(50) એક પેટીમાં 1 થી 25 પૂર્ણાંક લખેલ કાર્ડ્સ છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પછી એક એમ બે કાર્ડ્સ પૂરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. બંને કાર્ડ્સ પરનો પૂર્ણાંક યુગ્મ હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{12}{25}$ (B) $\frac{11}{50}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : 1 થી 25 માં યુગ્મ પૂર્ણાંક ગણ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24}

A : પસંદ કરેલ પ્રથમ કાર્ડ પરનો પૂર્ણાંક યુગ્મ હોય. આથી, $P(A) = \frac{12}{25}$

B : પસંદ કરેલ કાર્ડ દ્વિતીય કાર્ડ પરનો પૂર્ણાંક યુગ્મ હોય. આથી, $P(B|A) = \frac{11}{50}$

$\therefore$ માગેલ સંભાવના $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{50}$ **જવાબ : (B)**

(51) E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. P(E) = 0.35 તથા $P(E \cup F) = 0.60$, તો ઘટના F ન ઉદ્ભવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{8}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{7}{13}$

ઉકેલ : નિરપેક્ષ ઘટનાઓ E અને F માટે,

$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = 0.35\ P(F)$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$\therefore\ 0.60 = 0.35 + P(F) - 0.35\ P(F)$

$\therefore\ 0.25 = (1 - 0.35)\ P(F)$

$\therefore\ P(F) = \frac{0.25}{0.65} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ F ન ઉદ્ભવે તે ઘટનાની સંભાવના $P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$ **જવાબ : (B)**

(52) એક પેટીમાં 3 સફેદ, 3 લાલ અને 4 કાળા રંગના દડાઓ છે. પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે દડાઓ પૂરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછો એક દડો કાળા રંગનો હોય, તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{13}{15}$

ઉકેલ : પેટીમાં સફેદ 3 + લાલ 3 + કાળા 4 = કુલ 10 દડા છે.

$\therefore$ ઘટના B_1 : પસંદ કરેલ પ્રથમ દડો કાળા રંગનો ન હોય.

ઘટના B_2 : પસંદ કરેલ બીજો દડો કાળા રંગનો ન હોય.

$$P(B_1) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{6}{10},\quad P(B_2|B_1) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{5}{9}$$

$\therefore$ બંને દડા કાળા રંગના ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ઓછામાં ઓછો એક દડો કાળા રંગનો હોય તેની સંભાવના $= 1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

જવાબ : (B)

બીજી રીત :

માગેલ સંભાવના = એક અથવા બે દડા કાળા રંગના હોય, તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{24}{45} + \frac{6}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$ **જવાબ : (B)**

(53) એક સમતોલ ન હોય તેવા પાસાને ઉછાળવાની ઘટનામાં તેના પરના અંકો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી મળતા અંકોની સંભાવના નીચે મુજબ છે :

અંક	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	0.15	0.05	0.25	0.15	0.25	0.15

જો પાસાં પર મળતા અંકો 3 અથવા 4 હોય, તેવું આપેલ હોય ત્યારે પાસાં પર મળતો અંક 3 હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : ઘટના A = પાસાં પર મળતો અંક 3 હોય, B = પાસાં પર મળતો અંક 4 હોય.

P(A) = 0.25 P(B) = 0.15

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.25 + 0.15 = 0.40$

$$P\left(A|A \cup B\right) = \frac{P(A \cap (A \cup B)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.25}{0.40} = \frac{5}{8}$$ **જવાબ : (A)**

(54) એક પેટીમાં પાંચ સફેદ અને પાંચ કાળા દડાઓ છે. યાદચ્છિક રીતે પેટીમાંથી બે દડાઓની બે વખત પસંદગી (1) પૂરવણી રહિત (2) પૂરવણી સહિત કરવામાં આવે છે. પ્રથમ પસંદગી વખતે બંને દડાઓ સફેદ અને બીજી પસંદગી વખતે બંને દડાઓ કાળા મળે તેની સંભાવના અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(A) $\frac{5}{63}, \frac{4}{81}$ (B) $\frac{4}{81}, \frac{5}{63}$ (C) $\frac{4}{63}, \frac{5}{81}$ (D) $\frac{5}{81}, \frac{4}{63}$

ઉકેલ : **પૂરવણીરહિત :**

ઘટના A : પસંદ કરેલ બંને દડાઓ સફેદ હોય.

ઘટના B : પસંદ કરેલ બંને દડાઓ કાળા હોય.

અહીં પૂરવણીરહિત પસંદગીમાં

પ્રથમ ઘટના માટે $P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$, દ્વિતીય ઘટના $P(B \mid A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} = \frac{5}{14}$

માંગેલ ઘટનાની સંભાવના

$\therefore$ $P(A \cap B) = \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{14} = -\frac{5}{63}$

(અહીંથી નક્કી થાય કે જવાબ A છે.)

પૂરવણી સહિત :

અહીં ઘટના A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$$

જવાબ : (A)

(55) કોઈ ચોક્કસ રોગ માટે આયુર્વેદિક (A) અને હોમિયોપેથી (H) એમ બે સારવાર ઉપલબ્ધ છે. આયુર્વેદીક (A) સારવારથી દર્દી રોગમુક્ત થવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે. હોમિયોપેથી સારવારથી દર્દી રોગમુક્ત થવાની સંભાવના $\frac{5}{8}$ છે. (1) વ્યક્તિને રોગમુક્ત થવાની સંભાવના કેટલી ? (2) વ્યક્તિ રોગમુક્ત થયો હોય અને તેણે આર્યુવેદિક સારવાર લીધી હોય, તેની સંભાવના કેટલી ?

(A) $\frac{9}{16}, \frac{4}{9}$ (B) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ (D) 1, $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : A : વ્યક્તિ આયુર્વેદિક પદ્ધતિ પસંદ કરે છે. $P(A) = \frac{1}{2}$

B : વ્યક્તિ હોમિયોપેથી સારવાર પસંદ કરે છે. $P(B) = \frac{1}{2}$

C : વ્યક્તિ રોગમુક્ત થાય છે. $P(C|A) = \frac{1}{2}$, $P(C|B) = \frac{5}{8}$

$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{9}{16}$

(અહીંથી જ જવાબ A નક્કી થઈ ગયો.)

