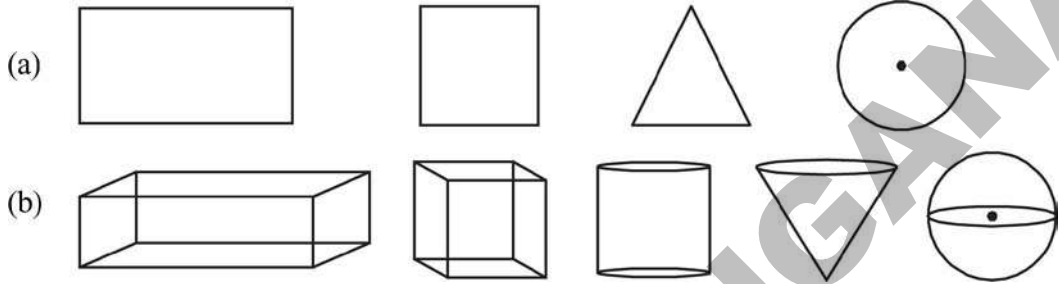


سطحی رقبہ اور حجم Surface areas and Volumes

10

10.1 تعارف

حسب ذیل اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔

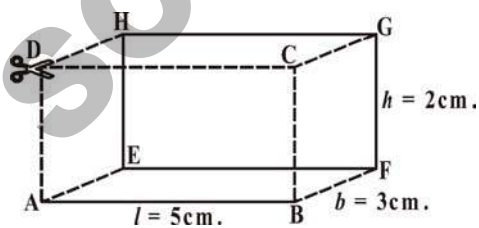


کیا آپ کو گروپ a اور گروپ b کی اشکال میں فرق نظر آتا ہے؟

دی ہوئی اشکال میں سے گروپ a کی اشکال کو بہ آسانی نوٹ بک میں اتارا جاسکتا ہے۔ یہ خاکے طول اور عرض رکھتے ہیں اور ان خاکوں کو دو ابعادی خاکے یا اشکال یا 2-D اشکال کہا جاتا ہے جب کہ گروپ b کی اشکال میں طول، عرض اور بلندی تین ابعاد پائے جاتے ہیں۔ لہذا انھیں تین ابعادی اشکال یا 3-D اشکال کہا جائے گا۔

یہ دراصل ٹھوس اجسام ہوتے ہیں۔ عام طور پر اطراف و اکناف ہمیں ایسے ہی اجسام نظر آتے ہیں۔ آپ نے سادہ اشکال اور ان کے رقبوں کے بارے میں سیکھ لیا ہے۔ اب ہم استوانوں، مخروطوں اور کرگوں جیسے تین ابعادی اجسام کے سطحی رقبہ اور ان کے حجم کو محسوب کرنا سیکھیں گے۔

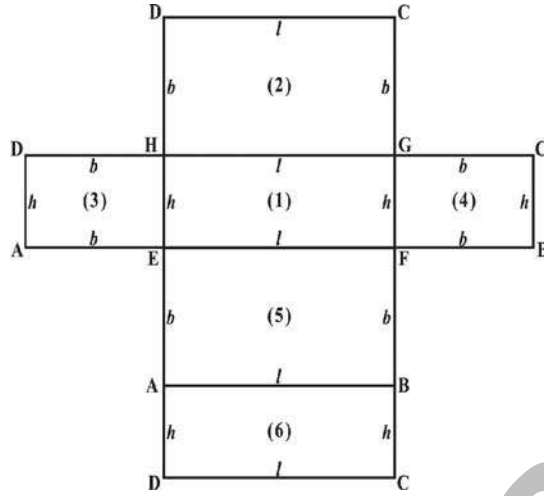
10.2 مکعب نما کی سطح کا رقبہ



دیئے ہوئے مکعب نما کا مشاہدہ کرتے ہوئے بتائیے کہ اس کے کتنے پہلو ہیں؟ اس مجسم کے کتنے کنارے ہوں گے اور کتنے راس پائے جائیں گے؟ بتائیے کہ کون کونسے پہلو مساوی رقبہ رکھتے ہیں؟ اس مکعب نما کی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے کیا آپ کچھ اندازہ کر سکتے ہیں؟ آئیے کسی مکعب نما کی سطح کا رقبہ معلوم کرنا سیکھیں۔

دی ہوئی شکل میں طول (l) 5 سمر، عرض (b) 3 سمر اور بلندی (h) 2 سمر دیئے گئے ہیں۔

اگر اس مکعب نما کو اس کے کناروں CD، ADHE اور BCGF کے محاذی کھول دیا جائے تو ہمیں ذیل میں دی گئی شکل حاصل ہوگی۔



اس شکل کے مطابق کسی مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ تین مماثل مستطیلوں کی جوڑیوں پر مشتمل جملہ 6 مستطیلوں کے رقبوں کے مساوی ہوگا۔ اس مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ حاصل کرنے کے لیے ہمیں تمام چھ مستطیلوں کے رقبوں کا حاصل جمع معلوم کرنا ہوگا۔ لہذا ان تمام مستطیلوں کے رقبوں کا حاصل جمع مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ ہوگا۔

$$\begin{aligned} \text{مستطیل EFGH کا رقبہ} &= l \times h = lh & \dots(1) \\ \text{مستطیل HGCD کا رقبہ} &= l \times b = lb & \dots(2) \\ \text{مستطیل AEHD کا رقبہ} &= b \times h = bh & \dots(3) \\ \text{مستطیل FBCG کا رقبہ} &= b \times h = bh & \dots(4) \\ \text{مستطیل ABFE کا رقبہ} &= l \times b = lb & \dots(5) \\ \text{مستطیل DCBA کا رقبہ} &= l \times h = lh & \dots(6) \end{aligned}$$

دیئے ہوئے رقبوں کو جمع کرنے پر ہمیں مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \text{مکعب نما کا سطحی رقبہ} &= \text{رقبہ (1)} + \text{رقبہ (2)} + \text{رقبہ (3)} + \text{رقبہ (4)} + \text{رقبہ (5)} + \text{رقبہ (6)} \\ &= lh + lb + bh + bh + lb + lh \\ &= 2lb + 2lh + 2bh \\ &= 2(lb + bh + lh) \end{aligned}$$

(1)، (3)، (4)، (6) کو مکعب نما کی طرفی سطحیں کہا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{مکعب نما کی طرفی سطحی رقبہ} &= (1) + (3) + (4) + (6) \\ &= lh + bh + bh + lh \\ &= 2lh + 2bh \\ &= 2h(l + b) \end{aligned}$$

آئیے اب اوپر دی ہوئی شکل کے لیے مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ معلوم کریں گے۔

لہذا اس مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ 62cm^2 ہے اور طرفی سطح کا رقبہ 32cm^2 ہوگا۔

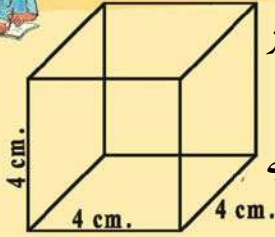


کوش کیجیے

1 سنٹی میٹر طول رکھنے والا ایک مکعب لیجیے اور اس کے کناروں کو اسی طرح الگ کیجیے جیسا کہ ہم نے پچھلی مثال میں کیا ہے۔
اب اس مکعب کی کل سطح کا رقبہ اور طر فی سطح کا رقبہ محسوب کیجیے۔



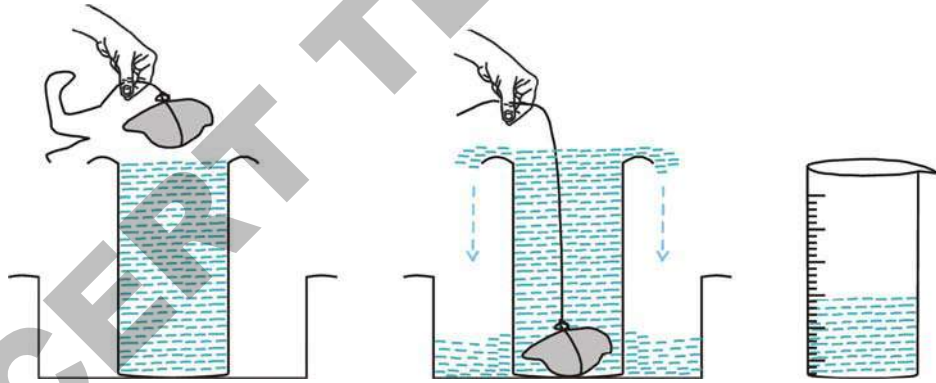
یہ کیجیے



- 1- 4 سنٹی میٹر ضلع کی لمبائی ایک مکعب کی کل سطح اور طر فی سطح کا رقبہ محسوب کیجیے۔ (اوپر اخذ کئے گئے ضابطہ کے استعمال سے)
- 2- مکعب کے ہر کنارے میں 50% اضافہ کر دیا گیا ہے۔ تو بتائیے کہ اس کے سطحی رقبے میں کتنے فی صد کا اضافہ ہوگا؟

10.2.1 حجم (Volume)

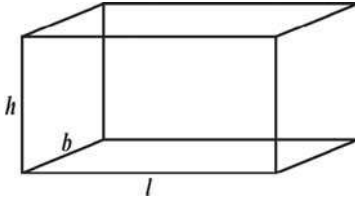
پچھلی جماعت میں آپ نے حجم کے بارے میں جو پڑھا ہے اس کا اعادہ کیجیے۔ آئیے ذیل کا تجربہ کرتے ہیں۔
ایک استوانہ لیجیے اور اسے ایک پانی کے لگن میں رکھ دیجیے۔ استوانے کو پانی سے لبا لب بھر دیجیے۔ اب اس میں کوئی ٹھوس شے (جیسے پتھر) آہستگی سے ڈالیے۔ ایسا کرنے پر تھوڑا سا پانی استوانے سے لگن میں گر جائے گا۔ اس پانی کو ایک درجے دار استوانے میں منتقل کیجیے۔ اس تجربے سے آپ کو معلوم ہوگا کہ کوئی ٹھوس جسم کتنی جگہ گھیرتا ہے۔ جسم کے جگہ گھیرنے کی خصوصیت کو حجم کہتے ہیں۔



ہر شے کچھ نہ کچھ جگہ گھیرتی ہے۔ اس گنجائش کو حجم کہا جائے گا۔ حجم کی اکائی مکعب اکائیاں ہوتی ہے۔

10.2.2 برتن کی گنجائش

اگر دی ہوئی شے کھوکھلی ہو تو اس کا اندرونی حصہ خالی ہوگا، جو دراصل ہوا یا کسی مائع سے بھرا جاسکے گا اور یہ ہوا یا مائع برتن ہی کی شکل و صورت اختیار کرے گا۔ برتن کے اندرونی حصے کو کسی شے سے بھرنے کی جو گنجائش ہوتی ہے اسے حجم کہتے ہیں۔
مکعب نما کا حجم: کارڈ بورڈ سے مساوی ابعاد رکھنے والے چند مستطیل تراشے اور پھر انہیں ایک دوسرے پر منطبق کرتے ہوئے رکھیے۔ آپ کو کیسی شکل کا مجسمہ حاصل ہوگا۔



