પ્રકરણ 12

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો પરિચય

❖*Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL*❖

12.1 પ્રાસ્તાવિક

Leonhard Euler (1707-1783)

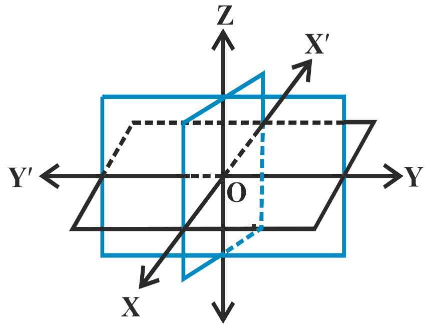
તમને યાદ હશે કે સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણને સમતલમાં બે પરસ્પર લંબ રેખાઓની જરૂર પડે છે. આ રેખાઓને *યામાક્ષો* કહે છે અને બે સંખ્યાઓને *અક્ષોને સાપેક્ષ તે બિંદુના યામ* કહે છે. વાસ્તવિક જીવનમાં આપણને કેવળ સમતલમાં રહેલાં બિંદુઓ સાથે જ વ્યવહાર કરવાનો હોય છે તેમનથી; ઉદાહરણ તરીકે, અવકાશમાં ઉછાળેલા દડાનું વિવિધ સમયબિંદુએ સ્થાન અથવા એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે ઊડતા વિમાનનું ઉડ્ડયન દરમિયાન જુદાં જુદાં સમયબિંદુએ સ્થાન.

આ જ રીતે જો રૂમની છતથી લટકી રહેલા વીજળીના ગોળાના સૌથી નીચેના બિંદુને અથવા રૂમની છત સાથે લાગેલા પંખાના મધ્યબિંદુને નક્કી કરવું હોય, તો આપણને માત્ર જે બિંદુ નક્કી કરવું છે તેના બે લંબ દીવાલોથી લંબઅંતરો જ નહિ, પરંતુ તે બિંદુની રૂમના તળિયેથી ઊંચાઈની પણ જરૂર પડશે. પરસ્પર ત્રણ લંબ સમતલોથી બિંદુનાં લંબઅંતરો એટલે કે રૂમનું ભોયતળિયું અને રૂમની બે પાસપાસેની દીવાલોથી લંબઅંતરો એવી ત્રણ સંખ્યાઓની આપણને જરૂર પડશે. *અહીં, આ ત્રણ સંખ્યાઓ ત્રણ અંતરો દર્શાવે છે તેમને માત્ર બે જ નહિં ત્રણ યામ-સમતલોને સાપેક્ષ બિંદુના યામ*

કહે છે. આથી અવકાશમાં બિંદુને ત્રણ યામ હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં ભૂમિતિના પાયાના સિદ્ધાંતોનો અભ્યાસ કરીશું.

12.2 ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં યામાક્ષો અને યામ સમતલો

બિંદુ O આગળ છેદતાં એકબીજાને પરસ્પર લંબ હોય એવા ત્રણ સમતલો લો. (આકૃતિ 12.1) આ ત્રણ સમતલો અનુરૂપ રેખાઓ X'OX, Y'OY અને Z'OZ માં છેદે છે. તેમને અનુક્રમે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ કહેવાય છે. આપણે એ પણ નોંધીશું કે, આ રેખાઓ એકબીજીને પરસ્પર લંબ છે. આ રેખાઓ લંબાક્ષ યામ-પદ્ધતિનું નિર્માણ કરે છે. સમતલો XOY, YOZ અને ZOX ને અનુક્રમે XY-સમતલ, YZ-સમતલ અને ZX-સમતલ કહે છે. તે ત્રણ ***યામ-સમતલો*** તરીકે ઓળખાય છે. આપણે XOY સમતલને કાગળનું સમતલ અને રેખા Z'OZ ને સમતલ XOY ને લંબરેખા તરીકે લઈએ. જો કાગળના સમતલને સમક્ષિતિજ સમતલ લઈએ તો રેખા Z'OZ શિરોલંબ થશે.



