\ cos\ x + sin\ x)\ (cosx - sinx)^2 = 0$

$\therefore\ tan\ x = -2$ અથવા $tan\ x = 1 \qquad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

$-2 \notin [-1, 1]$. આથી $tan\ x \ne -2 \qquad (-1 \le tanx \le 1)$

$\therefore\ tanx = 1$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ ફક્ત એક ઉકેલ મળે.

જવાબ : (B)

(52) જો $\begin{vmatrix} f(\alpha) & sin\alpha & cos\alpha \\ 1 & cos\alpha & sin\alpha \\ -1 & sin\alpha & -cos\alpha \end{vmatrix} = 0$ તો $f(\alpha)$ નો વિસ્તાર ...... છે.

(A) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (B) (0, 2) (C) [0, 2] (D) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

ઉકેલ : $f(\alpha)\ (-\ cos^2\alpha - sin^2\alpha) - sin\ \alpha\ (-cos\ \alpha + sin\alpha) + cos\alpha\ (sin\alpha + cos\alpha) = 0$

$\therefore -f(\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\therefore f(\alpha) = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ નો વિસ્તાર $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ છે.

$\therefore f(\alpha)$ નો વિસ્તાર $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ **જવાબ :** (D)

(53) $\begin{vmatrix} 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 9^2 & 40^2 & 41^2 \\ 5^2 & 12^2 & 13^2 \end{vmatrix} = ...$

(A) 41^2 (B) 13^2 (C) 25 (D) 0

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 3^2+4^2 & 4^2 & 5^2 \\ 9^2+40^2 & 40^2 & 41^2 \\ 5^2+12^2 & 12^2 & 13^2 \end{vmatrix}$ $C_1 \to C_1 + C_2$

$= \begin{vmatrix} 5^2 & 4^2 & 5^2 \\ 41^2 & 40^2 & 41^2 \\ 13^2 & 12^2 & 13^2 \end{vmatrix} = 0$ **જવાબ :** (D)

(54) $\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) $y^2(x+y)$ (B) $x^2(x+y)$ (C) $9x^2(x+y)$ (D) $9y^2(x+y)$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} -y & -y & 2y \\ y & -2y & y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix}$ $R_{31}(-1), R_{32}(-1)$

$= y^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix}$ $R_1\left(\frac{1}{y}\right), R_2\left(\frac{1}{y}\right)$

$= y^2 [(x+y)(-1+4) - (x+2y)(-1-2) + x(+2+1)]$

$= y^2 (3x + 3y + 3x + 6y + 3x) = y^2(9x + 9y) = 9y^2(y + x)$ **જવાબ :** (D)

(55) $a = 2\sin\theta$ તો $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = ...$

(A) $-\frac{\sin 4\theta}{\cos\theta}$ (B) $-\frac{2\sin^2 2\theta}{\cos\theta}$ (C) $4\sin^2\theta(\cos\theta - 1)$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$= a\,(a^2 - 1) - 1\,(a) \quad = a\,(a^2 - 2) \ = 2sin\theta\,[4sin^2\theta - 2]$

$\therefore D = \dfrac{-4\,sin\theta \cdot cos\theta \cdot cos2\theta}{cos\theta}$ $\qquad (-2\,sin^2\,\theta + 1 = cos\,2\theta\,)$

$= \dfrac{-2\,sin2\theta \cdot cos2\theta}{cos\theta} = -\dfrac{sin4\theta}{cos\theta}$ **જવાબ :** (A)

(56) $\begin{vmatrix} 1+sin^2\theta & sin^2\theta & sin^2\theta \\ cos^2\theta & 1+cos^2\theta & cos^2\theta \\ 4\,sin4\theta & 4\,sin4\theta & 1+4sin4\theta \end{vmatrix} = 0$ અને $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$ હોય, તો θ = ...

(A) $-\frac{\pi}{12}, \frac{-\pi}{48}$ (B) $-\frac{\pi}{16}, -\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{24}, \frac{-5\pi}{24}$ (D) કિંમત મળે નહિ.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 1+sin^2\theta & sin^2\theta & sin^2\theta \\ cos^2\theta & 1+cos^2\theta & cos^2\theta \\ 4\,sin4\theta & 4\,sin4\theta & 1+4sin4\theta \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & sin^2\theta & 0 \\ -1 & 1+cos^2\theta & -1 \\ 0 & 4\,sin4\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad C_{21}\,(-1),\ C_{23}\,(-1)$

$\therefore\ (1+cos^2\theta + 4sin4\theta) + sin^2\theta = 0$

$\therefore\ 2 + 4\,sin\,4\theta = 0$

$\therefore sin\,4\theta = -\frac{1}{2} = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ તથા $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$

$\therefore 4\theta = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = -\frac{\pi}{24}, -\frac{5\pi}{24}$ **જવાબ :** (C)

(57) $\begin{vmatrix} 2x+3y & y+z & z+x \\ 2y+3z & z+x & x+y \\ 2z+3x & x+y & y+z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ તો k = ...