حاصل ہونے والا مجسم مکعب نما کہلاتا ہے۔
آئیے اس مکعب نما کا حجم محسوب کرتے ہیں۔ اس کا طول، مستطیل کے طول کے مساوی اور عرض مستطیل کے عرض کے مساوی ہوگا۔
جس اونچائی تک مقووں سے بنے ہوئے مجسم کی بلندی ہوگی وہ دراصل اس مکعب نما کی بلندی کہلائے گی۔

$$\begin{aligned} \text{مکعب نما کی بلندی} &= \text{مستطیل کے گھیرے ہوئے مستوی کا رقبہ} \\ \text{مکعب نما کا حجم} &= l \times b \times h \\ &= l b h \end{aligned}$$

جہاں l ، b ، h بالترتیب مکعب نما کا طول، عرض اور بلندی ہیں۔

کوش کیجیے

(a) اُس مکعب کا حجم معلوم کیجیے جس کے ضلع کی لمبائی a اکائیاں ہے؟
(b) کسی مکعب کا حجم 1000 cm^3 ہو تو اس کے ضلع کا طول کیا ہوگا؟

مکعب نما اور مکعب ٹھوس اجسام ہوتے ہیں۔ کیا انہیں قائم منشور کہا جاسکتا ہے؟ چونکہ ان اجسام کی طرفی سطحیں مستطیل اور قاعدہ کے عمودوار ہوتی ہیں انہیں قائم منشور بھی کہہ سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ مکعب نما کا حجم اس کے قاعدے کے رقبہ اور بلندی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

$$\text{یاد رہے کہ مکعب نما کا حجم} = \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \text{بلندی}$$

$$h \times lb =$$

$$lbh =$$

$$\text{مکعب میں} \quad h = b = l = \text{ضلع}$$

$$\text{مکعب کا حجم} = S^2 \times S$$

$$= S^3$$

لہذا کسی مکعب نما کے حجم کا ضابطہ تمام قائم منشوروں کے لیے صحیح ثابت ہوگا۔

$$\text{قائم منشور کا حجم} = \text{قاعدے کا رقبہ} \times \text{بلندی}$$

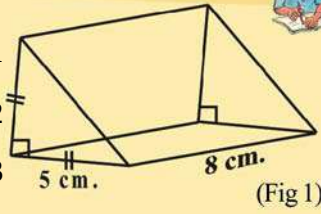
$$\text{اگر کسی قائم منشور کا قاعدہ مثلث مساوی الاضلاع ہو تو اس کا حجم} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times h \quad \text{مکعب اکائیاں ہوگا}$$

جہاں a قاعدے کا ضلع اور h منشور کی بلندی ہوگی۔

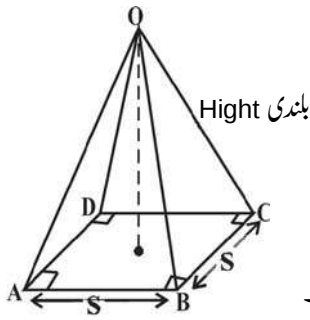
کوشش کیجیے



- 1- ایک ایسے مکعب نما کا حجم محسوب کیجیے جس میں $h=8\text{cm}$ اور $b=10\text{cm}$ ، $l=12\text{cm}$
- 2- اگر کسی مکعب کے ضلع کی لمبائی 10 سنٹی میٹر ہو تو اس کا حجم کیا ہوگا؟
- 3- کسی مثلث مساوی الساقین کے منشور کا حجم محسوب کیجیے۔ (شکل-1 ملاحظہ کیجیے)



منشور ہی کی طرح ہرم بھی ایک سہ ابعادی مجسم ہوتا ہے۔ یہ شکل بھی زمانہ قدیم ہی سے انسان کی دل چسپی کا سبب رہی ہے۔ آپ نے اہرام مصر کے بارے میں پڑھا ہوگا جو دنیا کے سات عجائب میں سے ایک ہیں۔ مربعی قاعدوں پر یہ اہرام ایک شاہ کار ہیں۔ غور کیجیے کہ ان کی تعمیر کیسے کی گئی ہوگی؟ یہ ایک معمہ ہے۔ اس بات سے کوئی واقف نہیں کہ ان کی تعمیر کیسے ہوئی ہے۔

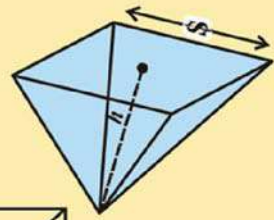


کیا آپ ہرم کی شکل بنا سکتے ہیں؟
منشور اور ہرم میں کیا فرق پایا جاتا ہے؟
مربعی قاعدہ رکھنے والے ہرم کو کیا کہتے ہیں؟
یہاں پر OABCD ایک مربعی ہرم ہے جس کے ضلع کی لمبائی S اکائیاں اور بلندی h اکائیاں ہے۔
کیا آپ کسی مربعی ہرم کے حجم کا کسی مکعب کے حجم سے تقابل کر سکتے ہیں جب کہ ان کے قاعدے اور بلندی مساوی ہوں۔

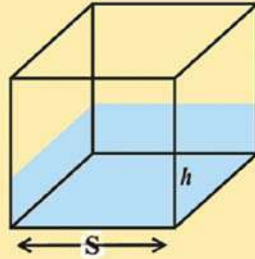
مشغلہ



ایک ہی قاعدہ اور مساوی بلندیوں والے مربعی ہرم اور مکعبی برتن لیجیے۔
ہرم کو کسی مائع سے بھر دیجیے اور مکعب (منشور کو) لبا لب بھر دیجیے۔ بتائیے کہ مکعب کو بھرنے کے لیے ہرم کے مقابلے میں کتنے گنا زیادہ مائع لگے گا؟ اس تجربے سے آپ کیا نتیجہ اخذ کریں گے۔



اس لیے



$$\text{قائم منشور کا حجم} = \frac{1}{3} \times \text{ہرم کا حجم}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{قاعدے کا رقبہ} \times \text{بلندی}$$

نوٹ: کسی قائم منشور میں اس کے سطحی کنارے قاعدے کے عمودار ہوں گے جب کہ پہلو کی تمام سطحیں رخ مستطیل ہوں گے۔

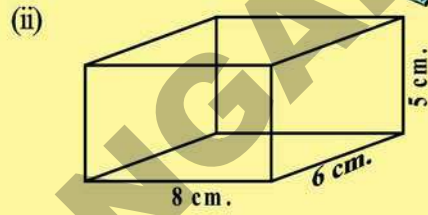
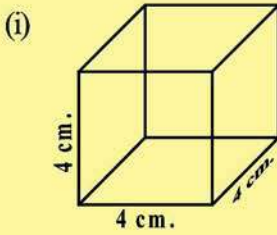


- 1- ایک ایسے ہرم کا حجم محسوب کیجیے جس کے مربعی قاعدے کا ضلع 10 سنٹی اور اس کی بلندی 8 سنٹی میٹر ہے۔
- 2- کسی مکعب کا حجم 1728 مکعب سنٹی میٹر ہے۔ اسی بلندی کے مربعی ہرم کا حجم معلوم کیجیے۔

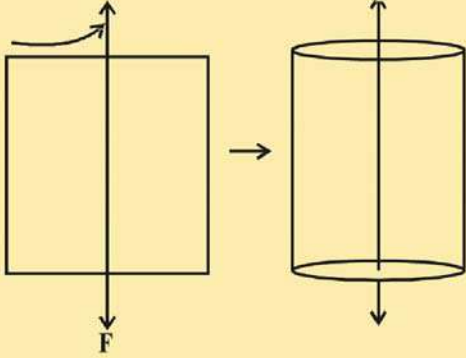
مشق - 10.1



حسب ذیل قائم منشوروں کی طرفی سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔



- 2- کسی مکعب کی کل سطح کا رقبہ 1350 مربع میٹر ہے۔ اس کا حجم کیا ہوگا؟
- 3- اگر کسی کمرے کی لمبائی 12m، عرض 10m اور بلندی 7.5m ہو تو اس کمرے کی چار دیواری کا رقبہ محسوب کیجیے۔ (کمرے کے دروازے اور کھڑکیوں کو نظر انداز کیجیے)
- 4- ایک مکعب نما کا حجم 1200 cm^3 ہے۔ اس کی لمبائی 15cm اور چوڑائی 10cm ہو تو اس کی بلندی کیا ہوگی؟
- 5- بتائیے کہ حسب ذیل میں تبدیلی پر کسی ڈبے کی کل سطح کا رقبہ کیسے بدلے گا؟
(i) اگر ابعاد دگنے کر دیئے جائیں (ii) اگر انھیں تین گنا کر دیا جائے۔
الفاظ میں بیان کیجیے۔ اگر ابعاد میں n گنا کا اضافہ ہو جائے تو بتائیے کہ رقبہ کیا ہوگا؟
- 6- ایک منشور کا قاعدہ مثلثی ہے جس کے اضلاع 3 سنٹی میٹر، 4 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں۔ اگر اس منشور کی بلندی 10 سنٹی میٹر ہو تو منشور کا حجم محسوب کیجیے۔
- 7- ایک منتظم مربعی ہرم کی اونچائی 3m اور اس کے قاعدے کا احاطہ 16m ہو تو بتائیے کہ ہرم کا حجم کیا ہوگا؟
- 8- ایک اولمپک سوئمنگ پول کی شکل مکعب نما جیسی ہے۔ اس کے ابعاد 25m، 50m اور گہرائی 3m ہے تو بتاؤ کہ اس سوئمنگ پول میں کتنے لیٹر پانی سما یا جائے گا۔

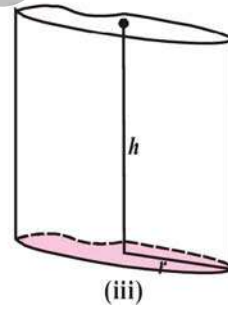
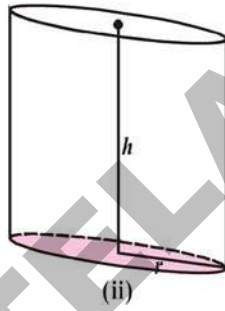
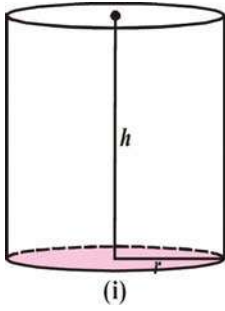


کاغذ سے ایک مستطیل تراشے۔ دی ہوئی شکل کے مطابق اس کے طول کے محاذی ایک ڈوری چکائیے۔ ڈوری کے دونوں کناروں کو پکڑ کر اس مستطیلی کاغذ کو تیزی سے گھمائیے۔