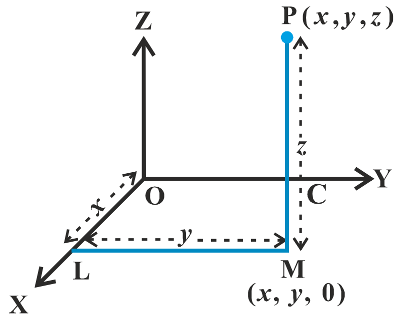
આકૃતિ 12.1

XY- સમતલથી ઊર્ધ્વ તરફ OZ ની દિશામાં અંતર ધન લેવામાં આવે છે તથા અધઃ તરફ OZ' ની દિશામાં અંતર ઋણ લેવામાં આવે છે. આ જ રીતે, ZX-સમતલની જમણી તરફ OY ની દિશામાં અંતર ધન અને ZX-સમતલની ડાબી તરફ OY' ની દિશામાં અંતર ઋણ, YZ-સમતલની સામેની તરફ OX ની દિશામાં અંતર ધન અને પાછળની તરફ OX' ની દિશામાં અંતર ઋણ લેવામાં આવે છે. બિંદુ O ને યામ-પદ્ધતિમાં ઊગમબિંદુ કહે છે. ત્રણેય યામ-સમતલો અવકાશનું અષ્ટાંશો (એકનો આઠમો ભાગ) તરીકે ઓળખાતા આઠ ભાગોમાં વિભાજન કરે છે. આ અષ્ટાંશોનાં નામ અનુક્રમે XOYZ, X'OYZ, X'OY'Z, XOY'Z, XOYZ', X'OYZ', X'OY'Z' અને XOY'Z' છે અને તેઓ અનુક્રમે અષ્ટાંશો I, II, III, ..., VIII સંકેતોથી દર્શાવાય છે.

12.3 અવકાશમાં બિંદુના યામ

યામાક્ષો, યામ-સમતલો અને ઊગમબિંદુ ધરાવતી નિયત યામ-પદ્ધતિની પસંદગી કર્યા પછી, હવે આપણે એ વર્ણવીશું કે અવકાશમાં આપેલ બિંદુ સાથે કેવી રીતે ત્રણ યામ (x, y, z) સાંકળી શકાય અને એથી ઊલટું આપેલ સંખ્યાઓના ત્રય (x, y, z) કેવી રીતે અવકાશમાં બિંદુ દર્શાવે છે.

અવકાશમાં બિંદુ P આપેલ છે. આપણે XY- સમતલ પર લંબ PM દોરીશું. M એ લંબનો લંબપાદ છે.(આકૃતિ 12.2.) હવે આપણે બિંદુ M થી x-અક્ષને L માં મળે એવો લંબ ML દોરીશું. તે x-અક્ષને L આગળ મળે છે. OL ને x, LM ને y અને MP ને z લો. અહીં x, y અને z ને અવકાશમાં બિંદુ P ના અનુક્રમે x, y અને z-યામ કહેવાય છે. આકૃતિ 12.2 પરથી આપણે નોંધી શકીએ કે, બિંદુ P (x, y, z) એ અષ્ટાંશ XOYZ માં આવેલ છે અને તેથી બધા x, y, z ધન છે. જો બિંદુ P અન્ય કોઈ અષ્ટાંશમાં હોત તો, x, y અને z ની સંજ્ઞા તેને અનુરૂપ બદલાઈ હોત. આમ, અવકાશના પ્રત્યેક બિંદુ P ને અનુરૂપ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમિક ત્રય (x, y, z) સંકળાયેલાં છે.