વ્યક્તિ સાજો થયેલ છે, તો તેણે આયુર્વેદિક સારવાર લીધી હોય તેની સંભાવના શોધીએ.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9 \times 4} = \frac{4}{9}$$

જવાબ : (A)

(56) જો $P(A \cup B) = P(A)$ તો $P(A|B) = ...$

(A) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (B) 1 (C) $P(A \cap B)$ (D) $P(A)$

ઉકેલ : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$

$\therefore \ P(A \cap B) = P(B)$

$\therefore \ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

જવાબ : (B)

(57) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. $P(A \cup B) = 0.5$ અને $P(A) = 0.2$ તો $P(B) = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{2}{5}$

ઉકેલ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$\therefore \ 0.5 = 0.2 + P(B) - 0.2P(B)$

$\therefore \ 0.3 = 0.8 \ P(B)$

$\therefore \ P(B) = \frac{3}{8}$

જવાબ : (C)

(58) આઠ સમતોલ સિક્કાને એક સાથે એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે, તો ઓછામાં ઓછી છ છાપ આવે તેની સંભાવના ...... થાય.

(A) $\frac{65}{265}$ (B) $\frac{63}{256}$ (C) $\frac{37}{128}$ (D) $\frac{37}{256}$

ઉકેલ : અહીં છાપ મળવાની સંભાવના $p = \frac{1}{2}$. આથી, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ અહીં આઠ સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે. $n = 8$

$$p(x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$$

$$= \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$P(X \geq 6) = p(6) + p(7) + p(8) = \left[\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{(28+8+1)}{256} = \frac{37}{256}$ **જવાબ : (D)**

(59) યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$g(X) = 2X + 3$ નું વિચરણ ...... છે.

(A) 6 (B) 36 (C) 4 (D) 8

ઉકેલ : $E(X) = \sum x_i \, p(x_i)$

$$= 0\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$E(X^2) = \sum x_i^2 \, p(x_i)$

$$= 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{8} = \frac{13}{4}$$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{13}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore$ $g(X) = 2X + 3$ નું વિચરણ $= 2^2\, V(X) = 4V(X) = 4(1) = 4$ **જવાબ : (C)**

(60) દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય $p(x) = \binom{6}{x}p^x \cdot q^{6-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., 6$ છે. જો $3p(2) = 2p(3)$ હોય, તો $p =$ ......

(A) $\frac{1}{17}$ (B) $\frac{8}{9}$ (C) $\frac{9}{17}$ (D) $\frac{3}{4}$

ઉકેલ : અહીં $3p(2) = 2p(3)$

$\therefore$ $3\binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot q^4 = 2\binom{6}{3}p^3 \cdot q^3$

$\therefore$ $3 \cdot 15p^2q^4 = 2 \cdot 20\; p^3 q^3$

$\therefore$ $9q = 8p$

$\therefore$ $9(1 - p) = 8p$

$\therefore$ $p = \frac{9}{17}$ **જવાબ : (C)**

(61) એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X = *x*	–2	–1	0	1	2
***p*(*x*)**	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

તો E(X) = ... તથા E(3X + 2) = ... V(3X + 2) = ...

(A) 0, 2, 14.4 (B) 0, 0, 4 (C) 0, 2, 4.8 (D) 2, 2, 14.4

ઉકેલ : $E(X) = \sum x_i \, p(x_i)$

$= -2 \cdot (0.2) + (-1) \cdot (0.1) + 0 \cdot (0.3) + 1 \cdot (0.3) + 2 \cdot (0.1)$

$= -0.4 - 0.1 + 0 + 0.3 + 0.2 = 0$

$E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3(0) + 2 = 2$

$E(X^2) = \sum x_i^2 \, p(x_i)$

$= 4(0.20) + 1(0.1) + 0.(0.3) + 1 \cdot (0.3) + 4 \cdot (0.1)$

$= 0.8 + 0.1 + 0 + 0.3 + 0.4 = 1.6$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.6 - 0 = 1.6$

$\therefore \; V(3X + 2) = 3^2 V(X) = 9(1.6) = 14.4$ **જવાબ : (A)**

(62) એક સમતોલ સિક્કાને n વખત ઉછાળતાં ઓછામાં ઓછા એક વખત છાપ (H) મળે તે ઘટનાની સંભાવના ..... છે.

(A) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (B) $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n$ (C) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ (D) $\frac{6^n - 5^n}{7}$

ઉકેલ : અહીં સિક્કો n વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નિદર્શાવકાશના ઘટકોની કુલ સંખ્યા = 2^n

એક પણ છાપ ન મળે તે ઘટના A હોય, તો $P(A) = \frac{1}{2^n}$ (A = {TTT ... T})

ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે તેની સંભાવના = $1 - \frac{1}{2^n}$ **જવાબ : (A)**

(63) 1 નું ઘનમૂળ સંકર સંખ્યા ω છે, ω ≠ 1. એક સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળતાં પાસાં પર મળતા અંક અનુક્રમે r_1, r_2 અને r_3 હોય, તો $\omega^{r_1} + \omega^{r_2} + \omega^{r_3} = 0$ સાથે સંકળાયેલ ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{216}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{5}{6}$

ઉકેલ : અહીં સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે.