کیا آپ اس گھومتے ہوئے مستطیل کی شکل بتا سکتے ہیں؟
کیا آپ کو یہ ایک استوانہ جیسا نظر نہیں آئے گا؟

10.3 قائم دائروی استوانہ (Right Circular Cylinder)

دیئے ہوئے استوانوں کا مشاہدہ کیجیے۔



(i) اشکال (i)، (ii) اور (iii) میں کیا مشابہت ہوگی؟

(ii) اشکال (i)، (ii) اور (iii) میں کیا فرق پایا جائے گا؟

(iii) کونسی شکل میں خطی قطعہ قاعدے کے عمودار ہوگا؟

استوانہ ایک منحنی سطح اور، دو مماثل دائروی کناروں سے بنتا ہے۔ اگر ان دائروی حصوں کے مرکز سے قاعدے کے عمودار خط کھینچا جائے تو ایسے کسی استوانے کو قائم دائری استوانہ کہا جائے گا۔

بتائیے کہ اوپر دیئے ہوئے استوانوں میں کونسا استوانہ قائم استوانہ ہے؟

کونسے استوانے کو قائم استوانہ نہیں ہیں؟ وجوہات درج کیجیے۔

استوانہ تیار کرنے کے لیے ایک عملی کام

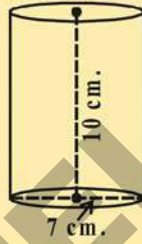
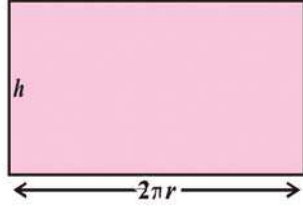
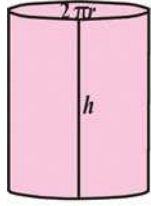
10.3.1 استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ

مقوے سے بنا ہوا ایک قائم دائری استوانہ لیجیے۔ اس کی منحنی سطح کو کاٹ کر کھول دیجیے۔ کھولنے کے دوران اس کی بلندی اور دائروی قاعدے کا مشاہدہ کیجیے۔ بتائیے کہ استوانے کو کھولنے پر آپ کو کونسی شکل حاصل ہوگی؟ آپ کو مستطیل حاصل ہوگا۔

مستطیل کا رقبہ استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ ہوگا۔ اس کی بلندی مستطیل کے عرض کے مساوی ہوگی جب کہ اس کا محیط مستطیل کے طول کے مساوی ہوگا۔

استوانے کی بلندی	=	مستطیل کا عرض ($h = b$)
استوانے کے قاعدے کا محیط	=	مستطیل کا طول ($2\pi r = l$)
استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ	=	مستطیل کا رقبہ
	=	عرض $\times$ طول
	=	$2\pi r \times h$
	=	$2\pi rh$

لہذا استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ $2\pi rh$



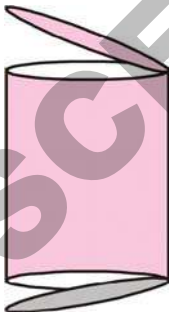
یہ کیجئے
حسب ذیل استوانوں کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

- (i) $r = x$ cm., $h = y$ cm.
- (ii) $d = 7$ cm., $h = 10$ cm.
- (iii) $r = 3$ cm., $h = 14$ cm.

10.3.2 استوانے کی کل سطح کا رقبہ

متصلہ شکل پر غور کیجئے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ شکل قائم دائری استوانہ ہے؟ اس کی کل سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپ کو اور کتنی سطحوں کا اضافہ کرنا ہوگا؟ استوانے کی کل سطحیں اس کی منحنی سطح کا رقبہ اور دو دائری ڈھکنوں کا رقبہ ہوگا۔



قاعدے کا رقبہ + ڈھکن کا رقبہ + منحنی سطح کا رقبہ = استوانے کی کل سطح کا رقبہ

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 \\
 &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\
 &= 2\pi r (h + r) \\
 &= 2\pi r (r + h)
 \end{aligned}$$

$$\text{استوانے کی کل سطح کا رقبہ} = 2\pi r (r + h)$$

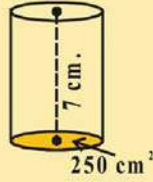
جہاں r استوانے کا نصف قطر اور h اس کی بلندی ہوگی۔



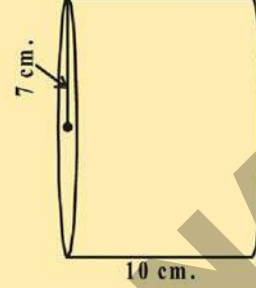
یہ کیجئے

ذیل کے استوانوں میں سے ہر ایک کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے

(ii)



(i)

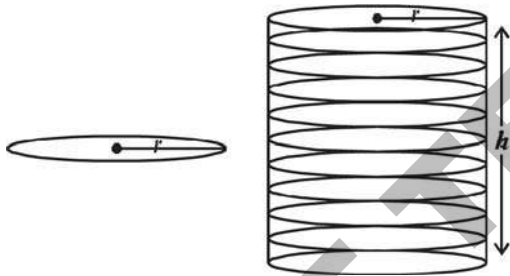


10.3.3 استوانہ کا حجم Volume of a Cylinder

مساوی نصف قطر رکھنے والے دائرے ایک دوسرے پر منطبق کرتے ہوئے رکھے بتائیے کہ ایسا کرنے پر آپ کو استوانہ حاصل ہوگا یا

نہیں؟

دی ہوئی شکل میں دائرے کا نصف قطر r اور انہیں ایک دوسرے پر رکھنے سے جو مجسم حاصل ہوا اس مجسم کی بلندی h ہے۔



$$\text{استوانے کا حجم} = \text{بلندی} \times \pi r^2$$

$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 h$$

$$\pi r^2 h = \text{استوانے کا حجم}$$

جہاں r استوانے کا نصف قطر اور h اس کی بلندی ہے۔

مثال 1: 14 سنٹی میٹر عرض رکھنے والے ایک مستطیل کاغذ کو اس کے عرض سے گول موڑ دیا گیا اور 20 سنٹی میٹر نصف قطر والا ایک استوانہ حاصل

ہوا۔ بتائیے کہ استوانہ کا حجم کیا ہوگا۔ شکل؟ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ لیجئے

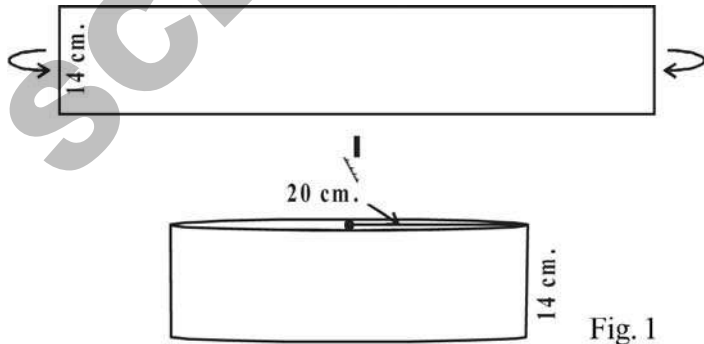


Fig. 1

حل: ایک مستطیل کو اس عرض کے کناروں

سے گول موڑ کر استوانہ کی شکل دی گئی۔ لہذا اس

مستطیل کا عرض استوانہ کی بلندی ہوگا جبکہ استوانہ کا

نصف قطر 20 سم دیا گیا ہے۔

استوانہ کی بلندی $h = 14$ سم

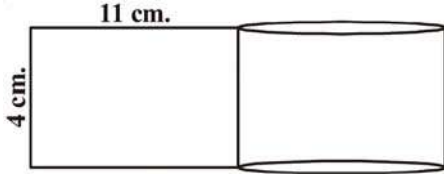
نصف قطر $r = 20$ سم

$$\text{استوانہ کا حجم} = \pi r^2 h = v$$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$$v \text{ استوانہ کا حجم} = 17600 \text{ cm}^3.$$

مثال 2: ایک مستطیلی کاغذ کو جس کے ابعاد 11×4 سمر ہیں کناروں سے جوڑ کر 4 سمر بلندی کا استوانہ بنایا گیا۔ اس استوانہ کا حجم معلوم کیجیے
حل: کاغذ کی لمبائی استوانہ کے قاعدہ کا محیط ہوگی اور اس کا عرض بلندی بن جائے گا۔



فرض کیجئے کہ استوانہ کا نصف قطر r اور بلندی h

$$\text{استوانہ کے قاعدہ کا محیط} = 2\pi r = 11 \text{ سمر}$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$\therefore r = \frac{7}{4} \text{ cm.}$$

$$h = 4 \text{ cm}$$

$$\pi r^2 h = v \text{ استوانہ کا حجم}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3$$

$$= 38.5 \text{ cm}^3.$$

مثال 3: ایک مستطیلی کاغذ کو جس کے ابعاد 44×18 سمر ہیں طویل موڑ کر استوانہ بنایا گیا۔ فرض کیجئے کہ استوانہ ٹھوس ہو (مکمل بھرا ہوا) اس کا نصف قطر اور کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے



حل: استوانہ کی بلندی = 18 سمر

استوانہ کے قاعدہ کا محیط = 44 سمر

$$2\pi r = 44 \text{ cm}$$

$$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7 \text{ cm.}$$

$$\text{کل سطحی رقبہ} = 2\pi r (r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 (7 + 18) \text{ cm}^2$$

$$= 1100 \text{ cm}^2.$$

مثال 4: 5 ملی میٹر موٹائی والی دائروں کی تختیوں کو ایک دوسرے پر رکھ کر ایک استوانہ تیار کیا گیا۔ اس استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ 462 مربع سمر ہے۔ اگر نصف قطر 3.5 سمر ہو تو بتاؤ کہ استوانہ بنانے کے لئے کتنی دائروں کی تختیاں استعمال کی گئیں؟

حل: دائروں کی تختی کی موٹائی = 5 ملی میٹر = $\frac{5}{10}$ سمر = 0.5 سمر

تختی کا نصف قطر = 3.5 سمر

استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ = 462 مربع سمر

..... (i) $\therefore 2\pi rh = 462$

فرض کیجئے کہ دائروں کی تختیوں کی تعداد x ہے۔

استوانہ کی بلندی = h = تختی کی موٹائی × تختیوں کی تعداد
= 0.5 x

..... (ii) $\therefore 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 0.5x$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 0.5x = 462$

$\therefore x = \frac{462 \times 7}{2 \times 22 \times 3.5 \times 0.5} = 42$

لہذا 42 تختیاں استعمال کی گئی

مثال 5: ایک کھوکھلے استوانہ کی کل سطح کا رقبہ 338π مربع سمر ہے استوانہ کا بیرونی نصف قطر 8 سمر اور بلندی 10 سمر ہے۔ کھوکھلے

