R6G8B5

അധ്യായം 13

സീമകളും അവകലജങ്ങളും
(LIMITS AND DERIVATIVES)

❖ *കലനം ഒരു താക്കോൽ ആയി ഉപയോഗിച്ച് പ്രകൃതി പ്രതിഭാസങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാൻ ഗണിതം സമർത്ഥമായി ഉപയോഗിക്കാം – വൈറ്റ് ഹെഡ്* ❖

13.1 ആമുഖം

സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൺ
(1642-1727)

ഈ അധ്യായം കലനത്തിന്റെ (Calculus) ആദ്യപടിയാണ്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച് ആ ഏകദത്തിന്റെ മൂല്യത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെ സംബന്ധിച്ച് പഠനം നടത്തുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രശാഖയാണ് കലനം. അവകലജത്തെ നിർവചിക്കാതെ തന്നെ അതിന്റെ ഒരു ആശയം നൽകുകയാണ്, ആദ്യം ചെയ്യുന്നത്. പിന്നീട് സീമക്ക് (Limit) സ്വാഭാവികാവസ്ഥയിൽ ഒരു നിർവചനം നൽകുകയും അതിന്റെ ബീജഗണിത ക്രിയകളെപ്പറ്റി പഠിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. തുടർന്ന് അവകലജത്തിന്റെ നിർവചനത്തിലേക്ക് എത്തിച്ചേരുകയും അതിന്റെ ബീജഗണിത ക്രിയകൾ ചർച്ച ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒപ്പം ചില വിശേഷ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ

13.2 അവകലജം എന്ന ആശയം

ശാസ്ത്ര-സാങ്കേതിക പഠനത്തിൽ ഏറ്റവും പ്രാധാന്യമുള്ള വസ്തുത രണ്ടോ അതിലധികമോ ഭൗതിക അളവുകളുടെ പരസ്പരബന്ധമാണ്. വൃക്ഷങ്ങളുടെ വളർച്ചാനിരക്ക്, റോഡപകടങ്ങളുടെ വർധനനിരക്ക്, ദൂരം സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുന്ന നിരക്ക് (വേഗം), വേഗം മാറുന്ന നിരക്ക് (ത്വരണം), കറന്റും വോൾട്ടേജും തമ്മിലുള്ള നിരക്ക്, ജോലി ചെയ്യുന്ന നിരക്ക് (പവർ) എന്നിങ്ങനെ വിവിധ നിരക്കുകളെക്കുറിച്ച് നമുക്കറിയാം. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ മിക്ക നിരക്കുകളെയും അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്.

ചുവടെ കാണുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.
200 കി.മി. ദൂരം 4 മണിക്കൂർകൊണ്ട് സഞ്ചരിച്ചാൽ ശരാശരി വേഗം

$\frac{200\text{കി.മി.}}{4\text{മണിക്കൂർ}}$ = 50 കി.മി/മണിക്കൂർ. അതുപോലെ ഒരു വൃക്ഷം 3 മാസം കൊണ്ട്

150 സെ.മി വളർന്നാൽ ഒരു മാസത്തെ വളർച്ചാനിരക്ക് $\frac{150\text{സെ.മീ.}}{3\text{മാസം}}$ = 50 സെ.മീ./

മാസം. 30 വയസ്സുള്ള ഒരു യുവതിക്ക് 150 സെ.മീ ഉയരമുണ്ട്. അംശബന്ധം എന്ന

ആശയം ഉപയോഗിച്ചാൽ $\frac{150.\text{ സെ.മീ}}{30\text{വർഷം}}$ = 5 സെ.മീ/വർഷം, ഇതിന്റെ അർഥം

ആ യുവതിക്ക് ഒരു വർഷം 5 സെ.മീ. ഉയരം കൂടുന്നു എന്നാകുന്നു. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഈ യുവതിക്ക് 65 വയസ്സാകുമ്പോൾ എത്ര ഉയരം ഉണ്ടായിരിക്കും? $5 \times 65 = 325$ സെ.മീ. (ഏകദേശം 10 അടിക്കു മുകളിൽ) 5 വയസ്സുണ്ടായിരുന്നപ്പോഴുള്ള ഉയരം $5 \times 5 = 25$ സെ.മീ. ഇങ്ങനെയുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ കിട്ടുവാൻ കാരണം വളർച്ചയുടെ നിരക്ക് രേഖീയമായിരിക്കുമെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചതിനാലാണ്. (ഉയരവും, വയസും തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫ് പരിശോധിച്ചാൽ നേർരേഖയായിരിക്കും, എന്നതാണ് "രേഖീയം" കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്) ഈ നിഗമനം ശാസ്ത്രീയ തത്വങ്ങളുമായി പൊരുത്തപ്പെടുന്നവയല്ല, കാരണം മനുഷ്യന്റെ വളർച്ച (ഉയരം) പ്രായം കൂടുംതോറും

കുറയുന്നതായാണ് പഠനങ്ങൾ തെളിയിക്കുന്നത്. ആയതിനാൽ $\frac{\text{ഉയരം } (h)}{\text{പ്രായം } (a)}$ എന്ന

നിരക്ക് യഥാർഥ വളർച്ചയുടെ നിരക്കിനെ പ്രതിഫലിപ്പിക്കുന്നില്ല.
പ്രകൃതിയിലെ മിക്ക ബന്ധങ്ങളിലും ഒന്ന് മറ്റൊന്നിനനുസരിച്ച് മാറുന്നത് രേഖീയമായല്ല. അതുകൊണ്ട് തന്നെ നിരക്കുകൾ പറയുമ്പോൾ ഏത് നിശ്ചിത സമയത്തുള്ളതാണ് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കേണ്ടി വരുന്നു. ചെറിയ മാറ്റങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ തരാത്തതിനാൽ സീമ (limit) എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഒരേ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കണ്ടെത്തുകയാണ് കലനത്തിൽ ചെയ്യുന്നത്. അതാണ് അവകലനം.
പ്രശസ്ത ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, തന്റെ ഭൗതിക പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഭാഗമായി ഉയരത്തിൽ നിന്നും ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം സമയത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണെന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതിയാൽ, t സമയം കൊണ്ട് s ദൂരം സഞ്ചരിച്ചാൽ
$s = 4.9\, t^2$ ---------- (i)
ഉയരത്തിൽ നിന്നും താഴേക്ക് (ഭൂമിയിലേക്ക്) പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു വ്യത്യസ്ത സമയ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം പട്ടികയായി താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

പട്ടിക 13.1

s	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	2	2.05	2.1	2.2	2.5	3	4
t	0	4,9	11,025	15.876	17,689	18,63225	19,6	20,59	21,609	23,71	30,625	44,1	78,4

$t = 2$ സെക്കന്റ് എന്ന സമയത്തെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കലാണ് ലക്ഷ്യം. ഇതിനായി $t = 2$ സെക്കന്റിൽ അവസാനിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകളിൽ ശരാശരി വേഗം കണ്ടെത്തുകയാണ് ഒരു മാർഗം. ഇത് $t = 2$ സെക്കന്റിലെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കും. $t = t_1$, $t = t_2$ എന്നീ സമയങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ശരാശരി വേഗത കാണാൻ $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ ഉപയോഗിക്കാം.

$$\text{ആദ്യ രണ്ടു സെക്കന്റിലെ ശരാശരി വേഗത} = \frac{s(t_2 = 2) - s\,(t_1 = 0)}{2 - 0}$$

$$= \frac{19.6\,\text{മീ.} - 0\,\text{മീ.}}{2\,\text{സെ} - 0\,\text{സെ}} = 9.8 \text{ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്}$$

ഇതുപോലെ $t = 1$ സെക്കന്റിനും $t = 2$ സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള ശരാശരി

$$\text{വേഗത} = \frac{s(t_2 = 2) - s(t_1 = 1)}{2 - 1} = \frac{(19.6 - 4.9)\text{മീറ്റർ}}{1 \text{ സെക്കന്റ്}}$$

$$= 14.7 \text{ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്}$$

ഇതേ മാർഗം ഉപയോഗിച്ച് $t = t_1$, $t = 2$ എന്നീ വിലകളിൽ ശരാശരി വേഗം കണക്കാക്കാം.

$$v = \frac{s(t = 2) - s\left(t = t_1\right)}{2 - t_1}$$

പട്ടിക (13.2) ൽ $t = t_1$, $t = 2$ സെക്കന്റ് എന്നീ വിലകളിലുള്ള ശരാശരി വേഗം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

പട്ടിക 13.2 പ്രകാരം ശരാശരി വേഗം ക്രമേണ വർധിക്കുന്നതായി കാണാം. $t = 2$ സെക്കന്റിൽ അവസാനിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകൾ ചെറുതാക്കിയാൽ $t = 2$ ലെ വേഗം കുറെക്കൂടി കൃത്യമായി പറയാനുള്ള ആശയം ലഭിക്കും. 1.99 സെക്കന്റിലും 2 സെക്കന്റിലുമുള്ള ശരാശരി വേഗത്തിൽ കാര്യമായി ഒന്നും സംഭവിക്കുന്നില്ലെ ങ്കിലും $t = 2$ സെക്കന്റിലെ വേഗം 1.99 മീറ്റർ/സെക്കന്റിന് മുകളിലാണെന്ന് പറ യാം.