$n = 6 \times 6 \times 6 = 216$

ઘટના $A = \{(r_1, r_2, r_3) \mid r_1, r_2, r_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \; \omega^{r_1} + \omega^{r_2} + \omega^{r_3} = 0, \; \omega \neq 1\}$

(1, 2, 3) (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6) (1, 3, 5), (2, 4, 6)

$r = 6 \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$

$\therefore \; P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$ **જવાબ : (C)**

(64) ગણ A અને ગણ B માં અનુક્રમે 4 અને 2 ઘટકો છે. A × B ના ઉપગણો પૈકી કોઈ એક ગણ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં મળતાં ઉપગણમાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ સભ્ય હોય, તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{219}{256}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{37}{256}$

ઉકેલ : ગણ A ની સભ્યસંખ્યા = 4, ગણ B ની સભ્યસંખ્યા = 2

∴ A × B ની સભ્યસંખ્યા = 4 × 2 = 8

∴ A × B ના ઉપગણોની સંખ્યા = $2^8 = 256$

જેમાં એક પણ સભ્ય ન હોય તેવો ઉપગણ ∅ = 1

જેમાં એક જ સભ્ય હોય તેવા ઉપગણની સંખ્યા = $\binom{8}{1}$ = 8

જેમાં માત્ર બે જ સભ્ય હોય તેવા ઉપગણની સંખ્યા = $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2}$ = 28

$\therefore$ જેમાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ સભ્ય હોય તેવા ઉપગણની સંખ્યા = 256 – 1 – 8 – 28
= 256 – 37 = 219

$\therefore$ માંગેલ ઘટનાની સંભાવના = $\frac{219}{256}$ **જવાબ : (A)**

(65) કોઈ ચોક્કસ ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ એક ગાણિતીય પ્રશ્ન ઉકેલે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. પ્રશ્નનો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{3}$ $P(C) = \frac{1}{4}$

ઘટના A પ્રથમ વિદ્યાર્થી દ્વારા પ્રશ્નનો ઉકેલ ન મળે તે હોય તો, $P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

ઘટના B બીજા વિદ્યાર્થી દ્વારા પ્રશ્નનો ઉકેલ ન મળે તે હોય તો, $P(B') = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$

ઘટના C ત્રીજા વિદ્યાર્થી દ્વારા પ્રશ્નનો ઉકેલ ન મળે તે હોય તો, $P(C') = 1 - P(C) = = \frac{3}{4}$

પ્રશ્નનો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના

$P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)')$
$= 1 - P(A' \cap B' \cap C')$
$= 1 - P(A') \cdot P(B') \cdot P(C') = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ **જવાબ : (A)**

(66) એક સમતોલ પાસાને 5 વખત ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં અયુગ્મ અંક મળે તેને સફળતા તરીકે લેતાં માહિતીનું વિચરણ ...... છે.

(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$

ઉકેલ : $n = 5$

પાસાં પર મળતા અયુગ્મ અંકની ઘટના {1, 3, 5}

$\therefore$ સફળતાની સંભાવના $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. નિષ્ફળતાની સંભાવના $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

વિચરણ = $npq = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ **જવાબ : (D)**

(67) જો દ્વિપદી વિચરણના યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 4 અને 2 હોય, તો P(X = 1) = ...

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{32}$

ઉકેલ : મધ્યક = $np = 4$. વિચરણ = $npq = 2$

$\therefore$ $\frac{npq}{np} = \frac{2}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$. આથી, $p = \frac{1}{2}$

$np = 4 \Rightarrow n\frac{1}{2} = 4 \Rightarrow n = 8$

ચલ X નું સંભાવના વિતરણ $p(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \binom{8}{x}\frac{1}{256}$

હવે $p(1) = \binom{8}{1}\frac{1}{256} = \frac{1}{32}$ **જવાબ : (D)**

(68) વ્યક્તિ A સત્ય બોલે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે અને વ્યક્તિ B સત્ય બોલે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે. કોઈ ઘટના માટે બંને વિરોધાભાસી નિવેદન આપે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{7}{20}$ (D) $\frac{3}{20}$

ઉકેલ : અહીં $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(A') = \frac{1}{5}$. $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(B') = \frac{1}{4}$

માંગેલ ઘટનાની સંભાવના $= P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

જવાબ : (C)

(69) યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X = *x*	1	2	3	4	5	6	7	8
***p*(*x*)**	0.15	0.23	0.12	0.10	0.20	0.08	0.07	0.05

ઘટના E = {X અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.} અને F = {X < 4} તો ઘટના $E \cup F$ ની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.50 (B) 0.35 (C) 0.77 (D) 0.89

ઉકેલ : E = {2, 3, 5, 7} અને F = {1, 2, 3}

$E \cup F = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$P(E \cup F) = p(1) + p(2) + p(3) + p(5) + p(7)$

$= 0.15 + 0.23 + 0.12 + 0.20 + 0.07 = 0.77$ **જવાબ : (C)**

(70) જો દ્વિપદી વિતરણના યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 4 અને 2 હોય તો $p(2) =$ ......

(A) $\frac{8}{64}$ (B) $\frac{7}{64}$ (C) $\frac{57}{64}$ (D) $\frac{37}{256}$

ઉકેલ : અહીં $np = 4$, $npq = 2$ પરથી $n = 8$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$p(2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{2^8} = \frac{7}{2^6} = \frac{7}{64}$$ **જવાબ : (A)**

(71) A અને B ઘટનાઓ માટે $P((A \cup B)') = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{4}$ તો ઘટના A અને B એ ......

(JEE 2014)

(A) સમસંભાવી અને નિવારક ઘટનાઓ છે. (B) સમસંભાવી છે પરંતુ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ નથી.

(C) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, પરંતુ સમસંભાવી નથી. (D) નિઃશેષ અને નિરપેક્ષ ઘટના નથી.

ઉકેલ : $P((A \cup B)') = \frac{1}{6}$. આથી, $P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\therefore$ $P(A') = \frac{1}{4}$. આથી, $P(A) = 1 - P(A') = \frac{3}{4}$. વળી $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{6} = \frac{3}{4} + P(B) - \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{3}{4}$ તથા $P(B) = \frac{1}{3}$ છે.

$\therefore$ A અને B સમસંભાવી ઘટનાઓ નથી.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. આથી, $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\therefore$ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. **જવાબ : (C)**

(72) ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{2}{3}$ તો P(B) = ...