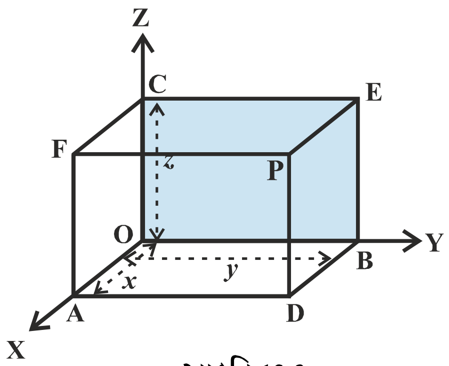


આકૃતિ 12.2

આનાથી ઊલટી રીતે, આપેલ કોઈપણ ત્રય (x, y, z) ને સંગત સૌપ્રથમ આપણે x-અક્ષ પર બિંદુ L એ x ને અનુરૂપ નિયત કરીશું, ત્યાર બાદ XY-સમતલમાં એવું બિંદુ M નિવિષ્ટ કરીશું કે જેથી (x, y) એ બિંદુ XY-સમતલમાં M ના યામ હોય. અહીં એ નોંધીશું કે,

LM એ x-અક્ષને લંબ અથવા y-અક્ષને સમાંતર છે. બિંદુ M સુધી પહોંચીને XY-સમતલ પર લંબ MP દોરીશું અને z ને અનુરૂપ બિંદુ P દર્શાવીશું. આ રીતે મેળવેલા બિંદુ P ના યામ ત્યાર બાદ (x, y, z) થશે. આમ, અવકાશનાં બિંદુઓ અને વાસ્તવિક સંખ્યાઓનાં ક્રમિક ત્રય વચ્ચે એક-એક સંગતતા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

અન્યથા, અવકાશના બિંદુ P માંથી યામ-સમતલોને સમાંતર ત્રણ સમતલો એવા મળે કે જે x- અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુઓ A, B અને C માં છેદે. (આકૃતિ 12.3.) હવે, OA = x, OB = y અને OC = z લો. તેથી બિંદુ P ના યામ x, y અને z થશે અને આપણે P (x, y, z) લખીશું. એથી ઊલટી રીતે, આપણે આપેલ x, y અને z ને સંગત ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C ને ત્રણેય યામાક્ષો પર દર્શાવીશું. આપણે બિંદુઓ A, B અને C માંથી અનુક્રમે YZ-સમતલ, ZX-સમતલ અને XY-સમતલને સમાંતર સમતલો દોરીશું. આ ત્રણેય સમતલો ADPF, BDPE અને CEPF નું છેદબિંદુ એ સ્પષ્ટપણે બિંદુ P છે, જે ક્રમિક ત્રય (x, y, z) ને અનુરૂપ છે. આપણે અત્રે એ નિરીક્ષણ કરીએ કે જો P (x, y, z) એ અવકાશનું કોઈ બિંદુ હોય તો x, y અને z એ અનુક્રમે YZ, ZX અને XY સમતલોથી લંબઅંતરો છે.



આકૃતિ 12.3

નોંધ ઊગમબિંદુ O ના યામ (0,0,0) છે. x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(x, 0, 0)$ અને YZ-સમતલ પરનાં કોઈ પણ બિંદુના યામ $(0, y, z)$ હોય છે વગેરે.

નોંધ : બિંદુના યામોની સંજ્ઞા નિર્દેશ કરે છે કે બિંદુ કયા અષ્ટાંશમાં છે. નીચેનું કોષ્ટક આઠ અષ્ટાંશમાં યામોની સંજ્ઞા દર્શાવે છેઃ

કોષ્ટક 12.1

અષ્ટાંશો / યામ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 12.3 માં જો P (2, 4, 5) હોય તો F ના યામ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુ F માટે, OY ની દિશામાં અંતરનું માપ શૂન્ય છે. તેથી બિંદુ F ના યામ (2, 0, 5) થશે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ (–3, 1, 2) અને (–3, 1, –2) કયા અષ્ટાંશમાં આવેલ છે, તે શોધો.

