09

सांख्यिकी
(STATISTICS)

9.1 परिचय

एक दिन सोमू अपने गणित के अध्यापक को मिलने उनके घर गया। उस समय उसके अध्यापक जन गणना के कार्य में व्यस्त थे जो उन्होंने हाल ही में भारतीय जनसंख्या के जन गणना के कार्यक्रम के तहत उनके वार्ड से सूचनाएँ संग्रहीत की थी।

सोमू : नमस्ते सर, ऐसा लगता है कि आप कुछ काम में व्यस्त हैं। क्या मैं आपके कार्य में मदद कर सकता हूँ?

अध्यापक : सोमू, मैंने गृहवासी जन गणना के बारे में जानकारी संग्रहीत की है। जैसे परिवार में व्यक्तियों की संख्या, उनकी आयु, परिवार की आय, किस प्रकार के घर में वे रहते हैं। कुछ और जानकारी।

सोमू : सर इन सभी जानकारी का क्या उपयोग हैं?

अध्यापक : इन सभी जानकारीयों से सरकार को अभिवृद्धि कार्यक्रम और संसाधनों के आबंटन में मदत मिलती हैं।

सोमू : सरकार किस तरह इस जानकारी का उपयोग करती है?

अध्यापक : जन गणना विभाग इस व्यापक जानकारी को संकलित कर इनका उपयोग आवश्यक प्रबन्धन दत्तांशों का निर्वाचन तथा विश्लेषण सूचनाओं से कर इन में परिणाम निकालते हैं। सोमू, आपने पिछली कक्षाओं में सांख्यिकी के आधार भूत मूल्यों को सीखा ही होगा?

हम भी कई परिस्थितियों का सामना करते हैं। जैसे जानकारी के आधार भूत मूल्यों का क्रमागत संग्रह, तालिका, आलेख आदि, इनका संबंध सब्जियों के मूल्यों, शहर का तापमान, क्रिकेट स्कोर, मतदान का परिणाम आदि से होता है। तथ्यों पर आधारित जो संख्यात्मक या अन्य स्पष्ट प्रयोजन के **'आंकड़ों'** को दत्तांश कहते हैं। दत्तों से प्रयोजन प्राप्त करने की प्रक्रिया को गणित की शाखा में **'सांख्यिकी'** कहा जाता है।

अब पिछली कक्षा में सांख्यिकी के बारे में क्या पढ़ा गया उसे दोहराएँगे।

9.2 दत्तों का संकलन (Grouping Data)

सांख्यिकी की प्रारंभिक जानकारी दत्तों को संग्रह करना। इसे समझने के लिए सबसे पहले हम निम्न लिखित क्रिया कलाप करके दत्तों के एकत्रित करने का कार्य आरंभ (प्रारंभ) करेंगे।

SCERT TELANGANA

क्रिया कलाप

आपकी कक्षा के विद्यार्थीयों को चार समूह में बाँटो। प्रत्येक समूह को निम्न को संग्रहीत करने के लिए करेंगे।

i. सभी छात्रों का भार।

ii. प्रत्येक विद्यार्थी के भाई-बहनों की जानकारी

iii. पिछले माह में प्रतिदिन के अनुपस्थित विद्यार्थीयों की संख्या

iv. सभी विद्यार्थीयों के घर से स्कूल की दूरी।

आपेक्षित सूचनाओं को विद्यार्थीयों ने किस प्रकार प्राप्त किया इस विषय पर चर्चा करेंगे।

1. क्या आपने प्रत्येक विद्यार्थी के घर जाकर या प्रत्येक विद्यार्थी से व्यक्तिगत पूछताछ से सूचना एकत्रित कि है?

2. क्या उन्होंने इन सूचनाओं को स्कूल के रिकार्ड से प्राप्त किया?

पहली स्थिति में सूचना संग्रह किसी निश्चीत उद्देश्य से की गई है। उन्हें **प्राथमिक दत्त** कहते हैं। (जैसे कि स्थिति (i), (ii), (iv)में)

ऊपर (ii) दिए गए स्थिति में अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या को केवल कक्षा के हाजिरी रजिस्टर से ही प्राप्त किया जा सकता है।इसलिए उन्हें **द्वितीयक दत्त** कहते हैं।

इसे हल कीजिए

निम्न में कौनसे प्राथमिक दत्त और द्वितीय दत्त हैं?

i. वर्ष 2001 से 2010 में आपके विद्यालय में विद्यार्थीयों के दर्ज हुए नामों की जानकारी प्राप्त कीजिए।

ii. P.T.अध्यापक के द्वारा आपके कक्षा के विद्यार्थीयों की रिकार्ड की गई ऊँचाईयाँ।

9.3 दत्तों का प्रदर्शन (Presentation of Data)

एकत्रित किये हुए दत्तों को प्रदर्शित करने के बारे में सोचना चाहिए। जिससे एक ही नजर में उसका अर्थ समझ सकें। अब हम कुछ ऐसी स्थितियों का अवलोकन करेंगे जहाँ दत्तों का प्रदर्शन आवश्यक है।

15 विद्यार्थियों द्वारा गणित में 50 में से प्राप्त अंक कुछ इस प्रकार है।

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

SCERT TELANGANA

इस प्रकार के दत्तों को मूल दत्त कहते हैं।

दिए गए दत्तों से आप आसानी से न्यूनतम और अधिकतम अंक प्राप्त कर सकते है। आप जानते हैं कि न्यूनतम और अधिकतम अंकों के अंतर को व्याप्ति (Range) कहते हैं।