(A) 5 (B) 4 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $D = 2 \begin{vmatrix} x & y+z & z+x \\ y & z+x & x+y \\ z & x+y & y+z \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} y & y+z & z+x \\ z & z+x & x+y \\ x & x+y & y+z \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} x & y+z & z \\ y & z+x & x \\ z & x+y & y \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} y & z & z+x \\ z & x & x+y \\ x & y & y+z \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad (C_{13}, C_{23}) \quad = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

આથી $k = 5$

નોંધ : જો $x = y = z$ કે $x + y + z = 0$ હોય તો k ના મળે. k સ્વૈર રહે. **જવાબ :** (A)

(58) જો $\begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ 16 & 3x+8 & 36 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો $x =$ ......

(A) 4 અથવા $-\frac{23}{21}$ (B) –4 અથવા $-\frac{23}{21}$ (C) 4 અથવા $\frac{23}{21}$ (D) –4 અથવા $\frac{23}{21}$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ 16 & 3x+8 & 36 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ 16-4x & 3x+8-20 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad R_{12}(-4)$

$\therefore (x-4)\begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (x-4)\,[21x + 140 - 117] = 0$

$\therefore (x-4)\,(21x + 23) = 0$

$\therefore x = 4$ અથવા $x = -\frac{23}{21}$

બીજી રીત : $(x-4)\begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (x-4)\begin{vmatrix} x+\frac{20}{3} & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{13}{3} & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (x-4)\begin{vmatrix} x+\frac{20}{3}-\frac{39}{7} & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{31}\left(\frac{-13}{21}\right)$

$\therefore x = 4$ અથવા $x = -\frac{23}{21}$ **જવાબ :** (A)

(59) $2x + 5y = 9xy,\ 4x + 3y = 11xy\ (y \neq 0)\ (x \neq 0)$ નો ઉકેલ ...... છે.

(A) $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$ (C) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

ઉકેલ : $\frac{2}{y} + \frac{5}{x} = 9$ $\quad \frac{4}{y} + \frac{3}{x} = 11$ $\quad$ ($xy \neq 0$ વડે ભાગતાં)

$\frac{1}{x} = m,$ $\frac{1}{y} = n$ લો.

$5m + 2n - 9 = 0$

$3m + 4n - 11 = 0$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14 \neq 0$. આથી અનન્ય ઉકેલ મળશે.

$$\therefore \quad (m, n) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}}{14}, -\frac{\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 3 & -11 \end{vmatrix}}{14} \right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = (1, 2)$$

$\therefore \quad x = 1\ y = \frac{1}{2}$. આથી ઉકેલ $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ **જવાબ :** (D)

(60) જો $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = a + ib$ હોય, તો $(a, b) = ...$

(A) (1, 3) (B) (0, 3) (C) (0, 0) (D) (–1, 0)

ઉકેલ : $C_{32}\ (3i)$

$$\therefore \begin{vmatrix} 6i & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 20 & 0 & i \end{vmatrix} = a + bi$$

$a + bi = (0, 0)$

$\therefore a = 0 = b$

$\therefore (a, b) = (0, 0)$

અથવા (બીજી રીત)

$$3 \begin{vmatrix} 6i & -i & 1 \\ 4 & i & -1 \\ 20 & 1 & i \end{vmatrix} = a + ib$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 6i+4 & 0 & 0 \\ 4 & i & -1 \\ 20 & 1 & i \end{vmatrix} = a + ib \qquad R_{21}(1)$$

$\therefore (6 + 4i)\ (i^2 + 1) = a + ib$

$0 = a + ib$

$a = 0$ અને $b = 0$ **જવાબ :** (C)

(61) જો $(k, 5), (6, 7), (2, 3)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 10 હોય તો $k = ...$ છે.

(A) 9 અથવા –1 (B) –9 અથવા –1 (C) –9 અથવા 1 (D) 9 અથવા 1

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} k & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4k - 20 + 4 = 4k - 16$

$\Delta = \frac{1}{2}\ |D|$

$\therefore 10 = \frac{1}{2}\ |4k - 16|$

$\therefore 4k - 16 = 20$ અથવા $4k - 16 = -20$

$\therefore k = 9$ અથવા $k = -1$ **જવાબ :** (A)

(62) $y = m_1x + c_1; y = m_2x + c_2$ અને $x = 0$ બાજુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. $(c_1 \neq c_2)$

(A) $\frac{(c_1-c_2)^2}{2(m_2-m_1)}$ (B) $\frac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ (C) $\frac{(c_1-c_2)^2}{2(m_1-m_2)}$ (D) $\frac{(c_1-c_2)}{2(m_1-m_2)}$

ઉકેલ : $y = m_1x + c_1$ (1)
$y = m_2x + c_2$ (2)
$x = 0$ (3)

રેખાઓનાં છેદબિંદુઓ $(0, c_1)$, $(0, c_2)$ અને $\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)$ છે.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & 1 \\ 0 & c_2 & 1 \\ \frac{c_2-c_1}{m_1-m_2} & \frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}(c_1-c_2) = -\frac{(c_1-c_2)^2}{m_1-m_2}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{|m_1-m_2|}$$

