അധ്യായം **1**

ഗണങ്ങൾ (Sets)

❖ പ്രാചീന പഠനവും ആധുനിക പഠനവും തമ്മിൽ സംഘർഷം നിലനിൽക്കുന്ന ഇക്കാലത്ത് പൈഥഗോറസിൽ തുടങ്ങാത്തതും ഐൻസ്റ്റൈനിൽ അവസാനിക്കാത്തതുമായ – എന്നാൽ അത് ഏറ്റവും പ്രാചീനവും ഏറ്റവും നവീനവുമാണ് – ഒരു പഠനത്തെപ്പറ്റി ചിലതു പറയേണ്ടിവരുന്നു – ജി.എച്ച്. ഹാർഡി ❖

1.1 ആമുഖം

കഴിഞ്ഞ ക്ലാസുകളിൽ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, അഭാജ്യസംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ തുടങ്ങി സംഖ്യകളെ അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾക്കനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ചില ഗണിതപ്രശ്നങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾക്ക് ഇത്തരത്തിൽ കൂടുതൽ വ്യത്യസ്തവും സൂക്ഷ്മവുമായ തരംതിരിവുകൾ ആവശ്യമാണ്. ഇത്തരത്തിൽ തരംതിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെയോ അനുബന്ധ ചിഹ്നങ്ങളുടേയോ കൂട്ടത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ഗണം എന്ന പദം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ജോർജ് കാന്റർ
(1845-1918)

1.2. ഗണങ്ങളും അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വിധവും

ഗണങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തം ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ജോർജ് കാന്റർ (1845-1918) ആണ് വികസിപ്പിച്ചത്. ത്രികോണമിതീയ അനുക്രമങ്ങളുടെ പ്രശ്നങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് അദ്ദേഹം ഗണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ആദ്യമായി പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഗണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാന നിർവചനങ്ങളും ക്രിയകളുമാണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ചില ഗണങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

- 6 ന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗണം
- 10 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം
- പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലുള്ള രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം.

ഒരു ഗണത്തെ എഴുതുന്നതിന് അതിലെ അംഗങ്ങളെ ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ നിരത്തി എഴുതിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണം

6 ന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗണത്തെ $\{1, 2, 3, 6\}$ എന്നും 10 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ $\{2, 3, 5, 7\}$ എന്നും എഴുതാം.

ഛേദം, അഞ്ചിൽ താഴെ വരുന്ന സാധാരണ ഭിന്നങ്ങളുടെ ഗണത്തെ

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$$ എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ $\frac{2}{4}$ എന്ന ഭിന്നത്തെ ഗണത്തിൽ എഴുതേണ്ടതില്ല കാരണം $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ആണ ല്ലോ. $\frac{1}{2}$ ഗണത്തിലെ അംഗമാണ്. അതായത് ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ എഴുതുമ്പോൾ ആവർത്തിക്കേണ്ടതില്ലെന്ന് സാരം.

വലിയ സംഖ്യകളുടെ ഒരു കൂട്ടം പരിഗണിക്കുക. ഇതിനെ ഇത്തരത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ? ഏതൊക്കെയാണ് വലിയ സംഖ്യകൾ? ഏതു സംഖ്യയേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യകളെയാണ് ഈ ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ടത്? ആശയ വ്യക്തതയില്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഈ ഗണത്തെ പലരും പലവിധത്തിൽ എഴുതാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. ആയതിനാൽ ഒരു ഗണത്തെക്കുറിച്ച് പറയുമ്പോൾ ആശയ വ്യക്തത നിർബന്ധമാണ്. അതായത്, ഒരു കൂട്ടം, ഗണമാകണമെങ്കിൽ അത് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കണം. അതായത്, ആ കൂട്ടത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നത് എന്തെല്ലാം ഉൾപ്പെടാത്തത് എന്തെല്ലാം എന്ന് വ്യക്തമായി പറയാൻ കഴിയണം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെയോ ചിഹ്നങ്ങളെയോ വസ്തുക്കളെയോ ഒരു ഗണം എന്നു പറയാം.

ഇനി "പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലുള്ള രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം" പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് വ്യക്തമായ ധാരണയുണ്ടെങ്കിൽ പോലും ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ അംഗങ്ങളെ നിരത്തിയെഴുതാൻ സാധിക്കില്ല. ഇത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഗണത്തെ കേവല പ്രസ്താവനകളായി പറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

ഉദാഹരണത്തിന്

$$\{x : x \text{ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ}, 0 < x < 1\}$$

ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ x ആണെങ്കിൽ അവ രേഖീയസംഖ്യകൾ ആയിരിക്കണം, കൂടാതെ പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിൽ ആയിരിക്കണം. മേൽ സൂചിപ്പിച്ച രണ്ടു കാര്യങ്ങളെയും ഒരു ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ നേരിട്ട് എഴുതി സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതിയെ 'നിബന്ധനാരീതി' (Set builder form) എന്നു പറയുന്നു. ആദ്യം ചെയ്ത പോലെ, ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ അംഗങ്ങളെ നിരത്തിയെഴുതുന്ന രീതിക്ക് "പട്ടികാരീതി" (Roster form/Tabular form) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ഗണത്തെപ്പറ്റി പറയേണ്ടി വരുമ്പോഴെല്ലാം വലിയൊരു പ്രസ്താവന പറയേണ്ടിവരുന്നതൊഴിവാക്കാൻ സൗകര്യാർത്ഥം ഗണങ്ങൾക്ക് പേര് നൽകാം. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് ഗണങ്ങൾക്ക് പേര് നൽകുക. ഉദാഹരണത്തിന് A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 5, 7}.

$$P = \{x : x \text{ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ}, 0 < x < 1\}$$

$$Q = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$$

ഒരു സംഖ്യ, അല്ലെങ്കിൽ ചിഹ്നം, അല്ലെങ്കിൽ വസ്തു ഒരു ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ഗണത്തിലെ 'അംഗം' എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് Q എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു അംഗമാണ് $\frac{1}{2}$. ഇത് എളുപ്പത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് $\frac{1}{2} \in Q$ എന്ന് എഴുതുന്നു. അതായത് അംഗമാണ് എന്നതിന് '$\in$' എന്ന ചിഹ്നവും അംഗമല്ല എന്നതിന് '$\notin$' എന്ന ചിഹ്നവും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

മേൽപറഞ്ഞ Q എന്ന ഗണത്തിൽ

$$\frac{1}{3} \in Q, \ 5 \notin Q$$

ഇത്തരത്തിൽ ചിഹ്നങ്ങളുടെ സാധ്യത ഉപയോഗപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ഗണങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഒരു ഗണിതഭാഷ തന്നെ രൂപീകരിക്കാൻ സാധിക്കും. **R** രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണമായെടുത്താൽ, മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള P എന്ന ഗണത്തെ.

$P = \{x : x \in \mathbf{R}, \ 0 < x < 1\}$ എന്ന് എഴുതാം.

N എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗണമായെടുത്താൽ ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ $\{2n, n \in \mathbf{N}\}$ എന്നും ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ $\{2n - 1, n \in \mathbf{N}\}$ എന്നും എഴുതാം.

1.3 ശൂന്യഗണവും ഏകാംഗ ഗണവും (Null Set and Singleton Set)

ചില ഗണങ്ങൾ എഴുതുമ്പോൾ രസകരമായ ചില വസ്തുതകൾ കാണാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണത്തിന്,

$P = \{x : x \in \mathbf{N}, 2x - 1 = 0\}$ എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക. **P** യെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതിയാൽ അതിൽ അംഗങ്ങൾ ഒന്നും തന്നെയില്ല എന്ന് കാണാനാകും. $2x - 1 = 0$ ആയാൽ $x = \frac{1}{2}$ ആണല്ലോ. പക്ഷേ $\frac{1}{2}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയല്ല. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു അംഗം പോലുമില്ലാത്ത ഗണത്തെയും പലവിധ ഗണിതക്രിയകളിൽ പരിഗണിക്കേണ്ടിവരും. ഇങ്ങനെ ഒരു അംഗം പോലുമില്ലാത്ത ഗണത്തെ നമുക്ക് ശൂന്യഗണം (null set) എന്ന് വിളിക്കാം. ശൂന്യഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് { } എന്ന ചിഹ്നമോ ϕ എന്ന ചിഹ്നമോ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അതായത്, **P** = { } അല്ലെങ്കിൽ $P = \phi$ എന്ന് എഴുതാം.

$A = \{x : x \in \mathbf{R}, 2x - 1 = 0\}$ എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക. $\frac{1}{2}$ എന്ന ഒരു അംഗം മാത്രമുള്ള ഗണമായിരിക്കും കിട്ടുക. അതായത് $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ഒരു അംഗം മാത്രമുള്ള ഇത്തരം ഗണത്തെ 'ഏകാംഗ ഗണം' (Singleton set) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ ഗണങ്ങളെ അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾക്കനുസരിച്ച് പ്രത്യേകം പേരുകൾ നൽകി വിളിക്കാവുന്നതാണ്.

തുടർന്ന് പരാമർശിക്കാനിടയുള്ള ചില ഗണങ്ങളെ സൗകര്യാർത്ഥം നേരത്തേ പരിചയപ്പെടാം.

N - എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗണം

R - രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം

Z - പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗണം

Q - ഭിന്നകങ്ങളുടെ ഗണം

$\mathbf{Z}^+$ - പൂർണ അധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

$\mathbf{Q}^+$ - ഭിന്നക അധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

$\mathbf{R}^+$ - രേഖീയ അധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

ഉദാഹരണം : 1

$x^2 + x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരഗണം പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ $(x - 1)(x + 2) = 0$ എന്നെഴുതാം.

അതായത് $x = 1, -2$

പരിഹാരഗണം പട്ടികാരീതിയിൽ $\{-2, 1\}$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 2

$\{x : x$ ഒരു പൂർണ അധിസംഖ്യ, $x^2 < 40\}$ എന്ന ഗണത്തെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നിവയാണ് പരിഹാരസംഖ്യകൾ. ഇവയെ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്ന് പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 3

$A = \{1, 4, 9, 16, 25.....\}$ എന്ന ഗണത്തെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

A = {x : x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ വർഗം} അല്ലെങ്കിൽ

A = {x : $x = n^2$, $n \in$ **N**} എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 4

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ എന്ന ഗണത്തെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഛേദം അംശത്തെക്കാൾ ഒന്ന് കൂടുതലാണ്. മാത്രമല്ല അംശം 1 ലാണ് തുടങ്ങുന്നത്, 6 ൽ കൂടുന്നുമില്ല. അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണത്തെ

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}, 1 \le n \le 6\right\}$$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 5

പട്ടികാരീതിയിലും നിബന്ധനാരീതിയിലുമായി ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ ചേരുംപടി ചേർക്കുക.