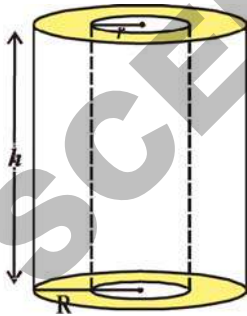
دھاتی استوانہ کی موٹائی معلوم کرو۔

حل: بیرونی قطر = R = 8 سمر

اندرونی قطر = r

بلندی = 10 سمر

کل سطح کا رقبہ = 338π مربع سمر

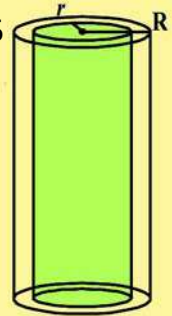


لیکن کل سطح کا رقبہ = بیرونی استوانہ کا رقبہ + اندرونی استوانہ کا رقبہ + قاعدہ کے رقبہ کا دوگنا (دائرہ)

$$\begin{aligned}
&= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2) \\
&= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) \\
\therefore 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) &= 338\pi \\
Rh + rh + R^2 - r^2 &= 169 \\
\Rightarrow (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 &= 169 \\
\Rightarrow r^2 - 10r + 25 &= 0 \\
\Rightarrow (r - 5)^2 &= 0 \\
\therefore r &= 5 \\
\therefore \text{دھاتی کی شیٹ کی موٹائی} &= R - r = (8 - 5) \text{ cm} = 3 \text{ cm}.
\end{aligned}$$

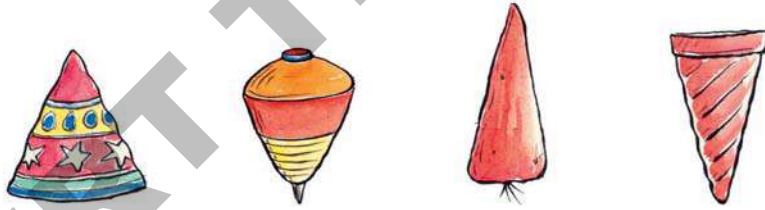
- کوشش کیجئے**
1. اگر کسی استوانہ کی منحنی سطح کے رقبہ کو برقرار رکھتے ہوئے نصف قطر کو دو گنا کر دینے پر اس کی بلندی کیا ہوگی؟
 2. ایک برقی بھپکہ (گیزر) 14 میٹر لمبائی رکھنے والے ایک پائپ پر مشتمل ہے پائپ کا قطر 5 سمر ہے۔ گیزر کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

- مشق 10.2**
1. ایک بند استوانی حوض موٹے دھاتی شیٹ سے تیار کیا گیا۔ اس کی لمبائی 1.4 میٹر اور نصف قطر 56 سمر ہے بتائیے کہ حوض کی تیاری میں کتنا دھاتی شیٹ استعمال کیا گیا۔ (مربع میٹر میں ظاہر کیجئے)
 2. ایک استوانہ کا حجم 308 مکعب سمر ہے اگر اس کی بلندی 8 سمر ہو تو منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کرو۔
 3. ایک دھاتی مکعب نما کو جس کے ابعاد 7.5 سمر $\times$ 15 سمر $\times$ 22 سمر ہیں پگھلا کر 14 سمر بلندی رکھنے والا استوانہ تیار کیا گیا۔ اس استوانہ کا نصف قطر معلوم کرو۔
 4. ایک اوور ہیڈ واٹر ٹینک استوانی شکل کا ہے جس کی گنجائش 61.6 مکعب میٹر ہے۔ اگر اس حوض کا قطر 5.6 میٹر ہو تو اس کی بلندی کیا ہوگی؟
 5. ایک دھاتی پائپ 77 سمر لمبا ہے پائپ کا اندرونی قطر 4 سمر اور بیرونی قطر 4.4 سمر ہو تو ذیل کے سوالات کا جواب دو
 - (i) اندرونی منحنی سطح کا رقبہ
 - (ii) بیرونی منحنی سطح کا رقبہ
 - (iii) کل سطح کا رقبہ



6. ایک استوانی ستون کی بلندی 35 میٹر اور اس کا قطر 56 سمر ہے عمارت میں ایسے 16 ستون ہوں تو بتاؤ کہ بحساب 5.50 روپے فی مربع میٹر ان ستونوں کو رنگ کرنے کا خرچ کیا ہوگا؟
7. ایک رولر کی لمبائی 120 سمر اور قطر 84 سمر ہے۔ ایک میدان کو سطح کرنے کیلئے اسے 500 مرتبہ گھمانا پڑتا ہے۔ بتاؤ کہ کھیل کے میدان کا رقبہ مربع میٹر میں کیا ہوگا؟
8. ایک دائروی کنویں کا قطر 35 میٹر اور گہرائی 10 میٹر ہے بتاؤ کہ
- (i) اس کی منحنی سطح کا رقبہ کیا ہوگا؟
- (ii) بحساب 40 روپے فی مربع میٹر اس سطح پر استرکاری کرنے کا خرچ کیا ہوگا۔
9. محسوب کیجئے
- (i) بند استوانی پٹرول ٹینک کی کل سطح کا رقبہ جس کا قطر 4.2 میٹر اور بلندی 4.5 میٹر ہے۔
- (ii) اس ٹینک کو بنانے میں اگر $\frac{1}{12}$ حصہ دھات ضائع ہوتی ہے تو کتنا اسٹیل شیٹ استعمال کیا گیا۔
10. ایک کنارے پر کھلا ہوا ایک استوانی ڈرم 2.1 میٹر اونچا ہے اس کا نصف قطر 28 سمر ہے اس میں کتنا پانی سما یا جاسکے گا۔ جواب کو لیٹر میں ظاہر کیجئے (1 لیٹر = 1000 مکعب سمر)
11. ایک استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ 1760 مربع سمر ہے۔ اگر اس کا حجم 12320 مکعب سمر ہو تو بلندی محسوب کرو۔

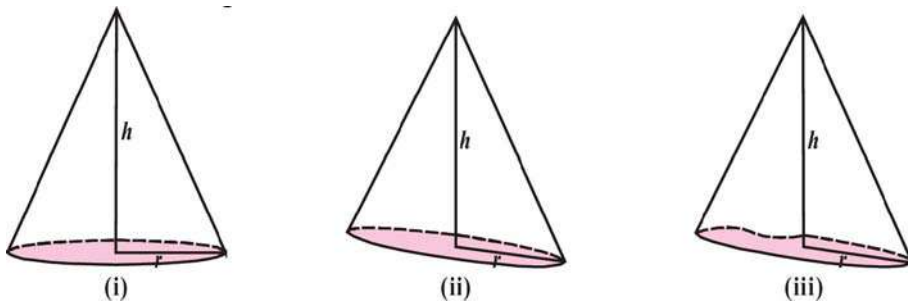
10.4 قائم دائری مخروط (Right Circular Cone)



اوپر دی ہوئی اشکال کا مشاہدہ کیجئے یہ اشکال کن اجسام سے مشابہت رکھتی ہیں؟

یہ مخروطی اشیاء ہیں

اب ذیل کی اشکال پر غور کیجئے



(i) ان مخروطوں میں مشترک خصوصیات کیا ہیں؟

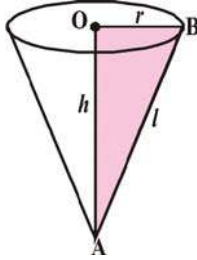
(ii) ان میں فرق کیا ہیں؟

شکل (i) میں طرفی سطح منحنی ہے اور قاعدہ دائرہ ہے۔ دائروی قاعدہ کے مرکز سے مخروط کی راس کو ملانے والا خط قاعدہ کے نصف قطر کے عمود وار ہوگا۔ اس نوعیت کے مخروط کو قائم مخروط کہتے ہیں۔

شکل (ii) میں اگرچہ قاعدہ دائروی ہے لیکن اس کی بلندی مخروط کے قاعدہ کے نصف قطر پر عموداً واقع نہیں ہوتی۔ اس نوعیت کے مخروط غیر قائمہ مخروط کہلاتے ہیں۔

شکل (iii) میں اگرچہ بلندی، قاعدہ سے عموداً واقع ہے لیکن قاعدہ دائری نہیں۔ لہذا ایسے مخروط قائمہ الزاویہ مخروط نہیں ہوں گے۔

10.4.1 مخروط کی مائل بلندی



متصل شکل (مخروط) میں $\overline{AO}$ ، $\overline{OB}$ سے عموداً واقع ہے۔

$\triangle AOB$ مثلث قائمہ الزاویہ ہوگا۔

$\overline{AO}$ مخروط کی بلندی (h) اور $\overline{OB}$ مخروط کا نصف قطر (r) ہوگا۔

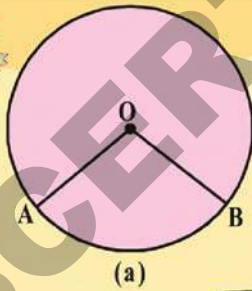
سے $\triangle AOB$

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

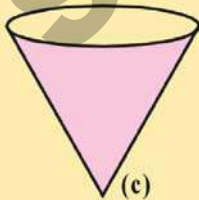
$$AB^2 = h^2 + r^2$$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

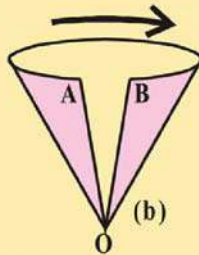
$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$



(a)



(c)



(b)

مشغلہ

ایک قطاع سے مخروط بنانے کا طریقہ

ذیل کی ہدایات کے مطابق عملی کام کیجئے۔

(i) ایک موٹے کاغذ پر شکل (a) کے مطابق ایک دائرہ بنائیے۔

(ii) شکل (b) کے مطابق ایک قطاع AOB تراشئے

(iii) B، A کے کناروں کو آہستگی سے قریب کرتے ہوئے انھیں ملائیے یا در ہے

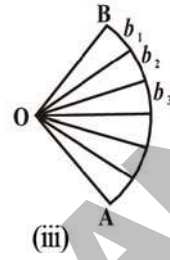
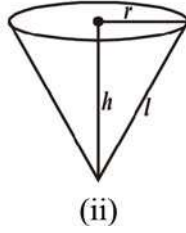
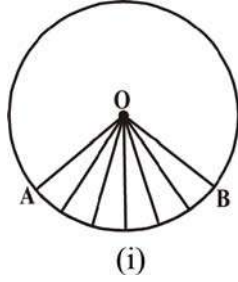
کہ A، B ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔ A سے B کو جوڑ کر انھیں ٹیپ

سے چپکا دیجئے۔ شکل (c)

(iv) آپ کو کیسی شکل حاصل ہوئی؟ کیا یہ قائم مخروط ہے؟

مخروط بنانے کے دوران OA اور OB کے کنارے کس طرح ملتے ہیں اور قطاع کی قوس AB کیسے حاصل ہوتی ہیں۔