જવાબ : (B)

(63) $\begin{vmatrix} tan^2x & -sec^2x & 1 \\ -sec^2x & tan^2x & 1 \\ 10 & -12 & 2 \end{vmatrix} = ...$

(A) $12\ tan^2x - 10\ sec^2x$ (B) $12\ sec^2x - 10\ tan^2x - 2$ (C) 0 (D) $tan^2x\ sec^2\ x$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -sec^2x & tan^2x & 1 \\ 10 & -12 & 2 \end{vmatrix}$ $R_{21}(1)$

$= \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & tan^2x & 1 \\ -2 & -12 & 2 \end{vmatrix}$ $C_{21}(1)$

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & tan^2x & 1 \\ 2 & -12 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $C_1(-1)$ **જવાબ :** (C)

(64) જો (2, –6), (5, 4) અને $(k, 4)$ શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 35 હોય, તો $k =$ ......

(A) 12 (B) 12 અથવા – 2 (C) –2 (D) –12 અથવા –2

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} k & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -10k + 12 + 38$

$\Delta = \frac{1}{2}|D|$ આથી $35 = \frac{1}{2}|-10k + 50|$

$70 = |-10k + 50|$

$\therefore\ 70 = -10k + 50$ અથવા $-70 = -10k + 50$

$k = -2$ અથવા $k = 12$ **જવાબ :** (B)

(65) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = k(x^3 + y^3)$ તો $k =$ ...... $(x + y \neq 0)$

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} -2y & y & x+y \\ -2x & x+y & x \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$ $C_{21}(-1)$, $C_{31}(-1)$

$= -2\begin{vmatrix} y & y & x+y \\ x & x+y & x \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$

$= -2\begin{vmatrix} y & 0 & x \\ x & y & 0 \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$ $C_{12}(-1)$, $C_{13}(-1)$

$= -2[x^3 + y^3]$. આથી $k = -2$ **જવાબ :** (B)

નોંધ : જો $x + y = 0$ તો k સ્વૈર રહે.

(66) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} =$ ......

(A) $a^2+b^2+c^2 + abc$ (B) $a^2+b^2+c^2 + 2abc$ (C) $1 + a^2+b^2+c^2$ (D) આ પૈકી એકપણ નહિ.

ઉકેલ : $D = abc\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c \\ a & b+\frac{1}{b} & c \\ a & b & c+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$ $R_1\left(\frac{1}{a}\right)$, $R_2\left(\frac{1}{b}\right)$, $R_3\left(\frac{1}{c}\right)$

$= \begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$ $C_1(a)$, $C_2(b)$, $C_3(c)$

$$= (a^2+b^2+c^2+1)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$ $C_{21}(1), C_{31}(1), C_1\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2+1}\right)$

$$= (a^2+b^2+c^2+1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$ $R_{21}(-1), R_{32}(-1)$

$= (a^2+b^2+c^2+1)(1) = 1 + a^2 + b^2 + c^2$ જવાબ : (C)

(67) જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix} =$ ......

(A) 0 (B) $2x$ (C) x (D) $x + a + b + c$

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+c-2b \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$ $[R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2]$

અહીં a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી $a + c - 2b = 0$

પ્રથમ હારના બધા જ સભ્ય 0 છે.

$\therefore D = 0$ જવાબ : (A)

(68) જો $f(x) = \begin{vmatrix} cosx & 1 & 1 \\ 2\,sin\,x & x & 2x \\ tanx & 1 & 1 \end{vmatrix}$ તો $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} =$ ......

(A) –1 (B) 1 (C) 0 (D)

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} cosx & 1 & 1 \\ 2\,sin\,x & x & 2x \\ tanx & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} cosx & 1 & 0 \\ 2\,sin\,x & x & x \\ tanx & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ $C_{23}(-1)$

$= -x\,[cos\,x - tan\,x]$

હવે $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to 0}[cos\,x - tan\,x]$

$= -[cos\,0 - tan\,0] = -1$ જવાબ : (A)

(69) જો $P = \int_1^{cos\theta} \frac{t\,dt}{1+t^2}$ અને $Q = \int_1^{sec\theta} \frac{dt}{t(1+t^2)}$, તો $\begin{vmatrix} P & P^2 & Q \\ 2^P 2^Q & Q^2 & -1 \\ 1 & P^2+Q^2 & -1 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) 1 (B) 0 (C) $sin\,\theta$ (D) $cosec\,\theta$

ઉકેલ : $Q = \int_{1}^{sec\theta} \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}$ માં $t = \frac{1}{z}$ લેતાં, $dt = -\frac{1}{z^2}dz$

$$= -\int_{1}^{cos\theta}\left(-\frac{1}{z^2}\times\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}dz\right) = -\int_{1}^{cos\theta}\frac{z\,dz}{1+z^2} = -P. \quad \text{આથી } Q = -P$$

$$D = \begin{vmatrix} P & P^2 & -P \\ 2^P 2^{-P} & P^2 & -1 \\ 1 & P^2+P^2 & -1 \end{vmatrix} = P\begin{vmatrix} 1 & P & -1 \\ 1 & P^2 & -1 \\ 1 & 2P^2 & -1 \end{vmatrix} \qquad R_1\left(\frac{1}{P}\right)$$

$$= 0$$

જવાબ : (B)