(i) {P, R, I, N, C, A, L} (a) { x : x ഒരു പൂർണ അധിസംഖ്യയായ, 18 ന്റെ ഘടകമാണ്}

(ii) { 0 } (b) { x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $x^2 - 9 = 0$}

(iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18} (c) {x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $x + 1 = 1$}

(iv) {3, –3} (d) {x : PRINCIPAL എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരമാണ് x}

പരിഹാരം

(i) (d) PRINCIPAL എന്ന വാക്കിലെ ആവർത്തിക്കുന്ന P, I ഒഴിവാക്കിയ അക്ഷരങ്ങളാണ്.

(ii) (c) $x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

(iii) (a) 18 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

(iv) (b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, -3$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.1

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാമാണ് ഗണങ്ങൾ? സമർഥിക്കുക.
   - i. ഒരു വർഷത്തിലെ J എന്ന അക്ഷരത്തിൽ തുടങ്ങുന്ന മാസങ്ങളുടെ കൂട്ടം.
   - ii. ഇന്ത്യയിലെ ഏറ്റവും ശ്രേഷ്ഠരായ 10 എഴുത്തുകാരുടെ കൂട്ടം.
   - iii. ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും കേമൻമാരായ 11 ക്രിക്കറ്റ് ബാറ്റ്സ്മാൻമാരുടെ ടീം.
   - iv. നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ മുഴുവൻ ആൺകുട്ടികളുടെ കൂട്ടം.
   - v. 100 ൽ കുറവായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടം.
   - vi. സാഹിത്യകാരൻ മുൻഷി പ്രേംചന്ദിന്റെ നോവലുകളുടെ കൂട്ടം.
   - vii. ഇരട്ട പൂർണസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടം.
   - viii. ഈ പാഠത്തിലെ ചോദ്യങ്ങളുടെ ശേഖരം.
   - ix. ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും അപകടകാരികളായ മൃഗങ്ങളുടെ കൂട്ടം.

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ചുവടെ പറയുന്നവയിൽ $\in$ അല്ലെങ്കിൽ $\notin$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളിൽ ഉചിതമായത് ചേർത്ത് ശരിയാകും വിധം പൂരിപ്പിക്കുക.

   (i) 5. . .A (ii) 8 . . . A (iii) 0. . .A

   (iv) 4. . . A (v) 2. . .A (vi) 10. . .A

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.
   - (i) $A = \{x : x$ ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $-3 < x < 7\}$
   - (ii) $B = \{x : x$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ, $x < 6\}$
   - (iii) $C = \{x : x,$ അക്കങ്ങളുടെ തുക 8 ആകുന്ന ഒരു രണ്ടക്ക എണ്ണൽ സംഖ്യ$\}$
   - (iv) $D = \{x : x,$ 60 ന്റെ അഭാജ്യഘടകം$\}$
   - (v) E = TRIGONOMETRY എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.
   - (vi) F = BETTER എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.

4. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എഴുതുക.

   (i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2,4,8,16,32\}$ (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$

   (iv) $\{2, 4, 6, \ldots\}$ (v) $\{1,4,9, \ldots,100\}$

5. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.
   - (i) $A = \{x : x$ ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$

(ii) B = {x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$}

(iii) C = {x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $x^2 \leq 4$}

(iv) D = {x : x, "LOYAL" എന്ന വാക്കിലെ ഒരക്ഷരം}

(v) E = {x : x, ഒരു വർഷത്തിലെ 31 ദിവസങ്ങളില്ലാത്ത ഒരു മാസം}

(vi) F = {x : x ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ, k എന്ന അക്ഷരത്തിന് മുൻപു വരുന്ന ഒരു വ്യഞ്ജനാക്ഷരം}.

6. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികാരീതിയിലുള്ള ഓരോ ഗണത്തെയും അതിന്റെ നിബന്ധനാരീതിയിലെഴുതിയിട്ടുള്ള ഗണത്തോട് ചേരുംപടി ചേർക്കുക.

(i) {1, 2, 3, 6}	(a) {x : x, 6 ന്റെ ഒരു അഭാജ്യഘടകം}
(ii) {2, 3}	(b) {x : x, 10 നേക്കാൾ കുറവായ ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽ സംഖ്യ}
(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S}	(c) {x : x, 6 ന്റെ ഘടകമായ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ}
(iv) {1, 3, 5, 7, 9}	(d) {x : x, MATHEMATICS എന്ന വാക്കിലെ ഒരക്ഷരം}

1.4 തുല്യഗണങ്ങൾ (Equal Sets)

A = {n : $n \in$ **N** , $n < 3$}

B = {x : $x \in$ **R**, $x^2 - 3x + 2 = 0$} എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

ഈ രണ്ടു ഗണങ്ങളെയും പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതി നോക്കിയാലോ? രണ്ടു ഗണത്തിലെയും അംഗങ്ങൾ 1, 2 എന്നിവയാണെന്നു കാണാൻ കഴിയും.

അതായത് A = {1, 2}, B = {1, 2}. ഇത്തരത്തിൽ രണ്ട് ഗണങ്ങളിലെ അംഗങ്ങൾ ഒരേപോലെ ആയാൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ തുല്യഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. A യും B യും തുല്യഗണങ്ങളായാൽ A = B എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 6

തുല്യഗണങ്ങളായി വരുന്ന ജോടികൾ കണ്ടുപിടിച്ചെഴുതുക.

A = {0}, B = {x : $x > 15$, $x < 5$},

C = {x : $x - 5 = 0$ }, D = {x: $x^2 = 25$},

E = {x : x, $x^2 - 2x - 15 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൂർണ അധിസംഖ്യാപരിഹാരം}.

പരിഹാരം

A = {0}, C = {5}, E = {5}, B = { }, D = {5, -5} എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ C യിലും E യിലുമാണ് അംഗങ്ങൾ തുല്യമായുള്ളത് എന്നു കാണാം.
അതുകൊണ്ട്, C = E.

ഉദാഹരണം : 7

ഏതൊക്കെയാണ് തുല്യഗണങ്ങൾ?

(i) X, "ALLOY" എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.
B, "LOYAL" എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.

(ii) A = $\{n : n \in \mathbf{Z}, n^2 \leq 4\}$
B = $\{x : x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

പരിഹാരം

(i) X = {A, L, O, Y},

B = {L, O, Y, A}.

X = B

(ii) A = {–2, –1, 0, 1, 2}
B = {1, 2}.
A ≠ B

1.5 പരിമിതഗണവും അനന്തഗണവും (Finite set and Infinite Set)

ഉദാഹരണം 7 ലെ ഗണം A യിൽ 5 അംഗങ്ങളാണ്. ഇതുപോലെ 100 ന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗണം, 50 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം ഇവയിലെല്ലാം അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയും. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി പറയാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ പരിമിതഗണം എന്നു പറയുന്നു. കൂടാതെ ശൂന്യഗണവും പരിമിതഗണമാണ്.

മുഴുവൻ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെയും ഗണം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്? അഭാജ്യസംഖ്യകൾ വലിപ്പം കൂടിപ്പോകുന്ന ക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ ഗണത്തിലെ ഏറ്റവും അവസാനത്തെ അഭാജ്യസംഖ്യ ഏതാണ്?

P = $\{x : x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\}$ എന്ന ഗണത്തിലെ ആദ്യത്തെ അംഗം ഏതാണ്? ഈ ഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്?

ഇത്തരത്തിൽ ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം, എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താനാകാത്ത വിധം അനന്തമാണെങ്കിൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ അനന്തഗണം എന്നു പറയുന്നു.

മുൻപു പരാമർശിച്ച, **N, Q, R** തുടങ്ങിയവയെല്ലാം അനന്തഗണങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. എല്ലാ അനന്തഗണത്തെയും പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കില്ല.

ഉദാഹരണം : 8

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങൾ അനന്തഗണമാണോ പരിമിതഗണമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $\{x : x \in \mathbf{N}, (x-1)(x-2) = 0\}$
(ii) $\{x : x \in \mathbf{N}, x^2 = 4\}$
(iii) $\{x : x \in \mathbf{N}, 2x - 1 = 0\}$
(iv) $\{x : x \in \mathbf{N}$, x ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ$\}$
(v) $\{x : x \in \mathbf{N}$, x ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ$\}$

പരിഹാരം

(i) $\{1, 2\}$; പരിമിതഗണം.
(ii) $\{2\}$, പരിമിതഗണം
(iii) ϕ, പരിമിതഗണം
(iv) അഭാജ്യ സംഖ്യാഗണം, അനന്തഗണമാണ്.
(v) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗണം, അനന്തഗണമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.2

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ശൂന്യഗണങ്ങൾ?
   (i) 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.
   (ii) ഇരട്ട അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം.
   (iii) $\{x : x$, ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ, $x < 5, x > 7\}$
   (iv) $\{y : y$, രണ്ടു സമാന്തര വരകൾക്ക് പൊതുവായുള്ള ബിന്ദു$\}$
2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് പരിമിതഗണങ്ങൾ? ഏതൊക്കെയാണ് അനന്തഗണങ്ങൾ?
   (i) ഒരു വർഷത്തിലെ മാസങ്ങളുടെ ഗണം
   (ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$
   (iii) $\{1, 2, 3, \ldots 99, 100\}$
   (iv) 100 ൽ കൂടുതലായ പൂർണഅധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം
   (v) 99 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം
3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാമാണ് പരിമിതഗണങ്ങൾ? ഏതെല്ലാമാണ് അനന്തഗണങ്ങൾ?
   (i) x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരകളുടെ ഗണം
   (ii) ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം
   (iii) 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗണം
   (iv) ഭൂമിയിൽ വസിക്കുന്ന മൃഗങ്ങളുടെ ഗണം
   (v) $(0, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ഗണം

4. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ A, B തുല്യമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

   (i) $A = \{ a, b, c, d \}$ $B = \{ d, c, b, a \}$

   (ii) $A = \{ 4, 8, 12, 16 \}$ $B = \{ 8, 4, 16, 18 \}$

   (iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ B = { x : x, ഒരു ഇരട്ടഅധിസംഖ്യ, $x \leq 10$}

   (iv) A = { x : x, 10 ന്റെ ഗുണിതം}, B = { 10, 15, 20, 25, 30, . . . }

5. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങൾ തുല്യമാണോ? കാരണം എഴുതുക.