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\therefore$ $P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$. આથી, $P(B)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

$\therefore$ $P(B) = \frac{1}{3}$ **જવાબ : (B)**

(73) 00, 01, 02, ..., 49 સંખ્યાઓ લખેલ હોય, તેવી 50 ટિકિટો છે. એક ટિકિટને યાદચ્છિક રીતે ઉપાડવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ ટિકિટની સંખ્યાના અંકોનો ગુણાકાર શૂન્ય હોય, તેમ આપેલ હોય ત્યારે અંકોનો સરવાળો 8 થાય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે. [JEE : 2009]

(A) $\frac{1}{50}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{1}{49}$

ઉકેલ : A = {00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 20, 30, 40}

B = {08, 17, 26, 35, 44}

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{14}$ **જવાબ : (C)**

(74) ગણ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} માંથી યાદચ્છિક રીતે એક પછી એક પુનરાવર્તન કર્યા વગર બે અંક પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા અંકોમાં ઓછામાં ઓછો એક અંક 4 કરતાં નાનો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{14}{15}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

ઉકેલ : ગણ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

અહીં પુનરાવર્તન કર્યા વગર ક્રમિક રીતે પસંદ કરેલા અંકની પસંદગીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા

$n(U) = 6 \times 5 = 30$

A : પસંદ થયેલા અંકોમાં ઓછામાં ઓછો એક અંક 4 કરતાં ઓછો હોય.

$\therefore$ A' : પસંદ થયેલા બંને અંકો 4 કે તેથી મોટા હોય (એટલે કે 4, 5, 6 પૈકી એક)

$\therefore$ $n(A') = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ $n(A) = 30 - 6 = 24$

$\therefore$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ **જવાબ : (D)**

(75) ભારત એ ઇંગ્લૅન્ડ અને ઑસ્ટ્રેલિયા સામે બે-બે વન-ડે રમે છે. પ્રત્યેક જીત માટે 2 ગુણ, પ્રત્યેક હાર માટે 0 ગુણ તથા પ્રત્યેક અનિર્ણિત મૅચ માટે 1 ગુણ મેળવે છે. ભારત 0, 1 અને 2 ગુણાંક મેળવે તે ઘટનાની સંભાવના અનુક્રમે 0.45, 0.05 અને 0.50 છે. ભારત ઓછામાં ઓછો 7 ગુણાંક મેળવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.625 (B) 0.0250 (C) 0.0875 (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં 4 મૅચ રમાય છે. ભારતને ઓછામાં ઓછા 0 અને વધુમાં વધુ 8 ગુણાંક મળી શકે.

ભારત ઓછામાં ઓછા 7 ગુણાંક મેળવે છે એટલે 7 કે 8 ગુણાંક.

ચારેય મૅચમાં કુલ 7 ગુણાંક મળવાની શક્યતા

1 + 2 + 2 + 2 કે 2 + 1 + 2 + 2, 2 + 2 + 1 + 2 કે 2 + 2 + 2 + 1

$p(7) = 4\ (0.050 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5) = 0.025$

8 ગુણાંક મળવાની શક્યતા 2 + 2 + 2 + 2

$p(8) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.0625$

$\therefore$ 7 કે વધુ ગુણાંક મળવાની સંભાવના $= p(7) + p(8) = 0.025 + 0.0625 = 0.0875$ **જવાબ : (C)**

(76) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} માંથી કોઈ પણ ત્રણ અંકોનું પુનરાવર્તન રહિત પસંદગી કરતાં મળતો અંક વધુમાં વધુ 6 હોય, તે ઘટના આપેલ હોય ત્યારે ઓછામાં ઓછો 3 હોય તેની સંભાવના ...... છે. [AIEEE : 2012]

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

ઉકેલ : S = {1, 2, 3, ..., 8}

ત્રણેય અંકોમાં વધુમાં વધુ 6 હોય તેની પસંદગી A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} માંથી થાય.

ત્રણેય અંકોમાં ઓછામાં ઓછો 3 હોય તેની પસંદગી B = {3, 4, 5, 6, 7, 8} માંથી થાય.

$$P(B \mid A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$ **જવાબ : (B)**

(77) બે સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસાં પર મળતા અંકોનો સરવાળો 9 હોય તેમ બે વખત મળે, તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{8}{729}$ (B) $\frac{8}{243}$ (C) $\frac{1}{729}$ (D) $\frac{8}{9}$

ઉકેલ : મળતા અંકોનો સરવાળો 9 હોય તેને સફળતા તરીકે લઈએ, તો તે ઘટના

A = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

$\therefore$ ઘટનાની સફળતાની સંભાવના $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. આથી $q = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

અહીં બે પાસા ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે.

આથી, $n = 3$

$$\therefore\ p(x) = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x}$$

$$\therefore\ p(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{9}\right)^x\left(\frac{8}{9}\right)^{3-x} = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^1 = 3\cdot\frac{1}{9\times 9}\times\frac{8}{9} = \frac{8}{243}$$ **જવાબ : (B)**

(78) બે બૉમ્બવાહક વિમાનો I અને II બરાબર નિશાન તાકે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3 અને 0.2 છે. પ્રથમ વિમાન નિશાન ચુકે, ત્યારે જ બીજુ વિમાન બૉમ્બ ફેંકે છે. બીજું વિમાન નિશાન તાકે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{8}{21}$ (B) $\frac{5}{21}$ (C) $\frac{7}{22}$ (D) $\frac{5}{22}$

ઉકેલ : ધારો કે વિમાન I નિશાન તાકે તે ઘટના A છે, વિમાન II નિશાન તાકે તે ઘટના B છે.

$P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.2,\ P(A') = 0.7,\ P(B') = 0.8$

માંગેલ સંભાવના

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A')\,P(B) + P(A')\cdot P(B')\cdot P(A')\cdot P(B) + P(A')\cdot P(B')\cdot P(A')\cdot P(B')\cdot P(A')\cdot P(B) + \dots \infty \\ &= (0.7)\cdot(0.2) + (0.7)\cdot(0.8)\cdot(0.7)\cdot(0.2) + (0.7)\,(0.8)\,(0.7)\,(0.8)\,(0.7)\,(0.2) + \dots \infty \\ &= (0.7)\,(0.2)\,[1 + (0.7)\,(0.8) + (0.7)^2\,(0.8)^2 + \dots] \\ &= (0.7)\,(0.2)\left[\frac{1}{1-(0.7)(0.8)}\right] \quad \text{(અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી)} \\ &= \frac{14}{100}\left(\frac{100}{100-56}\right) = \frac{14}{44} = \frac{7}{22} \end{aligned}$$ **જવાબ : (C)**

(79) એક પેટીમાં ત્રણ લાલ, ચાર વાદળી અને બે લીલા એમ કુલ નવ દડા છે. યાદચ્છિક રીતે પુનરાવર્તન રહિત ત્રણ દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. ત્રણેય દડા ભિન્ન રંગના હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{2}{23}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : $n(A) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 24$.