ઉકેલ : કોષ્ટક 12.1 પરથી, બિંદુઓ (–3, 1, 2) દ્વિતીય અષ્ટાંશમાં અને બિંદુ (–3, 1, –2) છઠ્ઠા અષ્ટાંશમાં આવેલા છે.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. એક બિંદુ x-અક્ષ પર આવેલ છે. તે બિંદુના y-યામ અને z-યામ શું થશે ?
2. એક બિંદુ XZ- સમતલમાં છે. તે બિંદુના y-યામ અંગે શું કહેશો ?
3. નીચે આપેલાં બિંદુઓ કયા અષ્ટાંશમાં છે તે જણાવો :

   (1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5), (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6), (2, – 4, –7)

4. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) x-અક્ષ અને y-અક્ષ બંને સાથે મળીને જે સમતલનું નિર્માણ કરે છે તે.......................થી ઓળખાય છે.

(ii) XY-સમતલમાં બિંદુઓના યામ.......................સ્વરૂપે હોય છે.

(iii) યામ-સમતલો અવકાશનું.......................અષ્ટાંશોમાં વિભાજન કરે છે.

12.4 બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર

દ્વિપરિમાણીય યામ-પદ્ધતિમાં આપણે બે બિંદુઓ વચ્ચેના અંતર વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. ચાલો, હવે આપણે આ અભ્યાસને ત્રિપરિમાણીય પદ્ધતિમાં વિસ્તૃત કરીએ.

ધારો કે $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ એ લંબાક્ષ પદ્ધતિના અક્ષો OX, OY અને OZ ને સાપેક્ષ બે બિંદુઓ છે. જેનો એક વિકર્ણ PQ હોય તેવો લંબઘન રચવા માટે યામ-સમતલોને સમાંતર હોય એવા સમતલો બિંદુઓ P અને Q માંથી દોરો. (આકૃતિ 12.4)

હવે, $\angle PAQ$ કાટખૂણો હોવાથી ત્રિકોણ PAQ પરથી,

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad ...(1)$$

વળી, ત્રિકોણ ANQ એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે તથા $\angle ANQ$ એ કાટખૂણો છે.

માટે $$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \qquad ...(2)$$

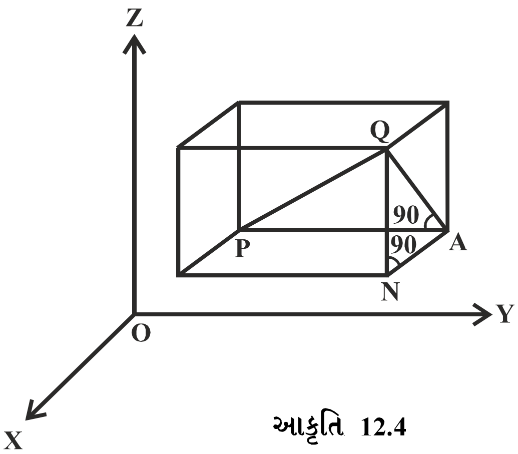
(1) અને (2) પરથી,

$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$ મળે છે.

હવે, $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ અને $NQ = z_2 - z_1$

તેથી, $$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



આકૃતિ 12.4

આ સૂત્ર આપણને બે બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) વચ્ચેનું અંતર આપે છે.

વિશિષ્ટ વિકલ્પમાં $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ હોય, તો એટલે કે બિંદુ P ઊગમબિંદુ O હોય, તો $OQ = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. આ સૂત્ર ઊગમબિંદુ O અને કોઈ પણ બિંદુ $Q(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર આપે છે.

ઉદાહરણ 3 : બિંદુઓ $P(1, -3, 4)$ અને $Q(-4, 1, 2)$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : બિંદુઓ $P(1, -3, 4)$ અને $Q(-4, 1, 2)$ વચ્ચેનું અંતર PQ હોય, તો

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2 + (1+3)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16 + 4}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ એકમ}$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) અને R (7, 0, –1) સમરેખ છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે જો બિંદુઓ એક રેખા પર આવેલાં હોય તો તેમને સમરેખ બિંદુઓ કહે છે.