   (i) $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x^2 + 5x + 6 = 0\}$

   (ii) A = { x : FOLLOW എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരമാണ് x}

   B = { x : WOLF എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരമാണ് x}

6. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്ന് തുല്യഗണങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

   $A = \{ 2, 4, 8, 12\}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{ 4, 8, 12, 14\}$, $D = \{ 3, 1, 4, 2\}$

   $E = \{-1, 1\}$, $F = \{ 0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{ 0, 1\}$

1.6. ഉപഗണങ്ങൾ (Subsets)

ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എന്നാൽ 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യകൾ ആണല്ലോ. ഇവയിൽ ചിലതിനെ 4 കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം. എന്നാൽ എല്ലാ ഇരട്ടസംഖ്യകളെയും 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ. അതായത്, 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ സംഖ്യകളെയും 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാനാകുമോ?

4 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന മുഴുവൻ സംഖ്യകളെയും 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം. എന്നാൽ 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ സംഖ്യകളെയും 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കുക സാധ്യമല്ല.

ഈ വസ്തുതയെ ഗണത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ മാറ്റിയെഴുതിയാൽ

$E = \{2n, n \in \mathbf{Z}\}$

$F = \{4n, n \in \mathbf{Z}\}$ ആയാൽ F ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും E യിലെയും അംഗങ്ങളാണ്. ഇവിടെ F നെ E യുടെ ഉപഗണം (subset) എന്നു വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ **E** യെ **F** ന്റെ അധിഗണം (super set) എന്നും പറയുന്നു.

E യുടെ ഉപഗണമാണ് **F** എന്നത് $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇനി E യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും **F** ലെയും കൂടി അംഗങ്ങളായിരുന്നെങ്കിൽ $E = F$ ആകുമായിരുന്നു. അതിനാൽ ഉപഗണത്തെ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

ഗണം A, ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാകണമെങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ A ശൂന്യഗണമായിരിക്കണം അല്ലെങ്കിൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിലെ അംഗങ്ങൾ ആയിരിക്കണം.

ഈ നിർവചന പ്രകാരം ശൂന്യഗണം എല്ലാ ഗണങ്ങളുടെയും ഉപഗണമായിരിക്കും. കൂടാതെ, ഏതൊരു ഗണവും അതിന്റെ തന്നെ ഉപഗണമായിരിക്കും. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ $\phi \subset A, A \subseteq A$

ഇനി S എന്ന 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗണം പരിഗണിക്കുക. അതായത് $S = \{x: x = 6m, m \in \mathbf{Z}\}$ ആയാൽ S ലുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും E യിലും ഉണ്ടെന്നു കാണാൻ കഴിയും. കാരണം 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെല്ലാം 2 ന്റെയും ഗുണിതങ്ങളാണ്. അതായത് $S \subseteq E$ ആണ്. ഇനി S, F പരിഗണിച്ചാലോ? $4 \in F$ ആണ് പക്ഷെ $4 \notin S$. അതുകൊണ്ട് $F \not\subset S$ എന്ന് പറയാം. അതുപോലെ $6 \in S$ ആണ് പക്ഷേ $6 \notin F$. അതായത് $S \not\subset F$.

A = B ആയാൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിൽ ഉണ്ടെന്നാണല്ലോ, അതായത് $A \subseteq B$ ആണ്. കൂടാതെ B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും A യിലുമുണ്ട്. അതായത് $B \subseteq A$. രണ്ടു ഗണങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അവ പരസ്പരം ഉപഗണങ്ങളായിരിക്കും. തിരിച്ചും ഇത് ശരിയാകില്ലേ? രണ്ട് ഗണങ്ങൾ പരസ്പരം ഉപഗണങ്ങളായിരുന്നാൽ അവ തുല്യമാവുകയില്ലേ?

രണ്ടു ഗണങ്ങൾ A യും B യും പരസ്പരം ഉപഗണങ്ങളായിരുന്നാൽ അവ തുല്യഗണങ്ങളായിരിക്കും. തിരിച്ചും ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാകും.

അതായത്, $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A - B$ ആയിരിക്കും.

1.6.1 ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണം (Power Set)

A = {1, 2, 3} എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക.

A യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ് {1} . അതുപോലെ A യുടെ ഏതൊക്കെ ഉപഗണങ്ങൾ എഴുതാൻ കഴിയും?

{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2, 3}, ϕ എന്നിങ്ങനെ 8 ഉപഗണങ്ങൾ A എന്ന ഗണത്തിന് ഉണ്ടാകും. A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണവും കൂടും. n അംഗങ്ങളുള്ള A എന്ന ഗണത്തിന് എത്ര ഉപഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് ചിന്തിച്ചു നോക്കൂ.

$n = 0$ ആയാൽ A ഒരു ശൂന്യഗണമായിരിക്കും ശൂന്യഗണത്തിന്റെ ഉപഗണം ശൂന്യഗണം മാത്രമാണല്ലോ, അതായത് $n = 0$ ആയാൽ A ക്ക് ഒരു ഉപഗണം സാധ്യമാണ് $n = 1$ ആയാലോ? ഉദാഹരണത്തിന്, A = {a} എന്നു കരുതിയാൽ ഉപഗണങ്ങൾ { }, {a}. $n = 1$ ആയാൽ രണ്ട് ഉപഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. A യിൽ b എന്ന ഒരംഗത്തെ കൂടി ചേർത്ത് B എന്ന ഒരു ഗണം പരിഗണിച്ചാൽ $n = 2$ ആകും.

ഇവിടെ B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ എഴുതിനോക്കാതെ എഴുതുന്ന രീതിയെപ്പറ്റി ചിന്തിക്കാം. മുൻപ് A യുടെ ഉപഗണമായ ഗണങ്ങളെല്ലാം ഇപ്പോൾ B യുടെയും ഉപഗണങ്ങൾ ആകുമല്ലോ. അതോടൊപ്പം ആ ഉപഗണങ്ങളിൽ b എന്ന പുതിയ അംഗത്തെ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ഗണങ്ങളും B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

വിശദമാക്കിയാൽ, B യുടെ ആകെ ഉപഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്.

A യുടെ ഉപഗണങ്ങളായ { }, $\{a\}$ എന്നിവയും ഇവയോട് b എന്ന പുതിയ അംഗം ചേർത്താൽ കിട്ടുന്ന $\{b\}$, $\{a, b\}$ എന്നിവയും ചേർന്നതായിരിക്കും അതായത് B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ { }, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ എന്നിങ്ങനെ നാലെണ്ണമായിരിക്കും.

B യിൽ 'c' എന്ന പുതിയ അംഗത്തെ ചേർത്ത് 'C' എന്ന ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കിയാൽ $n = 3$ ആയി.

ഇതേ രീതിയിൽ ചിന്തിച്ചാൽ B യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഇരട്ടി ആയിരിക്കും C യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം. അതായത് C യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 2 \times 4 = 8 = 2 \times 2^2 = 2^3$ ഇത്തരത്തിൽ പുതുതായി ചേരുന്ന ഓരോ അംഗത്തിനും അനുസരിച്ച് ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം തൊട്ടുമുൻപത്തേതിന്റെ ഇരട്ടി ആയി വർദ്ധിക്കും.

അതായത്, $n = 3$ ആയാൽ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 2^3$

കുറിപ്പ്

A എന്ന ഗണത്തിൽ n അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ A യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^n ആയിരിക്കും.

A എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണം A തന്നെയാണല്ലോ. A യുടെ A ഒഴികെയുള്ള ഉപഗണങ്ങളെ സംഗതോപഗണങ്ങൾ (Proper Subset) എന്നു പറയുന്നു. n അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^n ആയതിനാൽ സംഗതോപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $2^n - 1$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 9

ϕ, A = { 1, 3 }, B = {1, 5, 9}, C = {1, 3, 5, 7, 9} എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. $\subset$, $\not\subset$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ അനുയോജ്യമാം വിധം ചേർത്ത് പൂരിപ്പിക്കുക.

(i) ϕ . . . B (ii) A . . . B (iii) A . . . C (iv) B . . . C

പരിഹാരം

(i) $\phi \subset$ B (ശൂന്യഗണം എല്ലാ ഗണങ്ങളുടെയും ഉപഗണം)
(ii) A $\not\subset$ B ($3 \in$ A, $3 \notin$ B)
(iii) A $\subset$ C (A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും C യിലുമുണ്ട്)
(iv) B $\subset$ C (B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും C യിലുമുണ്ട്)

ഉദാഹരണം : 10

A = { a, e, i, o, u}, B = { a, b, c, d} എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. A എന്ന ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാണോ? അല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?). B എന്ന ഗണം A യുടെ ഉപഗണമാണോ? അല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഉദാഹരണം : 11

A, B, C എന്നിവ മൂന്നു ഗണങ്ങളാണ്. A ∈ B, B ⊂ C ആയാൽ A ⊂ C എന്നത് ശരിയാണോ? അല്ലെങ്കിൽ ഉദാഹരണ സഹിതം വ്യക്തമാക്കുക.

പരിഹാരം

A ⊂ C എന്നത് ശരിയാകില്ല.
A = {1}, B = {{1}, 2}, C = {{1}, 2, 3} എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ A ∈ B ആണ്.
B ⊂ C യും ശരിയാകുന്നുണ്ട്. പക്ഷേ A⊄ C.

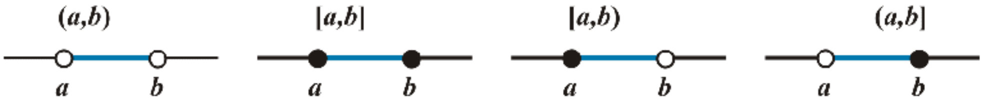
നിർവചനം

ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ മുഴുവൻ നിരത്തിയെഴുതുക. ഈ ഉപഗണങ്ങൾ അംഗങ്ങളായി വരുന്ന ഒരു പുതിയ ഗണം പരിഗണിച്ചാൽ ആ ഗണത്തെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണം എന്നു വിളിക്കാം. A എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണഗണത്തെ P(A) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
ഉദാഹരണത്തിന്, A = {1, 2, 3}
ഉപഗണഗണം P(A) = {ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}} ആയിരിക്കും.
അതായത്, A എന്ന ഗണത്തിൽ n അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ n[P(A)] = 2^n

1.6.2 R ന്റെ ഉപഗണങ്ങളായി ഇടവേളകൾ (Intervals as subsets of R)

രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം **R** പരിഗണിക്കുക. നാം കണ്ടു പരിചയിച്ച എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണം **N**, പൂർണസംഖ്യാ ഗണം **Z**, ഭിന്നകങ്ങളുടെ ഗണം **Q** എന്നിവയെല്ലാം **R** ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ ആണ്. A = {x : $0 < x < 1$} എന്ന ഗണവും **R** ന്റെ ഉപഗണമാണ്. **R** ന്റെ **N, Q, Z** പോലെയുള്ള ഉപഗണങ്ങളിൽ നിന്ന് A എങ്ങനെയാണ് വ്യത്യസ്തമാകുന്നത്? A യിലെ അംഗങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കുമോ? A യിൽ ആദ്യം വരുന്ന സംഖ്യ ഏതാണ്? അടുത്ത സംഖ്യയായി ഏതാണെഴുതേണ്ടത്? A എന്ന ഗണം പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലുള്ള മുഴുവൻ രേഖീയ സംഖ്യകളെയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഗണമാണ്. **R** ന്റെ ഇത്തരം ഉപഗണത്തെ 'തുറന്ന ഇടവേള' എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഇതിനെ (0, 1) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. B = {x : $0 \le x \le 1$} എന്നായാലോ? B യിൽ 0 ത്തിനും 1 നും ഇടയിലുള്ള മുഴുവൻ രേഖീയസംഖ്യകളും 0, 1 കൂടി ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത്തരം ഉപഗണത്തെ 'അടഞ്ഞ ഇടവേള' എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ [0, 1] എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ a, b എന്നിവ രണ്ടു രേഖീയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$, $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 1.1

1.7 സമസ്തഗണം (Universal set)

നിർവചനം

ഒരു ഗണിത പ്രശ്നത്തിൽ പരിഗണിക്കേണ്ടിവരുന്ന മുഴുവൻ ഗണങ്ങളുടെയും അധിഗണമായെടുക്കാവുന്ന ഗണമാണ് സമസ്തഗണം.