$n(U) = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$

$P(A) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

જવાબ : **(A)**

(80) n પેટીઓ છે. દરેકમાં $n + 1$ દડા છે કે જેમાં i મી પેટીમાં i સફેદ દડાઓ છે અને $(n + 1 - i)$ લાલ દડાઓ છે. ઘટના u_i માં યાદચ્છિક રીતે i મી પેટી પસંદ કરવામાં આવે છે, જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$ અને પસંદ કરેલ પેટીમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે, પસંદ કરેલ દડો સફેદ રંગનો હોય તે ઘટના w છે. તો

(1) જો $P(u_i) \propto i$ જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$ તો $\lim_{n \to \infty} P(w) =$ ......

(A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $P(u_i) \propto i$

$\therefore P(u_i) = ki$

$\sum P(u_i) = 1$. આથી, $\sum ki = 1$

$k\sum i = 1$. આથી, $\frac{kn(n+1)}{2} = 1$. આથી $k = \frac{2}{n(n+1)}$

હવે $P(w) = \sum P(u_i)P(w|u_i)$

$$= \sum ki \cdot \frac{i}{n+1} = \sum \frac{2i}{n(n+1)} \frac{i}{n+1} = \sum \frac{2i^2}{n(n+1)^2}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} P(w) = \lim_{n \to \infty} \sum \frac{2i^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)}{3n+3} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{3}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

જવાબ : **(B)**

(2) જો $P(u_i) = c$ જ્યાં c અચળ છે તો $P(u_n|w) =$ ......

(A) $\frac{2}{n+1}$ (B) $\frac{1}{n+1}$ (C) $\frac{n}{n+1}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $P(u_n|w) = \frac{P(w|u_n)P(u_n)}{P(w)}$

$$= \frac{c\left(\frac{n}{n+1}\right)}{c\left(\frac{\sum i}{n+1}\right)} = \frac{cn}{n+1} \times \frac{2(n+1)}{cn(n+1)} = \frac{2}{n+1}$$

$\left(P(w) = \frac{c}{n+1} + \frac{2c}{n+1} + \frac{3c}{n+1} + ... + \frac{nc}{n+1}\right)$

જવાબ : **(A)**

(81) એક પેટી (I_1)માં 1, 2, 3 અંક લખેલાં ત્રણ કાર્ડ્સ છે. બીજી પેટી (I_2) માં 1, 2, 3, 4, 5 અંક લખેલાં કાર્ડ્સ છે અને ત્રીજી પેટી (I_3) માં 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 અંક લખેલાં કાર્ડ્સ છે. દરેક પેટીમાંથી એક કાર્ડ પસંદ કરવામાં આવે છે. x_i એ i મી પેટીમાંથી પસંદ કરેલ કાર્ડ પરનો અંક હોય, તો (i = 1, 2, 3)

(1) $x_1 + x_2 + x_3$ અયુગ્મ હોય તેની સંભાવના

(A) $\frac{29}{105}$ (B) $\frac{53}{105}$ (C) $\frac{57}{105}$ (D) $\frac{1}{2}$

(2) x_1, x_2, x_3 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તેની સંભાવના

(A) $\frac{9}{105}$ (B) $\frac{10}{105}$ (C) $\frac{11}{105}$ (D) $\frac{7}{105}$

ઉકેલ : (i) $x_1 + x_2 + x_3$ અયુગ્મ હોય તેની શક્યતા બે છે.

(i) x_1, x_2, x_3 ત્રણેય અયુગ્મ હોય.

(ii) કોઈ બે યુગ્મ અને એક અયુગ્મ

(i) x_1, x_2, x_3 ત્રણેય અયુગ્મ હોય તેની કુલ શક્યતા $2 \times 3 \times 4 = 24$

(ii) બે યુગ્મ અને એક અયુગ્મ (પહેલી પેટીમાંથી યુગ્મ, બીજી પેટીમાંથી યુગ્મ, ત્રીજી પેટીમાંથી અયુગ્મ તે રીતે)

$1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 + 9 + 12 = 29$

$x_1 + x_2 + x_3$ અયુગ્મ મળે તેની કુલ શક્યતા $r = 24 + 29 = 53$

ત્રણ પેટીમાંથી એક-એક કાર્ડ પસંદ કરવાની કુલ શક્યતા

$n = 3 \times 5 \times 7 = 105$

$\therefore$ માંગેલ ઘટનાની સંભાવના $= \frac{r}{n} = \frac{53}{105}$

(2) x_1, x_2, x_3 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તેની સંભાવના માટે

B = {(1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 4, 7), (2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (3, 5, 7), (3, 2, 1), (3, 3, 3), (1, 1, 1) (2, 2, 2)}

P(B) $= \frac{r}{n} = \frac{11}{105}$ **જવાબ : (1) (B), (2) (C)**

(82) પાસાની જોડને ત્યાં સુધી નાખવામાં આવે છે કે, પાસાં પર મળતા અંકોનો સરવાળો 4 અથવા 6 મળે. સરવાળો 6 પ્રથમ આવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$

ઉકેલ : ધારો કે E_n એ n મા પ્રયત્ને બંને પાસાં પરનો સરવાળો 6 પ્રથમ આવે તે ઘટના છે.

$\therefore$ પ્રથમ $(n - 1)$ પ્રયત્નમાં બંને પાસાં પરનો સરવાળો 4 કે 6 ન આવે.

સરવાળો 4 આવે તે (1, 3), (2, 2), (3, 1) દ્વારા અને સરવાળો 6 આવે તે (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) દ્વારા શક્ય છે. નિદર્શાવકાશમાં કુલ 36 ઘટકો છે.