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ



آئیے ہم اس قائم دائری مخروط کی سطح کا رقبہ معلوم کریں

قطاع کو مخروط میں ڈھالتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ OA، OB مل کر مخروط کی مائل بلندی بناتے ہیں جب کہ $\widehat{AB}$ مخروط کے قاعدہ کا محیط بن جاتا ہے۔

اب مخروط کو کھولتے ہوئے قطاع AOB کو کاٹ کر علاحدہ کر لیجئے شکل کے مطابق جتنے قطاع ہو سکتے ہیں اتنے قطاع الگ کاٹئے۔ آپ دیکھیں گے کہ ہر قطاع ایک چھوٹے مثلث جیسا دکھائی دے گا جس کے قاعدے $b_1, b_2, b_3, \dots$ وغیرہ ہوں گے جبکہ ان کی بلندی 'l' یعنی مخروط کی مائل بلندی کے مساوی ہوگی۔

اگر ہم ان مثلثات کا رقبہ محسوب کرتے ہوئے انہیں جمع کریں تو قطاع کا رقبہ حاصل ہوگا۔ ہم جانتے ہیں کہ قطاع سے مخروط بنتا ہے۔ لہذا قطاع کا رقبہ اس قطاع سے بننے والے مخروط کے منحنی رقبے کے مساوی ہوگا۔

مثلثات کے رقبوں کا حاصل جمع = مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ



کوشش کیجیے
کاغذ کے ایک دائری
شیٹ سے نصف قطر r اور
قوس l لیتے ہوئے قطاع تراشہ گیا۔ قوس
کے کناروں کو ملا کر ایک مخروط بنایا گیا۔
بتائیے کہ آپ اس قطاع کی منحنی سطح کے رقبے
کا ضابطہ $A = \pi r l$ کیسے اخذ کریں گے۔

$$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \frac{1}{2} b_4 l + \dots$$

$$= \frac{1}{2} l (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots)$$

$$= \frac{1}{2} l \quad (B \text{ سے } A \text{ تک منحنی خط کی لمبائی یا مخروط کے قاعدے کا محیط})$$

$$= \frac{1}{2} l (2\pi r) \quad (\because b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 2\pi r, \text{ (مخروط کا نصف قطر ہے)})$$

جیسا کہ $\widehat{AB}$ سے دائرہ بنتا ہے۔

لہذا مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $\pi r l =$
 جہاں l مخروط کی مائل بلندی اور r اس کا نصف قطر ہوگا۔

10.4.3 مخروط کی کل سطح کا رقبہ

اگر کسی مخروط کے قاعدے کو بند کرنا ہو تو ہمیں ایک ایسے دائرے کی ضرورت ہوگی جس کا نصف قطر مخروط کے نصف قطر کے مساوی ہوگا۔
 مخروط کی کل سطح کا رقبہ کیسے حاصل ہوگا؟ اس کی کل سطح کا رقبہ محسوب کرنے کے لیے آپ کو کون کونسی سطحیں جمع کرنی ہوں گی؟

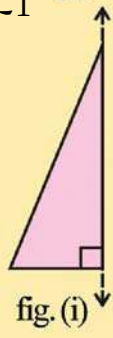
$$\begin{aligned} \text{مخروط کی کل سطح کا رقبہ} &= \text{منحنی سطح کا رقبہ} + \text{اس کے قاعدے کا رقبہ} \\ &= \pi r l + \pi r^2 \\ &= \pi r (l + r) \end{aligned}$$

(جہاں r نصف قطر اور l مائل بلندی ہوگی)

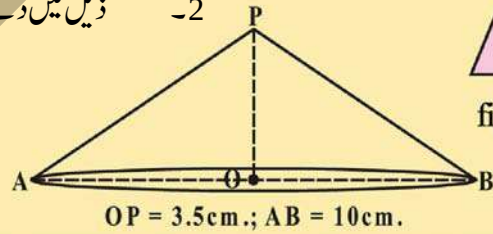
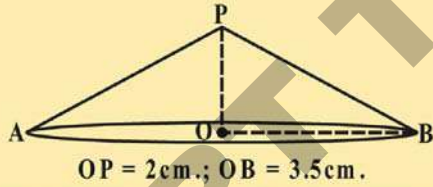
مخروط کا کل سطحی رقبہ $= \pi r (l + r)$



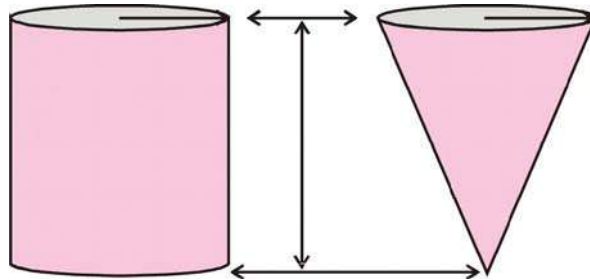
- 1- ایک مثلث قائم الزاویہ تراشے۔ اس کے عمودی ضلع سے متصل ایک ڈوری باندھیے جیسے کہ شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔
 ڈوری میں دونوں سروں کو پکڑ کر گھمائیے۔
 آپ نے کیا دیکھا؟



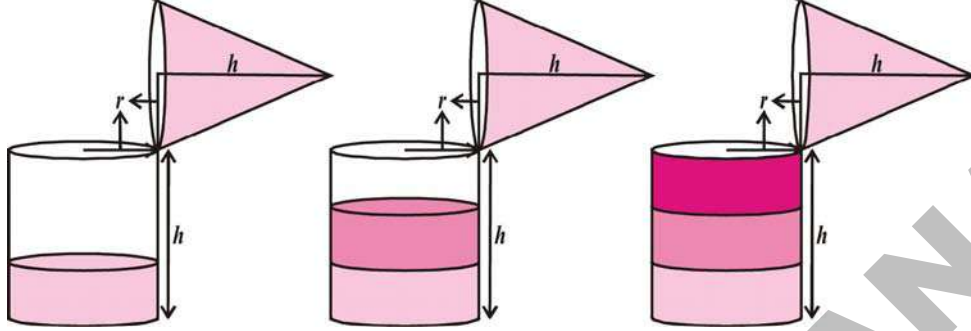
- 2- ذیل میں دیئے ہوئے ہر دو قائم مخروطوں کی منحنی سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔



10.4.4 قائم دائری مخروط کا حجم (Volume of Right Circular Cone)



مساوی نصف قطر اور مساوی بلندیوں کے مخروط اور دائرے بنائے اور ان کی مدد سے ایک تجربہ کیجیے۔ اس تجربے سے مخروط کا حجم محسوب کرنے میں مدد ملے گی۔



مساوی نصف قطر اور مساوی بلندیوں کے مخروط اور دائرے بنائے اور ان کی مدد سے ایک تجربہ کیجیے۔ اس تجربے سے مخروط کا حجم محسوب کرنے میں مدد ملے گی۔

- مخروط کو پانی سے لبا لب بھر دیجیے اور اس پانی کو خالی استوانے میں منتقل کیجیے۔ پانی استوانے میں کچھ حصے ہی تک بھرے گا۔
 - ایک بار پھر مخروط کو لبا لب بھرتے ہوئے پانی کو دوبارہ استوانے میں ڈالیں۔ استوانہ ہنوز خالی ہے۔
 - جب مخروط کو تیسری مرتبہ بھر کر پانی استوانے میں ڈالا جائے گا تو اس وقت غور کیجیے کہ استوانہ بھرایا نہیں۔ اس تجربے سے کیا آپ کو مخروط کے حجم اور استوانے کے حجم میں کوئی نسبت دکھائی دیتی ہے۔
- ہم کہہ سکتے ہیں کہ مخروط کا 3 گنا حجم استوانے کے حجم کے مساوی ہوگا جب کہ ان کی بلندیاں اور قاعدے مساوی ہوں۔ لہذا مخروط کا حجم استوانے کے حجم کا ایک تہائی ہوگا۔

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

جہاں پر r مخروط کے قاعدے کا نصف قطر اور h اس کی بلندی ہے۔

مثال 6: شکل (i) پر غور کیجیے جس میں مکئی کا ایک بھٹہ دکھایا گیا ہے جو مخروطی ہے۔ اس کے نچلے حصے کا نصف 1.4 سمر اور لمبائی یعنی بلندی 12 سمر ہے۔ اگر ایک مربع سمر کے رقبے میں چار دانے آتے ہیں تو بتاؤ کہ توپورے بھٹے میں دانوں کی تخمینہ تعداد کیا ہوگی۔

$$\text{یہاں } l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2} \text{ cm.}$$

$$= \sqrt{145.96} = 12.08 \text{ cm تقریباً}$$

$$= \pi r l = \text{لہذا بھٹے کی سطح کا رقبہ جو کہ مخروطی وضع کا ہے}$$

$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08 \text{ cm}^2$$



حل:

$$= 53.15 \text{ cm}^2$$

$$= 53.2 \text{ cm}^2 \quad \text{تقریباً}$$

بھٹے کی ایک مربع سہر سطح پر دانوں کی تعداد

$$= 4$$

لہذا بھٹے کی ساری سطح پر دانوں کی تعداد

$$= 53.2 \times 4 = 212.8 = 213 \quad \text{تقریباً}$$

لہذا سارے بھٹے پر تقریباً 213 دانے ہوں گے۔

مثال 7: ایک مخروط جس کا نصف قطر 5.6cm اور جو 158.4 مربع سہر سطح رکھتا ہے۔ مائل بلندی اور بلندی دریافت کیجیے۔

مائل بلندی l

بلندی h

نصف قطر = 5.6 cm

$$\text{مخروط کی مائل سطح کا رقبہ} = \pi r l = 158.4 \text{ cm}^2$$

حل:

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

$$l^2 = r^2 + h^2 \quad \text{ہم جانتے ہیں}$$

$$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$= 49.64$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$$h = 7.05 \text{ cm} \quad (\text{تقریباً})$$

مثال 8: ایک شامیانہ استوانی حصے اور مخروطی حصے پر مشتمل ہے۔ اس کا قطر 24 میٹر اور استوانی حصے کی بلندی 11 میٹر ہے۔ استوانی حصے سے اوپر