ഉദാഹരണത്തിന് $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5\}$

$C = \{5, 6, 7\}$ ആയാൽ

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ എന്ന ഗണത്തെ സമസ്തഗണമായി പരിഗണിക്കാം. ഇങ്ങനെയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ ഗണം $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ആണെന്ന് ഓർക്കുക. U എന്ന അക്ഷരം ഉപയോഗിച്ചാണ് സമസ്തഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങളിൽ $\subset$, $\not\subset$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പൂരിപ്പിക്കുക.

   (i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

   (iii) $\{x : x$, നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ XI ക്ലാസിലെ ഒരു കുട്ടി$\} \ldots \{x : x$, നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ ഒരു കുട്ടി$\}$

   (iv) $\{x : x$, ഒരു തലത്തിലെ വൃത്തം$\} \ldots \{x : x$, അതേ തലത്തിലെ ഒരു യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തം$\}$

   (v) $\{x : x$, ഒരു തലത്തിലെ ത്രികോണം$\} \ldots \{x : x$, അതേ തലത്തിലെ ഒരു ചതുരം$\}$

   (vi) $\{x : x$, ഒരു തലത്തിലെ സമഭുജ ത്രികോണം$\} \ldots \{x : x$, അതേ തലത്തിലെ ഒരു ത്രികോണം$\}$

   (vii) $\{x : x$, ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ$\} \ldots \{x : x$, ഒരു പൂർണ സംഖ്യ$\}$

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് എഴുതുക.

   (i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

   (ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ഒരു സ്വരാക്ഷരം$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$, 6 ൽ കുറവായ ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ$\} \subset \{x : x$, 36 ന്റെ ഘടകമായ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$

3. $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ തെറ്റായ പ്രസ്താവനകൾ ഏതെല്ലാം? എന്തുകൊണ്ട്?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$
(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$
(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$
(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. $A = \phi$ ആയാൽ P(A) യിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ടാകും?

6. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയെ ഇടവേള ആയി എഴുതുക.

(i) $\{x : x \in \mathbf{R}, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbf{R}, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbf{R}, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in \mathbf{R}, 3 \leq x \leq 4\}$

7. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഇടവേളകളെ നിബന്ധനാ രീതിയിൽ എഴുതുക.

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ഗണത്തിനും ഉചിതമായ സമസ്തഗണം എഴുതുക.

i. മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം

ii. സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം

9. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ ഏതാണ് A, B, C എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ സമസ്ത ഗണമായി എഴുതാൻ കഴിയുന്ന ഗണം?

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) ϕ

(iii) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

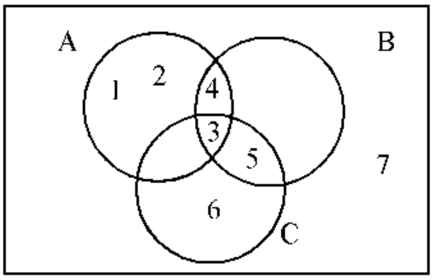
(iv) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1.8 വെൻചിത്രങ്ങൾ (Venn Diagrams)

ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതിയാണ് വെൻചിത്രം. (പൊതുവെ സമസ്തഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ചതുരവും മറ്റു ഗണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് അടഞ്ഞ വക്രവുമാണ് (ഉദാ: വൃത്തം) ഉദാഹരണത്തിന്

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$
$$C = \{3, 5, 6\}$$

ഈ ഗണങ്ങളെ വെൻചിത്രമുപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ ചിത്രീകരിക്കാം.



ചിത്രം 1.2

ഗണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വെൻചിത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

1.9 ഗണക്രിയകൾ (Operation on sets)

$A = \{x : x = 2m, m \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x : x = 3m, m \in \mathbf{N}\}$ ആണെന്നു കുരുതുക. A യിലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം രണ്ടിന്റെ ഗുണിതങ്ങളും B യിലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുമാണ്. ഇവയെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതിയാൽ.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$

A യിലും B യിലും പൊതുവായി വരുന്ന അംഗങ്ങളേതൊക്കെയാണ്? പൊതുവായ അംഗങ്ങളെ C എന്ന ഗണമായി സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$C = \{6, 12, 18, ...\}$ എന്ന് കിട്ടും.

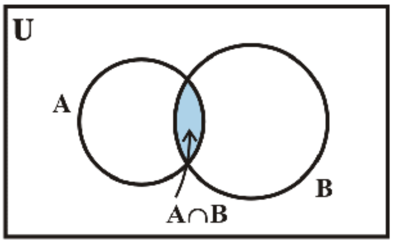
ഈ ഗണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത അവയിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണ് എന്നതാണ്. അതായത്, $C = \{x : x = 6m, m \in \mathbf{N}\}$

ഇത്തരത്തിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ പൊതുവായ അംഗങ്ങളെ ഉൾപ്പെടുത്തി പുതിയതായി രൂപീകരിക്കുന്ന ഗണത്തെ ആ ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം (intersection) എന്ന് പറയുന്നു.

(A സംഗമം B ആണ് C)

ഇതിനെ ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് $A \cap B = C$ എന്നെഴുതാം.

$A \cap B = \{x : x \in A$ യും $x \in B$ യും$\}$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 1.3

ഉദാഹരണത്തിന്

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Q = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$P \cap Q = \{3, 4\}$$

പൊതുവായി അംഗങ്ങൾ ഒന്നും തന്നെയില്ലാത്ത ഗണങ്ങളാണെങ്കിലോ? ഉദാഹരണത്തിന്

$$M = \{a, b, c\}$$
$$N = \{d, c\}$$
$$M \cap N = \{\ \}$$

ഇത്തരത്തിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ പൊതുവായി അംഗങ്ങൾ ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ വിയുക്തഗണങ്ങൾ (disjoint sets) എന്നു പറയുന്നു.

അതായത്,

A യും B യും രണ്ടു വിയുക്തഗണങ്ങളായാൽ $A \cap B = \phi$ ആയിരിക്കും.

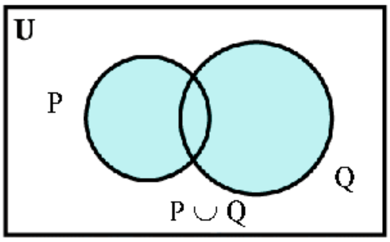
ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന മുഴുവൻ അംഗങ്ങളെയും പരിഗണിക്കുന്ന ഗണപ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യേണ്ടി വരും. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ രണ്ടു ഗണത്തിലെയും മുഴുവൻ അംഗങ്ങളെയും ചേർത്തെഴുതി ഒരു പുതിയ ഗണം രൂപീകരിക്കേണ്ടിവരും.

ഉദാഹരണത്തിന്

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Q = \{4, 5, 6, 7\}$$

P യിലെയും Q വിലെയും അംഗങ്ങളെയെല്ലാം ചേർത്ത് പുതിയൊരു ഗണം എഴുതുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ P യോഗം Q എന്ന് വിളിക്കുന്നു. '$\cup$' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാണ് രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തെ (union) സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



ചിത്രം 1.4

4 എന്ന അംഗം P യിലും Q വിലും പൊതുവായുള്ളതായതിനാൽ 4 നെ ഒറ്റത്തവണയേ യോഗത്തിൽ എഴുതേണ്ടതുള്ളൂ.

$$P \cup Q = \{x : x \in P \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x \in Q\}$$

$P \cup Q$ വിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം P യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും Q വിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും കൂട്ടിയതിന് തുല്യമാകുമോ?

P യിലും Q വിലും പൊതുവായി അംഗങ്ങളില്ലെങ്കിൽ അവ ചേർത്തെഴുതുന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം P യിലെയും Q വിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ തുകക്ക് തുല്യമാകുമെന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ

> P യും Q വും രണ്ടു വിയുക്ത ഗണങ്ങളും $n(P)$, $n(Q)$, $n(P \cup Q)$ എന്നിവ യഥാക്രമം P യിലെയും Q വിലെയും $P \cup Q$ വിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവുമായാൽ
>
> $$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) \text{ ആയിരിക്കും}$$

ഇനി P ക്കും Q വിനും പൊതുവായി അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിലോ? പൊതുവായുള്ളവ P യിലും Q വിലും ഉണ്ടാകുമല്ലോ. $P \cup Q$ വിൽ ഇവയെ ഒരുതവണ എഴുതിയാൽ മതിയാകും. അതുകൊണ്ടു തന്നെ P, Q ഇവയിലെ അംഗങ്ങളുടെ തുകയെടുത്താൽ ഇവയിൽ പൊതുവായുള്ള അംഗങ്ങളെ രണ്ടുതവണ എണ്ണിയിട്ടുണ്ടാകും. അപ്പോൾ $n(P \cup Q)$ കിട്ടാൻ $n(P)$ യുടെയും $n(Q)$ വിന്റെയും തുകയിൽ നിന്ന് പൊതുവായുള്ളതിന്റെ എണ്ണം കുറക്കേണ്ടി വരും.

> P യും Q വും അനന്തഗണങ്ങളല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഗണങ്ങളായാൽ
>
> $$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$$

ഉദാഹരണം : 12

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{6, 8, 10, 12\}$ ആയാൽ $A \cup B$, $A \cap B$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, A \cap B = \{6, 8\}$$

ഉദാഹരണം : 13

$A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{a, i, u\}$ എന്നിവ ആയാൽ $A \cup B = A$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A \cup B = \{ a, e, i, o, u \} = A \quad \text{ആയിരിക്കും}$$

അതായത്, $B \subset A$ ആയാൽ $A \cup B = A$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 14

X = {രാമൻ, ഗീത, അക്ബർ} എന്നത് ഒരു സ്കൂൾ ഹോക്കി ടീമിലുള്ള XI-ാം ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളുടെ ഗണമാണ്. Y = {ഗീത, ദാവീദ്, അശോകൻ} എന്നിവർ സ്കൂൾ ഫുട്ബോൾ ടീമിൽ ഉള്ള XI-ാം ക്ലാസ്സിലെ ഗണമാണ്. $X \cup Y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

$X \cup Y$ എന്ന ഗണത്തെ പ്രസ്താവന രൂപത്തിലെഴുതുക.