(70) જો $f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ {}_{x+1}P_{x+1} & {}_{x+2}P_{x+2} & {}_{x+3}P_{x+3} \\ {}_{x+1}C_{x+1} & {}_{x+2}C_{x+2} & {}_{x+3}C_{x+3} \end{vmatrix}$ તો $f(x)$ એ ...... વડે વિભાજ્ય છે.

(A) $(x + 1)!$ (B) $(x + 2)!$ (C) $(x + 3)!$ (D) $(x + 4)!$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ (x+1)! & (x+2)! & (x+3)! \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad ({}_nP_n = n!, {}_nC_n = 1)$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ (x+1)! & (x+2)!-(x+1)! & (x+3)!-(x+2)! \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_{23}(-1), C_{12}(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ (x+1)! & (x+1)(x+1)! & (x+2)^2(x+1)! \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (x + 1)! \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & (x+2)^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ જે $(x + 1)!$ વડે વિભાજ્ય છે.

જવાબ : (A)

(71) જો $f(x) = \begin{vmatrix} sinx & cosx & sinx \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ તો $f''(x)$ ......

(A) $f(x)$ (B) $-f(x)$ (C) $f'(x)$ (D) $f''(x)$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} sinx & cosx & sinx \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ છે. આથી $f'(x) = \begin{vmatrix} cosx & -sinx & cosx \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$$f''(x) = \begin{vmatrix} -sinx & -cosx & -sinx \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -f(x)$$ જવાબ : (B)

(72) જો $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & cosx \\ cosx & 1 \end{vmatrix}$, તો $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = ...$

(A) 2π (B) π (C) 2 (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $f(x) = 1 - cos^2 x = sin^2 x$

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos 2x)\, dx = \left[x - \frac{sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$ જવાબ : (D)

(73) $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ તો $\int_0^1 f(x)\, dx = ...$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{-3}{4}$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 1-x & x-1 & 1 \\ 0 & 1-x & x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

$$= (x-1)^2 [x + 1 + 1] = [x^2 - 2x + 1]\,[x + 2] = x^3 - 3x + 2$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (x^3 - 3x + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$$ જવાબ : (C)

(74) જો $f(x) = \begin{vmatrix} x^5 & sin^2 x & 3^{x^4} \\ tan^3 x & 1 & sec\, 2x \\ sin^5 x & x^6 & 5 \end{vmatrix}$ તો $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = ...$

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) –2

ઉકેલ : $f(-x) = \begin{vmatrix} -x^5 & sin^2 x & 3^{x^4} \\ -tan^3 x & 1 & sec\, 2x \\ -sin^5 x & x^6 & 5 \end{vmatrix} = -f(x)$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) = 0$$ જવાબ : (B)

(75) જો α, β અને γ એ સમીકરણ $x^3 + px + q = 0$ નાં બીજ હોય, તો $\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) $p - q$ (B) $p + q$ (C) $p^2 - 2q$ (D) $3pq$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix}$ R_{21} (–1), R_{32} (–1)

$= \alpha\,[\beta + \beta\gamma + \gamma\,] + \beta\gamma$

$= \alpha\beta + \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma$

અહીં α, β અને γ એ સમીકરણ $x^3 + px + q = 0$ નાં બીજ હોવાથી $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = p$ અને $\alpha\beta\gamma = -q$

$D = -q + p$ **જવાબ :** (A)

(76) સમીકરણો $(k+1)x + 8y = 4k$ અને $kx + (k+3)y = 3k - 1$ નો ઉકેલ મળે નહિ, તો $k =$ .....(JEE : 2013)

(A) $k \in R$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $(k+1)x + 8y - 4k = 0$

$kx + (k+3)y - 3k + 1 = 0$

$D = \begin{vmatrix} k+1 & 8 \\ k & k+3 \end{vmatrix} = k^2 + 4k + 3 - 8k = k^2 - 4k + 3 = (k-3)(k-1) = 0 \Rightarrow k = 3$ અથવા $k = 1$

$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & -4k \\ k+3 & -3k+1 \end{vmatrix}$

$= -24\,k + 8 + 4k^2 + 12k$

$= 4k^2 - 12k + 8 = 4(k-2)(k-1)$. $k = 3$ માટે $D_1 \neq 0$, $k = 1$ માટે $D_1 = 0$

$k = 1$ માટે ઉકેલ અનંતગણ, $k = 2$ માટે અનન્ય ઉકેલ.

$k = 3$ માટે સમીકરણો $x + 2y = 3$ તથા $x + 2y = \frac{8}{3}$ નો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે. આથી $k = 3$ **જવાબ :** (D)

(77) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = k\,abc\,(a+b+c)^3 =$ ......