સરવાળો 4 કે 6 આવે તેની સંભાવના $= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$\therefore$ P(E_n) $= \left(1 - \frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{5}{36} = \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36}$

$\therefore$ પ્રથમ વખત 6 આવે તેની સંભાવના

$P(E_1 \cup E_2 \cup ...) = P(E_1) + P(E_2) + ... \infty$

$= \frac{5}{36} + \frac{7}{9} \times \frac{5}{36} + \left(\frac{7}{9}\right)^2 \frac{5}{36} + ... \infty$

$= \frac{5}{36}\left(\frac{1}{1 - \frac{7}{9}}\right) = \frac{5}{36} \times \frac{9}{2} = \frac{5}{8}$ (અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... = \frac{a}{1-r}, |r| < 1$) **જવાબ : (B)**

(83) રેલવે સ્ટેશન પર એક મુસાફર લૉકરમાં તેનો સમાન મૂકી બહાર ફરવા જાય છે. લૉકર ત્રણ આંકડાના કોડ (code)થી ખોલી શકાય છે. એક અજાણ્યો માણસ લૉકર ખોલવાનો પ્રયત્ન કરે છે.

(1) પ્રથમ પ્રયત્નમાં લૉકર ખૂલી જાય તેની સંભાવના...

(2) k પ્રયત્ન પછી લૉકર ખૂલી જાય તેની સંભાવના ($k < 1000$)...

(A) (1) 0.001 (2) $\frac{k}{100}$ (B) (1) 0.01 (2) $\frac{k}{1000}$

(C) (1) 0.001 (2) $\frac{k}{1000}$ (D) (1) 1 (2) $\frac{k}{10000}$

ઉકેલ : (1) ધારો કે A : લૉકર પ્રથમ પ્રયત્નમાં ખૂલી જાય તે ઘટના છે. ત્રણ આંકડાનો કોડ છે. આંકડા 0 થી 9 સુધીના છે.

$\therefore \; P(A) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = 0.001$

(2) ધારો કે B : લૉકર k પ્રયત્ન પછી ખૂલે છે.

B' : પ્રથમ k પ્રયત્નમાં લૉકર ખૂલતું નથી.

$\therefore \; P(B) = 1 - P(B')$

$= 1 - \frac{999}{1000}\cdot\frac{998}{999}\cdots\frac{1000-(k-1)}{1000-(k-2)}\cdot\frac{1000-k}{1000-(k-1)}$

$= 1 - \frac{1000-k}{1000} = \frac{k}{1000}$

જવાબ : (C)

(84) એક સંચાર સંરચનામાં n ભાગ આવેલા છે. દરેક ભાગ સ્વતંત્ર રીતે કામ કરે તેની સંભાવના k છે. આખી સંચાર સંરચના ત્યારે જ કામ કરે જ્યારે તેના અડધાથી વધુ ભાગ કામ કરતા હોય. k ની કઈ કિંમત માટે 5 ભાગવાળી સંચાર સંરચના 3 ભાગવાળી સંચાર સંરચના કરતા વધુ સારી રીતે કામ કરે ?

(A) $< \frac{1}{2}$ (B) $> \frac{1}{2}$ (C) $> \frac{4}{5}$ (D) $> \frac{3}{4}$

ઉકેલ : સંચાર સંરચનાના કામ કરતા ભાગ એ પ્રચલ n, p વાળા દ્વિપદી વિતરણ થશે.

5 ભાગવાળી સંચાર સંરચના કામ કરે તેની સંભાવના

$_5C_3k^3(1 - k)^2 + {_5C_4}k^4(1 - k) + k^5$

જ્યારે 3 ભાગવાળી સંચાર સંરચના કામ કરે તેની સંભાવના $_3C_2k^2(1 - k) + k^3$

જો 5 ભાગવાળી સંચાર સંરચના વધુ સારી રીતે કામ કરે, તો

$10k^3(1 - k)^2 + 5k^4(1 - k) + k^5 > 3k^2(1 - k) + k^3$

$\therefore \; 10k(1 - k)^2 + 5k^2(1 - k) + k^3 > 3(1 - k) + k$

$\therefore \; 10k(1 - k)^2 + 5k^2(1 - k) - 3(1 - k) - k(1 - k)(1 + k) > 0$

$\therefore \; (1 - k)[10k - 10k^2 + 5k^2 - 3 - k - k^2] > 0$

$\therefore \; (1 - k)(-6k^2 + 9k - 3) > 0$

$\therefore \; -3(1 - k)(2k^2 - 3k + 1) > 0$

$\therefore \; 3(k - 1)^2(2k - 1) > 0$

$\therefore \; k > \frac{1}{2}$

જવાબ : (B)

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 સત્ય છે. વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 સત્ય છે. વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે, વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે, વિધાન 2 સત્ય છે.

(85) **વિધાન 1 :** ધારો કે $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ એ n નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, જ્યાં $P(A'_i) = \frac{i}{i+1}$, $1 \le i \le n$.

એક પણ ઘટના ઉદ્‌ભવે નહિ તેની સંભાવના $\frac{n}{n+1}$ છે.

વિધાન 2 : જો $A_1, A_2, ..., A_n$ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n)$

ઉકેલ : P(એક પણ ઘટના ન ઉદ્‌ભવે.)

$= P(A'_1 \cap A'_2 \cap ... \cap A'_n)$

$= P(A'_1)\ P(A'_2)\ ...\ P(A'_n)$(જો $A_i = (i = 1, 2, ..., n)$ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો A'_i પણ નિરપેક્ષ થશે.)

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

∴ વિધાન 1 એ મિથ્યા છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(86) બસ-સ્ટેશન પર ત્રણ બસમાં 10 મુસાફરો ગમે તે બસમાં બેસી શકે છે. (અગાઉ બસમાં એક પણ મુસાફર નથી) દરેક બસમાં ઓછામાં ઓછો એક મુસાફર બેઠેલ હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{{}_{10}P_3 \cdot 3^7}{3^{10}}$ (B) $1 - \frac{{}_{10}C_3 \cdot 3^7}{3^{10}}$ (C) $1 - \frac{2^{10}}{3^{10}}$ (D) $\frac{3^9 - 2^{10} + 1}{3^9}$

ઉકેલ : 10 મુસાફરો ગમે તે ત્રણ બસમાં બેસે તેના કુલ પ્રકાર $= 3^{10}$.

દરેક બસમાં ઓછામાં ઓછો એક મુસાફર બેઠેલ હોય એટલે કે બધા મુસાફર ગમે તે એક જ બસમાં બેઠા હોય તથા બધા મુસાફર ગમે તે બે બસમાં જ બેઠા હોય તેવું ન બની શકે.