നമ്മുടെ അനുമാനം ഒന്നുകൂടി ശക്തിപ്പെടുത്താൻ (ദൃഢീകരിക്കാൻ) താഴെ പറ യുന്ന കണക്കുകൂട്ടലുകൾക്ക് കഴിയും. $t = 2$ സെക്കന്റിൽ തുടങ്ങുന്ന സമയ ഇടവേ ളകളിൽ ലഭിക്കുന്ന ശരാശരി വേഗം കണ്ടുപിടിക്കുക. നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $t = 2$ സെക്കന്റിനും $t = t_2$ സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള ശരാശരി വേഗം

$$= \frac{s(t_2)-s(t=2)}{t_2-2} = \frac{s(t_2)-19.6}{t_2-2}$$

s ലെ ചെറിയ വ്യത്യാസത്തെ Δs എന്നും t യിലെ ചെറിയ വ്യത്യാസത്തെ Δt എന്നും സൂചിപ്പിച്ചാൽ ശരാശരി വേഗത്തെ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ എന്നെഴുതാം.

അതായത്, $\frac{s(t_2)-19.6}{t_2-2} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

പട്ടിക 13.3 ൽ $t = 2$ സെക്കന്റിനും $t = t_2$ സെക്കന്റിലും ലഭിച്ച വേഗം (v) മീ/ സെക്കന്റിൽ കാണാം.

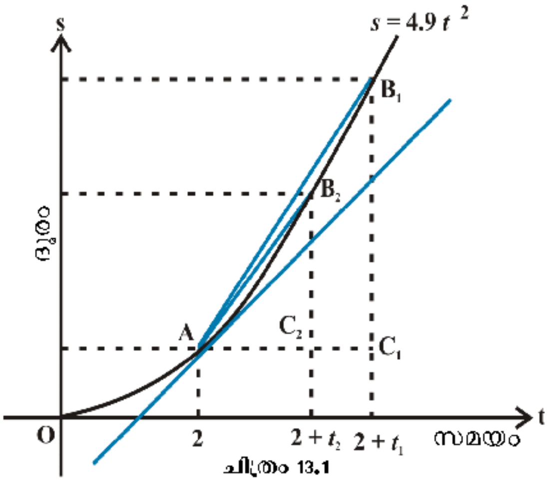
t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

പട്ടിക 13.3

ഇവിടെ നമുക്ക് മനസിലായത് സമയ ഇടവേള ചെറുതാകും തോറും $t = 2$ സെക്കന്റിൽ ഉള്ള വേഗത്തെ സംബന്ധിച്ച് കൂടുതൽ കൃത്യത ലഭിക്കുന്നു എന്നാണ്. ഇങ്ങനെ 2 സെക്കന്റിനേക്കാൾ കുറവായ സമയങ്ങൾ എടുത്തപ്പോഴും സമയത്തിന്റെ ഇടവേളകൾ ചെറുതാകുന്തോറും ശരാശരി വേഗം 19.6 നോട് അടുക്കുന്നതായി കാണാം. അതായത് 19.551 മീ./സെക്കന്റിനും 19.64 മീ./സെക്കന്റിനും ഇടയിലാണ്. സാങ്കേതികമായി പറഞ്ഞാൽ t = 2 സെക്കന്റാകുമ്പോഴുള്ള ക്ഷണവേഗം (Instantaneous velocity /speed) 19.551 മീ./സെക്കന്റിനും 19.649 മീ/സെക്കന്റിനും ഇടയി ലാണ് എന്നു പറയാം. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ എന്ന അംശബന്ധം Δt വളരെ വളരെ ചെറുതാകുമ്പോൾ

$(\Delta t \to 0)$ ഒരേ ഒരു സംഖ്യയിലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി കാണാം എന്നാൽ, ഒരിക്കലും അതാവുകയില്ല. പക്ഷേ അതിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസം എത്ര ചെറിയ അധിസംഖ്യ തന്നാലും അതിലും ചെറുതാണ്. അതായത് $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ എന്ന അംശബന്ധം 19.6 മീ/സെക്കന്റിനോട് അത്രയേറെ ചേർന്നിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഏറ്റവും ഉജ്വലമായ ആശയങ്ങളിൽ ഒന്നായ സീമ (limit) ഉപയോഗിച്ച് ക്ഷണവേഗം കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുന്നു. സമയ ഇടവേളകൾ ഏറ്റവും ചെറുതാകുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിച്ച 19.6 മീ/സെക്കന്റിനെ $t = 2$ സെക്കന്റാകുമ്പോഴുള്ള അവകലജമെന്ന് പറയുന്നു.



ചിത്രം 13.1

സീമ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന ഈ പ്രക്രിയയെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ കൂടി അവതരിപ്പിക്കാം. മുകളിൽ നിന്നും താഴേക്കു വരുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം (s) y അക്ഷത്തിലും വിവിധ സമയ ഇടവേളകൾ (t) x അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തി ഒരു ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. $h_1, h_2, h_3\ldots$ എന്ന സമയ ഇടവേളകൾ പൂജ്യത്തിലലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ, ശരാശരി വേഗത്തിന്റെ ശ്രേണിയും $\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \cdots$ എന്ന അംശബന്ധത്തിന്റെ ശ്രേണിയും എത്തിച്ചേരുന്ന സീമയും ഒന്നാണ്.

$h_1 = AC_1$, എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം

$$C_1B_1 = s_1 - s_0$$

$$\frac{C_1B_1}{AC_1} = \frac{S_1 - S_0}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

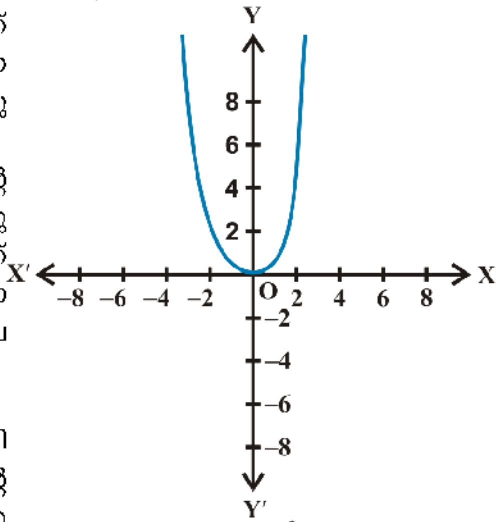
ഈ അംശബന്ധങ്ങളുടെ ശ്രേണി, ഈ വക്രത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ (tangent) ചരിവിലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി കാണാം. അതായത് $t = 2$ സെക്കന്റിൽ വസ്തുവിന്റെ ക്ഷണവേഗം $v(t)$ എന്നത് $S = 4.9t^2$ എന്ന വക്രത്തിൽ $t = 2$ ലെ ചരിവിന് (slope) തുല്യമാകുന്നതായി കാണാം.

13.3 സീമകൾ (Limits)

മുകൾഭാഗങ്ങളിൽ നടന്ന ചർച്ചയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നാം എത്തിച്ചേർന്ന വസ്തുത ഇതാണ്. "സീമ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രക്രിയ നല്ല വ്യക്തതയോടെ മനസിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്." താഴെ ചേർക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ കൂടി സീമ എന്ന ആശയം കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാം. $f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. x ന്റെ വില പൂജ്യത്തോട് വളരെ വളരെ അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നു. ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാൽ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ എന്നെഴുതാം. (x പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ സീമയാണ് പൂജ്യം എന്ന് വായിക്കണം.)

$f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്, x, പൂജ്യത്തിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുമെന്ന് കരുതുന്ന വിലയാണ് $f(x)$ ന്റെ x പൂജ്യത്തിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോഴുള്ള സീമ.

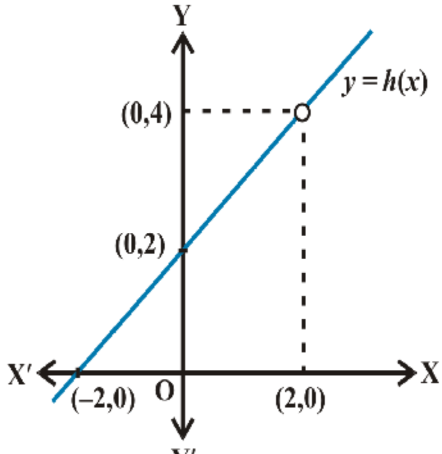
പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ $x \to a$ (x ന്റെ വില a യിലേക്ക് വളരെ വളരെ അടുക്കുമ്പോൾ) $f(x) \to l$ ($f(x)$, ന്റെ വില l ലേക്ക് വളരെ വളരെ അടുക്കുന്നു.) എങ്കിൽ l നെ $f(x)$ ന്റെ സീമ എന്നു പറയാം. ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാൽ $\lim_{x \to a} f(x) = l$.



$f(x) = x^2$ ചിത്രം 13.2

$f(x) = |x|$, $x \neq 0$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ $f(0)$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. x ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് വളരെ വളരെ അടുക്കുന്നു. അപ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് നീങ്ങുന്നതായി കാണാം. അതായത് $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്ന വസ്തുതയാണിത്.