(A) –2 (B) 2 (C) 1 (D) –1

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (a+c+b)(a+c-b) & b^2 \\ (c-a-b)(c+a+b) & (c-a-b)(c+a+b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ C_{32} (–1), C_{31} (–1)

$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & (a+c-b) & b^2 \\ (c-a-b) & (c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & a+c-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix} \qquad R_{13}(-1)\ R_{23}(-1)$$

$$= 2\,(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & a+c-b & b(a+c) \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix} \qquad R_2\left(\frac{1}{2}\right), \text{ પછી } C_{23}(b)$$

$= 2\,(a+b+c)^2\ \{(b+c-a)\,ab\,(a+c) + a^2b\,(a+c-b)\}$

$= 2\,abc\,(a+b+c)^3$, આથી $k = 2$ **જવાબ :** (C)

નોંધ : જો a,b,c પૈકી કોઈ શૂન્ય હોય અથવા $a+b+c=0$ હોય, તો k સ્વૈર રહે.

(78) $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$

(A) –3 અથવા –2 અથવા 1 (B) –3 અથવા 2 અથવા –1

(C) –3 અથવા 2 અથવા 1 (D) 3 અથવા 2 અથવા 1

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \qquad R_3 \to R_3 + (-1)\,R_1\ ;\ R_2 \to R_2 + (-1)\,R_1$

$\therefore \begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ -(x-2) & -3(x-2) & x-2 \\ -(x+3) & 2(x+3) & (x+3) \end{vmatrix} = 0.$ આથી $(x-2)\,(x+3) \begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (x-2)\,(x+3) \begin{vmatrix} x-1 & -6 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_1 \to C_1 + C_3$

$\therefore (x-2)\,(x+3)\ (x-1)\,(-5) = 0$

$\therefore x = 2$ અથવા $x = -3$ અથવા $x = 1$ **જવાબ :** (C)

(79) જો $f(x) = \begin{vmatrix} x & e^{x^4} & \cos x \\ \operatorname{cosec} x & 3 & \sec x \\ \cot x & x^2 & 7 \end{vmatrix}$ તો $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx = \ldots\ldots$

(A) 34 (B) $1-\frac{\pi}{2}$ (C) $5e^{\pi}$ (D) 0

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} x & e^{x^4} & \cos x \\ \operatorname{cosec} x & 3 & \sec x \\ \cot x & x^2 & 7 \end{vmatrix}$ છે.

આથી $f(-x) = \begin{vmatrix} -x & e^{(-x)^4} & cos(-x) \\ cosec(-x) & 3 & sec(-x) \\ cot(-x) & (-x)^2 & 7 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -x & e^{x^4} & cosx \\ -cosec\,x & 3 & secx \\ -cot\,x & x^2 & 7 \end{vmatrix} = -f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ અયુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$

જવાબ : (D)

(80) (2, 2) (6, 6) અને (5, k) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 હોય, તો k = ...

(A) 3 અથવા –7 (B) –3 અથવા 7 (C) –3 અથવા –7 (D) 3 અથવા 7

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & k & 1 \end{vmatrix}$

$= 2[6 - k] - 2\,[6 - 5] + [6k - 30]$
$= 4k - 20$

$\Delta = \frac{1}{2}\,|D|$

$8 = 4k - 20$ અથવા $-8 = 4k - 20$

$\therefore$ $k = 7$ અથવા $k = 3$

જવાબ : (D)

(81) જો a, b, c એ સ્વરિત શ્રેણીના અનુક્રમે p મા, q મા, r મા પદ હોય તો $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) abc (B) pqr (C) 0 (D) એક પણ નહિ

ઉકેલ : સંગત સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ A અને સામાન્ય તફાવત D હોય તો,

$\frac{1}{a} = A + (p-1)D$, $\frac{1}{b} = A + (q-1)D$, $\frac{1}{c} = A + (r-1)D$

$$\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_1\left(\frac{1}{abc}\right)$$

$$= abc \begin{vmatrix} A+(p-1)D & A+(q-1)D & A+(r-1)D \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} A & A & A \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_{31}(D),\ R_{23}(-D)$$

$= abc\ (0) = 0$ **જવાબ :** (C)

(82) જો $y = -9$ એ આપેલ સમીકરણનું એક બીજ છે, તો $\begin{vmatrix} y & 3 & 7 \\ 2 & y & 2 \\ 7 & 6 & y \end{vmatrix} = 0$ નાં બીજાં બીજ ...... છે.

(A) -2 અને -7 (B) 2 અને -7 (C) -2 અને 7 (D) 2 અને 7

ઉકેલ : $$\begin{vmatrix} y+9 & y+9 & y+9 \\ 2 & y & 2 \\ 7 & 6 & y \end{vmatrix} = 0 \qquad R_{21}(1),\ R_{31}(1)$$

$$\therefore (y+9) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 7 & 6 & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (y+9) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & y-2 & 0 \\ 7 & -1 & y-7 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{12}(-1),\ C_{13}(-1)$$

$\therefore (y+9)(y-2)(y-7) = 0$

$\therefore y = -9$ આપેલ છે. આથી $y = 2$, $y = 7$ અન્ય બીજ છે. **જવાબ :** (D)

(83) જો $f(x) = \begin{vmatrix} x^2 & sinx & cosx \\ 2 & 0 & -1 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$ તો $f''(0) =$ ...... (જ્યાં a અચળ છે.)