यहाँ पर न्यूनतम और अधिकतम अंक 7 और 50 है।

अतः व्याप्ति (परिसर) = 50 – 7 = 43,

ऊपर दिए गए दत्तों के अनुसार दत्त 7 से 50 के मध्य है।

ऊपर दिए गए दत्तों के अनुसार निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

i. दिए गए दत्तों का मध्य मूल्य ज्ञात करो।

ii. कितने विद्यार्थीयों को 60% या उससे अधिक अंक प्राप्त हुए है।

चर्चा

(i) इकरम के अनुसार दत्तों का मध्य मूल्य 25 है क्यों कि 50 अंकों की परिक्षा ली गई है। तुम क्या कहोगे?

मेरी ने कहा कि यह दत्तों का मध्य मूल्य नहीं है। यदि 15 विद्यार्थीयों के अंकों को उन्हें आरोही क्रम में लिखने पर, कुछ इस प्रकार प्राप्त होंगे।

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

हम कह सकते कि 8 वाँ पद मध्य पद होगा जो 34 है।

(ii) आपको मालूम है कि 50 अंकों का 60% किस प्रकार मालूम किया जाता (i.e. $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

9 विद्यार्थीयों को 60% या उससे अधिक मिले है। (30 या 30 से अधिक ज्यादा)

जब दत्तों की संख्या बहुत अधिक हो तो, दिए गए दत्तों का आरोही या अवरोही क्रम में लिखना कुछ मुश्किल हो जाता है अतः हमें किसी और विधि के बारे में सोंचेंगे।

दिये गये उदाहरण को देखिए

उदाहरण-1. 50 विद्यार्थीयों के गणित विषय के एक परिक्षा में 10 में से प्राप्तांक इस प्रकार है।

5, 8, 6, 4, 2, 8, 6, 7, 10, 2, 2,8, 6, 4, 2, 8, 6,4, 5, 8

5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4,4, 5, 4, 9, 10, 2,

1, 1, 3, 4, 5, 5, 8, 6, 7, 10, 1, 1, 3, 4, 5,

प्राप्तांक	गणना चिह्न	विद्यार्थीज्ञयों की संख्या
1	𝍸 I	6
2	𝍸 I	6
3	III	3
4	𝍸 IIII	9
5	𝍸 II	7
6	𝍸	5
7	II	2
8	𝍸 I	6
9	II	2
10	IIII	4
	कुल	50

SCERT TELANGANA

तालिका में दर्शाये अनुसार दत्तों को गणना चिन्हों के उपयोग से, अंकित किया जा सकता है।

याद कीजिए कि विद्यार्थी जिन्होंने कुछ अंक प्राप्त किए है उनकी संख्या को प्राप्तांको की बारंबारिता कहते है। उदाहरण के लिए, 4 अंक प्रत्येक, 9 विद्यार्थीयों को 4 अंक मिले, अतः 4 अंको की बारंबारिता 9 है।

यहाँ सारणी में, मूलदत्तों को सारणी बद्ध लिखने में गणना चिन्हें का उपयोग होता है।

तालिका में सभी बारंबारिताओं का योग कुल दत्तों की संख्या को दर्शाता है। सभी दत्तों को तालिका में उनकी बारंबारिता के रूप में दर्शाया जाय तो इस तालिका को **असमुहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका** या **निरिक्षणों के भार की तालिका कहते हैं।**

क्रिया कलाप

आपके कक्षा के विद्यार्थीयों के नाम के पहले अक्षर की बारंबारिता बंटन तालिका बनाओ और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

(i) आपके सहपाठीयों के नागों में कौनसे पहले अक्षर का उपयोग सबसे ज्यादा हुआ।

(ii) आपके कितने सहपाठीयों के नाम 'I' से शुरु होते है।

(iii) आपके सहपाठीयों के नामों में सबसे कम किस अक्षर का उपयोग हुआ है?

कुछ आवश्यक कारणों की वजह से हमें दत्तों को तीन वर्गों में दर्शाना पड़ेगा। (i) कितने विद्यार्थीयों को अतिरिक्त समय (extra classes) की आवश्यकता है। (ii) कितने विद्यार्थियों का औसत प्रदर्शन रहा। (iii) कितने विद्यार्थियों ने परिक्षा में अच्छा प्रदर्शन किया। अतः हम समुहबद्ध को आवश्यकता अनुसार समूहों में तालिका द्वारा नीचे तालिका में दर्शाए। अतः हम आवश्यकता अनुसार समूहों में बाँटकर समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में नीचे दिए गए अनुसार बनाएँगे।

वर्गांतर (प्राप्तांक)	स्तर	गणना चिन्ह	विद्यार्थीयों की संख्या
1 - 3	पढ़ाई में अतिरिक्त समय की आवश्यकता	𝍸 𝍸 𝍸	15
4 - 5	औसत	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
6 - 10	ठीक	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19

आवश्यकता के अनुसार दत्तों को वर्गीकृत करते है या सबसे अधिक निरिक्षण हों तो हम उन्हें समूहों में बाँटते हैं। एक और उदाहरण द्वारा समूह बद्ध बारंबारिता को देखेंगे जिससे दत्तों को समझने में आसानी होती है।