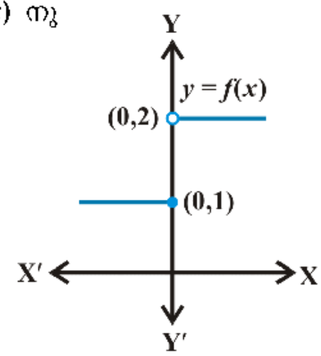
അടുത്തതായി $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കാം. x ന്റെ വില 2 നോട് വളരെ വളരെ അടുക്കുമ്പോൾ $h(x)$ ന്റെ വില 4 ലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി കാണാം. $y - h(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ സഹായത്തോടു കൂടി കൂടുതൽ വ്യക്തത കൈവരിക്കുവാൻ സാധിക്കും.



ചിത്രം 13.3

മുകളിൽ വിവരിച്ച എല്ലാ ഉദാഹരണങ്ങളിലും $x \to a$ യോട് അടുക്കുന്നത് ഏതു വഴിയായാലും അപ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഏകദത്തിന്റെ സീമ അതിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെന്നു കാണാം.

x എന്ന ചരത്തിന് a എന്ന ഒരു രേഖീയസംഖ്യയിലേക്ക് രണ്ടുതരത്തിൽ മാത്രമേ അടുക്കുവാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. ഒന്നുകിൽ a യുടെ ഇടത്തുനിന്നും, അല്ലെങ്കിൽ a യുടെ വലതുനിന്നും അതായത് x ന്റെ വില a യേക്കാൾ കുറഞ്ഞ വിലകളിൽ നിന്നും a ലേക്കും അല്ലെങ്കിൽ a യെക്കാൾ കൂടിയ വിലകളിൽ നിന്നും a ലേക്കും അടുക്കാം. സ്വാഭാവികമായും ഇത് രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സീമകൾ ഉണ്ടാകുവാൻ കാരണമാകുന്നു. ഇടതുസീമയും (left hand limit) വലതുസീമയും (right hand limit) x എന്ന ചരം a എന്ന രേഖീയസംഖ്യയുടെ ഇടതുഭാഗത്ത് നിന്നും a യിലേക്ക് അടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സീമയെ ഇടതുസീമ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം. x എന്ന ചരം a എന്ന രേഖീയസംഖ്യയുടെ വലതുഭാഗത്ത് നിന്നും a യിലേക്കടുത്താൽ ഏകദം $f(x)$ നു ലഭിക്കുന്ന സീമയെ വലതുസീമ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\lim_{x \to a^+} f(x)$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം 13.4

ഉദാഹരണം $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് (13.4) താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$,

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ ആകുന്നു.

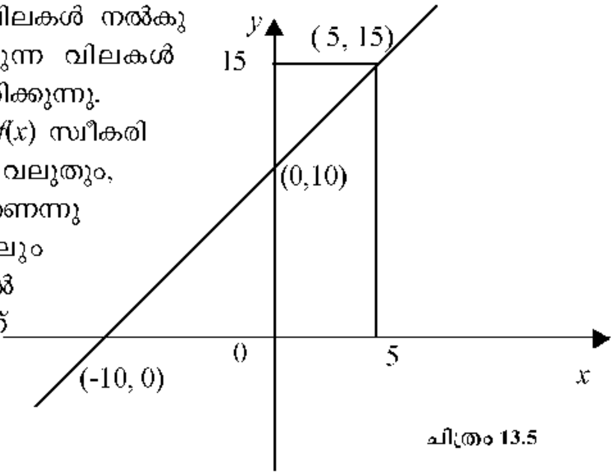
പൂജ്യത്തിലുള്ള ഇടതുവശസീമയും, വലതുവശസീമയും, വ്യത്യസ്തങ്ങളാണ്. (പൂജ്യത്തിൽ ഏകദത്തിന് വിലയുണ്ടുതാനും) ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുമ്പോൾ, x പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ f എന്ന ഏകദത്തിന് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ല എന്നു പറയും.

സീമയുടെ അസ്തിത്വം (Existence of Limits)

ചരം x, രേഖീയ സംഖ്യ a യിലേക്കു നീങ്ങുമ്പോൾ ഏകദം f ന് സീമ ഉണ്ടാകണമെങ്കിൽ (നിലനിൽക്കണമെങ്കിൽ) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ ആയിരിക്കണം. സീമ എന്ന ആശയത്തിന്റെ സ്പഷ്ടീകരണത്തിന് ചുവടെ കാണുന്ന വിശദീകരണങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കാം.

വിശദീകരണം : 1

$f(x) = x + 10$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = 5$ ലെ സീമ കണ്ടെത്തണമെന്ന് കരുതുക. അതിനായി x ന് 5 നോട് അടുത്ത് നിൽക്കുന്ന വിലകളിൽ f ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്തണം. x സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ 5 നേക്കാൾ കുറഞ്ഞതാകാം; 5 നേക്കാൾ കൂടിയ വിലകളാകാം. ഉദാഹരണമായി, 4.9, 4.95, 4.99, 4.995.... ഈ വിലകളെല്ലാം 5 ന്റെ ഇടതുഭാഗങ്ങളിലുള്ളവയും 5.001, 5.01, 5.1 .... എന്നിവ 5 ന്റെ വലതുഭാഗങ്ങളുള്ളവയും ആകുന്നു. ഇവയുടെ വിലകൾ നൽകുമ്പോൾ ഏകദം f സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ ചുവടെ പട്ടികയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. പട്ടിക 13.4 ൽ നിന്നും $x = 5$ ൽ $f(x)$ സ്വീകരിക്കുന്ന വില 14.995 നേക്കാൾ വലുതും, 15.001 നേക്കാൾ ചെറുതും ആണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം. $x = 4.995$ ലും $x = 5.001$ ലും $f(x)$ ന്റെ വിലയിൽ കാര്യമായ മാറ്റം ഒന്നും ഇല്ലെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 13.5

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 15$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 15$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 5} f(x) = 15$$

പട്ടിക 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

വിശദീകരണം : 2

ഏകദം $f(x) = x^3$ പരിഗണിക്കുക.

$x = 1$ ലെ $f(x)$ ന്റെ സീമ കണ്ടുപിടിക്കുക. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ, $f(x)$ ന് $x = 1$ ന്റെ സമീപവിലകളിലുള്ള വിലകൾ പട്ടികയാക്കുക. (13.5)

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

പട്ടിക – 13.5

പട്ടികയിൽ നിന്നും $f(x)$ ന് $x - 1$ ആകുമ്പോഴുള്ള വില 0.997002999 നേക്കാൾ വലുതും 1.003003001 നേക്കാൾ ചെറുതുമാണെന്നും $x = 0.999$ ലും 1.001 ലും ഉള്ള വിലകളിൽ കാര്യമായ മാറ്റങ്ങളൊന്നും സംഭവിച്ചിട്ടില്ലെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

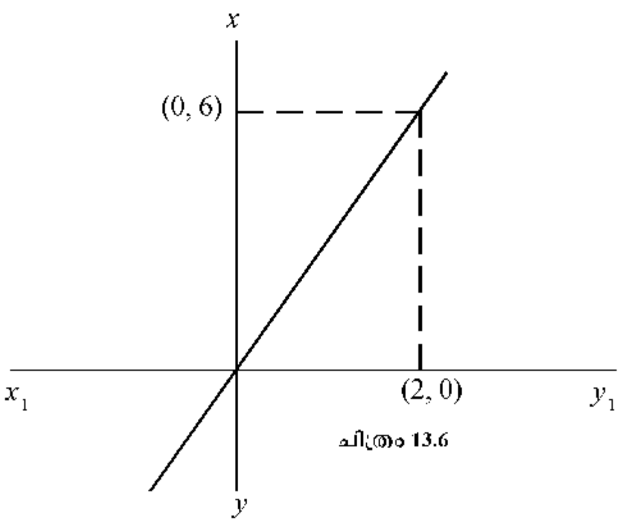
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും 1 ന് ഇരുവശത്തുനിന്നും x ന്റെ വില 1 ലേക്ക് അടുത്താൽ $f(x)$ ന്റെ വില 1 ലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി മനസിലാക്കാം.
ഗ്രാഫിൽ നിന്നും സീമ കൂടുതൽ വ്യക്തമാകും.

വിശദീകരണം : 3

$f(x) = 3x$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $x = 2$ ൽ ഇതിന്റെ സീമ പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 13.6

ഏകദം $f(x)$ പരിഗണിക്കുക. $x = 2$ ലെ സീമ കണക്കാക്കുക. $x = 2$ ന്റെ ഇടതും, വലതുമുള്ള ഏറ്റവും അടുത്ത വിലകൾ പരിഗണിച്ച് $f(x)$ ന്റെ വിലയടങ്ങുന്ന ഒരു പട്ടിക തയാറാക്കുക. (13.6)

പട്ടിക 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 6, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 6$$

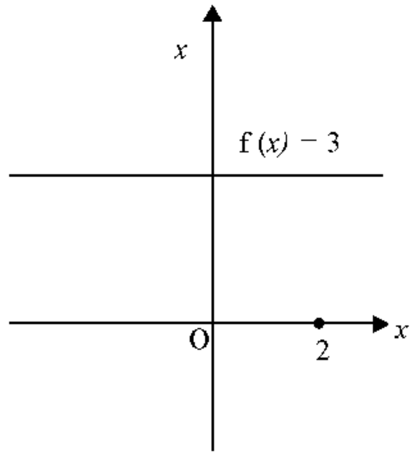
$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും സീമ കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാൻ സാധിക്കും.