(A) 0 (B) $a + a^2$ (C) a^3 (D) a પર આધારિત છે.

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} x^2 & sinx & cosx \\ 2 & 0 & -1 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$ આથી $f'(x) = \begin{vmatrix} 2x & cosx & -sinx \\ 2 & 0 & -1 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$

$$f''(x) = \begin{vmatrix} 2 & -sinx & -cosx \\ 2 & 0 & -1 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$$

હવે, $f''(0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$ **જવાબ :** (A)

(84) જો $f(x) = \begin{vmatrix} x+p & x & x \\ x & x+p & x \\ x & x & x+p \end{vmatrix}$, તો $f(2x) - f(x) = ...$

(A) $3xp^3$ (B) $4px^2$ (C) $6px^2$ (D) $3p^2x$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} 3x+p & 3x+p & 3x+p \\ x & x+p & x \\ x & x & x+p \end{vmatrix}$ $R_{21}(1), R_{31}(1)$

$= (3x+p) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+p & x \\ x & x & x+p \end{vmatrix}$ $R_1\left(\frac{1}{3x+p}\right)$

$= (3x+p) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -p & x+p & -p \\ 0 & x & p \end{vmatrix}$ $C_{21}(-1), C_{23}(-1)$

$= (3x+p)\ \{-1[-p^2]\}$

$= (3x+p)\ p^2$

$f(2x) - f(x) = p^2\ [6x + p - 3x - p]$

$= 3xp^2$

જવાબ : (D)

(85) જો $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ અને $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$ તો = ...

(A) $D_2 = 2D_1$ (B) $D_1 = -2D_2$ (C) $D_1 = -D_2$ (D) $D_1 = D_2$

ઉકેલ : $D_1 = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} xyz & xyz & xyz \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ $R_1(xyz)$

$= \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $C_1\left(\frac{1}{x}\right), C_2\left(\frac{1}{y}\right), C_3\left(\frac{1}{z}\right)$

$= -\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ R_{23} $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$ R_{12} $= D_2$ જવાબ : (D)

(86) $\begin{vmatrix} q+r & p & p \\ q & r+p & q \\ r & r & p+q \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) $4\ pqr$ (B) $p+q+r$ (C) 0 (D) pqr

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} q+r & p & p \\ q & r+p & q \\ r & r & p+q \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -2r & -2q \\ q & r+p & q \\ r & r & p+q \end{vmatrix}$ $\qquad R_{21}(-1), R_{31}(-1)$

$= -2\begin{vmatrix} 0 & r & q \\ q & r+p & q \\ r & r & p+q \end{vmatrix}$ $\qquad R_1\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \quad -2\begin{vmatrix} 0 & r & q \\ q & p & 0 \\ r & 0 & p \end{vmatrix}$ $\qquad R_{12}(-1), R_{13}(-1)$

$= -2\,[-pqr - pqr]$

$= 4pqr$ જવાબ : (A)

(87) જો $f(x) = \begin{vmatrix} \sec x & x & 1 \\ 2\sin x & x^2 & 2x \\ \tan x & x & 1 \end{vmatrix}$ તો $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x} =$ ......

(A) –1 (B) 1 (C) –2 (D) 2

ઉકેલ : $f(x) = \begin{vmatrix} \sec x & x & 1 \\ 2\sin x & x^2 & 2x \\ \tan x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sec x - \tan x & 0 & 0 \\ 2\sin x & x^2 & 2x \\ \tan x & x & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad R_{31}(-1)$

$\therefore\ f(x) = -x^2\ (\sec x - \tan x)$

$\therefore\ f'(x) = -2x\ (\sec x - \tan x) - x^2\ (\sec x \tan x - \sec^2 x)$

$\therefore\ \dfrac{f'(x)}{x} = -2\ (\sec x - \tan x) - x\ (\sec x \tan x - \sec^2 x)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ [-2\ (\sec x - \tan x) - x\ (\sec x \tan x - \sec^2 x)]$

$= -2\ (1 - 0) - 0\ (0 - 1) = -2$ જવાબ : (C)

(88) જો $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 + kabc$ હોય, તો $k =$ ...... $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$

(A) –4 (B) 4 (C) –3 (D) 3

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ $\quad R_{12}(-1)$

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ $\quad R_{23}(1)$

$= a[a^2 - bc] - b[-b^2 + ac] + c[-ab + c^2]$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$\therefore k = -3$ જવાબ : (C)

(89) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(A) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ (B) $abc(a-b)(b-c)(c-a)$

(C) $abc(ab+bc+ca)$ (D) 0

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ -c(a-b) & -a(b-c) & ab \end{vmatrix}$ $\quad C_{12}(-1), C_{32}(-1)$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \\ -c & -a & ab \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & c \\ a-c & b+c & c^2 \\ a-c & -a & ab \end{vmatrix}$ $\quad C_{21}(-1)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & c \\ -1 & b+c & c^2 \\ -1 & -a & ab \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)\{ab - c^2 + ac + bc + c^2\}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ જવાબ : (A)

(90) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ નાં બીજ ...... છે.