उदाहरण-2. 50 संतरों का भार (ग्राम में), टोकरी में से चुनने पर, इस प्रकार दिया गया।

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

SCERT TELANGANA

इस प्रकार दत्तों के प्रदर्शन में, हम 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119 के समूह बनाते हैं। (क्यों कि हमारे दत्त 30 से 115 तक है) इन समूहों को कक्षांतर या वर्गांतर, कहते है उनकी लम्बाई को कक्षा की लंबाई या कक्षा का अन्तर काल हैं। इस स्थिति में 10 वर्गांतर है। इस प्रकार श्रेणी में छोटी संख्याओं को निम्न सीमा और बड़ी संख्याओं (संख्या) को उच्चसीमा कहते हैं। उदाः 30-39 में 30 श्रेणी में 39 को निम्न सीमा (निम्न सीमांत) और 39 को उच्चसीमा (उच्चसीमांत) कहते हैं।

(संतरों का भार) वर्गांतर	गणना चिन्ह	(संतरों की संख्या) बारंबारिता
30 - 39	𝍸 |	6
40 - 49	𝍸 |||	8
50 - 59	𝍸 ||||	9
60 - 69	𝍸 |	6
70 - 79	|||	3
80 - 89	𝍸	5
90 - 99	𝍸 ||	7
100-109	|||	3
110 - 119	|||	3
	कुल	50

इस प्रकार दत्तों के प्रदर्शन से हमें कुछ आवश्यक जानकारियाँ एक ही नजर में प्राप्त हो सकते हैं। इन्हें समूहबद्ध बारंबारिता तालिका कहते है।

हम यह देखते हैं कि ऊपर दिए गए तालिका में श्रेणीयाँ आच्छादित नहीं हो रही है उदाः 30-39, 40-49 ... में कोई भी संख्या दुबारा दुसरी श्रेणी में नहीं दुहराई गई है। इस प्रकार के श्रेणी को (inclusive classes). समावेशी श्रेणीयों कहते है।

नोट :हम कम लम्बाई वाले अधिक श्रेणियाँ या अधिक लम्बाई वाली कम श्रेणियों को बना सकते है। यदि मूलदत्त दिए गए हो तो व्याप्ति (Range) मालूम कर सकते है। (व्यापित = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य)। सुविधा अनुसार व्याप्ति के आधार पर, श्रेणी की लम्बाई और श्रेणीयों की संख्या निर्धारित कर सकते है। उदाहरण के लिए वर्गांतर 30-35, 36-40 होंगे।

वर्गांतर	वर्ग सीमाएँ
20 - 29	
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	

मानलो, यदि संतरे का भार 39.5 ग्रा. है तो इसे हम कौनसे वर्गांतर में लेंगे? हम 39.5 को न 30-39 श्रेणी में या न ही 40-49 श्रेणी में रख सकते है।

ऐसी स्थिति में हम वास्तविक सीमाओं (या सीमांत) की रचना या निर्माण कर सकते है।

पहले वर्ग की उच्चसीमा तथा अगले वर्ग की निम्न सीमा का औसत पहले वर्ग की उच्चसीमा कहलाता है। वही संख्या अगले वर्ग की निम्न सीमा भी बनती है।

SCERT TELANGANA

उसी प्रकार सभी श्रेणियों के सीमाओं की गणना करेंगे। सबसे प्रथम श्रेणी के आगे के वर्ग तथा अंतिम श्रेणी के बाद के वर्गों को अनुमानित वर्गांतर द्वारा लिया जा सकता है। जिससे हम किसी भी प्रथम श्रेणी की निम्न सीमा तथा अंतिम श्रेणी की उच्च सीमा को प्राप्त कर सकते है।

दुबारा यह प्रश्न उठता है कि 39.5 को 29.5-39.5 या 39.5 - 49.5 श्रेणी में लेंगे? यहाँ पर अपवर्जी नियमानुसार किसी श्रेणी की निम्न सीमा समान हो तो उसे अगली श्रेणी में लिया जाता है न कि पहली श्रेणी में।

अतः 39.5 श्रेणी 39.5-49.5 में होगा।

श्रेणीयाँ जो 30-40, 40-50, 50-60, ... रूप में है वे आच्छादित श्रेणियों होती है उन्हें अपवर्जी श्रेणी कहते हैं।

जब समावेशी श्रेणीयों की सीमाओं को देखते है तो, वे असमावेशी कक्षा के रूप में दिखाई देते है। किसी श्रेणी के उच्चसीमा और निम्न सीमा के अंतर को वर्गांतर या कक्षा की लम्बाई कहते है । 90- 99 का वर्गांतर = 10 होगा। (i.e. 99.5 – 89.5 = 10) 10.

उदाहरण-3. सितंबर माह के 30 दिनों का किसी शहर का तापमान (% में) इस प्रकार दिया गया।

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84-86, 86,-88 वर्गांतर से समूहबद्ध बारंबारिता तालिका बनाइए।

(ii) दत्तों की व्याप्ति क्या है?