പരിഹാരം

$X \cup Y$ = {രാമൻ, ഗീത, അക്ബർ, ദാവീദ്, അശോകൻ}

$X \cup Y$ എന്നത് XI-ാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന, സ്കൂൾ ഫുട്ബോൾ ടീമിലോ ഹോക്കി ടീമിലോ അഥവാ രണ്ടിലുമോ ഉള്ള കുട്ടികളുടെ ഗണമാണ്.

ഉദാഹരണം : 15

ഉദാഹരണം 14 ലെ ഗണങ്ങൾ X, Y എന്നിവ പരിഗണിക്കുക. $X \cap Y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

രണ്ടിലും പൊതുവായുള്ള അംഗം 'ഗീത' മാത്രമാണ്. അതുകൊണ്ട്

$X \cap Y$ = { ഗീത }

ഉദാഹരണം : 16

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ആയാൽ $A \cap B$ കണ്ടുപിടിക്കുക. $A \cap B = B$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} = B$$

ഇവിടെ $B \subset A$ ആണ്. $B \subset A$ ആയാൽ $A \cap B = B$ ആയിരിക്കും.

യോഗത്തിന്റെയും സംഗമത്തിന്റെയും ചില പ്രത്യേകതകൾ

(i) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$, ക്രമ നിയമം (Commutative law)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, സംയോജന നിയമം (Associative law)

(iii) $A \cup \phi = A$

$A \cap \phi = \phi$ (Identity law, Law of ϕ)

(iv) $A \cup A = A$

$A \cap A = A$ (Idempotent law)

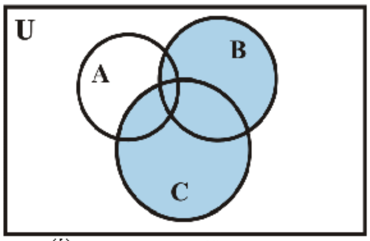
(v) $U \cup A = U$

$U \cap A = A$ (Law of $\cup$)

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ വിതരണ നിയമം (Distributive property)

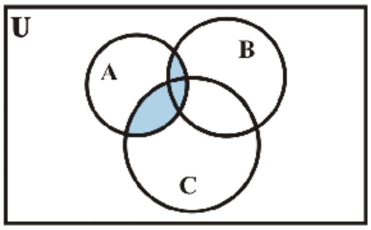
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ഉദാഹരണത്തിന്, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ എന്ന പ്രത്യേകത വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കാം.



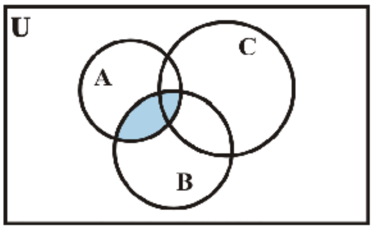
(i) $(B \cup C)$

ചിത്രം 1.5

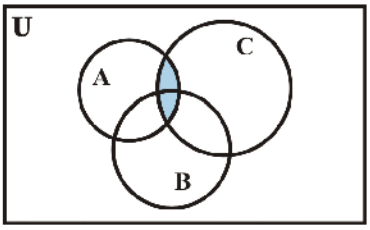


(ii) $A \cap (B \cup C)$

ചിത്രം 1.6

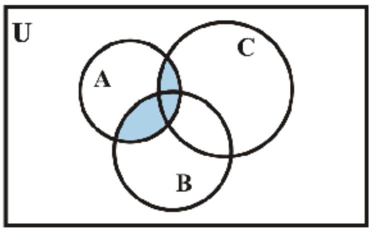


(iii) $(A \cap B)$ ചിത്രം 1.7



(iv) $(A \cap C)$

ചിത്രം 1.8



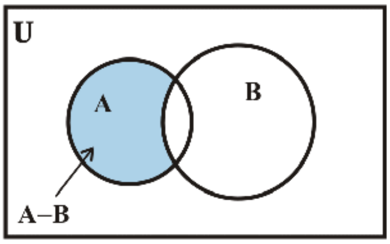
(v) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ചിത്രം 1.9

രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം (Difference of two sets)

$P = \{x : x = 3m, m \in \mathbf{Z}\}$

$Q = \{x : x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}$ എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. P യിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളും Q വിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുമാണല്ലോ? 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളല്ലാത്ത 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?



ചിത്രം 1.10

ഇതു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളിൽ നിന്ന് അതായത് P യിൽ നിന്ന് 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങ

ളായുള്ളവയെ ഒഴിവാക്കേണ്ടി വരും. അതായത് P യിൽ നിന്നും Q വിലെ അംഗ ങ്ങളെ ഒഴിവാക്കേണ്ടിവരും. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഗണത്തെ P വ്യത്യാസം Q എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ P – Q എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

$$P - Q = \{x : x \in P \text{ യും } x \notin Q \text{ വും}\}$$

ഉദാഹരണം : 17

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 4, 6, 8} എന്നിവ ആയാൽ A – B യും B – A യും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A – B = {1, 3, 5}, B – A = {8}

(A – B ≠ B – A എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഉദാഹരണം : 18

A = {a, e, i, o, u}, B = {a, i, k, u} എന്നിവ ആയാൽ A – B യും B – A യും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$A - B = \{e, o\}$$

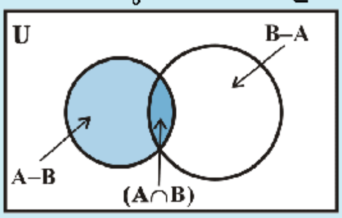
$$B - A = \{k\}$$

A – B യിലെ അംഗങ്ങൾ എഴുതുന്നത് A യിൽ നിന്ന് B യിലുള്ള അംഗങ്ങളെ ഒഴിവാക്കിയാണല്ലോ. അതായത് A യിൽ നിന്നും A യിലും B യിലും പൊതുവായുള്ളവയെ ഒഴിവാക്കണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ A – B യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം A യുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് A ∩ B യുടെ എണ്ണം കുറച്ചതാകുമല്ലോ.

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

കുറിപ്പ് 1

A – B, A ∩ B, B – A എന്നിവ വിയുക്ത ഗണങ്ങളായിരിക്കും.



ചിത്രം 1.11

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ (1.4)

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ഗണങ്ങളുടെയും യോഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) X = {1, 3, 5} Y = {1, 2, 3}
   (ii) A = { a, e, i, o, u} B = {a, b, c}
   (iii) A = {x : x, 3 ന്റെ ഗുണിതമായ ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയാണ്}
   B = {x : x, 6 ൽ കുറവായ എണ്ണൽ സംഖ്യയാണ്}
   (iv) A = {x : x, ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ, $1 < x \leq 6$ }
   B = {x : x, ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ, $6 < x < 10$ }
   (v) A = {1, 2, 3}, B = ϕ
2. A = { a, b }, B = {a, b, c}. A എന്ന ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാണോ? A ∪ B കണ്ടെത്തുക.
3. A ⊂ B ആകുന്ന വിധം രണ്ടു ഗണങ്ങളാണ് A യും B യും എങ്കിൽ A ∪ B എന്ത്?
4. A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6}, C = {5, 6, 7, 8 }, D = { 7, 8, 9, 10 } ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) A ∪ B (ii) A ∪ C (iii) B ∪ C (iv) B ∪ D
   (v) A ∪ B ∪ C (vi) A ∪ B ∪ D (vii) B ∪ C ∪ D
5. ചോദ്യം നമ്പർ 1 ലെ ഓരോ ജോടി ഗണങ്ങളുടെയും സംഗമം കണ്ടുപിടിക്കുക.
6. A = { 3, 5, 7, 9, 11 }, B = {7, 9, 11, 13}, C = {11, 13, 15}, D = {15, 17} ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) A ∩ B (ii) B ∩ C (iii) A ∩ C ∩ D
   (iv) A ∩ C (v) B ∩ D (vi) A ∩ (B ∪ C)
   (vii) A ∩ D (viii) A ∩ (B ∪ D) (ix) (A ∩ B) ∩ (B ∪ C)
   (x) (A ∪ D) ∩ (B ∪ C)
7. A = {x : x, ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ}, B = {x : x ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ}
   C = {x : x, ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യ}, D = {x : x, ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ} ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) A ∩ B (ii) A ∩ C (iii) A ∩ D
   (iv) B ∩ C (v) B ∩ D (vi) C ∩ D

8. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ ഏതെല്ലാമാണ് വിയുക്ത ഗണങ്ങളായി വരുന്ന ജോടികൾ?

   (i) $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{x : x$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ, $4 \leq x \leq 6\}$
   (ii) $\{a, e, i, o, u\}$, $\{c, d, e, f\}$
   (iii) $\{x : x$, ഒരു ഇരട്ടപൂർണസംഖ്യ$\}$, $\{x : x$, ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ$\}$

9. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$,
   $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{5, 10, 15, 20\}$ എന്നിവ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$
   (v) $C - A$ (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$
   (ix) $C - B$ (x) $D - B$ (xi) $C - D$ (xii) $D - C$

10. $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{f, b, d, g\}$ ആയാൽ

    (i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. **R** രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണവും **Q** ഭിന്നകസംഖ്യകളുടെ ഗണവും ആയാൽ **R** – **Q** എന്ത്?

12. ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ, തെറ്റോ എന്ന് എഴുതുക. കാരണം വ്യക്തമാക്കുക.

    (i) $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 6\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.
    (ii) $\{a, e, i, o, u\}$, $\{a, b, c, d\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.
    (iii) $\{2, 6, 10, 14\}$, $\{3, 7, 11, 15\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.
    (iv) $\{2, 6, 10\}$, $\{3, 7, 11\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.

1.10 പൂരകഗണം (Complement of a set)

5 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിലെ അഭാജ്യസംഖ്യകൾ A എന്ന ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഭാജ്യസംഖ്യകളെ B എന്നും എടുക്കാം.

$A = \{7, 11, 13, 17, 19\}$, $B = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

A, B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതയെന്താണ്? ഇവ രണ്ടും 5 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ രണ്ടു ഗണങ്ങളാക്കുന്നു. അവയിലെ അംഗങ്ങളെ ചേർത്തെഴുതിയാൽ ആദ്യം സൂചിപ്പിച്ച ഗണം ലഭിക്കുന്നു.