വിശദീകരണം : 4

$f(x) = 3$ എന്ന സ്ഥിര ഏകദം പരിഗണിക്കുക $x = 2$ ലെ സീമ കണ്ടുപിടിക്കുക. $f(x) = 3$ ൽ $x = 2$ ന്റെ വില വളരെ അടുത്ത ബിന്ദുക്കളിൽ ലഭിക്കുന്ന വില കൾ 3 തന്നെയാണ്, അതായത്

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$



ചിത്രം 13.7

വിശദീകരണം : 5

ഏകദം $f(x) = x^2 + x$ പരിഗണിക്കുക.

$\lim_{x\to 1} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$x = 1$ ന്റെ സമീപത്തുള്ള വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്നു. (13.7)

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

പട്ടിക - 13.7

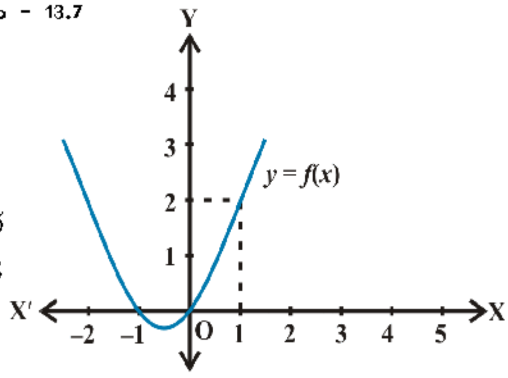
പട്ടികയിൽ നിന്നും

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും x ന്റെ വില 1 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ ഗ്രാഫ് (1, 2) എന്ന ബിന്ദു വിലേക്ക് അടുക്കുന്നു.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$$



ചിത്രം 13.8

വിശദീകരണം : 6

ഏകദം $f(x) = \sin x$ പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x$, ($x$ റേഡിയൻ അളവിലാണ്) കാണ ണമെന്നിരിക്കട്ടെ.

$\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഇരുവശത്തും ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ $f(x)$ ന്റെ വില പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

x	$\frac{\pi}{2}-0.1$	$\frac{\pi}{2}-0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

പട്ടിക – 13.8

പട്ടികയിൽ നിന്നും.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1 \text{ , } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1$$

വിശദീകരണം : 7

ഏകദം $f(x) = x + \cos x$ പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇവിടേയു $x = 0$ എന്നതിന്റെ ഇരുവശമുള്ള ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള വിലകളിൽ f ന്റെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടികയാക്കിയത് ശ്രദ്ധിക്കു.

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

പട്ടിക 13.9

പട്ടികയിൽ നിന്നും

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ഇവിടെ $f(0)$ യുടെ വിലയും 1 ആകുന്നു.

വിശദീകരണം : 8

$f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x>0$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x\to 0} f(x)$ കാണുക. ഇവിടെ മണ്ഡലം രേഖീയഅധിസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ x ന് $x = 0$ ത്തിന്റെ ഇടതുവശമുള്ള വില കൾ സ്വീകരിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്തതിനാൽ x ന്റെ വലതുഭാഗത്ത് ഏറ്റവുമടുത്തുള്ള വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

പട്ടിക 13.10

ഗണിതപരമായി $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

വിശദീകരണം : 9

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0 \quad , & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

സാധാരണ നമ്മൾ ചെയ്യുന്നതുപോലെ; $x = 0$ യുടെ ഏറ്റവും ഇടത്തും വലത്തുമുള്ള വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ എഴുതുക. (13.11)

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

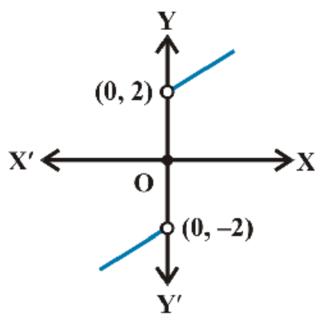
പട്ടിക 13.11

പട്ടികയിൽ നിന്നും $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

ഈ കാരണത്താൽ '0' ൽ സീമ നിലനിൽക്കുകയില്ല. ഇവിടെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $x=0$ ൽ $f(x)$ ന് വിലയുണ്ട്. അത് 0 ആകുന്നു. പക്ഷേ $x=0$ ൽ ഈ ഏകദത്തിന് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ല.



ചിത്രം 13.9

വിശദീകരണം : 10

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക $\lim_{x\to 1} f(x)$ കാണുക.

സാധാരണ ചെയ്യുന്നതുപോലെ $x = 1$ന്റെ ഇടത്തുനിന്നും വലത്തുനിന്നും ഏറ്റവും അടുത്ത വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വില പട്ടികയിലാക്കുക. (13.12)

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

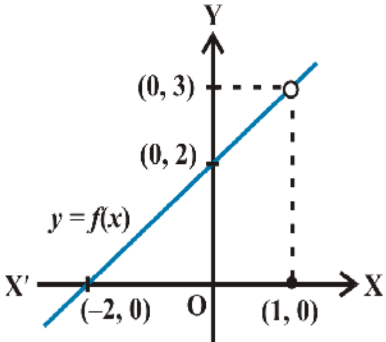
പട്ടിക – 13.12

പട്ടികയിൽ നിന്നും $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$.
ഇരു സീമകളും തുല്യമാകുന്നു.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=3$$

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും സീമ ലഭിച്ചത് വളരെ വ്യക്ത മായി മനസിലാക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 13.10

☛ കുറിപ്പ്

പൊതുവായി ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ വിലയും സീമയും കണ്ടുപിടി ക്കാൻ കഴിഞ്ഞാൽ പോലും അവ വ്യത്യസ്തമാകാം.

13.3.1 സീമകളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of Limits)

സിദ്ധാന്തം 1 : f, g എന്നീ രണ്ട് ഏകദങ്ങൾക്ക് $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ എന്നീ സീമകൾക്ക് അസ്ഥിത്വം ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്താൽ

(i) ഏകദങ്ങളുടെ തുകയുടെ സീമ ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യ മായിരിക്കും.

അതായത് $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) അവയുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ സീമ, ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത് $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

(iii) അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സീമ, ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ ഗുണന ഫലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത് $\lim_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x)$.

(iv) രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ ഹരണഫലത്തിന്റെ സീമ, ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ ഹരണഫലം ആയിരിക്കും. (ഛേദം പൂജ്യമാകാൻ പാടില്ല)

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ ;\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

> **കുറിപ്പ്**
>
> (iii) ൽ $g(x) = \lambda$, ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയാൽ
>
> $\lim_{x \to a}\left[\lambda . f(x)\right] = \lambda . \lim_{x \to a} f(x)$.

അടുത്ത രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ, മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ചില പ്രത്യേക തരം ഏകദങ്ങളുടെ സീമ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാം എന്ന് വിശദമാക്കുന്നു.

13.3.2 ബഹുപദങ്ങളുടേയും ഭിന്നക ഏകദങ്ങളുടേയും സീമകൾ

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n$, എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക.

$\lim_{x \to a} x = a$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

കൂടാതെ $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a}(x.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x = a . a = a^2$.

ആഗമന തത്വം ഉപയോഗിച്ചാൽ.

$\lim_{x \to a} x^n = a^n$

അതിനാൽ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\right]$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1x + \lim_{x \to a} a_2x^2 + ... + \lim_{x \to a} a_nx^n$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + ... + a_n \lim_{x \to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n$$

$$= f(a)$$

അടുത്തതായി, $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$

$g(x)$, $h(x)$ എന്നിവ രണ്ട് ബഹുപദങ്ങൾ ആണ്.
അതുകൊണ്ട് $f(x)$ എന്നത് ഒരു ഭിന്നക ഏകദം ആണ്.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

$h(a) = 0$, ആയാൽ, രണ്ടു തലങ്ങളിലേക്ക് ചർച്ച കടന്നുപോകും.

(i) $g(a) \neq 0$,

(ii) $g(a) = 0$.

(i) $g(a) \neq 0$ ആയാൽ സീമ നിലനിൽക്കുകയില്ല.

(ii) $g(a) = 0$, ആയാൽ, $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, $g(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $(x - a)$ എന്ന ഘടകത്തിന് ലഭിക്കാവുന്ന പരമാവധി കൃത്യങ്കമാണ് k.