हल : (i) समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की तालिका इस प्रकार है।

वातावरण की नमी	गणना चिन्ह	दिनों की संख्या
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	𝍸 ||	7
94-96	𝍸 |	6
96-98	𝍸 ||	7
98-100	||||	4

[नोट :- 90, 90-92 वर्गांतर में आता है उसी प्रकार 96, 96-98 वर्गांतर में आता हैं।]

(ii) व्याप्ति 99.2 - 84.9 = 14.3 (स्थानों के अनुसार बदलता है।)

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 9.1

1. निम्न अंकों से बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

प्राप्तांक	5 तक	6 तक	7 तक	8 तक	9 तक	10 तक
विद्यार्थीयों की संख्या	5	11	19	31	40	45

2. नवीं कक्षा के 36 विद्यार्थियों के रक्त समूह इस प्रकार हैः

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

इन आंकडों को एक बारंबारिता सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए इन विद्यार्थियों में कौन सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौनसा रक्त समूह कम पाया गया है।

3. (3) तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित आने की संख्या निम्न है :

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

ऊपर दिये गये दत्तों से बारंबारिता तालिका बनाइए।

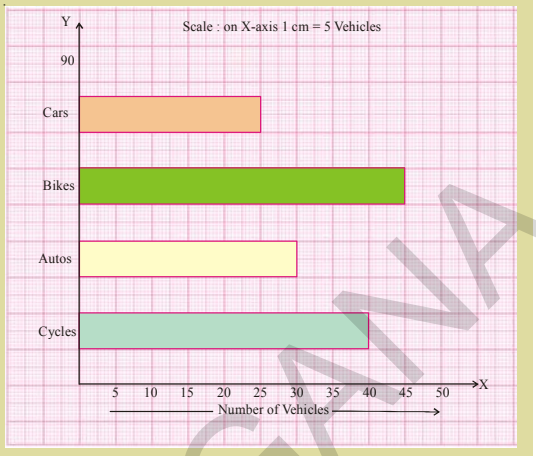
4. एक TV चैनल द्वारा धूम्रपान निषेध के बारे में SMS किया जिसमें A – पूर्ण निषेध, B – सार्वजनिक स्थानों में धूम्रपान, C – कोई आवश्यकता नहीं, एक घंटे में प्राप्त SMS इस प्रकार है।

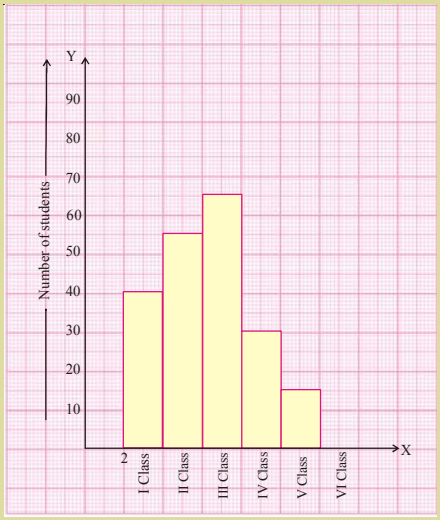
A	B	A	B	C	B				
A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

ऊपर की तालिका, समूहबद्ध बारंबारिता तालिका को दर्शाता है। कितने उचित उत्तर प्राप्त हुए? सबसे अधिक लोगों की राय क्या होगी?

SCERT TELANGANA

5. दिए गए बार ग्राफ में, बारंबारिता बंटन तालिका में दत्तों को दर्शाओ :





6. अक्षों पर लिये गए पैमानों को पहचानकर बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

7. किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के अंक (75 में से) इस प्रकार हैं।

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

समान वर्गांतर लेकर बारंबारिता तालिका बनाओ (**संकेत** : एक वर्गांतर इस प्रकार है 0-10)

8. किसी मुहल्ले में 25 घरों के बिजली के बिल (रुपये में) इस प्रकार है। 75 का वर्गांतर लेकर समूहबद्ध बारंबारिता बंटन सारणी बनाओ :-

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,

530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. एक कंपनी एक विशेष प्रकार की कार की बैट्रीयों बनाती है। 40 बैट्रीयों की आयु (life) वर्षों में इस प्रकार अंकित किया गया :-

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

0.5 वर्गांतर लेकर तथा श्रेणी 2 - 2.5 से प्रारंभ करके इन दत्तों की एक बारंबारिता सारणी बनाइए।

SCERT TELANGANA

9.4 केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन (Measures of Central Tendency)

निम्न परिस्थिति का अवलोकन कीजिए

स्थिति-1 : एक छात्रावास में साधारणतः 200 इडली, 50 विद्यार्थि नाश्ते में (अल्पाहार में) खाते हैं। यदि और 20 विद्यार्थि छात्रावास में भर्ती हुए तो उनको (mess incharge) को और कितनी इडली बनानी होगी?

स्थिति-2 : एक फैक्टरी में काम कर रहे कर्मचारियों का वेतन इस प्रकार है।

कर्मचारी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वेतन रु (हज़ार में)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

स्थिति-3 : किसी शहर के विभिन्न वाहन इस प्रकार हैं। इनमें सबसे पसंदिदा वाहन कौनसा है?