5 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ U എന്നെടുത്താൽ

$U = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$

$A \cup B = U$

ഇവിടെ B എന്ന ഗണത്തെ A യുടെ പൂരകഗണം എന്ന് പറയുന്നു. (തിരിച്ചും ഇത് ശരിയാണ്)

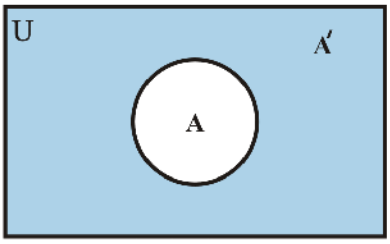
A യുടെ പൂരകഗണത്തെ A′ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം.

$$A' = B$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ $A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

മറ്റൊരു തരത്തിൽ

$$A' = U - A$$



ചിത്രം 1.12

ഉദാഹരണം : 20

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 3, 5, 7, 9} ആയാൽ A′ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A എന്ന ഗണത്തിൽ അംഗമാകാത്ത U വിലെ അംഗങ്ങൾ 2, 4, 6, 8, 10 എന്നിവയാണ്.

$$\therefore A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

ഉദാഹരണം : 21

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {2, 3}, B = {3, 4, 5} ആയാൽ A′, B′, $A' \cap B'$, $A \cup B$, എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. തുടർന്ന് $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$A' = \{1, 4, 5, 6\}$, $B' = \{1, 2, 6\}$. $A' \cap B' = \{1, 6\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B)' = \{1, 6\}$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

പൊതുവെ A, B എന്നീ ഏതു രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്കും ഈ പ്രത്യേകത, അതായത് $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നത് ശരിയാണെന്നു കാണാം. അതുപോലെ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നതും ഏതു രണ്ട് ഗണം A, B യ്ക്കും ശരിയാണ്. ഈ പ്രത്യേകതയാണ് ദ് മോർഗൺ നിയമം (De Morgan's law) എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്നത്.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ഇനി A′ ഒരു ഗണമായെടുത്ത് ഇതിന്റെ പൂരകഗണം ഏതായിരിക്കും എന്നാലോചിച്ചു നോക്കൂ, $A' \cup A = U$ ആണല്ലോ അപ്പോൾ $(A')' = A$ തന്നെയാകില്ലേ?

അതായത് $(A')' = A$

A, A′ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള സംഗമം ഉണ്ടാകുമോ?

$A \cap A' = \{\ \}$ ആയിരിക്കും

പൂരകഗണത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേകതകൾ

(i) $(A')' = A$

(ii) $A' \cup A = U$

(iii) $\phi' = U$

(iv) $U' = \phi$

(v) $A' \cap A = \{\ \}$

(vi) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ദ് മോർഗൺ നിയമങ്ങൾ)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.5

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
   $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ആയാൽ
   (i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ആയാൽ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ പൂരകഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$
   (iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$
3. എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തെ സമസ്തഗണമായി പരിഗണിച്ച് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ പൂരകഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $\{x : x,$ ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$
   (ii) $\{x : x,$ ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$
   (iii) $\{x : x,$ 3 ന്റെ ഒരു അധിസംഖ്യാ ഗുണിതമാണ്$\}$
   (iv) $\{x : x,$ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ$\}$
   (v) $\{x : x,$ 3 കൊണ്ടും 5 കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ$\}$
   (vi) $\{x : x,$ ഒരു പൂർണവർഗം$\}$
   (vii) $\{x : x,$ ഒരു പൂർണഘനം$\}$
   (viii) $\{x : x + 5 = 8\}$
   (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$
   (x) $\{x : x \geq 7\}$
   (xi) $\{x : x \in N$ കൂടാതെ $2x + 1 > 10\}$

4. U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, A = {2, 4, 6, 8}, B = { 2, 3, 5, 7} ആയാൽ

   (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നിവ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ വെൻചിത്രങ്ങൾ വരക്കുക.

   (i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cap B'$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $A' \cup B'$

6. U, ഒരു തലത്തിലെ മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഗണവും, A ഒരു കോണളവെങ്കിലും 60° അല്ലാത്ത ത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണവും ആയാൽ A′ എഴുതുക.

7. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയാകുന്ന വിധം വിട്ടുപോയ ഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

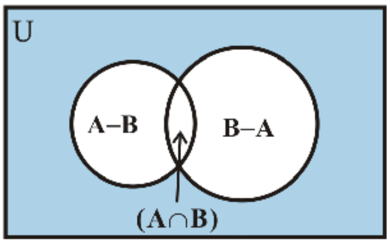
   (i) $A \cup A' = . . .$ (ii) $\phi' \cap A = . . .$
   (iii) $A \cap A' = . . .$ (iv) $U' \cap A = . . .$

1.11 സംഗമവും യോഗവും ഉൾപ്പെടുന്ന ചില പ്രായോഗിക ഗണിതപ്രശ്നങ്ങൾ

രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗം കാണുന്നതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട്

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ആയിരിക്കും എന്നു നാം മനസ്സിലാക്കി. ഇവിടെ A, B എന്നിവയ്ക്കു പുറമെ C എന്നൊരു ഗണം കൂടിയുണ്ടെങ്കിലോ?

$n(A \cup B \cup C)$ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയായിരിക്കും? വെൻചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ശ്രമിച്ചു നോക്കാം.



ചിത്രം 1.13

$n(A \cup B \cup C)$ കാണുന്നതിനായി $n(A)$ യും $n(B)$ യും $n(C)$ യും കൂട്ടിയാൽ $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ എന്നിവയെ ആകെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ഒഴിവാക്കേണ്ടിവരും. പക്ഷേ ഇങ്ങനെ ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ ഓരോതവണയും $(A \cap B \cap C)$ എന്ന ഭാഗം ഇതിൽ നിന്ന് ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്. A ക്കും B ക്കും C ക്കും ഒപ്പം 3 തവണ പരിഗണിക്കപ്പെടുകയും $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ ഇവക്ക് ഒപ്പം 3 തവണ ഒഴിവാക്കപ്പെടുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ടാവും. അതായത് $(A \cap B \cap C)$ ഇതിൽ പ്രത്യേകം വീണ്ടും പരിഗണിക്കപ്പെടേണ്ടിവരും എന്നു സാരം.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ഉദാഹരണം : 22

$X \cup Y$ യിൽ 50 അംഗങ്ങളും X ൽ 28 അംഗങ്ങളും Y ൽ 32 അംഗങ്ങളും ഉണ്ട്. എങ്കിൽ $X \cap Y$ ൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്?

പരിഹാരം

$$n(X \cup Y) = 50,$$
$$n(X) = 28, \quad n(Y) = 32,$$
$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$
$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

ഉദാഹരണം : 23

ഒരു സ്കൂളിൽ 20 അധ്യാപകർ ഗണിതം അല്ലെങ്കിൽ ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്നവരായിട്ടുണ്ട്. ഇവരിൽ 12 പേർ ഗണിതം പഠിപ്പിക്കുന്നു. 4 പേർ ഗണിതവും ഭൗതിക ശാസ്ത്രവും പഠിപ്പിക്കുന്നു. എത്ര അധ്യാപകർ ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്നവരായി ഉണ്ട്?

പരിഹാരം

ഗണിതം പഠിപ്പിക്കുന്ന അധ്യാപകരുടെ ഗണം M ഉം ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്ന അധ്യാപകരുടെ ഗണം P യും ആയാൽ

$$n(M \cup P) = 20, \; n(M) = 12, \; n(M \cap P) = 4$$

$$n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$$
$$20 = 12 + n(P) - 4$$
$$n(P) = 12$$

12 അധ്യാപകർ ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 24

35 വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 24 പേർ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരും 16 പേർ ഫുട്ബോൾ കളിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുമാണ്. ഓരോ കുട്ടിയും ഏതെങ്കിലും ഒരു കളി ഇഷ്ടപ്പെടുന്നു. എത്ര കുട്ടികളാണ് രണ്ടു കളിയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നത്?

പരിഹാരം

ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്ന കുട്ടികളുടെ ഗണം X എന്നും ഫുട്ബോൾ കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ ഗണം Y എന്നും കരുതുക.

$$n(X) = 24 \quad n(Y) = 16, \; n(X \cup Y) = 35$$
$$n(X \cap Y) = ?$$
$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$
$$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$$
$$n(X \cap Y) = 5$$

5 കുട്ടികൾ രണ്ടു കളികളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണ്.

ഉദാഹരണം : 25

ഒരു സ്കൂളിലെ 400 കുട്ടികളിൽ നടത്തിയ ഒരു സർവേയിൽ 100 പേർ ആപ്പിൾ ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരാണെന്നും 150 പേർ ഓറഞ്ച് ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരാണെന്നും 75 പേർ ഇവ രണ്ടും കുടിക്കുന്നവരാണ്. ആപ്പിൾ ജ്യൂസോ ഓറഞ്ച് ജ്യൂസോ കുടിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

U ആകെ കുട്ടികളുടെ ഗണവും A ആപ്പിൾ ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരുടെ ഗണവും B ഓറഞ്ച് ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരുടെ ഗണവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$n(U) = 400, n(A) = 100, n(B) = 150, n(A \cap B) = 75$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 100 + 150 - 75 \\ &= 175 \end{aligned}$$

ആപ്പിൾ ജ്യൂസ് കുടിക്കാത്തവർ A′, ഓറഞ്ച് ജ്യൂസ് കുടിക്കാത്തവർ B′ എന്നിവ ആയിരിക്കും.