ഇതുപോലെ, $h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ $(h(a) = 0)$, $k > l$, ആയാൽ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x \to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x \to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

$k < l$, ആയാൽ $\lim_{x \to a} f(x)$ എന്ന സീമ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

$k = l$ ആയാൽ $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{h_1(x)} = \frac{g_1(a)}{h_1(a)}$

ഉദാഹരണം : 1

താഴെ പറയുന്ന സീമകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\lim_{x \to 1} \left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right]$

പരിഹാരം

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് ബഹുപദങ്ങളുടെ സീമയായതിനാൽ, തന്നിരിക്കുന്ന, ബിന്ദുവിലെ ഏകദത്തിന്റെ വില തന്നെയായിരിക്കും, സീമയുടെ വില.

(i) $\lim_{x \to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{10}$

$$= 1 - 1 + 1 \ldots + 1 = 1.$$

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\lim_{x\to1}\left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$

(iii) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$ (iv) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(v) $\lim_{x\to1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

പരിഹാരം

ഇവിടെ നാം പരിഗണിക്കുന്ന എല്ലാ ഏകദങ്ങളും ഭിന്നകഏകദങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഏകദത്തിന്റെ വില കണ്ടുപിടിച്ച് പരിഹാരം കാണാനാണ് ശ്രമിക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലേക്ക് മാറിയാൽ, അതിനു കാരണക്കാരായ ഘടകങ്ങളെ അംശത്തിൽ നിന്നും, ഛേദത്തിൽ നിന്നും ഒഴിവാക്കണം.

(i) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x+100}=\frac{1^2+1}{1+100}=\frac{2}{101}$

(ii) സീമ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലാകുന്നു.

ആകയാൽ $\lim_{x\to2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x+2)}$ as $x \neq 2$

$= \frac{2(2-2)}{2+2}=\frac{0}{4}=0.$

(iii) 2 എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കണ്ടു പിടിച്ചാൽ സീമ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലാകും.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{x(x-2)} = \frac{2+2}{2(2-2)} = \frac{4}{0}$$

അതുകൊണ്ട് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ല.

(iv) $x - 2$ ലെ ഏകദങ്ങളുടെ വില കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, സീമ $\frac{0}{0}$ എന്ന രൂപത്തിലേക്ക് മാറുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-3)} = \frac{(2)^2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

(v) തന്നിരിക്കുന്ന ഭിന്നക ഏകദത്തെ, ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\right] = \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x^2 - 3x + 2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{x(x-1)(x-2)}\right] = \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}$$

$x = 1$ ൽ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലേക്ക് മാറുന്നു.

$$\lim_{x \to 1}\left[\frac{x^2 - 2}{x^2 - x} - \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$ [$(x \neq 1)$ ആയതുകൊണ്ട്

$(x - 1)$ ഒഴിവാക്കാം]

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2.$$

സിദ്ധാന്തം 2

n ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യ ആയാൽ

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

തെളിവ് :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x a^{n-2} + a^{n-1})$$

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x a^{n-2} + a^{n-1})$ ആയതിനാൽ

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = a^{n-1} + a\, a^{n-2} + \ldots + a^{n-2}(a) + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} + a^{n-1}$$ (n പദങ്ങൾ)

$$= na^{n-1}$$

കുറിപ്പ്

n ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യയാവുകയും a ഒരു അധിസംഖ്യയും ആയാൽ

$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ ശരിയായിരിക്കും. ഇതിന്റെ തെളിവ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം : 3

വില കണക്കാക്കുക.

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

പരിഹാരം (1)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14}\div10(1)^{9}$$ (മുകളിലെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്)

$$= 15\div10=\frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, എന്നെടുത്താൽ, $x\to0$ ആകുമ്പോൾ $y\to1$ ആകും.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

$$= \lim_{y\to1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}$$

13.4 ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകൾ

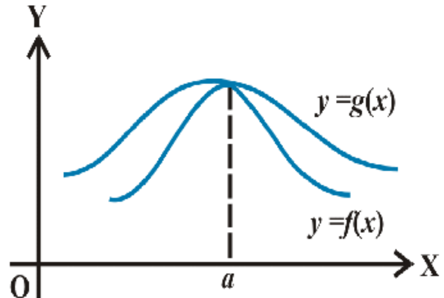
(Limits of Trigonometric Functions)

ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട സീമകളുടെ പരിഹാരം കാണുവാൻ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ആവശ്യമായതുകൊണ്ട് അവ മനസ്സിലാക്കുവാനായി പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3

ഒരേ മണ്ഡലത്തിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ട രണ്ട് ഏകദങ്ങളായ f, g എന്നിവക്ക് മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x വിലകൾക്കും $f(x)\le g(x)$ ആവുകയും a എന്ന രേഖീയസംഖ്യക്ക് $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ എന്നീ സീമകൾ ഉണ്ടാവുകയും ചെയ്താൽ $\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$ ആയിരിക്കും.

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഇതിനെ വ്യക്തമാക്കുന്നു.

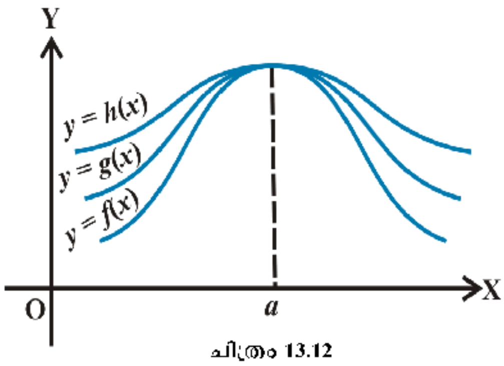


ചിത്രം 13.11

സിദ്ധാന്തം 4 (സാന്റ്‌വിച്ച് സിദ്ധാന്തം)

ഒരു പൊതുമണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x വിലകൾക്കും, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ആകുന്ന മൂന്ന് രേഖീയ ഏകദങ്ങളാണ് f, g, h എന്നിവ. a എന്ന രേഖീയസംഖ്യയിൽ

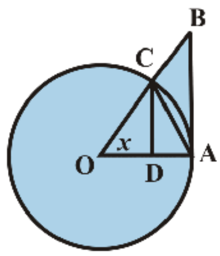
$$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x) \text{ ആയാൽ } \lim_{x\to a} g(x) = l \text{ ആയിരിക്കും.}$$



ചിത്രം 13.12

ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയുള്ള താഴെ പറയുന്ന വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട അസമതയുടെ മനോഹരമായ ജ്യാമിതീയ തെളിവാണ് ഇനി ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$



ചിത്രം 13.13

തെളിവ് : $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ ആയതുകൊണ്ട്

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ എന്ന അസമത തെളിയിച്ചാൽ മതി. ചിത്രം 13.13 ൽ, ആരം ഒരു യൂണിറ്റായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് O, $\angle AOC = x$ റേഡിയൻ

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ആണ്.

രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ BA യും CD യും OA ക്ക് ലംബങ്ങളാണ്. AC യോജിപ്പിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും.

ΔOAC യുടെ പരപ്പളവ് < OAC വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് < ΔOAB യുടെ പരപ്പളവ്.

അതായത് $\frac{1}{2}\text{OA.CD} < \frac{x}{2\pi}.\pi.(\text{OA})^2 < \frac{1}{2}\text{OA.AB}$

$$\text{CD} < x\ .\ \text{OA} < \text{AB}.\text{------------ (1)}$$

Δ OCD യിൽ നിന്നും,

$$\sin x = \frac{\text{CD}}{\text{OA}} \qquad (\because\ \text{OC} = \text{OA})$$

$$\therefore \text{CD} = \text{OA} \sin x$$

$$\tan x = \frac{\text{AB}}{\text{OA}} \Rightarrow \text{AB} = \text{OA} \tan x$$

(1) $\Rightarrow \text{OA} \sin x < \text{OA}.\ x < \text{OA}.\ \tan x$

OA ഒരു അധിസംഖ്യയായതുകൊണ്ട്

$\sin x < x < \tan x$------------ (2)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sin x$ ന്റെ വില അധിസംഖ്യയാകും.

(2) നെ $\sin x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക, അപ്പോൾ

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

വ്യൂൽക്രമം എടുത്താൽ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

അങ്ങനെ തെളിവ് പൂർണ്ണമായി.

സിദ്ധാന്തം : 5

താഴെ പറയുന്നവ പ്രധാനപ്പെട്ട രണ്ട് സീമകൾ ആണ്.

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

തെളിവ് : മുൻസിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്നും, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ആയിരുന്നല്ലോ. $\frac{\sin x}{x}$ ന്റെ വില $\cos x$ നും 1 നും ഇടയിൽ ആയിരിക്കും, കൂടാതെ

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \to 0} (1) = 1$ സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii) $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ആണല്ലോ.

അതിനാൽ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right), x\to 0, \frac{x}{2}\to 0$

$\left(x\to 0 \text{ ആയാൽ } \frac{x}{2}\to 0\right)$

$$= \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

ഉദാഹരണം : 4

വില കണക്കാക്കുക.