1. कार 15%
2. ट्रेन 12%
3. बस 60%
4. दुपहिया 13%

पहले स्थिती में हम साधारणतः प्रश्न को हल करने के लिए औसत (माध्य) लेते हैं। लेकिन यदि दुसरी स्थिती में भी हम औसत वेतन ले तो वह हैं जो 30.7 हज़ार होगा है, आँकडों को देखने के पश्चात् हम कह सकते है कि मध्यमान से वेतन की सही गणना नहीं हो सकती है। बहुत सारे कर्मचारियों का वेतन 12 से 18 हजार के मध्य है। अतः इस स्थिति में माध्यिका (मध्य मूल्य) सही होगी तीसरी स्थिति में बहुलक सबसे उचित विकल्प है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन में दत्तों की प्रकृति और उद्देश्य (purpose) के अनुसार औसत, माध्यिका या बहुलक का उपयोग मान सकते हैं।

विचार-विमर्श कर लिखिए।

1. तीन ऐसी स्थितीयों को लिखिए, जहाँ मध्यमान, माध्यिका और बहुलक का अपना अलग अस्तित्व है।

दो क्रिकेटरों द्वारा खेले गए 5 मैचों की तुलना से दोनों के चाहने वालों ने यह बताने की कोशिश की हैं कि उनका खिलाड़ी ने दूसरे खिलाड़ी से अच्छा प्रदर्शन किया है।

खेल		1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}
रन बनाए गए	रघु	50	50	76	31	100
	गौतम	65	23	100	100	10

SCERT TELANGANA

दोनों के प्रशंसक रनों को जोड कर, औसत रनों को इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

रघु का औसत स्कोर $= \frac{307}{5} = 61.4$

गौतम का औसत स्कोर $= \frac{298}{5} = 59.6$

रघु का औसत स्कोर (score), गौतम से अधिक है, रघु के प्रशंसक ने दावा किया कि रघु का प्रदर्शन गौतम के प्रदर्शन से अच्छा था लेकिन गौतम के प्रशंसक इस बात को नहीं मानते हैं। गौतम के प्रशंसक दोनों के स्कोरस् को अवरोही descending क्रम में जमाया और देखा की मध्य का स्कोर (score) इस प्रकार है।

Raghu	100	76	50	50	31
Gautam	100	100	65	23	10

गौतम के प्रशंसक ने कहा की मध्य का score 65 है, जो रघु के मध्य के स्कोर (score) 50 से बेहतर है अतः गौतम का प्रदर्शन अच्छा था।

लेकिन हम यह देखते हैं कि गौतम ने, पाँच खेलों में दो बार शतक बनाये इसलिए उसका प्रदर्शन अच्छा है।

अब, गौतम और रघु के प्रशंसकों के बीच के विवाद को खत्म करने के लिए, तीनों मापों को देखेंगे।

उन्होंने पहले औसत को लिया जो मध्यमान है। मध्य का स्कोर (score) जो बहस का मुद्दा बना वह है माध्यिका, उनके प्रदर्शन की तुलना करने में बहुलक को भी लिया जाता है। जहाँ स्कोर (score) बार-बार दुहराया गया। रघु का बहुलक स्कोर (score) 50 है,. गौतम का बहुलक स्कोर (score) 100 है। इन तीनों मापों में कौनसा उचित मापन होगा?

सर्वप्रथम मध्यमान को विस्तार से समझेंगे।

9.4.1 मध्यमान (Arithmatic Mean)

सांख्यिकीय दत्तों का मध्यमान सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भागफल होता है। हमनें मूल दत्तों के मध्यमान की गणना के बारे में पहले ही चर्चा की है।

मध्यमान $\bar{x} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$ या $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

9.4.1.1 मूल दत्तांशों का मध्यमान

उदाहरण-4. किसी क्षेत्र के एक सप्ताह का वर्षापात कुछ इस प्रकार हैं 4cm, 5cm, 12cm, 3cm, 6cm, 8cm, 0.5cm. प्रतिदिन के औसत वर्षापात को ज्ञात करो?

हल : प्रतिदिन का औसत वार्षापात अर्थात् उपर दिए गए दत्तांशों का मध्यमान होगा।

SCERT TELANGANA

राशियों की संख्या (n) = 7

मध्यमान $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{n}$ जहाँ $x_1, x_2 ..... x_n$ राशियाँ होंगी।

और $\bar{x}$ मध्यमान $= \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5$ से.मी.

उदाहरण-5. यदि 10, 12, 18, 13, P और 17 का मध्यमान 15 हो तो P का मूल्य ज्ञात करो।

हल : हमें मालूम है कि मध्यमान $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 20.$$

9.4.1.2 असमुहबद्ध दत्तों की का मध्यमान

इस उदाहरण में, किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों का भार निम्न बारंबारिता बंटन सारणी दिया गया है।

भार (x) कि.ग्रा.	30	32	33	35	37	41
विद्यार्थियों की संख्या (f)	5	9	15	6	3	2

तो भार 40 विद्यार्थियों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

सारणी से हम यह देखते हैं कि 5 विद्यार्थियों का भार 30 किलोग्राम है, तो कुल भार $5 \times 30 = 150$ किलोग्राम उसी प्रकार हम भार का योग ज्ञात कर सकते है।

मध्यमान $\left(\bar{x}\right) = \frac{\text{Sum of all the observations}}{\text{Total number of observations}}$ $\qquad \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$

अतः मध्यमान $= \frac{5\times30+9\times32+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2}$

$$= \frac{1336}{40} = 33.4 \text{ किलोग्राम.}$$

यदि $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ निरिक्षणों के संबंधित बारंबारिता $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ हो तो इसे इस प्रकार लिख सकते।

SCERT TELANGANA

मध्यमान $\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$\therefore \bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

उदाहरण-6. निम्न दत्तों का मध्यमान ज्ञात करो।

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

हल :