مخروط کے راس تک بلندی 5m ہے۔ اس شامیانے کی قیمت بہ حساب 10 روپے فی مربع محسوب کیجیے۔

$$\text{مخروط کا قطر} = 24 \text{ m} \quad \text{استوانی حصے کا نصف قطر}$$

حل:

$$\text{قاعدے کا نصف قطر} = 12 \text{ m}$$

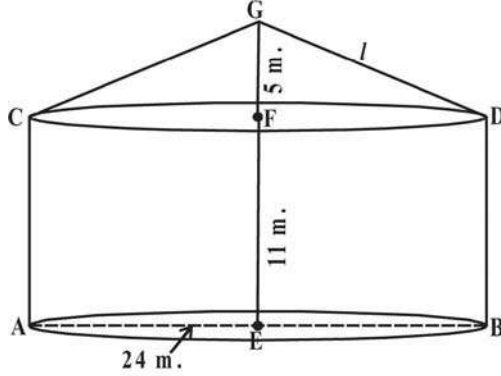
$$\text{استوانی حصے کی بلندی} = 11 \text{ m} = h_1$$

$$\text{مخروطی حصے کی بلندی} = 5 \text{ m} = h_2$$

فرض کیجیے کہ مخروط کی مائل بلندی 'l' لینے پر

$$l = GD = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\text{m}$$

مطلوبہ شامیانے کا رقبہ = استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ + مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ



$$\begin{aligned} &= 2\pi rh_1 + \pi rl \\ &= \pi r (2h_1 + l) \\ &= \frac{22}{7} \times 12 (2 \times 11 + 13) \text{m}^2 \\ &= \frac{22 \times 12}{7} \times 35 \text{m}^2 \\ &= 22 \times 60 \text{m}^2 \\ &= 1320 \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{شامیانے کی قیمت} = ₹10 \text{ per m}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{شامیانے کا رقبہ} \times \text{قیمت} &= \text{شامیانے کی قیمت} \\ &= ₹10 \times 1320 \\ &= ₹13,200. \end{aligned}$$

مثال 9: ایک بیس کیمپ پرفوج نے مخروطی شامیانہ نصب کیا۔ اس شامیانے کی بلندی 3 میٹر اور قطر 8 میٹر ہے۔ ذیل کو محسوب کیجیے۔

- شامیانے کے لیے مطلوبہ کینوس کی قیمت بہ حساب 70 روپے فی مربع میٹر
- اگر ہر فرد کو 3.5m^3 جگہ کی ضرورت ہو تو اس شامیانے میں کتنے افراد کے لیے جگہ میسر ہوگی؟

حل: شامیانے کا احاطہ 8m

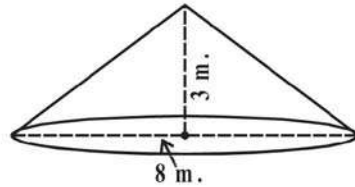
$$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{m}.$$

$$\text{بلندی} = 3\text{m}.$$

$$\begin{aligned} \text{مائل سطح کی بلندی } (l) &= \sqrt{h^2 + r^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} = 5\text{m}. \end{aligned}$$

$$\text{شامیانے کی منحنی سطح کا رقبہ} = \pi rl$$

$$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7} \text{m}^2$$



$$\begin{aligned} \text{مخروط کا حجم} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3 \\ &= \frac{352}{7} \text{ m}^3 \end{aligned}$$



(i) شامیانہ بنانے کے لئے درکار کیونوس کی قیمت

$$\begin{aligned} &= \text{شامیانہ کا منحنی سطح کا رقبہ} \times \text{قیمت فی مربع میٹر} \\ &= \frac{440}{7} \times 70 \\ &= ₹4400 \end{aligned}$$

(ii) شامیانے میں آدمیوں کی گنجائش

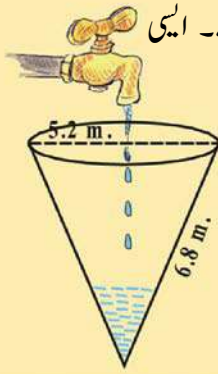
$$\begin{aligned} &= \frac{\text{مخروطی شامیانے کا حجم}}{\text{فی کس مطلوبہ گنجائش}} \\ &= \frac{352}{7} \div 3.5 \\ &= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36 \\ &= 14 \quad (\text{تقریباً}) \end{aligned}$$

مشق - 10.3



- 1- ایک مخروط کے قاعدے کا رقبہ 38.5 cm^2 ہے جب کہ اس کا حجم 77 cm^3 ہے۔ بلندی محسوب کرو۔
- 2- ایک مخروط کا حجم 462 cm^3 ہے تو اس کی بلندی کیا ہوگی جب کہ قاعدے کا نصف قطر 7 m دیا گیا ہے؟
- 3- کسی مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ 308 cm^2 ہے۔ اگر مائل بلندی 14 cm ہو تو حسب ذیل کو محسوب کیجیے۔
(i) قاعدے کا نصف قطر (ii) مخروط کی کل سطح کا رقبہ
- 4- 25 پیسے فی مربع سمر کے حساب سے ایک مخروط کی کل سطح پر رنگ وروغن کرنے کا خرچ 176 روپے ہوتا ہے تو بتائیے کہ اس مخروط کا حجم کیا ہوگا جب کہ مائل بلندی 25 سمر ہو؟
- 5- ایک دائرے سے جس کا نصف قطر 15 cm ہے، 216° کے زاویے کا ایک قطاع کاٹا گیا۔ اسکو کناروں سے جوڑ کر ایک مخروط کی شکل دی گئی۔ اس مخروط کا حجم کیا ہوگا؟
- 6- ایک شامیانے کی بلندی 9 m ہے۔ اس کا قطر 24 m ہو تو مائل بلندی کیا ہوگی؟ علاوہ ازیں 14 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے شامیانے کے لیے کیونوس کی قیمت بھی محسوب کیجیے؟

- 7- ایک مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $1159 \frac{5}{7}$ مربع سمر ہے۔ اگر اسکے قاعدے کا رقبہ $254 \frac{4}{7}$ مربع سمر ہو تو حجم معلوم کیجیے۔
- 8- ایک شامیانہ اس طرح نصب کیا گیا ہے کہ اس کے استوانی حصے کی بلندی 4.8m ہے جس کے اوپر مخروطی حصہ شامل کیا گیا ہے۔ قاعدے کا نصف قطر 4.5m اور شامیانے کی پوری بلندی 10.8 میٹر ہو تو اس شامیانے کے لیے درکار کیونس کتنا ہوگا؟ مربع میٹروں میں محسوب کرو۔
- 9- مخروط نما ایک شامیانہ نصب کرنے کے لیے 3m چوڑے کتنے ٹارپولین کی ضرورت ہوگی جب کہ شامیانے کی بلندی 8m اور نصف قطر 6m ہونا چاہیے۔ فرض کیجیے کہ مایہ زائد کپڑا چھوڑنے اور ضائع ہونے والا ٹارپولین تقریباً 20cm ہے۔ $(\pi = 3.14)$ لیجئے۔
- 10- ایک جوکر کی ٹوپی قائم مخروط کی شکل میں ہے جس کا نصف قطر 7cm اور بلندی 27cm ہے۔ ایسی 10 ٹوپوں کے لیے کتنا شیٹ درکار ہوگا؟
- 11- مخروطی برتن کا قطر 5.2 میٹر اور مخروط کی مائل بلندی 6.8 میٹر میں پانی 1.8 cm^3 فی منٹ کی شرح سے ٹپکا جا رہا ہے۔ برتن دھونے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟
- 12- دو مشابہ مخروطوں کے حجم 12π مکعب اکائیاں اور 96π ہیں۔ اگر چھوٹے مخروط کی سطح کا رقبہ 15π مکعب اکائیاں ہو تو بڑے مخروط کی منحنی سطح کیا ہوگی؟

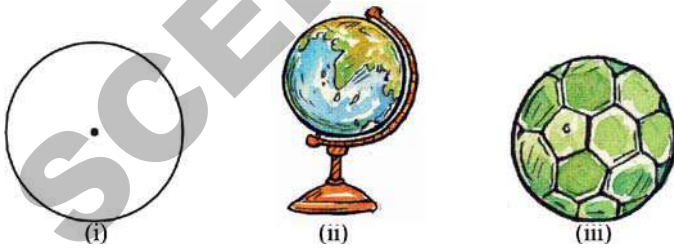


اشارہ: مساوی مخروطوں کے لیے

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$= \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^3 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2$$

10.5 کرہ (Sphere)



دی ہوئی اشکال سے آپ واقف ہیں۔ کیا آپ ان میں فرق بتا سکتے ہیں؟

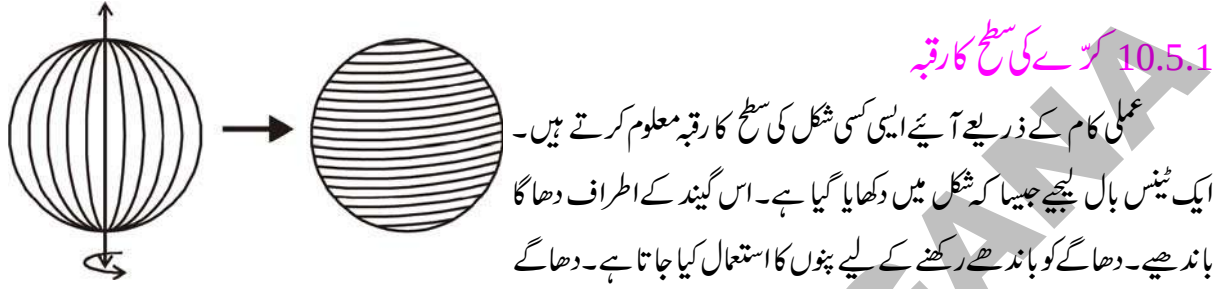
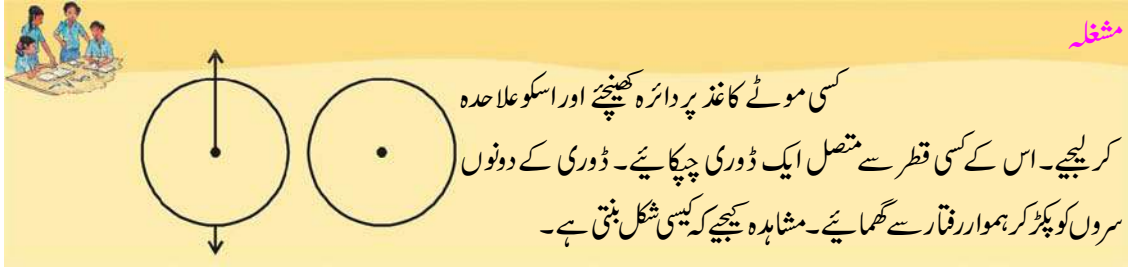
شکل (i) ایک دائرہ ہے۔ اسے آپ ایک کاغذ پر با آسانی بنا سکتے ہیں۔ اس لیے کہ یہ ایک مستوی شکل ہے۔

دائرہ ایک بند مستوی شکل ہوتا ہے جس کے نقاط کا مرکز سے فاصلہ (نصف قطر) مستقل ہوتا ہے۔

باقی ماندہ دو اشکال ٹھوس اجسام کو ظاہر کرتی ہیں۔ یہ ٹھوس اجسام دائری شکل کی ہوتی ہیں جنہیں کرہ کہتے ہیں۔

دراصل ایک کرہ ایک تین ابعادی مجسم ہے جس کے نقاط ہر طرف پائے جاتے ہیں۔ اس کا دائری محیط کسی ایک مستقل نقطے (مرکز)