(A) 0, 1 (B) 0, –1 (C) 0, –3 (D) 0, 3

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0.$ આથી $\begin{vmatrix} 3-x & 3-x & 3-x \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ $R_{21}(1)$, $R_{31}(1)$

$\therefore (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0.$ આથી $(3-x) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2x & 2x & 1-x \\ 0 & -2x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ $C_1 \to C_1 - C_2$, $C_2 \to C_2 - C_3$

$\therefore (3-x)\, 4x^2 = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 3$

જવાબ : (D)

(91) $\begin{vmatrix} \log_3 1024 & \log_8 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_4 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix} = ...$

(A) 12 (B) 10 (C) 9 (D) 6

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} \log_3 1024 & \log_8 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_4 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \log_3 2^{10} & \log_{2^3} 3 \\ \log_3 2^3 & \log_{2^2} 3^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_4 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix}$ $\left(\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x\right)$

$= \left[10\left(\log_3 2 \times \log_2 3\right) - 3 \times \frac{1}{3}\left(\log_3 2 \times \log_2 3\right)\right] \times \left[\log_2 3 \times 2\log_3 2 - \log_4 3 \times \log_3 4\right]$

$= [10 - 1]\,[2 - 1] = 9 \times 1 = 9$

જવાબ : (C)

(92) λ ની કઈ કિંમત માટે સમીકરણો $x - 2y + 3z = 0$, $-2x + 3y + 2z = 0$ અને $-8x + \lambda y = 0$ નો શૂન્યેતર ઉકેલ મળે ? $(x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0)$

(A) 18 (B) 13 (C) –10 (D) 4

ઉકેલ : $x - 2y + 3z = 0$

$-2x + 3y + 2z = 0$ નો શૂન્યેતર ઉકેલ શક્ય છે.

$-8x + \lambda y = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -8 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore -2\lambda + 2(16) + 3(-2\lambda + 24) = 0$

$-2\lambda + 32 - 6\lambda + 72 = 0$

$-8\lambda = -104$

$\lambda = 13$

જવાબ : (B)

નોંધ : $x - 2y + 3z = 0$, $-2x + 3y + 2z = 0$ પરથી $\frac{x}{-13} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{-1}$

વળી $8x = \lambda y$ પરથી $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{8}$. આથી $\lambda = 13$

(93) જો $f(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ x^2 & -\tan x & -x^2 \\ 2x & \sin 2x & 5x \end{vmatrix}$ તો $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

ઉકેલ : $$\frac{f'(x)}{x} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & -\sin x \\ x & \frac{-\tan x}{x} & -x \\ 2x & \sin 2x & 5x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 2x & -\sec^2 x & -2x \\ 2 & 2\frac{\sin 2x}{2x} & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ x & \frac{-\tan x}{x} & -x \\ 2 & 2\cos 2x & 5 \end{vmatrix}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 = 4$$

જવાબ : (D)

(94) આપેલી સમીકરણોની સંહતિ માટે λ અને μ મેળવો તથા નીચેના સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડી રચો :

$x + 2y + 3z = 6,\ x + 3y + 5z = 9,\ 2x + 5y + \lambda z = \mu$

સ્તંભ I	સ્તંભ II
(1) $\lambda = 8, \mu \neq 15$	(P) અનંત ઉકેલો મળે.
(2) $\lambda \neq 8, \mu \in R$	(Q) ઉકેલ ન મળે.
(3) $\lambda = 8, \mu = 15$	(R) અનન્ય ઉકેલ મળે.

(A) (1) $\to$ (P), (2) $\to$ (Q), (3) $\to$ (R)

(B) (1) $\to$ (Q), (2) $\to$ (R), (3) $\to$ (P)

(C) (1) $\to$ (R), (2) $\to$ (P), (3) $\to$ (Q)

(D) (1) $\to$ (R), (2) $\to$ (Q), (3) $\to$ (P)

ઉકેલ : $x + 2y + 3z = 6$ (1)

$x + 3y + 5z = 9$ (2)

$2x + 5y + \lambda z = \mu$ (3)

સમીકરણ (1) ને 2 વડે ગુણીને સમીકરણ (3) માંથી બાદ કરતાં,

$y + (\lambda - 6)z = \mu - 12$ (4)

સમીકરણ (2) ને 2 વડે ગુણીને સમીકરણ (3) માંથી બાદ કરતાં,

$-y + (\lambda - 10)z = \mu - 18$ (5)

સમીકરણ (4) અને (5) નો સરવાળો કરતાં,

$(2\lambda - 16)z = 2\mu - 30$

$(\lambda - 8)z = \mu - 15$

$\lambda \neq 8$ અને $\mu \in R$ માટે અનન્ય ઉકેલ મળે.　$(2) \to (R)$

$\lambda = 8$ અને $\mu \neq 15$ માટે ઉકેલ મળે નહિ　$(1) \to (Q)$

$\lambda = 8$ અને $\mu = 15$ અનંત ઉકેલ મળે.　$(3) \to (P)$　**જવાબ :** (B)

[**નોંધ :** નિશ્ચાયક લઈને પણ ગણી શકાય.]