चरण-1 :प्रत्येक पंक्ति के $f_i \times x_i$ को हल करो प्रत्येक पंक्ति में,

चरण-2 : बारंबारिता का योग (Σf_i) तथा

$f_i \times x_i$ ज्ञात करो $(\Sigma f_i x_i)$ का योग

चरण-3 : गणना $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_i x_i = 755$

उदाहरण-7. यदि इन दत्तों का मध्यमान 7.5 हो तो 'A' का मूल्य ज्ञात करो।

प्राप्तांक	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थीयों की संख्या	3	10	17	A	8	4

हल :

बारंबारिताओं का योग $(\Sigma f_i) = 42 + A$

$f_i \times x_i$ का योग $(\Sigma f_i x_i) = 306 + 8A$

मध्यमान $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i xi}{\Sigma f_i}$

दिया गया मध्यमान $= 7.5$

अतः $7.5 = \frac{306+8A}{42+A}$

$306 + 8A = 315 + 7.5\,A$

अंक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	f_ix_i
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

SCERT TELANGANA

$8A - 7.5A = 315 - 306$

$0.5A = 9$

$A = 18$

9.4.1.3 विचलन पद्धति द्वारा असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान
(Mean of Ungrouped Frequency Distribution by Deviation)

उदाहरण-8. दिए गए दत्तों से समानान्तर माध्य मालूम करो।

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

हल :

(i) सरल विधि

असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन में, आप इस नियम का उपयोग कर सकते

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

(ii) विचलन पद्धति

इस विधि में हम एक निरिक्षण की कल्पना करेंगे जो कल्पित मध्यमान माना जाएगा है। मानलो हम '16' जो कल्पित मध्यमान मानेंगे जो A = 16, कल्पित मध्यमान से दूसरे मूल्यों का विचलन ज्ञात करेंगे।

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	–6	–24
12	5	–4	–20
14	8	–2	–16
16 A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		–60+42=–18

बारंबारिताओं का योग = 40

$f_i \times d_i$ गुणफल का योग = – 60 + 42

$\Sigma f_i d_i = -18$

मध्यमान $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \frac{-18}{40}$

$= 16 - 0.45$

$= 15.55$

SCERT TELANGANA

9.4.2 माध्यिका (Median)

दिए गए राशियों का मध्य मूल्य माध्यिका होता है। जब उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया तो यह दत्तों को दो समूह में विभाजित करता है, एक भाग माध्यिका से बड़े मूल्यों को समाविष्ट करता है और दुसरा भाग माध्यिका से छोटे मूल्यों को समाविष्ट करता है।

पिछली कक्षाओं में हमने चर्चा की थी कि कि निरिक्षणों का क्रम में व्यवस्थित कर माध्यिका की गणना की जाती है।

'n' निरिक्षणों के दत्तों में 'n' विषम हो तो, माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ वीं रहती है।

जब n सम सांख्यिय है तो माध्यिका का मान $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ वाँ तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ वाँ मूल्य के बीच का मूल्य रहता है।

इसे हल कीजिए

1. निम्न लिखित मूल्यों की माध्यिका ज्ञात करो 75, 21, 56, 36, 81, 05, 42
2. आरोही क्रम में व्यवस्थित असमूहबद्ध दत्तों 7, 10, 15, x, y, 27, 30 की माध्यिका 17 है एक और निरिक्षण 50 दिए गए दत्तों में जोडा गया, तो माध्यिका 18 होगी तो x और y का मूल्य ज्ञात करो।

9.4.2.1 बारंबारिता बंटन की माध्यिका

भारात्मक निरिक्षणों के दत्तों की माध्यिका ज्ञात करने के विधि की चर्चा करेंगे, 100 कर्मचारियों की मासिक आय (वेतन) इस प्रकार है।

वेतन (रुपयों में)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
कर्मचारियों की संख्या	4	18	30	20	15	8	5

दिए गए दत्तों की माध्यिका किस प्रकार से ज्ञात करेंगे? सबसे पहले दिए गए दत्तों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करो। उसके बाद अनुरुप (संलग्न) बारंबारिताओं को तालिका में लिखेंगे और आरोही संचित बारंबारिता को ज्ञात करेंगे। हम देखेंगे कि संचित बारंबारिताओं अंको का बढ़ता हुआ क्रम होता है।

वेतन (x)	कर्मचारियों की संख्या (f)	संचित बारंबारिता (cf)
7500	4	4
8000	18	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

SCERT TELANGANA

$\frac{N}{2}$ का मूल्य ज्ञात करो और माध्यिका की श्रेणी को पहचानो जिसकी संचित बारंबारिता $\frac{N}{2}$, से अधिक हो जहाँ N बारंबारिताओं का योग होता है।

यहाँ N= 100 सम है, अतः $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ वाँ और $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{th}$ वाँ निरिक्षण 50 और 51 क्रमशः है।

तालिका से संबंधित मूल्य 50 वाँ और 51 वाँ निरिक्षणों के समान होगा जिसका भारात्मक मूल्य 8500 होगा। अतः इस बंटन की माध्यिका 8500.

इसे हल कीजिए

1. दिए गए दत्तों से माध्यिका अंक मालूम करो :-

अंक या प्राप्तांक	15	20	10	25	5
विद्यार्थियों की संख्या	10	8	6	4	1

2. माध्यिका ज्ञात करते समय दिए गए दत्तांशों को क्रमानुसार लिखना आवश्यक हैं । क्यों ?