سے مساوی فاصلہ رکھتا ہے۔ اس نقطے کو کرے کا مرکز کہا جاتا ہے۔ مرکز سے کرہ کے کسی بھی نقطے کا فاصلہ نصف قطر ہوتا ہے۔



عملی کام کے ذریعے آئیے ایسی کسی شکل کی سطح کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔
ایک ٹینس بال لیجیے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس گیند کے اطراف دھاگے
باندھیے۔ دھاگے کو باندھے رکھنے کے لیے بنوں کا استعمال کیا جاتا ہے۔ دھاگے
کے دونوں سروں پر نشان لگائیے۔ اب آہستگی سے دھاگے کو کڑے کی سطح سے نکال
لیجیے۔

کڑے کا نصف قطر معلوم کرتے ہوئے متصل اشکال کے مطابق گیند کے
نصف قطر کے مساوی نصف قطر رکھنے والے چار دائرے بنائیے۔ ان دائروں کو
کڑے سے الگ کیے ہوئے دھاگے سے پر کیجیے



آپ نے کیا دیکھا؟

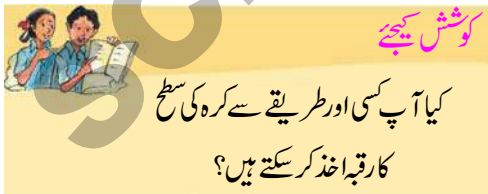
دھاگا جسے گیند (کڑہ) کے اطراف لپیٹ دیا گیا تھا، دیئے ہوئے چار دائروں کے رقبے کو مکمل طور پر پر کر دیتا ہے جب کہ ان دونوں
کے نصف قطر مساوی ہیں۔ اس تجربے سے پتہ چلتا ہے کہ کڑے کی سطح کا رقبہ جس کا نصف قطر r ہے، اتنے ہی نصف قطر رکھنے والے 4
دائروں کی سطح کے رقبے کے مساوی ہوگا۔

$$\text{کڑہ کا سطحی رقبہ} = 4 \times \text{دائرے کا رقبہ}$$

$$4\pi r^2 =$$

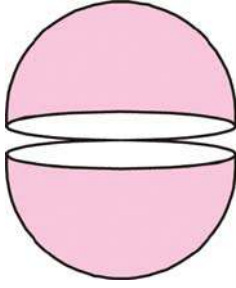
$$4\pi r^2 = \text{کڑہ کا سطحی رقبہ}$$

جہاں r کڑہ کا نصف قطر



10.5.2 نصف کڑہ (Hemisphere)

ایک کڑہ لیتے ہوئے اسے بالکل دو مساوی حصوں میں اس طرح کاٹیں کہ دائری مستوی مرکز سے گزرتا ہے۔



اب ہمیں کرے کے دو بالکل مساوی ٹکڑے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، حاصل ہوں گے۔
ہر ایک ٹکڑے کو نصف کرہ (نصف کرہ) کہتے ہیں۔

کرے پر صرف ایک ہی منحنی سطح ہوتی ہے۔ اگر اسے دو مساوی ٹکڑوں میں کاٹ دیا جائے تو یہ منحنی سطح دو مساوی رقبے کے منحنی حصوں میں تقسیم ہو جائے گی۔

نصف کرے کی سطح کے رقبے کا تخمینہ آپ کیسے کریں گے؟
واضح رہے کہ کسی نصف کرے کی سطح کا رقبہ کرے کی سطح کے رقبے کا نصف ہوگا۔

$$\text{نصف کرہ کا سطحی رقبہ} = \frac{1}{2} \text{ کرہ کا سطحی رقبہ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\pi r^2$$

$$2\pi r^2 = \text{نصف کرہ کا سطحی رقبہ}$$

نصف کرے کا قاعدہ دائروی ہوتا ہے

$$\pi r^2 = \text{اس کا رقبہ}$$

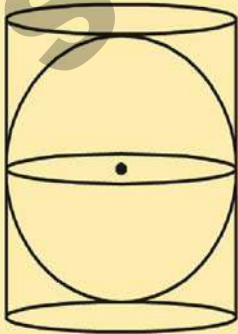
آئیے نصف کرے کی منحنی سطح اور اس کے قاعدے کی سطح کا حاصل جمع معلوم کریں۔ یہ حاصل جمع نصف کرے کی کل سطح کا رقبہ کہلائے گا۔

$$\text{نصف کرے کی کل سطح کا رقبہ} = \text{منحنی سطح کا رقبہ} + \text{قاعدے کا رقبہ}$$

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2$$

$$3\pi r^2 = \text{نصف کرہ کی کل سطح کا رقبہ}$$



یہ کیجیے

1- r اکائیاں نصف قطر رکھنے والا ایک کرہ مساوی نصف قطر کے ایک قائم استوانے میں بالکل صحیح طور پر رکھا جاسکتا ہے۔ (شکل دیکھئے)

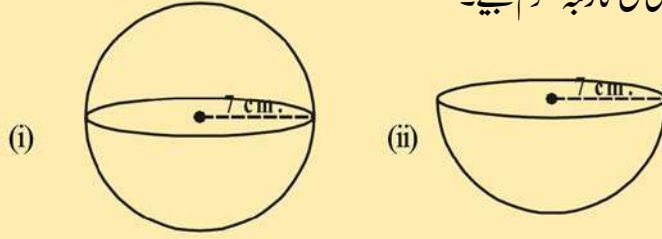
ذیل کو محسوب کیجیے۔

(i) کرے کی سطح کا رقبہ

(ii) استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ

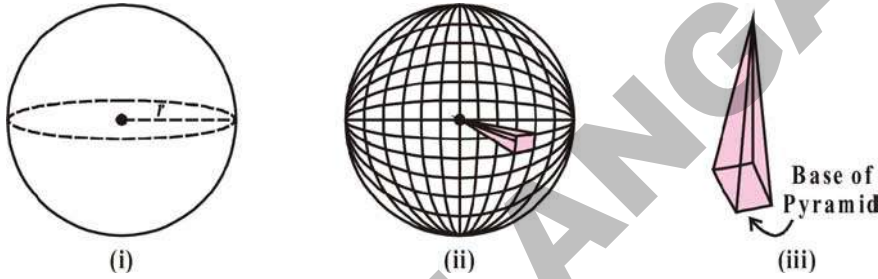
(iii) نمبر (i) اور (ii) کے جوابات کی نسبت

2. ذیل میں دی گئی اشکال کی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔



10.5.3 کرہ کا حجم (Volume of Sphere)

کرہ کا حجم معلوم کرنے کے لیے فرض کیجیے کہ کرہ کئی مماثل اہرام سے مل کر بنا ہے جن کے راس کرے کے مرکز پر ملتے ہیں۔ اسے شکل میں واضح کیا گیا ہے۔



آئیے اس کو مرحلہ وار سمجھنے کی کوشش کریں

- 1- فرض کیجیے کہ کسی ٹھوس کرہ کا نصف قطر r ہے۔ اسکو شکل (i) میں بتایا گیا ہے۔
- 2- فرض کیجیے کہ یہ کرہ n مماثل اہرام سے مل کر بنتا ہے۔ اسکو شکل (ii) میں دیکھا جاسکتا ہے۔
- 3- کرے کے ایک حصے (ہرم) پر غور کیجیے۔ ہر اہرام کا ایک قاعدہ ہوگا۔ ان قاعدوں کے رقبے A_1, A_2, A_3 متصور کیے جائیں۔ ہرم کی لمبائی کرے کے نصف قطر کی لمبائی کے مساوی ہوگی تب

$$\text{ہرم کا حجم} = \frac{1}{3} \times \text{قاعدے کا رقبہ} \times \text{بلندی}$$

$$= \frac{1}{3} A_1 r$$

- 4- چوں کہ ایسے ہی n اہرام پائے جاتے ہیں تب

$$\text{مرتبہ } n \text{ اہراموں کا حجم} = \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + \dots n$$

$$= \frac{1}{3} r [A_1 + A_2 + A_3 + \dots n \text{ مرتبہ}]$$

کسی بھی کنیٹر ضلعی کے

قاعدے کو اہرام کے قاعدہ

کے طور پر لیا جاتا ہے۔

$$= \frac{1}{3} \times A r$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots \dots \dots n \text{ مرتبہ}$$

'n' اہراموں کا سطحی رقبہ

5- ان تمام اہرام کے مجموعوں کا حاصل جمع کڑے کے حجم کے مساوی ہوگا اور ان اہرام کے قاعدوں کے رقبوں کا حاصل جمع تقریباً کڑے کی سطح کے رقبے کے یعنی $4\pi r^2$ کے مساوی ہوگی۔

لہذا کرہ کا حجم

$$= \frac{1}{3} (4\pi r^2) r$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ مکعب اکائیاں}$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \text{کرہ کا حجم}$$

جہاں r کرہ کا نصف قطر ہوگا۔

نصف کڑے کے حجم کو آپ کس طرح محسوب کریں گے؟ نصف کڑے کا حجم کڑے کے حجم کا آدھا ہوگا۔

$$\text{نصف کرہ کا حجم} = \frac{1}{2} \text{ کرہ کا حجم}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

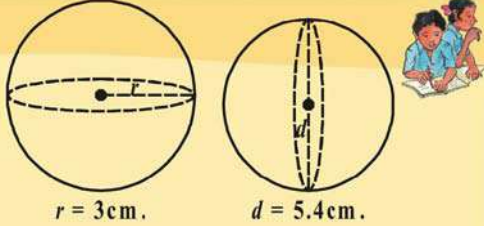
$$= \frac{2}{3} \pi r^3$$

(اشارہ : تریبوز یا ایسی ہی کسی اور چیز کی مدد سے آپ یہ ضوابط اخذ کر سکتے ہیں۔)

یہ کیجیے

1- متصل اشکال کے مطابق کڑے کا حجم معلوم کیجیے۔

2- ایسے کڑے کا حجم محسوب کیجیے جس کا نصف قطر 6.3cm ہے۔



$r = 3\text{cm}$, $d = 5.4\text{cm}$.