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

പരിഹാരം

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}.\frac{2x}{\sin 2x}.2\right]$

$$= 2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2.\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$= 2.1.1 = 2$ ($x \to 0$ ആയാൽ $4x \to 0$, $2x \to 0$)

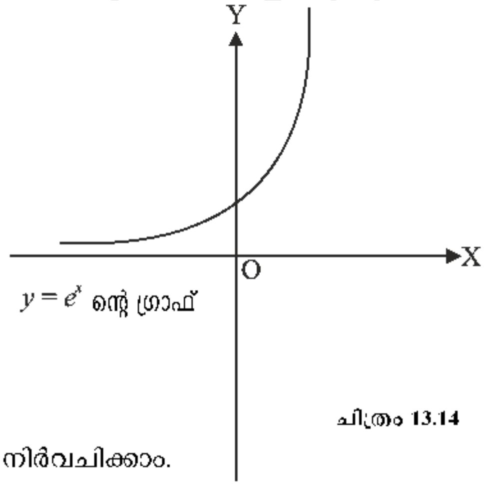
(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$

13.4.1 കൃതി ഏകദവും ലോഗരിതമിക ഏകദവും ഉൾപ്പെടുന്ന സീമകൾ (Limits of Exponential and Logarithmic Functions)

പ്രശസ്തനായ സ്വിസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഓയിലർ e എന്ന സംഖ്യ അവതരിപ്പിച്ചു. e യുടെ വില 2 നു 3 ഇടയിലാണ്. ഈ സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു കൃതി ഏകദം നിർവചിക്കാം.

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^{-}, f(x) = e^{x}$

$f(x) = e^{x}$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

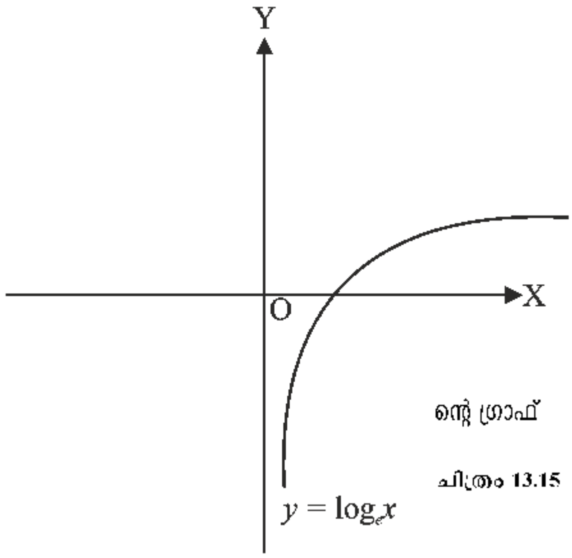


ചിത്രം 13.14

ഇതുപോലെ, ലോഗരിതമിക ഏകദവും നിർവചിക്കാം. അതായത്;

$$f : \mathrm{R}^{1} \to \mathrm{R}, f(x) = \log x$$

$f(x) = \log x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.



ചിത്രം 13.15

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ എന്ന തത്ത്വം തെളിയിക്കുന്നതിന് $\frac{e^x-1}{x}$ എന്ന ആവിഷ്കരണം ഉൾപ്പെടുന്നു. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന അസമത ഉപയോഗപ്പെടുത്താം.

$$\frac{1}{1+|x|}\le \frac{e^x-1}{x} \le 1+(e-2)\,|x|,\ x\in[-1,1]\sim\{0\}.$$

സിദ്ധാന്തം : 5.1

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തെളിവ്

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച അസമത പരിഗണിക്കാം.

$$\frac{1}{1+|x|}\le \frac{e^x-1}{x} \le 1+|x|\,(e-2),\ x\in[-1,1]\sim\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}=\frac{1}{1+\lim_{x\to 0}|x|}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left[1+(e-2)|x|\right]=1+(e-2)\lim_{x\to 0}|x|=1+(e-2)0=1$$

സാന്റ്‌വിച്ച് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

സിദ്ധാന്തം : 5.2

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തെളിവ്

$$\frac{\log_e(1+x)}{x}=y$$

$$\log_e(1+x)=xy$$

$$\Rightarrow 1+x=e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{xy}-1}{x}=1$$

അല്ലെങ്കിൽ $$\frac{e^{xy}-1}{xy}.y=1$$

$$\Rightarrow \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}\lim_{x\to 0} y = 1 \text{(since } x\to 0 \text{ gives } xy\to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1\left(\text{as } \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}=1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$$

ഉദാഹരണം : 4.1

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$ ന്റെ വിലകാണുക.

പരിഹാരം

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$$

$$=3\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\right),\quad \text{where } y=3x$$

$$=3.1=3$$

ഉദാഹരണം : 4.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sin x-1}{x}$$

പരിഹാരം

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sin x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x}-1}{x}-\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1-1=0$$

ഉദാഹരണം : 4.3

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}$$

പരിഹാരം

$x = 1 + h$, then as $x\to 1\Rightarrow h\to 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1\right).$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 13.1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സീമകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $\lim\limits_{x \to 3} x+3$

2. $\lim\limits_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7} \right)$

3. $\lim\limits_{r \to 1} \pi r^2$

4. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{4x+3}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x}$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

8. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax+b}{cx+1}$

10. $\lim\limits_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}, a+b+c \neq 0$

12. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax + x\cos x}{b \sin x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} x \sec x$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} a, b, a+b \neq 0$,

21. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

23. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 3(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

24. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x \le 1 \\ -x^2-1, & x > 1 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim_{x\to 1} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

25. $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

26. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

27. $f(x)=|x|-5$ ആയാൽ $\lim_{x\to 5} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

28. $f(x)=\begin{cases} a+bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b-ax, & x > 1 \end{cases}$ ഉം $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ആയാൽ a ക്കും b ക്കും ലഭിക്കാവുന്ന സാധ്യമായ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

29. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളാണ്.
$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. $\lim_{x\to a_1} f(x)$ എന്താണ്? $a \ne a_1, a_2, \ldots, a_n$, ആയാൽ $\lim_{x\to a} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

30. $f(x)=\begin{cases} |x|+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x|-1, & x > 0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim_{x\to a} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്ന a യുടെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi$, ആയാൽ $\lim_{x\to 1} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

32. $f(x)=\begin{cases} mx^2+n, & x<0 \\ nx+m, & 0\le x\le 1 \\ nx^3+m, & x>1 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ഉം $\lim_{x\to 1} f(x)$ ഉം നിലനിൽക്കുന്ന

m, n എന്നീ പൂർണ സംഖ്യകളുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.1

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2\;\;x}-e^2}{x}$

3. $\lim_{x\to 5} \dfrac{e^{x}-e^5}{x-5}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$

5. $\lim_{x\to 3} \dfrac{e^{x}-e^3}{x-3}$

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(e^{x}-1)}{1-\cos x}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_e(1+2x)}{x}$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$

13.5 അവകലജങ്ങൾ (DERIVATIVES)

ഒരു വസ്തുവിന്റെ വിവിധ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കൊണ്ട്, ആ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുമെന്ന് ഭാഗം 13.2 ൽ മനസ്സിലാക്കിയതാണ്. പൊതുവായി ഒരു പ്രാചലത്തിന്റെ പല ഘട്ടങ്ങളിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നത് വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന, നിത്യവും ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്ന ഒരു കാര്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി, വിവിധസമയങ്ങളിൽ ഒരു ജലസംഭരണിയിലെ ജലത്തിന്റെ ആഴം മനസ്സിലാക്കികൊണ്ട് അത് എപ്പോൾ നിറഞ്ഞു കവിയും എന്നു പറയുവാനും, ഒരു റോക്കറ്റിന്റെ വിവിധ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള ഉയരം മനസിലാക്കി അതിന്റെ കൃത്യമായ പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിച്ച് അതിനുള്ളിലുള്ള ഉപഗ്രഹത്തെ യഥാസ്ഥാനത്ത് ഉപേക്ഷിക്കുവാൻ ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ സഹായിക്കുവാനും കഴിയുന്നു. നിലവിലുള്ള ഒരു ഉൽപന്നത്തിന്റെ വില ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ധനകാര്യസ്ഥാപനത്തിന് ആ ഉൽപന്നത്തിൽ വരാൻ പോകുന്ന മാറ്റങ്ങളെപ്പറ്റി പ്രവചിക്കുവാൻ സാധിക്കും. നാമെല്ലാം ഏറെ യാത്ര ചെയ്യുന്നവരാണ്. ഒരു വാഹനത്തിനും ഒരേ വേഗത്തിൽ നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കാനാവില്ല. ഒരു ചെറിയ അളവിലെങ്കിലും വേഗം നിരന്തരം മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. ഒരു വാഹനം 80 കി.മി.ദൂരം 4 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് ഓടിയെത്തിയാൽ അതിന്റെ ശരാശരി വേഗം $\dfrac{80}{4}$ കി. മി/മണിക്കൂർ $= 20$ കി.മി/മണിക്കൂർ ഈ നാലു മണിക്കൂറിലും

ഒരേ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുവാനാകില്ല. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വാഹനത്തിന്റെ ഏറ്റവും മുൻഭാഗം ഒരു ജംഗഷനിലെ ഒരു വൈദ്യുതപോസ്റ്റ് കടന്നുപോയത് എത്ര വേഗതത്തിലാണ് എന്ന ചോദ്യത്തിന് നാം എങ്ങനെ ഉത്തരം നൽകും. ഇത്തരത്തിലുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്കെല്ലാം വ്യക്തമായ ഉത്തരം നൽകാൻ അവകലജം നമ്മെ സഹായിക്കും. വാഹനങ്ങൾക്ക് ചക്രങ്ങളെന്നപോലെ നമുക്ക് ശാസ്ത്രത്തേയും അതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളേയും ഉള്ളറിഞ്ഞ് മനസ്സിലാക്കുവാൻ "കലനം" (Calculus) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രശാഖ അനിവാര്യമാണ്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്തിന്റെ വില കണ്ടു പിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് പരിശോധിക്കാം.