બધા જ મુસાફરો એક જ બસમાં બેસે તો ત્રણમાંથી એક બસ $\binom{3}{1}$ રીતે પસંદ થઈ શકે અને બધા જ મુસાફરો તેમાં બેસે.

ત્રણમાંથી બે બસ $\binom{3}{2}$ રીતે પસંદ થઈ શકે અને એક જ બસમાં બધા મુસાફરો 2^{10} રીતે બેસી શકે. પરંતુ બંને બસમાં એક મુસાફર હોય જ. આથી તે $\binom{3}{2}$ $(2^{10} - 2)$ રીતે શક્ય છે.

∴ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા $= 3^{10} - \binom{3}{1} \times 1 - \binom{3}{2}(2^{10} - 2)$

∴ માંગેલ સંભાવના $= \frac{3^{10} - 3 - 3(2^{10} - 2)}{3^{10}}$

$= \frac{3^9 - 2^{10} + 1}{3^9}$ **જવાબ : (D)**

(87) બે યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવામાં આવે છે. જો આ સંખ્યાના એકમનો અંક યુગ્મ હોય તેની સંભાવના p છે તથા અયુગ્મ હોય, તો તેની સંભાવના q હોય, તો $\frac{10p}{q} =$ ......

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) $\frac{1}{30}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, બે અયુગ્મ સંખ્યાનો ગુણાકાર અયુગ્મ સંખ્યા થાય છે, જ્યારે બાકીના બધા પ્રકારમાં યુગ્મ સંખ્યા થાય છે.

∴ $p = \frac{3}{4}$ અને $q = \frac{1}{4}$

∴ $\frac{10p}{q} = 30$ **જવાબ : (C)**

(88) MATHEMATICS અને STATISTICS શબ્દમાંથી એક-એક અક્ષર પસંદ કરવામાં આવે છે. જો એકસરખા (સામાન્ય) અક્ષર પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{a}{b}$ હોય, તો $a + b + 3 =$ ...... (a, b પરસ્પર અવિભાજ્ય)

(A) 50 (B) 62 (C) 60 (D) 65

ઉકેલ : MATHEMATICS ના અક્ષરોની સંખ્યા 11 છે.

$\therefore$ આ શબ્દમાંથી એક અક્ષર પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે.

STATISTICS ના અક્ષરોની સંખ્યા 10 છે.

$\therefore$ આ શબ્દમાંથી એક અક્ષર પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{1}{10}$ છે. બંને શબ્દના સામાન્ય અક્ષરો A, T, I, C, S છે.

$\therefore$ સામાન્ય અક્ષરો પસંદ થવાની સંભાવના

$= \frac{2}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{11}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{11}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{7}{55} = \frac{a}{b}$. આથી, $a = 7$, $b = 55$

$\therefore$ $a + b + 3 = 7 + 55 + 3 = 65$ **જવાબ : (D)**

(89) ચાર વિકલ્પવાળા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો કે જેમાં એક વિકલ્પ સત્ય છે, તેવા અમુક પ્રશ્નો વિદ્યાર્થીઓને ગૃહકાર્યમાં આપવામાં આવેલ છે તે રીતે આપેલ છે. વિદ્યાર્થી આ પ્રશ્નોના જવાબ ધારીને (અંદાજિત) અથવા એકબીજાની મદદ લઈને અથવા તે સાચો જવાબ પોતે જ જાણે છે તે રીતે આપે છે. અંદાજિત જવાબ આપવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે. એકબીજાની મદદ લઈને જવાબ આપવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ છે. વિદ્યાર્થીએ બીજા વિદ્યાર્થીની મદદ લીધી હોય ત્યારે તે સાચો જવાબ આપે તેની સંભાવના $\frac{1}{8}$ છે. વિદ્યાર્થીએ જવાબ સાચો આપ્યો હોય ત્યારે તે સાચો જવાબ જાણતો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{29}{35}$ (B) $\frac{24}{29}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{9}$

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A : વિદ્યાર્થી ધારીને સાચો જવાબ આપે છે.

ઘટના B : વિદ્યાર્થી એકબીજાની મદદ લઈને સાચો જવાબ આપે છે.

ઘટના C : વિદ્યાર્થી સાચો જવાબ જાણે છે.

ઘટના D : વિદ્યાર્થી સાચો જવાબ આપે છે.

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(D|B) = \frac{1}{8}$, $P(D|A) = \frac{1}{4}$ (ધારણા કરવાથી ચાર વિકલ્પ), $P(D|C) = 1$ (સાચો જવાબ આપે છે.)

માગેલ સંભાવના $P(C \mid D) = \dfrac{P(C)\,P(D|C)}{P(A)\,P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{24}{29}$ **જવાબ : (B)**

(90) છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ બે ચોક્કસ કૅલેન્ડર મહિનામાં આવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{341}{12^5}$ (B) $\frac{66}{12^5}$ (C) $\frac{352}{12^5}$ (D) $\frac{11}{12^5}$

ઉકેલ : છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ ગમે તે મહિનામાં આવે તેવા પ્રકારની સંખ્યા $= 12^6$

બાર મહિનામાંથી બે મહિના પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= {}_{12}C_2$

છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ આ બે મહિનામાં આવે તેવા પ્રકાર $= 2^6$.

આ 2^6 પ્રકારમાંથી $(1^6 + 1^6 = 2)$ પ્રકાર એવા થશે કે આ છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ એક જ મહિનામાં આવે.
$\therefore$ $2^6 - 2$ પ્રકારે છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ પસંદ થયેલ બે મહિનામાં આવે.