હવે, $PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

અને $PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

આમ, PQ + QR = PR.

તેથી P, Q અને R સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 5 : શું બિંદુઓ A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) અને C (25, – 41, 5) એ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે ?

ઉકેલ : અંતરસૂત્ર પ્રમાણે આપણી પાસે,

$AB^2 = (10-3)^2+(20-6)^2+(30-9)^2$

$= 49+196+441 = 686$

$BC^2 = (25-10)^2+(-41-20)^2+(5-30)^2$

$= 225+3721+625 = 4571$

$CA^2 = (3-25)^2+(6+41)^2+(9-5)^2$

$= 484+2209+16 = 2709$

સ્પષ્ટ છે કે, $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$. સૌથી મોટી બાજુ BC છે.

આથી Δ ABC કાટકોણ ત્રિકોણ નથી.

ઉદાહરણ 6 : જો A અને B અનુક્રમે બિંદુઓ (3, 4, 5) અને (–1, 3, –7) હોય, તો $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ થાય એવા બિંદુ P ના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P ના યામ (x, y, z) છે.

અહીં, $PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$

$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$

આપેલ શરત પ્રમાણે $PA^2 + PB^2 = 2k^2$

$\therefore \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$

એટલે કે, $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$.

સ્વાધ્યાય 12.2

1. આપેલ બિંદુઓની જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

(i) (2, 3, 5) અને (4, 3, 1)

(ii) (–3, 7, 2) અને (2, 4, –1)

(iii) (–1, 3, – 4) અને (1, –3, 4)

(iv) (2, –1, 3) અને (–2, 1, 3)

2. સાબિત કરો કે બિંદુઓ (–2, 3, 5), (1, 2, 3) અને (7, 0, –1) સમરેખ છે.

3. નીચે આપેલાં વિધાનો ચકાસો :

(i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) અને (4, 9, – 6) એ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) અને (– 4, 9, 6) એ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) અને (2, –3, 4) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

4. બિંદુઓ (1, 2, 3) અને (3, 2, –1) થી સમાન અંતરે આવેલાં બિંદુઓના ગણનું સમીકરણ મેળવો.

5. બિંદુ A (4, 0, 0) અને B (– 4, 0, 0) થી જેમનાં અંતરોનો સરવાળો 10 થતો હોય તેવા બિંદુગણ P નું સમીકરણ મેળવો.

12.5 વિભાજન સૂત્ર

દ્વિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં રેખાખંડનું આપેલ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતાં બિંદુના યામ કેવી રીતે શોધવા તેનો અભ્યાસ આપણે કર્યો છે. હવે, નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપણે આ ક્રિયાને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં વિસ્તૃત કરીશું.

ધારો કે બે બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ આપેલ છે અને બિંદુ $R(x, y, z)$ એ PQ નું આપેલ ગુણોત્તર $m : n$ માં અંતઃવિભાજન કરે છે. XY-સમતલ પર PL, QM અને RN લંબ દોરો. સ્પષ્ટપણે PL || RN || QM અને આ લંબોના લંબપાદ XY-સમતલ પર છે. PL, RN અને QM ને સમાવતા સમતલ અને XY-સમતલનો છેદ એ L, M અને N ને સમાવતી રેખા છે. R માંથી રેખા LM ને સમાંતર રેખા ST દોરો. રેખા ST એ રેખા LP નું બિંદુ S માં બહારથી વિભાજન કરે છે અને રેખા MQ ને T આગળ છેદે છે. આકૃતિ 12.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,

એ પણ જુઓ કે બંને ચતુર્ભુજ LNRS અને NMTR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