9.4.3 बहुलक (Mode)

यदि एक संख्या दिए गए दत्तों में कई बार दुहराई जाती है या एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारंबारिता सबसे अधिक है उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहा जाता है।

उदाहरण-9. एक जूते की दुकान में किसी दिन निम्न (माप) जूते बिकें तो बहुलक ज्ञात करो।

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

हल : सबसे पहले दिए गए निरिक्षणों को क्रम से व्यवस्थित करेंगे 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 बारंबारिता बंटन तालिका बनाई गई।

Size	6	7	8	9	10
बिके जूतों की संख्या	4	5	1	2	1

यहाँ 7 नंबर के जूते ज्यादा बिकें i.e., 5 बार

∴ अतः दिए गए दत्तों का बहुलक (जूते का माप) 7 है। यह मालूम होता है कि '7' नंबर का जूता सबसे ज्यादा बेचा गया है।

विचार विमर्श कर लिखिए

1. आपके सहपाठीयों को उनकी ऊँचाई के अनुसार वर्गीकृत करो और बहुलक मालूम करो।
2. यदि दुकानदार को जूतों का ऑर्डर देना हो तो किस नंबर के जूते अधिक मंगवाने पढेंगे।

SCERT TELANGANA

उदाहरण-10. किसी कक्षा के 20 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंको में से) प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार है।

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) 91-100, 81-90, ... वर्गांतर लेते हुए बारंबारिता तालिका बनाओ।

(b) बहुलक को वर्ग को चुनिये (सबसे बड़ी बारंबारिता वाला वर्ग बहुलक वर्ग माना जायेगा।)

(c) (उस) वर्गांतर को ज्ञात करो जिसमें माध्यिका हो।

हल :

(a)

प्राप्तांक	बारंबारिता	Greater than Cumulative frequency
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
कुल	**20**	

(b) 91-100 की श्रेणी (modal class) में सबसे बड़ी बारंबारिता पायी गयी है।

(c) 20 का मध्यमूल्य 10 है। यदि हम ऊपर से गिनती करने पर, 81-90 के श्रेणी में 10 बारंबारिता पायी गयी है। इसलिए मध्यिका का वर्गांतर 81-90 होगा।

9.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में विचलन (Deviation in Values of Central Tendency)

यदि हम समान मूल्य सभी दत्तों में जोड़ने पर या प्रत्येक दत्तों से गुणा करने पर केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप में क्या होगा?

निम्न तालिका को देखो।

विवरण	दत्त	मध्यमान	बहुलक	माध्यिका
वास्तविक दत्तों का समूह	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12.2	14	13
प्रत्येक दत्त में 3 जोड़ने पर	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
प्रत्येक दत्तों को 2 से गुणा करने पर	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

SCERT TELANGANA

इस तालिका को देखने के बाद हम यह कह सकते हैं कि,

जोड़ने पर : जिस राशि को जोड़कर दत्तों का मूल्य बदल गया है।केन्द्रीय प्रवृत्ती के मान में भी उतनी ही बढ़ोतरी होगी।प्रत्येक दत्त में 3 जोड़ने पर, मध्यमान, माध्यिका और बहुलक में भी 3 की बढ़ोतरी होगी।

गुणा करने पर : सभी दत्तों के मूल्यों पर जिस संख्या के गुणा का प्रभाव होता हैं वही केन्द्रीय प्रवृत्ती के माप पर भी देखेगा। यदि प्रत्येक निरिक्षण को 2 से गुणा किया जाय तो मध्यमान, माध्यिका और बहुलक को भी 2 से गुणा करना पड़ेगा।

अभ्यास - 9.2

1. यातायात कार्यालय में पारसल (parcels) का भार इस प्रकार दिया गया।

भार (kg)	50	65	75	90	110	120
पार्सल संख्या	25	34	38	40	47	16

तो पार्सलो का मध्यमान भार ज्ञात करो।

2. एक गाँव के परिवारों की संख्या और उनमें बच्चों की संख्या इस प्रकार है।

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5
परिवारों की संख्या	11	25	32	10	5	1

प्रत्येक परिवार के बच्चे का मध्यमान ज्ञात करो।

3. निम्न बारंबारिता बंटन का मध्यमान 7.2 हो तो 'K' का मान ज्ञात करो।

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. भारतीय जनगणना 2011 के अनुसार गाँवों की जनसंख्या इस प्रकार है।

जन संख्या (हज़ारों में)	12	5	30	20	15	8
गाँव	20	15	32	35	36	7

प्रत्येक गाँव की औसत जन संख्या ज्ञात करो।

SCERT TELANGANA

5. AFLATOUN सामाजिक और आर्थिक शैक्षणिक योजना के अंतर्गत, हैदराबाद शहर के उन्नत पाठशाल के विद्यार्थियों की बचत योजना, में मंडलों की मासिक बचत इस प्रकार है।

मंडल	विद्यालय की संख्या	कुल बचत (रुपये)
अम्बरपेट	6	2154
तिरुमलगिरी	6	2478
सैदाबाद	5	975
खैरताबाद	4	912
सिकंदराबाद	3	600
बहादुरपुरा	9	7533