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{{}_{12}C_2(2^6-2)}{12^6} = \frac{341}{12^5}$ **જવાબ : (A)**

(91) એક પેટીમાં 10 સફેદ અને 3 કાળા દડા આવેલ છે. જ્યાં સુધી કાળા દડા પૂરા ન થાય ત્યાં સુધી પેટીમાંથી એક પછી એક દડો પૂરવણી સિવાય યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. સાતમા પ્રયત્ને આ પ્રક્રિયા પૂરી થાય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5}{286}$ (B) $\frac{3}{286}$ (C) $\frac{7}{286}$ (D) $\frac{15}{286}$

ઉકેલ : માંગેલ સંભાવના
= પ્રથમ છ પ્રયત્નમાં બે કાળા તથા 4 સફેદ દડા આવે તેની સંભાવના × સાતમાં પ્રયત્ને કાળો દડો આવે તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{3}{2}\binom{10}{4}}{\binom{13}{6}} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 720}{24 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} \times \frac{1}{7} = \frac{15}{286}$$ **જવાબ : (D)**

(92) એક પેટીમાં 3 સફેદ અને 3 કાળા દડા આવેલ છે. ત્રણ દડા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને પછી ત્રણ લાલ દડા પેટીમાં મૂકવામાં આવે છે અને ફરીથી ત્રણ દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા ત્રણેય દડા અલગ-અલગ રંગના હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) > 20 % (B) > 25 % (C) > 30 % (D) > 33 %

ઉકેલ : પ્રથમ વખતે ત્રણ સફેદ અથવા ત્રણ કાળા દડા પસંદ કર્યા હોય તો બીજા પ્રયત્નમાં ત્રણ ભિન્ન રંગના દડા મળે તે શક્ય નથી.
આથી બે સફેદ અને એક કાળો અથવા એક સફેદ અને બે કાળા દડા જ પસંદ કરી શકાય.
A : બે દડા સફેદ, એક દડો કાળો
B : બે દડા કાળા, એક દડો સફેદ
C : ત્રણે દડા ભિન્ન રંગના

$$P(A) = P(B) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}$$

$$P(C \mid A) = P(C \mid B) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}$$

$\therefore$ $P(C) = P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)$

$$= 2\left[\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} \times \frac{1 \times 2 \times 3}{\binom{6}{3}}\right]$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3 \times 6}{20 \times 20}$$

$$= \frac{27}{100} = 27\ \%$$ **જવાબ : (A), (B)**

(93) એક વ્યક્તિની ગાડી જ્યાં n ગાડી પાર્ક કરેલ છે તે જગ્યાએ પાર્ક કરી છે તથા તે ગાડી પાર્કિંગના છેડા પર નથી. થોડા સમય પછી જ્યારે આ વ્યક્તિ તેમની ગાડી લેવા આવે છે ત્યારે n માંથી m ગાડી બાકી રહી છે. આ વ્યક્તિની ગાડીની આજુબાજુની ગાડી જતી રહી હોય, તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{n-m}{(n-1)!}$ (B) $\frac{n-m!}{(n-1)!}$ (C) $\frac{(n-m)(n-m-1)}{(n-1)(n-2)}$ (D) $\frac{(n-m)(n-m+1)}{(n-1)(n-2)}$

ઉકેલ : $n - 1$ ગાડીમાંથી $m - 1$ ગાડી જતી રહે છે. ($n - 1$ કારણ કે આ વ્યક્તિની ગાડી સિવાય)

$\therefore$ તેના કુલ પ્રકાર $\binom{n-1}{m-1}$ રીતે ગાડીઓ ગઈ.

હવે આ વ્યક્તિની ગાડીની આજુબાજુની ગાડી જતી રહી હોય તેના પ્રકાર = $\binom{n-3}{m-1}$

(આ $m - 1$ ગાડી $n - 3$ જગ્યાએથી જ ગઈ હોય)

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના = $\dfrac{\binom{n-3}{m-1}}{\binom{n-1}{m-1}} = \dfrac{(n-3)!\,(n-m)!}{(n-m-2)!\,(n-1)!}$

$= \dfrac{(n-m-1)(n-m)}{(n-2)(n-1)}$ **જવાબ : (C)**

(94) માર્ટિન, ઈકબાલ અને દીપક વારાફરતી પાસો ઉછાળે છે. માર્ટિન શરૂઆત કરે છે પછી ઈકબાલ અને પછી દીપક એમ વારાફરતી પાસો ઉછાળે છે. દીપક દ્વારા પ્રથમ વખત પાસાં પરની સંખ્યા 6 આવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{25}{91}$ (D) $\frac{5}{18}$

ઉકેલ : k મા પ્રયત્ને પ્રથમ વખત પાસાં પરની સંખ્યા 6 આવે તેની સંભાવના = $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

દીપક તેના પ્રથમ પ્રયત્નમાં સફળ થાય અથવા બીજા પ્રયત્નમાં સફળ થાય અથવા ત્રીજા પ્રયત્નમાં સફળ થાય. આમ, ચાલ્યા કરશે. એટલે કે પ્રયોગના ત્રીજા, છઠ્ઠા અને નવમા પ્રયત્નમાં સફળતા મળે.

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના = $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1} \cdot \frac{1}{6} + \ldots\infty$

આ અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢીનો સરવાળો છે. પ્રથમ પદ $a = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$. સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના = $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{5^2}{6^3}}{1-\frac{5^3}{6^3}} = \dfrac{25}{91}$ **જવાબ : (C)**

(95) દ્વિપદી વિતરણ $B\left(n, p=\frac{1}{4}\right)$ છે. પ્રયત્નોની સંખ્યા n છે. માટે જો ઓછામાં ઓછી એક સફળતા માટેની સંભાવના $\frac{9}{10}$ કે તેથી વધારે હોય, તો n એ ...... થી વધારે હોય. [AIEEE : 2009]

(A) $\dfrac{1}{log_{10}4 + log_{10}3}$ (B) $\dfrac{9}{log_{10}4 - log_{10}3}$ (C) $\dfrac{4}{log_{10}4 - log_{10}3}$ (D) $\dfrac{1}{log_{10}4 - log_{10}3}$

ઉકેલ : અહીં, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $p = \frac{1}{4}$

હવે, $p(1) + p(2) + \ldots + p(n) \geq \frac{9}{10}$

$\therefore 1 - p(0) \geq \frac{9}{10}$

$\therefore 1 - \frac{9}{10} \geq p(0)$

$\therefore p(0) \leq \frac{1}{10}$

$\therefore \binom{n}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{10}$

$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{10}$

$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 10$

$\therefore log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq log_{10}10$

$\therefore n[log_{10}4 - log_{10}3] \geq 1$

$\therefore n \geq \dfrac{1}{log_{10}4 - log_{10}3}$ **જવાબ : (D)**