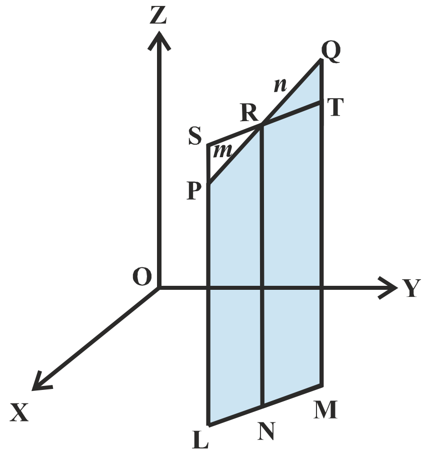
ત્રિકોણો PSR અને QTR સમરૂપ છે. માટે,

$$\frac{m}{n}=\frac{PR}{QR}=\frac{SP}{QT}=\frac{SL-PL}{QM-TM}=\frac{NR-PL}{QM-NR}=\frac{z-z_1}{z_2-z}$$

આ દર્શાવે છે કે, $z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$

આ જ પ્રમાણે, XZ અને YZ-સમતલો પર લંબ દોરીને,

$y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ અને $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$ મેળવી શકાય.



આકૃતિ 12.5

આમ, બે બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું ગુણોત્તર $m : n$ માં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ R ના યામ

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n},\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$ મળે છે.

જો બિંદુ R એ રેખાખંડ PQ નું $m : n$ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે તો તેના યામ n ને બદલે $-n$ લખીને મેળવી શકાય છે. તેથી બિંદુ R ના યામ

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\frac{my_2-ny_1}{m-n},\frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

વિશિષ્ટ વિકલ્પ 1 મધ્યબિંદુના યામ : જો R એ PQ નું મધ્યબિંદુ હોય, તો

$m : n = 1 : 1$ માટે $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ અને $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

આ બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) ને જોડતાં રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ છે.

વિશિષ્ટ વિકલ્પ 2 : જો બિંદુ R એ રેખાખંડ PQ નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો, $k = \dfrac{m}{n}$ લેતાં બિંદુ R ના યામ

$$\left(\frac{kx_2+x_1}{1+k}, \frac{ky_2+y_1}{1+k}, \frac{kz_2+z_1}{1+k}\right)$$ મળે છે.

સામાન્ય રીતે, આપેલ બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા પર કોઈ પણ બિંદુ શોધો એવા પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે આ પરિણામનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુઓ $(1, -2, 3)$ અને $(3, 4, -5)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું $2 : 3$ ગુણોત્તરમાં (i) અંત:વિભાજન અને (ii) બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ મેળવો.

ઉકેલ : (i) ધારો કે બિંદુ P (x, y, z) એ A $(1, -2, 3)$ અને B $(3, 4, -5)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું $2 : 3$ ગુણોત્તરમાં અંત:વિભાજન કરે છે.

માટે, $$x = \frac{2(3)+3(1)}{2+3} = \frac{9}{5},\quad y = \frac{2(4)+3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5},\quad z = \frac{2(-5)+3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$$

આમ, માંગેલ બિંદુ $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$ છે.

(ii) ધારો કે બિંદુ P (x, y, z) એ A $(1, -2, 3)$ અને B $(3, 4, -5)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું ગુણોત્તર $2 : 3$ માં બહિર્વિભાજન કરે છે.

$$x = \frac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)} = -3,\quad y = \frac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)} = -14,\quad z = \frac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)} = 19$$

આમ, માંગેલ બિંદુ $(-3, -14, 19)$ છે.

ઉદાહરણ 8 : વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે બિંદુઓ $(-4, 6, 10)$, $(2, 4, 6)$ અને $(14, 0, -2)$ સમરેખ છે.

ઉકેલ : અહીં, A $(-4, 6, 10)$, B $(2, 4, 6)$ અને C$(14, 0, -2)$ એ આપેલ બિંદુઓ છે.