നിർവചനം 1

f ഒരു രേഖീയഏകദവും a അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ എന്ന സീമ നിലനില്ക്കുകയാണെങ്കിൽ ഈ സീമയെ f ന്റെ a യിലെ അവകലജമായി നിർവചിക്കാം. f ന്റെ a യിലെ അവകലജത്തെ $f'(a)$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ എന്ന സീമ നിലനിൽക്കുകയാണെങ്കിൽ ഈ സീമയെ f ന്റെ a യിലെ അവകലജം എന്നു നിർവചിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 5

$f(x) = 3x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ 2 ലുള്ള അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

$\therefore 2$ ലുള്ള f ന്റെ അവകലജം 3 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 6

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = -1$ ലെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ $f'(0)+3f'(-1) = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(-1+h)^2+3(-1+h)-5-\left(2\times (-1)^2+3\times (-1)-5\right)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2h^2-h}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left(2h^2-1\right) = 0-1 = -1$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(0+h)^2+3(0+h)-5-\left(2\left(0^2\right)+3(0)-5\right)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2h^2+3h}{h}\right] = \lim_{h\to 0}(2h+3) = 2(0)+3 = 3$$

$$f'(0)+3f'(-1) = 3+3(-1) = 3-3 = 0$$

ഉദാഹരണം : 7

$\sin x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = 0$ ലെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

ഉദാഹരണം : 8

$f(x) = 3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = 0$, $x = 3$ ലെ അവകജങ്ങളുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

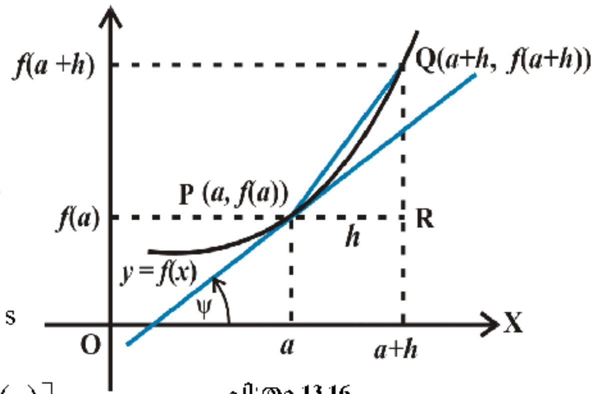
$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = 0$$

ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

$y = f(x)$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിലെ ഏറ്റവും അടുത്തടുത്തായിട്ടുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് $P(a, f(a))$, $Q(a+h, f(a+h))$ എന്നിവ. ചിത്രം 13.11 പരിശോധിച്ചാൽ

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ΔPQR, ൽ നിന്നും tan(QPR) എന്നത് ഞാൺ PQ വിന്റെ എന്ന ചരിവാണ്.



ചിത്രം 13.16

$$\tan(QPR) = \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}\right]s$$

$$= \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$$

സീമ എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ചാൽ h പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ Q എന്ന ബിന്ദു 'P' എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് അടുക്കുന്നു.

അതായത് $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{Q\to P}\frac{QR}{PR}$

ഞാൺ PQ, എന്ന ഞാൺ, P യിലുള്ള തൊടുവരയായി (tangent) മാറുന്നു അതായത് $f'(a) = \tan\psi$. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന അവകലജം ആ ഏകദത്തിന്റെ വക്രത്തിലെ ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ആയിരിക്കും.

പൊതുവായി, ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ (നില നിന്നാൽ) ആ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്.

നിർവചനം 2

f ഒരു രേഖീയഏകദമാവുകയും $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ എന്ന സീമ നിലനിൽക്കു

കയും ചെയ്താൽ ഏകദം f ന് x ൽ അവകലജമുണ്ടെന്ന് പറയാം. അതിനെ $f'(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അവകലജത്തിന്റെ ഈ നിർവചനം ആദ്യതത്വത്തിൽ നിന്നുള്ള അവകലനം (differentiation from first principle) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

അതായത് $f'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$

$f'(x)$ നെ $\frac{d}{dx}(f(x))$ ഏതെന്നെഴുതാവുന്നതാണ്. $y = f(x)$ ആണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ $D(f(x))$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നുണ്ട്. ഏകദം f ന്റെ a യിലെ അവകലജത്തെ $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_a$ അല്ലെങ്കിൽ $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ അതുമല്ലെങ്കിൽ $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുണ്ട്.

ഉദാഹരണം : 9

$f(x) = 10x$ ന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{10h}{h} = \lim_{h \to 0}(10) = 10$$

ഉദാഹരണം : 10

$f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h \to 0}(h+2x) = 2x$$

ഉദാഹരണം : 11

$f(x) = a$ എന്ന സംഖ്യ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക. $a \in R$

പരിഹാരം

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{a-a}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{0}{h}\right] = 0\ ;\ h \neq 0$$

ഉദാഹരണം : 12

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 അവകലജങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

സിദ്ധാന്തം 5 : ഒരു പൊതുമണ്ഡലത്തിൽ അവകലജമുള്ള രണ്ടു ഏകദങ്ങളാണ് f, g എന്നിവയെങ്കിൽ

1. അവയുടെ തുകയുടെ അവകലജം അവയുടെ അവകലജങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

2. അവയുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ അവകലജം അവയുടെ അവകലജങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായിരിക്കും.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

3. അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ അവകലജം ഗുണനനിയമമായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\ .\ g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)+f(x)\,.\,\frac{d}{dx}g(x)$$

4. അവയുടെ ഹരണഫലത്തിന്റെ അവകലജം ഹരണനിയമമായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു (ഛേദം പൂജ്യമാകാൻ പാടില്ല)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)\,.-\ f(x)\ \frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

5. $$\frac{d}{dx}k\left[f(x)\right]=k\frac{d}{dx}f(x),\ k\in R$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നവയുടെ തെളിവ് ഇവിടെ നൽകുന്നില്ല കാരണം സീമകളുടെ ബീജഗണിതവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി നിങ്ങൾക്ക് അവ സ്വയം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്.

$u=f(x)\quad v=g\ (x)$ എന്നിവയായാൽ

$(uv)' = u'v+uv'$ ആയിരിക്കും. ഇത് ലൈബ്നിറ്റ്സ് ഗുണനനിയമം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഇതുപോലെ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2},\ v\neq 0$ (അവകലനത്തിന്റെ ഹരണനിയമം)

$f(x) = x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം പരിശോധിക്കാം.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}1=1\ .$$

ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് $f(x) = 10x$ ന്റെ അവകലജം കാണാം.

$f(x) = 10x = x + x + x + ... + x$ (10 പദങ്ങൾ).

$\frac{df(x)}{dx} - \frac{d}{dx}(x + x + x + ... + x)$ (10 പദങ്ങൾ)

$$= \frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(x)+\ldots\ldots+\frac{d}{dx}(x) \text{ (10 പദങ്ങൾ)}$$

$$= 1+1+1+\ldots+1 \text{ (10 പദങ്ങൾ)}$$

$$= 10.$$

ഗുണനഫലത്തിന്റെ അവകലജം കാണുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$f(x) = 10x = uv,\ u = 10,\ v = x$$

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0.x + 10.1 = 10$$

ഇതുപോലെ $f(x) = x^2$ എന്നതിന്റെ അവകലജം കാണാം.

$f(x) = x^2 = x\,.x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x\,.$$

സിദ്ധാന്തം 6 :

ഏകദം $f(x) - x^n,\ n \in N$ ന്റെ അവകലജം nx^{n-1} ആകുന്നു.

തെളിവ്

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\ \ >0}\frac{h\left(x^n + nx^{n-1}h + {}^nC_2 xn^{-2}h^2 + \ldots\ldots + h^n - x^n\right)}{h}$$

$$- \lim_{h\to 0}\frac{\left(nx^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right)}{h}$$

$$- \lim_{h\ \ >0}\frac{\left(nx^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$- \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + n_2 x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)$$

$$= nx^{n\ \ 1}$$

മറ്റൊരുതരത്തിൽ ആഗമനരീതി ഉപയോഗിച്ചും x^n ന്റെ അവകലജം കാണാം.