प्रत्येक मंडल के पाठशाला का औसत बचत ज्ञात कीजिए तथा सभी पाठशालाओं के कुल बचत का औसत ज्ञात कीजिए।

6. किसी विद्यालय के IX नवीं कक्षा के लड़के और लड़कियों की ऊँचाई इस प्रकार दी गई।

ऊँचाई (cm)	135	140	147	152	155	160
लडकें	2	5	12	10	7	1
लडकियाँ	1	2	10	5	6	5

लड़के और लड़कियों की ऊँचाई की तुलना करो।

[**संकेत :** लडके और लडकियों की ऊँचाई की माध्यिका ज्ञात करो।]

7. विश्व में शतक प्राप्त क्रिकेटरों की संख्या इस प्रकार दी गई है।

शतकों की संख्या	5	10	15	20	25
क्रिकेटरों की संख्या	56	23	39	13	8

दीए गये दत्तों का मध्यमान, मध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

8. नए वर्ष के उपलक्ष्य में एक मीठाई के दुकान में मीठाईयों के पाकेट बनाए गए। मीठाई पाकेटों की संख्या और प्रत्येक पाकेट की किमत इस प्रकार दी गई।

पाकेट की कीमत (रु.में)	25 रु.	50 रु.	75 रु.	100 रु.	125 रु.	150 रु.
पाकेट की संख्या	20	36	32	29	22	11

तो मध्यमान, माध्यिका और बहुलक ज्ञात करो।

9. तीन विद्यार्थीयों का (औसत) भार 40 kg. (किलो) उनमें एक विद्यार्थी रंगा का भार 46 kg. (किलो) है। दुसरे दो विद्यार्थी रहीम और रेश्मा का भार समान है तो रहीम का भार ज्ञात करो।

SCERT TELANGANA

10. एक अनाथ आश्रम के लिए किसी माध्यमिक विद्यालय के विभिन्न छात्राओं द्वारा चंदा एकट्ठा किया गया जो इस प्रकार है।

कक्षा	प्रत्येक छात्रा द्वारा चंदा (रुपये में)	छात्राओं की संख्या
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

दिए गए दत्तों से मध्यमान, माध्यिका और बहुलक ज्ञात करो।

11. चार अज्ञात संख्याएँ हैं, उनमें दो संख्याओं का मध्यमान 4 और प्रथम तीन संख्याओं का मध्यमान 9 है। सभी चार संख्याओं का मध्यमान 15, यदि उनमें से एक संख्या 2 है तो दुसरी अन्य संख्याएँ ज्ञात करो।

हमने क्या सीखा?

- निरिक्षणों का बारंबारिता के साथ तालिका रूप में प्रदर्शन करने **भारात्मक निरिक्षण तालिका** या **असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका** कहते हैं।
- अधिक दत्तों को बारंबारिता तालिका के रूप में लिखने से एक ही नजर में हम उसकी व्याप्ति को ज्ञात कर सकते हैं। कौनसा निरिक्षण बार-बार कितने बार दोहराया गया, दत्तों का आसानी से व्याख्या तथा विश्लेषण कीया जा सकता हैं।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, एक विशेष दत्त होता है जिसके चारों ओर अन्य दत्तों का समावेश होता है।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप : मध्यमान, बहुलक, मध्यिका है।
- सांख्यिकीय दत्तों का मध्यमान सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भाग फल होता है।

$$\text{मध्यमान} = \text{या} \quad \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}} \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

- समूहबद्ध बारंबारिता बंटन का मध्यमान $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.

SCERT TELANGANA

- विचलन पद्धति से, समानांतर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ जहाँ A काल्पनिक मध्य मूल्य और Σf बारंबारिताओं का योग और $\sum fd$ विचलन तथा बारंबारिता के गुणनफल का योग होता है ।
- दत्तों को (आरोही या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करने पर इस व्यवस्था के मध्य का मूल्य माध्यिका कहलाता है।
- जब निरिक्षण की संख्या विषम हो तो माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ वीं राशी रहती है।
- जब निरिक्षणों की संख्या सम रहती है तब माध्यिका का मान बीच के दो दत्तों का औसत रहता है जो कि $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ वाँ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ वाँ राशी रहती है।
- माध्यिका दत्तों को दो समुह में विभाजित करती है एक भाग में मध्यिका बड़े मूल्यों का समावेश होता है जबकि दूसरे भाग में मध्यिका से छोटे मूल्यों का समावेश होता है।
- यदि एक संख्या दिए गए दत्तों में कई बार दुहराई जाती है या एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारम्बारिता सबसे अधिक है उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहा जाता है।

होशियारी का खेल

विद्यार्थियों के एक पंक्ति में गोपी बाईं ओर से 7 वें स्थान पर हैं, और दाँयें से 5 वें स्थान पर शंकर है, यदि वे आपस में अपना स्थान बदल दें तो शंकर दाँये से 8 वें स्थान पर होगा, तो उस पंक्ति में कितने विद्यार्थी हैं?

एक लड़का चैतन्या अपना नाम पेड़ की छाल पर लिखा जिसकी ऊँचाई 1.5 मी. है। पेड़ की ऊँचाई 4.5 मी. है तथा दस वर्ष बाद पेड़ की ऊँचाई 6.75 मी. हो गयी तब जमीन से कितनी ऊँचाई पर चैतन्या का नाम खुदा होगा?

आपके उत्तर का कारण बताइए?

SCERT TELANGANA