രണ്ടും കുടിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം $n(A' \cap B')$

$$\begin{aligned} n(A' \cap B') &= n(A \cup B)' \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 400 - 175 \\ &= 225 \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 26

ഒരു പ്രത്യേക ത്വക് രോഗമുള്ള 200 പേരിൽ 120 പേർക്ക് C_1 എന്ന മരുന്നും 50 പേർക്ക് C_2 എന്ന മരുന്നും നൽകി. 30 പേർക്ക് C_1, C_2 എന്നീ രണ്ടു മരുന്നുകളും നൽകി. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(i) C_1 എന്ന മരുന്ന് ഉപയോഗിക്കുന്നവരും, C_2 ഉപയോഗിക്കാത്തവരും

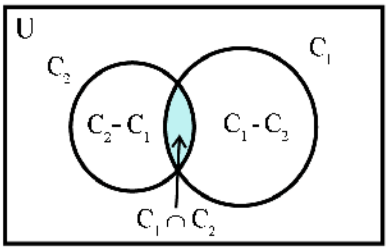
(ii) C_2 ഉപയോഗിക്കുന്നവരും, C_1 ഉപയോഗിക്കാത്തവരും

(iii) C_1 അല്ലെങ്കിൽ C_2 ഉപയോഗിക്കുന്നവർ

പരിഹാരം

ത്വക് രോഗമുള്ളവരുടെ ഗണത്തെ U എന്നെടുത്താൽ $n(U) = 200$

$$n(C_1) = 120, n(C_2) = 50, n(C_1 \cap C_2) = 30$$



ചിത്രം 1.14

(i) C_1 ഉപയോഗിക്കുന്ന, എന്നാൽ C_2 ഉപയോഗിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം

$$n(C_1 - C_2) = n(C_1) - n(C_1 \cap C_2)$$
$$= 120 - 30 = 90$$

(ii) C_2 ഉപയോഗിക്കുന്ന എന്നാൽ C_1 ഉപയോഗിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം

$$n(C_2 - C_1) = n(C_2) - n(C_1 \cap C_2)$$
$$= 50 - 30 = 20$$

(iii) C_1 അല്ലെങ്കിൽ C_2 ഉപയോഗിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം

$$n(C_1 \cup C_2) = n(C_1) + n(C_2) - n(C_1 \cap C_2)$$
$$= 120 + 50 - 30 = 140$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.6

1. $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$, $n(X \cup Y) = 38$ ആയ രണ്ടു ഗണങ്ങളാണ് X, Y എന്നിവ. $n(X \cap Y)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. X ൽ 8 അംഗങ്ങളും Y യിൽ 15 അംഗങ്ങളുമാണുള്ളത്. $X \cup Y$ ൽ 18 അംഗങ്ങളുണ്ട് എങ്കിൽ $X \cap Y$ യിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?
3. 400 ആൾക്കാരിൽ 250 പേർ ഹിന്ദിയും 200 പേർ ഇംഗ്ലീഷും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്. ഹിന്ദിയും ഇംഗ്ലീഷും സംസാരിക്കുന്നവരായി എത്രപേരുണ്ട്?
4. ഗണം S ൽ 21 അംഗങ്ങളും ഗണം T യിൽ 32 അംഗങ്ങളും ഉണ്ട്. $S \cap T$ യിൽ 11 അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ $S \cup T$ യിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടാകും?
5. ഗണം X ൽ 40 അംഗങ്ങളും $X \cup Y$ യിൽ 60 അംഗങ്ങളും ഗണം $X \cap Y$ യിൽ 10 അംഗങ്ങളുമുണ്ട്. എങ്കിൽ ഗണം Y യിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും?
6. 70 പേരുടെ ഒരു സംഘത്തിൽ 37 പേർക്ക് കാപ്പി കുടിക്കാനാണിഷ്ടം. 52 പേർ ചായ കുടിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നു. എല്ലാവരും ചായ, കാപ്പി ഇതിലേതെങ്കിലും ഒന്നെങ്കിലും കുടിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണ്. എങ്കിൽ കാപ്പിയും ചായയും കുടിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.
7. 65 പേരുള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ 40 പേർക്ക് ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാനിഷ്ടമാണ്. 10 പേർക്ക് ക്രിക്കറ്റും ടെന്നിസും കളിക്കാൻ ഇഷ്ടമാണ്. (i) ടെന്നിസ് മാത്രം കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക. (ii) ടെന്നിസ് കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. ഒരു സമിതിയിൽ 50 പേർ ഫ്രഞ്ച് സംസാരിക്കുന്നവരും 20 പേർ സ്പാനിഷ് സംസാരിക്കുന്നവരുമാണ്. 10 പേർ രണ്ടു ഭാഷയും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്. എത്രപേർ കുറഞ്ഞത് ഒരു ഭാഷയെങ്കിലും സംസാരിക്കുന്നവരുണ്ട്?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 27

'CATARACT' എന്ന വാക്കും 'TRACT' എന്ന വാക്കും എഴുതാനാവശ്യമായ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം തുല്യ ഗണങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

CATARACT എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം

$$X = \{C, A, T, R\}$$

TRACT എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം

$$Y = \{T, R, A, C\}$$

X, Y എന്നീ ഗണങ്ങളിൽ ഒരേ അംഗങ്ങൾ ആയതിനാൽ $X = Y$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 28

$\{-1, 0, 1\}$ എന്ന ഗണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$\phi, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}$$

ഉദാഹരണം : 29

$A \cup B = A \cap B$ ആയാൽ $A = B$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$a \in A \Rightarrow a \in A \cup B$

$\Rightarrow a \in A \cap B$ ($A \cup B = A \cap B$ ആയതുകൊണ്ട്)

$\Rightarrow a \in A, a \in B$

$\Rightarrow a \in B$

$A \subset B$

$b \in B \Rightarrow b \in A \cup B$

$\Rightarrow b \in A \cap B$ $(A \cup B = A \cap B)$

$\Rightarrow b \in A$

അതായത് $B \subset A$

$A \subset B$, $B \subset A$ സാധ്യമാകണമെങ്കിൽ $A = B$ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 30

A, B എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങളായാൽ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$P(A \cap B)$ യിൽ ഗണം X ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ.

$X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \subset A \cap B$

$\Rightarrow X \subset A, X \subset B$

$\Rightarrow X \in P(A), X \in P(B) \Rightarrow X \in P(A) \cap P(B)$

$P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ ----------(1)

$Y \in P(A) \cap P(B)$ എന്നു കരുതുക

$Y \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow Y \in P(A), Y \in P(B)$

$\Rightarrow Y \subset A, Y \subset B$

$\Rightarrow Y \subset A \cap B$

$\Rightarrow Y \in P(A \cap B)$

അതായത്, $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$ ---------- (2)

(1), (2) എന്നിവയിൽ നിന്നും $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 31

ഒരു വാണിജ്യ ഗവേഷണസംഘം 1000 ഉപഭോക്താക്കളിൽ നടത്തിയ സർവേയിൽ 720 പേർക്ക് ഉൽപന്നം A ഇഷ്ടമാണെന്നും 450 പേർക്ക് ഉൽപന്നം B ഇഷ്ടമാണെന്നും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിഞ്ഞു. രണ്ട് ഉൽപന്നങ്ങളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരായി ചുരുങ്ങിയത് എത്രപേരുണ്ടാകും?

പരിഹാരം

ആകെ ഉപഭോക്താക്കളുടെ (സർവെ നടത്താൻ തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ടവർ) ഗണം U എന്നെടുത്താൽ

$$n(U) = 1000, n(A) = 720, n(B) = 450$$

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) \leq 1000$$

$$720 + 450 - n(A \cap B) \leq 1000$$

$$n(A \cap B) \geq 170$$

രണ്ടു ഉല്പന്നങ്ങളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവർ ചുരുങ്ങിയത് 170 പേരുണ്ടാകും.

ഉദാഹരണം : 32

500 കാർ ഉടമകളിൽ നടത്തിയ സർവെയിൽ നിന്നും 400 പേർക്ക് A എന്ന കാർ ഉള്ളതെന്നും 200 പേർക്ക് B എന്ന കാറാണുള്ളതെന്നും മനസ്സിലാക്കി. 50 പേർക്ക് രണ്ടു കാറുകളും സ്വന്തമായുണ്ട്. ഈ വിവരം ശരിയാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

പരിഹാരം

ആകെ കാർ ഉടമകളുടെ ഗണം U ആയാൽ $n(U) = 500$, $n(A) = 400$, $n(B) = 200$, $n(A \cap B) = 50$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 400 + 200 - 50$$
$$= 550$$

$n(U) = 500$ ആയതിനാൽ $n(A \cup B)$ പരമാവധി 500 ആയിരിക്കണം.

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന വിവരം വസ്തുതാവിരുദ്ധമാണ്.

ഉദാഹരണം : 33

ഒരു കോളേജിലെ 58 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 38 പേർക്ക് ഫുട്ബോളിനും 15 പേർക്ക് ബാസ്കറ്റ് ബോളിനും 20 പേർക്ക് ക്രിക്കറ്റിന് എന്നിങ്ങനെ മെഡലുകൾ വിതരണം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. മൂന്നു ഇനത്തിലും മെഡൽ കിട്ടിയവരുടെ എണ്ണം 3 ആണ്. എത്ര പേർക്കാണ് കൃത്യം 2 ഇനങ്ങളിൽ മെഡൽ കിട്ടിയിട്ടുള്ളത്?

പരിഹാരം

F, B, C എന്നിവ യഥാക്രമം ഫുട്ബോൾ, ബാസ്കറ്റ് ബോൾ, ക്രിക്കറ്റ് എന്നിവയിൽ മെഡലുകൾ ലഭിച്ചവരുടെ ഗണം ആയാൽ

$$n(F) = 38, n(B) = 15, n(C)= 20$$
$$n(F \cup B \cup C) = 58, \quad n(F \cap B \cap C) = 3$$
$$n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C) - n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C) + n(F \cap B \cap C)$$

വിലകൾ നല്കി ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$$

വെൻ ചിത്രത്തിൽ d മൂന്ന് ഇനത്തിലും മെഡൽ ലഭിച്ചവരെയും a, b, c എന്നിവ ഏതെങ്കിലും 2 ഇനത്തിൽ മെഡൽ ലഭിച്ചവരെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. വെൻ ചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ചിന്തിച്ചാൽ

$$a + d + b + d + c + d = 18$$
$$a + b + c + 3d = 18$$
$$a + b + c + 9 = 18$$
$$a + b + c = 9$$

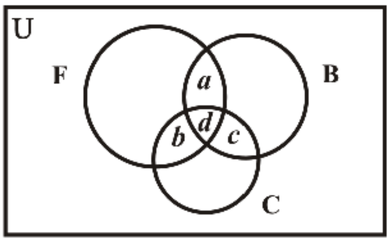


Fig 1.15

ഏതെങ്കിലും രണ്ടിനത്തിൽ മാത്രം മെഡൽ ലഭിച്ചവരുടെ എണ്ണം = 9

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ ഏതെല്ലാം ഗണങ്ങളുടെ ഉപഗണങ്ങളാകുന്നുവെന്ന് എഴുതുക.

   $A = \{ x : x \in \mathbf{R}, x^2 - 8x + 12 = 0 \}$ $B = \{ 2, 4, 6 \}$
   $C = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$ $D = \{ 6 \}$

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ ശരിയേത്, തെറ്റേത് എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക. ശരിയായവ തെളിയിക്കുക. തെറ്റാണെങ്കിൽ ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ വ്യക്തമാക്കുക.

   (i) $x \in A, A \in B$, ആയാൽ $x \in B$
   (ii) $A \subset B, B \in C$, ആയാൽ $A \in C$
   (iii) $A \subset B, B \subset C$, ആയാൽ $A \subset C$
   (iv) $A \not\subset B, B \not\subset C$, ആയാൽ $A \not\subset C$
   (v) $x \in A, A \not\subset B$, ആയാൽ $x \in B$
   (vi) $A \subset B, x \notin B$, ആയാൽ $x \notin A$

3. A, B, C എന്നിവ, $A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ പാലിക്കുന്ന മൂന്ന് ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ $B = C$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ചുവടെ പറയുന്ന നാലു പ്രസ്താവനകൾ സമാനമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

   (i) $A \subset B$(ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

5. $A \subset B$ ആയാൽ $C - B \subset C - A$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. (C ഏതു ഗണവുമാകാം)

6. $P(A) = P(B)$ ആയാൽ $A = B$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. A, B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഗണങ്ങളായാൽ $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ ശരിയാകുമോ? കാരണം എഴുതുക.