$n = 1$ ആയാൽ $\frac{d}{dx}(x) - 1 = 1 \,.\, x^{1-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\right) - kx^{k\ 1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k\ 1}\right) = \frac{d}{dx}(x).\left(x^k\right) + x.\frac{d}{dx}\left(x^k\right) \text{ (ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച്)}$$

$$= 1.x^k + x.kx^{k\ 1}$$

$$= x^k + k.x^k = (k+1)x^k$$

☛ കുറിപ്പ്

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിൽ n ഏതൊരു രേഖീയ സംഖ്യയുമാകാം (ഇവിടെ അത് തെളിയിക്കുന്നില്ല എന്നു മാത്രം)

13.5.2 ബഹുപദങ്ങളുടെയും ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെയും അവകലജ സിദ്ധാന്തം

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, എന്ന ബഹുപദം പരിഗണിച്ചാൽ

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + \ 2a_2 x + a_1 .$$

(സിദ്ധാന്തം 5 ഭാഗം 1, സിദ്ധാന്തം 6 ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാൻ സാധിക്കും)

ഉദാഹരണം 13

$6x^{100} - x^{55} + x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

$$f(x) = 6x^{100} - x^{55} + x$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = 6 \times \frac{d}{dx}^{(x^{100})} - \frac{dx}{dx}^{(55)} + \frac{d(x)}{dx}$$

$$= 6 \times 100x^{99} - 55x^{54} + 1$$

$$= 600x^{99} - 55x^{54} + 1$$

ഉദാഹരണം : 14

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ ന്റെ $x = 1$ ലെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 50x^{49}$$

$$\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=1} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 50$$

$$= \frac{50(51)}{2} = 1275$$

ഉദാഹരണം : 15

$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ അവകലനത്തിന്റെ ഹരണനിയമം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x.1 - (x+1).1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

ഉദാഹരണം : 16

$f(x) = \sin x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(x + h) = \sin(x + h)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right] \times \lim_{\frac{h}{2} \to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \right]$$

$$= \cos x \times 1 = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[sinx] = cosx$$

ഉദാഹരണം : 17

$f(x) = \tan x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f(x \quad h) = \tan(x + h)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\ .$$

ഉദാഹരണം : 18

$f(x) = \sin^2 x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x(\sin x)'$$

$$= (\cos x)\sin x + \sin x(\cos x)$$

$$= 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.2

1. $x^2 - 2$ ന്റെ $x = 10$ ലുള്ള അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $99x$ ന്റെ $x = 100$ ലുള്ള അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. $x = 1$ ലുള്ള x ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $f'(1) = 100 f'(0)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
6. a ഒരു സ്ഥിരരേഖീയസംഖ്യയായാൽ $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ ന്റെ അവകലജം കാണുക.

7. a യും b യും സ്ഥിരസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

8. a ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായാൽ $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ യുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

9. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $2x-\frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3+3x-1)(x-1)$

(iii) $x^{-3}(5+3x)$ (iv) $x^5(3-6x^{-9})$

(v) $x^{-4}(3-4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

10. $\cos x$ ന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 19

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അവകലജങ്ങൾ ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}, \quad x \neq 2$, (ii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

പരിഹാരം

(i) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}, \; x \neq 2, \; f(x+h) = \frac{2(x+h)+3}{(x+h)-2}, \; x+h \neq 2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-7}{(x-2)\,(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

$f'(x)$ എന്ന ഏകദം $x - 2$ ൽ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ.

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

$f'(x)$ എന്ന ഈ ഏകദം $x = 0$ ത്തിൽ നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

ഉദാഹരണം : 20

ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

പരിഹാരം

(i) $f(x) = \sin x + \cos x$, $f(x + h) = \sin(x + h) + \cos(x + h)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h(\cos x - \sin x) + \sin x(\cos h - 1) + \cos x(\cos h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}(\cos x - \sin x) + \lim_{h\to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \frac{(\cos h - 1)}{h}$$

$$= \cos x - \sin x$$

(ii) $f(x) = x\sin x, f(x+h) = (x+h)\sin(x+h)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(\sin x \cos h + \sin h \cos x) - x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\sin x(\cos h - 1) + x\cos x \sin h + h(\sin x\cos h + \sin h \cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} x\cos x \frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}(\sin x\cos h + \sin h\cos x)$$

$$= x\cos x + \sin x$$

ഉദാഹരണം : 21

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$

പരിഹാരം

(i) $f(x) = \sin 2x$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x + \sin x(-\sin x)\right]$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$$

(ii) $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \text{ ; } \sin x \neq 0.$$

$$= \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ഉദാഹരണം : 22

(i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$

എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

(i) $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)'\sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(ii) $g\ (x) = \dfrac{x + \cos x}{\tan x}$, $\tan x \neq 0$

$$h'(x) = \frac{(x + \cos x)'\tan x - (x + \cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \sin x)\tan x - (x + \cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

a, b, c, d, p, z, r, s എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരരേഖീയസംഖ്യകളും, m, n എന്നിവ പൂർണസംഖ്യകളുമായാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. $(x-a)$

3. $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$

6. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x-a)$

15. $\operatorname{cosec} x \cot x$

16. $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

7. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

18. $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$

19. $\sin^n x$

20. $\frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$

21. $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$

22. $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$

24. $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$

26. $\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$

27. $\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\frac{x}{1+\tan x}$

29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$

30. $\frac{x}{\sin^n x}$

സംഗ്രഹം

- ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ഇടതുവശത്തു നിന്നും ബിന്ദുവിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഏകദത്തിന്റെ വില ഏകദത്തിന്റെ ആ ബിന്ദുവിലെ ഇടതുസീമയെ നൽകുന്നു. സമാനമായി ബിന്ദുവിലെ വലതുസീമയും നിർവചിക്കാം.
- ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള ഇടതു സീമയും വലതുസീമയും തുല്യമായാൽ ആ ബിന്ദുവിൽ ഏകദത്തിന് സീമ ഉണ്ട് എന്നു പറയാം.
- $f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന് a യിലുള്ള സീമ നിർണയിക്കാൻ a എന്നത് $f(x)$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിലുണ്ടാവണമെന്നില്ല. പക്ഷെ $f(x)$ ന് a യിലുള്ള അവകലജം കാണണമെങ്കിൽ $f(x)$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ a ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ന്റെ വിലയും $f(a)$ യുടെ വിലയും എല്ലായ്പ്പോഴും തുല്യമാകണമെന്നില്ല.
- f, g എന്നിവ ഏകദങ്ങളായാൽ, താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിയമങ്ങൾ പാലിക്കപ്പെടും.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

- പ്രാമാണിക സീമകൾ

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

- ഏകദം f ന്റെ ബിന്ദു a യിലെ അവകലജം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ x എന്ന പൊതുബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്ത

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ എന്ന് നിർവചിക്കാം

- u, v യും ഏകദങ്ങളായാൽ,

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad v\neq 0$$

- പ്രാമാണിക അവകലജങ്ങൾ

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗണിതചരിത്രത്തിൽ കലനത്തിന്റെ കണ്ടുപിടുത്തത്തിന്റെ അംഗീകാരം പങ്കിട്ടത് ഐസക് ന്യൂട്ടൺ, (1642 – 1727) ജി.ഡബ്ലിയു. ലൈബ്നിറ്റ്സ് (1646 – 1717) എന്നീ പ്രശസ്ത ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരാണ്. 17–ാം നൂറ്റാണ്ടിനോടടുപ്പിച്ച് രണ്ടുപേരും സ്വതന്ത്രമായിട്ടാണ് കലനം കണ്ടുപിടിച്ചത്. കലനത്തിന്റെ ആവിർഭാവത്തിനു ശേഷം ധാരാളം ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ ഇതിന്റെ പുരോഗതിക്ക് സംഭാവനകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. കലനത്തിന് യുക്തിഭദ്രമായ അടിത്തറ പാകുന്നതിൽ മുഖ്യമായ പങ്കുവഹിച്ചത് എ.എൽ. കോഷി, ജെ.എൽ. ലഗ്രാഞ്ച്,

കാൾ വയർസ്ട്രാസ് എന്നീ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരാണ്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ദ ലാങ്ബർ (d' Alembert) സീമാസങ്കല്പമാണ് കോഷി ഉപയോഗിച്ചത്.

1900 നു മുമ്പ് കലനം പഠിപ്പിക്കുവാൻ പ്രയാസമായിരുന്നു. അതുകൊണ്ട് കലനം യുവാക്കൾക്ക് എത്തിപ്പെടാൻ കഴിയാത്ത മേഖലയായി നിലനിന്നു. എന്നാൽ 1900–ൽ ജോൺ പെറിയുടെ നേതൃത്വത്തിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ സ്കൂൾ കുട്ടികൾക്കു പോലും മനസ്സിലാകുന്ന തരത്തിൽ കലനത്തിന്റെ വിവിധ ആശയങ്ങൾ വളരെ ലളിതമായി പ്രചരിപ്പിച്ചു. എഫ്. എൽ ഗ്രിഫിൻ ഒന്നാംവർഷ കുട്ടികൾക്ക് കലനത്തെ സംബന്ധിച്ച് വിദഗ്ദ്ധമായ അധ്യാപനം നിർവഹിച്ചു. ഇത് ആ കാലയളവിലെ ഏറ്റവും ധീരമായ ഒരു ചുവടുവയ്പായിരുന്നു.

ഇന്ന് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ മാത്രമല്ല, ഭൗതികശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയ ശാസ്ത്രങ്ങളിലെല്ലാം കലനത്തിന്റെ മാധുര്യം അനുഭവിക്കാൻ കഴിയും.