مثال 10: اگر کسی کڑے کی سطح کا رقبہ 154 cm^2 ہے، تو اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل: کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

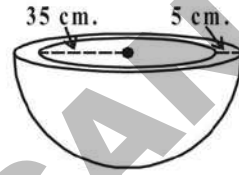
$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}$$



مثال 11: ایک نصف کرہ برتن جیسے انداز میں پتھر سے تراشا گیا، جس کی موٹائی 5cm ہے۔ اگر اندرونی نصف قطر 35cm ہو تو اس برتن نما نصف کرے کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے R بیرونی نصف قطر اور r اندرونی نصف قطر ہے۔ برتن کی موٹائی 5cm ہے۔
کل سطح کا رقبہ = نصف کرے کی بیرونی منحنی سطح کا رقبہ + نصف کرے کی اندرونی منحنی سطح کا رقبہ + مدوری حلقے کا رقبہ

$$\begin{aligned} &= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2) \\ &= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2) \\ &= \frac{22}{7}(3R^2 + r^2) = \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{6025 \times 22}{7} \text{ cm}^2 \\ &= 18935.71 \text{ cm}^2 \quad \text{تقریباً} \end{aligned}$$



مثال 12: ایک نیم کروی گنبد کو رنگ و روغن کرنا طے کیا گیا ہے۔ (شکل-1 دیکھئے) گنبد کے قاعدے کا محیط 17.6m ہو تو 5 روپے فی 100cm^2 کے حساب سے گنبد کی آہک پاشی کا خرچ کیا ہوگا؟

حل: چونکہ گنبد کی ایک ہی منحنی سطح پر آہک پاشی کرنی ہے، ہمیں اس کی منحنی سطح محسوب کرنا پڑے گا۔

$$2\pi r = 17.6 \text{ میٹر} \quad \text{لہذا} \quad r = \frac{17.6}{2\pi}$$

$$\text{لہذا گنبد کا نصف قطر} = \frac{17.6 \times 7}{2 \times 22} \text{ m}$$

$$2.8 \text{ m} =$$

$$2\pi r^2 = \text{گنبد کی منحنی سطح کا رقبہ}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2.$$

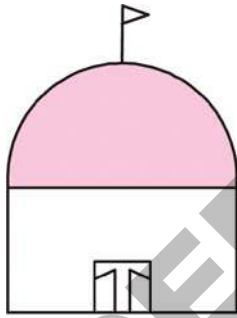


fig 1

آہک پاشی بہ حساب فی 100 مربع سمر

$$500 \text{ روپے} = \text{لہذا آہک پاشی فی مربع میٹر}$$

$$49.28 \times 500 \text{ روپے} = \text{گنبد کی آہک پاشی کا خرچ}$$

$$= 24640 \text{ روپے}$$

مثال 13: ایک ایسے کھوکھلے کرے کے اندر جہاں کرتب باز اپنے فن کا مظاہرہ کرتے ہیں، قطر 7m ہے۔ بتائیے کہ ایک موٹر سیکل راں کے لیے اس کے اندر کتنا رقبہ دستیاب ہوگا؟

حل: کرے کا قطر = 7 میٹر لہذا نصف قطر = 3.5 میٹر
یعنی کرے کے اندر موٹر سیکل راں کے لیے دستیاب رقبہ ”کرے کی پوری سطح ہوگی“

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2$$

$$= 154 \text{ m}^2.$$

مثال 14: شاٹ پٹ ایک دھاتی کرہ ہوتا ہے جسے کھلاڑی مقابلوں میں دور تک پھینکتے ہیں۔ ایسے ہی ایک شاٹ پٹ کا نصف قطر 4.9cm ہے۔ اگر دھات کی کثافت 7.8gm/cu cm ہو تو شاٹ پٹ کی کمیت کیا ہوگی۔

حل: شاٹ پٹ چوں کہ ٹھوس دھاتی کرہ ہے لہذا اس کی کمیت کرے کے حجم اور دھات کی کثافت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگی۔ ہمیں کرے کا حجم مطلوب ہے۔

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \text{اب، کرے کا حجم}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$$= 493 \text{ cm}^3 \text{ تقریباً}$$

علاوہ ازیں ایک مکعب سردھات کی کمیت = 7.8 gm

لہذا شاٹ پٹ کی کمیت = 7.8 x 493 g

$$= 3845.44 \text{ g} = 3.85 \text{ kg} \text{ تقریباً}$$

مثال 15: ایک نیم کروی کٹورے کا نصف قطر 3.5cm ہے۔ اس میں کتنا پانی سما یا جاسکے گا؟

حل: کٹورے میں پانی کی گنجائش = نیم کرے کا حجم

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3$$

$$= 89.8 \text{ cm}^3. \text{ (تقریباً)}$$



مشق - 10.4



- 1- ایک کڑے کا نصف قطر 3.5cm ہو تو اس کی منحنی سطح کا رقبہ اور حجم محسوب کیجیے۔
- 2- ایک کڑے کی سطح کا رقبہ $1018 \frac{2}{7}$ مربع سمر ہے۔ اس کا حجم کیا ہوگا؟
- 3- گلوب پر خط استوا کی لمبائی 44cm ہے۔ گلوب کی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔
- 4- ایک گیند کا قطر 21cm ہے۔ ایسی 5 گیندیں تیار کرنے کے لیے کتنا چمڑا درکار ہے؟
- 5- دو کڑوں کے نصف قطروں کی نسبت 2:3 ہے۔ ان کی سطح کے رقبوں اور حجموں کی نسبت محسوب کیجیے۔
- 6- 10cm نصف قطر کے کسی نصف کڑے کی کل سطح کا رقبہ محسوب کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)
- 7- ہوا بھرنے کے دوران کسی غبارے کا قطر 14 سے 18 سمر ہو جاتا ہے۔ ان دو صورتوں میں غبارے کی سطحوں کے رقبے کی نسبت دریافت کرو۔
- 8- ایک پیتل کے نیم کروی کٹورے کی موٹائی 0.25cm ہے۔ اگر اندرونی نصف قطر 5cm ہو تو بیرونی سطح کے رقبہ اور اندرونی سطح کے رقبے میں نسبت معلوم کرو۔
- 9- جست کی ایک گیند کا قطر 2.1cm ہے۔ جست کی کثافت 11.34 گرام فی مکعب سمر ہے ہو تو اس گیند کا وزن کیا ہوگا؟
- 10- ایک دھاتی استوانہ کو جس کا قطر 5cm اور بلندی $3 \frac{1}{3}$ ہے، پگھلا کر کڑے میں تبدیل کیا گیا۔ کڑے کا قطر معلوم کیجیے۔
- 11- 10.5cm قطر کے ایک نصف کروی برتن میں کتنے لیٹر دودھ آئے گا؟
- 12- ایک نصف کروی کٹورے کا قطر 9cm ہے۔ ایک مائع کو 3cm قطر اور 3cm بلندی رکھنے والی استوانی بوتلوں میں داخل کیا گیا۔ اگر کٹورے کا پورا مائع بوتلوں میں بھرا گیا ہو تو کتنی بوتلیں بھر پائیں گی؟

ہم نے کیا سیکھا؟



- 1- مکعب نما اور مکعب ایسے قائم منشور ہوتے ہیں جن کے جملہ چھ (6) پہلو ہوتے ہیں، جن میں سے 4 طرفی سطحیں اور ایک قاعدہ اور ایک ڈھکن کی سطح ہوتی ہے۔
- 2- اگر کسی مکعب نما کی لمبائی l ، عرض b اور بلندی h ہو تو

$$2(lb + bh + lh) = \text{مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ}$$

$$2h(l + b) = \text{مکعب نما کی طرفی سطح کا رقبہ}$$

$$lbh = \text{مکعب نما کا حجم}$$

3- کسی مکعب کے ضلع کی لمبائی l اکائیاں ہوتی

$$6l^2 = \text{مکعب کی کل سطح کا رقبہ}$$

$$4l^2 = \text{مکعب کی طرفی سطح کا رقبہ}$$

$$l^3 = \text{مکعب کا حجم}$$

4- مساوی قاعدہ اور بلندی رکھنے والے کسی ہرم کا حجم قائم منشور کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے۔

5- ایک استوانہ وہ منشور ہوتا ہے جس کے دونوں کنارے دائری اور طرفی سطح منحنی ہوتی ہے۔ اگر قاعدے کے مرکز سے اوپری سرے کو ملانے والا خط قاعدے کے عمود وار ہو تو اس منشور کو قائم دائری استوانہ کہتے ہیں۔

6- ایک قائم استوانے کا نصف قطر r اور بلندی h ہو تو

$$2\pi rh = \text{استوانے کی منحنی سطح کا رقبہ}$$

$$2\pi r(r + h) = \text{استوانے کی کل سطح کا رقبہ}$$

$$\pi r^2 h = \text{استوانے کا حجم}$$

7- مخروط، علم ہندسہ (جیومیٹری) میں ایک ایسا مجسم ہوتا ہے جس کا قاعدہ دائرہ اور بلند ترین نقطہ راس پر ختم ہوتا ہے۔ راس سے قاعدے کے مرکز کو ملانے والا خط قاعدے کے عمود وار ہو تو اس مجسم کو قائم مخروط کہتے ہیں۔

8- مخروط کی انتہائی بلندی سے دائرے کے کسی بھی نقطے کو ملانے والا خط مستقیم مائل بلندی کہلاتا ہے۔

$$l^2 = h^2 + r^2$$

9- اگر r نصف قطر ہو، h بلندی اور l مائل بلندی ہو تو

$$\pi rl = \text{مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ}$$

$$\pi r(r + l) = \text{مخروط کی کل سطح کا رقبہ}$$

10- ایک مخروط کا حجم اس استوانے کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے جس کے قاعدے کا نصف قطر اور بلندی مخروط کے نصف قطر اور بلندی کے مساوی ہو یعنی

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \text{مخروط کا حجم}$$

11- ایک کرہ ایک ایسا مجسم ہوتا ہے جس میں ایک مرکز سے اس کے محیط پر واقع ہونے والے تمام نقاط کا فاصلہ مساوی ہوتا ہو۔ اس مستقل نقطے کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلے کو اس کا نصف قطر کہتے ہیں۔

12۔ اگر کسی کرے کا نصف قطر r ہو تو

• کرے کی سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

• کرے کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

13۔ وہ مستوی جو کسی کرے کے مرکز سے گزرتے ہوئے کرے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے، نصف کرہ کہلاتا ہے۔

• نصف کرے کی منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi r^2$

• نصف کرے کی کل سطح کا رقبہ $= 3\pi r^2$

• نصف کرے کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3$

کیا آپ جانتے ہیں؟

8×8 جادوئی مربع کیسے بنائیں؟

دی ہوئی اشکال کے مطابق 1 سے 64 تک اعداد کو سلسلہ وار خانوں میں لکھیے۔ پھر ان کے مختلف مربعوں کے وتر کھینچئے۔ نیچے کی جانب جادوئی مربع حاصل کرنے کے لیے کسی وتر پر پائے جانے والے عدد کو اس کے متماسی عدد سے بدل دیجیے۔ (کسی جادوئی مربع میں دو اعداد اس وقت ایک دوسرے کے متماسی اعداد کہلاتے ہیں جب کہ جادوئی مربع کے اقل ترین اور اعظم ترین اعداد کا حاصل جمع مذکورہ دو اعداد کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہو)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

☆ جادوئی مربع اعداد کے سلسلوں سے بننے والا ایسا مربع ہوتا ہے جس کی کسی بھی صف یا کالم کے اعداد کا مجموعہ مساوی ہو۔ آپ ایسے ہی چند جادوئی مربع بنانے کی کوشش کریں۔