8. A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക്

   $A = (A \cap B) \cup (A - B)$, $A \cup (B - A) = (A \cup B)$ എന്നീ പ്രത്യേകതകൾ തെളിയിക്കുക.

9. ഗണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

   (i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

10. $A \cap B = A \cap C$ ആയതുകൊണ്ട് $B = C$ ആകണമെന്നില്ല. തെളിയിക്കുക.

11. A, B എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. X എന്ന ഗണത്തിന്

    $A \cap X = B \cap X = \phi$, $A \cup X = B \cup X$ എന്നിവ ആയാൽ $A = B$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (തെളിയിക്കുന്നതിന്, $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$, വിതരണ നിയമം എന്നിവ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം)

12. $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ എന്നിവ ശൂന്യഗണങ്ങളല്ലാത്തതും, $A \cap B \cap C$ ശൂന്യഗണമാകാവുന്നതും ആയ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ A, B, C എഴുതുക.

13. ഒരു സ്കൂളിലെ 600 പേരിൽ നടത്തിയ സർവ്വേയിൽ 150 പേർ ചായ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണെന്നും 225 പേർ കാപ്പി ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണെന്നും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിഞ്ഞു. 100 പേർ ചായയും കാപ്പിയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരായുണ്ട്. എങ്കിൽ ചായയോ കാപ്പിയോ ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

14. ഒരു സംഘം കുട്ടികളിൽ 100 പേർക്ക് ഹിന്ദി അറിയാം, 50 പേർക്ക് ഇംഗ്ലീഷും 25 പേർക്ക് രണ്ടു ഭാഷയും അറിയാം. ഓരോ കുട്ടിയും ഒരു ഭാഷയെങ്കിലും അറിയാവുന്നവരാണ്, എങ്കിൽ ആ സംഘത്തിൽ ആകെ എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

15. 60 ആൾക്കാരിൽ നടത്തിയ ഒരു സർവ്വേയിൽ 25 പേർ H എന്ന പത്രം വായിക്കുന്നവരും 26 പേർ T എന്ന പത്രം വായിക്കുന്നവരും 26 പേർ I എന്ന പത്രം വായിക്കുന്നവരുമാണ്. 9 പേർ H, I വായിക്കും, 11 പേർ H, T യും വായിക്കും 8 പേർ T, I യും വായിക്കും 3 പേർ മൂന്ന് പത്രവും വായിക്കും. എങ്കിൽ

    i. ഒരു പത്രമെങ്കിലും വായിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

    ii. ഒരു പത്രം മാത്രം വായിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

16. ഒരു സർവെയിൽ 21 പേർക്ക് A എന്ന ഉൽപന്നവും, 26 പേർക്ക് B യും 29 പേർക്ക് C യും ഇഷ്ടം എന്നും മനസ്സിലാക്കാനായി. 14 പേർക്ക് A യും B യും ഇഷ്ടമാണ്. 12 പേർക്ക് C യും A യും ഇഷ്ടമാണ്. 14 പേർക്ക് B യും C യും ഇഷ്ടമാണ്. 8 പേർക്ക് മൂന്ന് ഉൽപന്നങ്ങളും ഒരുപോലെ ഇഷ്ടമാണ്. എങ്കിൽ ഉൽപന്നം C മാത്രം ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സംഗ്രഹം

ഗണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ചില ആശയങ്ങളും ക്രിയകളും ഈ അധ്യായത്തിൽ പരാമർശിക്കുന്നു. അവയുടെ ചുരുക്കം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

- വ്യക്തമായി നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെയോ ചിഹ്നങ്ങളെയോ ഗണമായി പരിഗണിക്കാം.
- അംഗങ്ങൾ ഒന്നും ഇല്ലാത്ത ഗണത്തെ ശൂന്യഗണം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ കൃത്യമായി എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയുമെങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ പരിമിതഗണം എന്ന് പറയാം.
- അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയില്ലെങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ അനന്തഗണം എന്നും പറയാം.
- രണ്ടു ഗണങ്ങൾ A യിലും B യിലും ഒരേ അംഗങ്ങളായാൽ ആ ഗണങ്ങൾ തുല്യഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

- A എന്ന ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാകണമെങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ A ഒരു ശൂന്യ ഗണമായിരിക്കണം അല്ലെങ്കിൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിൽ ഉണ്ടായിരിക്കണം. ഇടവേളകൾ **R** ന്റെ ഉപഗണമായിരിക്കും.
- A എന്ന ഗണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ ഉപ ഗണങ്ങളുടെ ഗണം എന്ന് പറയുന്നു. A യുടെ ഉപഗണ ഗണത്തെ P(A) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
- A, B എന്നീ ഗണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും ചേർത്ത് എഴുതുന്ന ഗണത്തെ A യോഗം B എന്ന് പറയാം.
- A, B എന്നീ ഗണത്തിലെ പൊതുവായ അംഗങ്ങളെ ചേർത്ത് എഴുതുന്ന ഗണത്തെ A സംഗമം B എന്ന് പറയാം.
- A, B എന്നീ ഗണത്തിലെ A യിൽ നിന്നും B യിലെ അംഗങ്ങളെ ഒഴുവാക്കിയ ഗണത്തെ A വ്യത്യാസം B എന്ന് പറയാം.
- സമസ്തഗണം U ൽ നിന്നും A എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ഒഴിവാക്കി കിട്ടുന്ന ഗണത്തെ A യുടെ പൂരകഗണം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഏതു രണ്ടു ഗണങ്ങൾ A, B ക്കും, $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നിവ ശരിയാണ്.
- A, B എന്നീ പരിമിതഗണങ്ങളിൽ $A \cap B = \phi$, ആയാൽ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

  $A \cap B \neq \phi$, ആയാൽ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ജോർജ് കാന്റർ (1845 - 1918) ആണ് ആധുനിക ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രധാന ഉപജ്ഞാതാവായി അറിയപ്പെടുന്നത്. ഗണസിദ്ധാന്തത്തെപ്പറ്റിയുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രബന്ധങ്ങൾ 1874 നും 1897 നും ഇടയ്ക്കാണ് പുറത്തു വന്നത്. $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$ തുടങ്ങിയ രീതിയിലുള്ള ത്രികോണമിതീയ അനുക്രമങ്ങളെപ്പറ്റിയുള്ള പഠനത്തിനിടെയാണ് അദ്ദേഹം ഗണസിദ്ധാന്തത്തെപ്പറ്റി പഠിക്കാനിടയായത്. രേഖീയ സംഖ്യാഗണവും പൂർണസംഖ്യാഗണവും തമ്മിൽ ഒന്നിനൊന്നുപൊരുത്തം സ്ഥാപിക്കാൻ കഴിയില്ലെന്ന് അദ്ദേഹം 1874-ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച പ്രബന്ധത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അമൂർത്തഗണങ്ങളുടെ വിവിധ പ്രത്യേകതകളെപ്പറ്റി 1879 മുതൽ നിരവധി പ്രബന്ധങ്ങൾ അദ്ദേഹം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു.

കാന്ററിന്റെ ആശയങ്ങൾ നന്നായി ഉൾക്കൊണ്ട പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്നു റിച്ചാർഡ് ഡെഡെകിൻഡ് (1831 - 1916). എന്നാൽ അനന്തഗണങ്ങളെ പരിമിതഗണങ്ങളെപ്പോലെ തന്നെ പരിഗണിച്ചതിന് ക്രോണക്കർ (1810 - 1893) അദ്ദേഹത്തെ കുറ്റപ്പെടുത്തി. തുടർന്ന്, നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനത്തോടെ മറ്റൊരു ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ഗോട്‌ലോബ് ഫ്രെഗെ ഗണ സിദ്ധാന്തത്തെ യുക്തിനിയമങ്ങളായി അവതരിപ്പിച്ചു. എല്ലാ ഗണങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഗണത്തിന്റെ അസ്ഥിത്വം എന്ന സങ്കല്പം ഒരു വൈരുധ്യത്തിലേക്കു നയിക്കുമെന്ന് 1902-ൽ തെളിയിച്ചത് പ്രസിദ്ധ ആംഗല തത്വശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ബെർട്രൻസ് റസൽ (1872 - 1970) ആണ്. ഇത് പ്രസിദ്ധമായ 'റസൽ വിരോധാഭാസ'ത്തിനു വഴിയൊരുക്കി. 'Naïve Set Theory' എന്ന തന്റെ ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഇതേപ്പറ്റി പോൾ ആർ ഹാൽമോസ് എഴുതുന്നത് 'ശൂന്യത്തിൽ സർവവുമുണ്ട്' എന്നാണ്. റസൽ വിരോധാഭാസം എന്ന ഒരെണ്ണം മാത്രമല്ല ഗണസിദ്ധാന്തത്തിൽ ഉള്ളത്. തുടർന്ന് പല ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരും യുക്തിചിന്തകരും ഇത്തരം നിരവധി വിരോധാഭാസങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ചു. ഇവയുടെയെല്ലാം അനന്തരഫലമായി എൺസ്റ്റ് സെർമെലോ 1908-ൽ ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആദ്യ സ്വയംപ്രമാണ രൂപം അവതരിപ്പിച്ചു. 1925-ൽ ജോൺ വോൺ നൊയ്മൻ 'സറിര സ്വയംപ്രമാണം' അവതരിപ്പിച്ചു. പിന്നീട് 1937-ൽ പോൾ ബ്രെർണെയ്സ് കുറേക്കൂടി തൃപ്തികരമായ ഒരു സ്വയംപ്രമാണത്തിന്റൂപം നൽകി. ഇവയുടെ പരിഷ്കരണം 1940--ലെ തന്റെ പ്രബന്ധത്തിൽ കുർട് ഗൊയ്ഡൽ അവതരിപ്പിച്ചു. ഇത് വോൺ നൊയ്മൻ - ബെർണെയ്സ് (VNB) അല്ലെങ്കിൽ ഗൊയ്ഡൽ ബെർണെയ്സ് (GB) ഗണസിദ്ധാന്തം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

ഈ വിഷമതകൾ നിലനിൽക്കെത്തന്നെ കാന്റർ ഗണസിദ്ധാന്തമാണ് ഇന്നും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. ഗണിതത്തിലെ പല പ്രധാന ആശയങ്ങളും ഫലങ്ങളും ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഭാഷയിലാണ് ഇപ്പോൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നത്.