અનન્ય ઉકેલ માટે $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore 3\lambda - 25 - 2(\lambda - 10) - 3 \neq 0$

$\therefore \lambda \neq 8$

હવે માત્ર વિકલ્પ જવાબ (B) બને.

(95) આપેલ સુરેખ સમીકરણો $2x + y = m$, $2x + ny = 3$ માટે m અને n મેળવો તથા નીચેના સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડી રચો :

સ્તંભ I	**સ્તંભ II**
(1) $n = 1, m \in R - \{3\}$	(P) રેખાઓ પરસ્પર છેદશે.
(2) $n = 1, m = 3$	(Q) રેખાઓ સમાંતર થાય.
(3) $n \neq 1, m \in R$	(R) રેખાઓ સમાન થાય.

(A) $(1) \to (Q), (2) \to (R), (3) \to (P)$

(B) $(1) \to (R), (2) \to (Q), (3) \to (P)$

(C) $(1) \to (Q), (2) \to (P), (3) \to (R)$

(D) $(1) \to (R), (2) \to (P), (3) \to (Q)$

ઉકેલ : $2x + y = m$　(1)

$2x + ny = 3$　(2)

સમીકરણ (2) માંથી સમીકરણ (1) બાદ કરતાં,

$(1 - n)y = m - 3$

જો $n = 1, m = 3$ તો રેખાઓ સમાન થાય.　$(2) \to (R)$　(જવાબ (A) નક્કી)

$n \neq 1, m \in R$ રેખાઓ પરસ્પર છેદશે.　$(3) \to (P)$

$n = 1, m \in R - \{3\}$ રેખાઓ સમાંતર થાય.　$(1) \to (Q)$　**જવાબ :** (A)

(96) નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 1+\sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 x & 1+\cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1+\sin 2x \end{vmatrix}$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે n અને m હોય, તો

નીચેના સ્તંભોમાં યોગ્ય જોડી રચો :

સ્તંભ I	સ્તંભ II
(1) $n^2 + m^{2015}$	(P) $k \in N$ માટે હંમેશા યુગ્મ
(2) $n^{2k} + m^{2k}$	(Q) $k \in N$ માટે હંમેશા અયુગ્મ
(3) $2n - 3m, n + m, n + 2m$	(R) 10
	(S) કાટકોણ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં માપ દર્શાવે છે.

(A) $(1)\rightarrow(R), (2)\rightarrow(P), (3)\rightarrow(S)$

(B) $(1)\rightarrow(R), (2)\rightarrow(Q), (3)\rightarrow(S)$

(C) $(1)\rightarrow(R), (2)\rightarrow(Q), (3)\rightarrow(S)$

(D) $(1)\rightarrow(R), (2)\rightarrow(S), (3)\rightarrow(P)$

ઉકેલ :
$$\begin{vmatrix} 1+sin^2x & cos^2x & sin2x \\ sin^2x & 1+cos^2x & sin2x \\ sin^2x & cos^2x & 1+sin2x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ sin^2x & cos^2x & 1+sin2x \end{vmatrix} \qquad R_1 \rightarrow R_1 + (-1)\, R_3,\ R_2 \rightarrow R_2 + (-1)\, R_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ sin^2x & cos^2x & 2+sin2x \end{vmatrix} \qquad C_3 \rightarrow C_3 + C_1,\ C_3 \rightarrow C_3 + C_2$$

$= 2 + sin2x$

$-1 \le sin2x \le 1 \ \Rightarrow 1 \le 2 + sin2x \le 3$

$n = 3, m = 1$

$n^2 + m^{2015} = 3^2 + (1)^{2015} = 9 + 1 = 10$ $(1)\rightarrow (R)$ (જવાબ : (A) નક્કી થઇ ગયો.)

$n^{2k} + m^{2k} = (9)^k + 1 =$ અયુગ્મ $+ 1 =$ યુગ્મ $k \in N$, યુગ્મ પૂર્ણાંક $(2) \rightarrow (P)$

$2n - 3m,\ n + m,\ n + 2m$ નાં મૂલ્યો અનુક્રમે $6 - 3,\ 3 + 1\ \ 3 + 2$ થાય.

એટલે કે 3, 4, 5 જે કાટકોણ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ છે. $(3)\rightarrow (S)$

$(1)\rightarrow (R),\ (2) \rightarrow(P),\ (3)\rightarrow (S)$ જવાબ : (A)

●