ધારો કે બિંદુ P એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. આથી બિંદુ P ના યામ,

$$\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

હવે આપણે એ ચકાસીએ કે k ની કોઈ કિંમત માટે બિંદુઓ P અને C સમાન છે કે નહિં.

$\dfrac{2k-4}{k+1} = 14$ મૂકતાં, $k = -\dfrac{3}{2}$ મળે છે.

જ્યારે $k = -\dfrac{3}{2}$, ત્યારે $$\frac{4k+6}{k+1} = \frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$$

અને $$\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6\left(-\frac{3}{2}\right)+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

માટે, C (14, 0, –2) બિંદુ પોતે જ AB નું ગુણોત્તર 3 : 2 માં બહિર્વિભાજન કરે છે અને એ જ બિંદુ P છે. આમ, A, B, C સમરેખ બિંદુઓ છે.

ઉદાહરણ 9 : જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) હોય તો તે ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C ના યામ અનુક્રમે (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) છે. જો D એ BC નું મધ્યબિંદુ હોય તો, D ના યામ

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right) \text{ છે.}$$

ધારો કે G એ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર છે. માટે, તે મધ્યગા AD નું 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તેથી G ના યામ,

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

અથવા $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ઉદાહરણ 10 : બિંદુઓ (4, 8, 10) અને (6, 10, – 8) ને જોડતાં રેખાખંડનું YZ-સમતલ કયાં ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે YZ-સમતલ બિંદુઓ A (4, 8, 10) અને B (6, 10, – 8) ને જોડતાં રેખાખંડનું P (x, y, z) બિંદુએ $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તેથી બિંદુ P ના યામ

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right) \text{ થશે.}$$

બિંદુ P એ YZ-સમતલમાં છે. તેથી તેનો x-યામ શૂન્ય છે એટલે કે $\frac{4+6k}{k+1} = 0$.

અથવા $$k = -\frac{2}{3}$$

આમ, YZ-સમતલ AB નું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.

સ્વાધ્યાય 12.3

1. બિંદુઓ (–2, 3, 5) અને (1,–4, 6) ને જોડતા રેખાખંડનું (i) 2 : 3 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન (ii) 2 : 3 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.

2. સમરેખ બિંદુઓ P (3, 2, – 4), Q (5, 4, – 6) અને R (9, 8, –10) આપેલ છે. બિંદુ Q એ PR નું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.

3. બિંદુઓ (–2, 4, 7) અને (3, –5, 8) ને જોડતા રેખાખંડનું YZ-સમતલ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.

4. વિભાજન-સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (2, –3, 4), B (–1, 2, 1) અને $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ સમરેખ છે.

5. બિંદુઓ P (4, 2, – 6) અને Q (10, –16, 6) ને જોડતા રેખાખંડનું ત્રિભાજન કરતા બિંદુઓના યામ શોધો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (1, 2, 3), B (–1, –2, –1), C (2, 3, 2) અને D (4, 7, 6) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDનાં શિરોબિંદુઓ છે પરંતુ લંબચોરસનાં શિરોબિંદુઓ નથી.

ઉકેલ : ABCD ને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બતાવવા માટે સામસામેની બાજુઓના માપ સમાન છે તે બતાવવું જરૂરી છે. અહીં,

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

સ્પષ્ટ છે કે, AB = CD અને BC = DA હોવાથી, ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, ABCD લંબચોરસ નથી તે સાબિત કરીશું. તેના માટે વિકર્ણો AC અને BD સમાન નથી તે સાબિત કરીશું.

હવે, $$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}$$

અહીં, $AC \neq BD$ હોવાથી ABCD લંબચોરસ નથી.

> **નોંધ** વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે. તે ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને પણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી શકાય.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુઓ A (3, 4, –5) અને B (– 2, 1, 4) થી સમાન અંતરે હોય તેવાં બિંદુઓ P ના ગણનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, PA = PB થાય તેવું કોઈ બિંદુ P (x, y, z) છે.

હવે, $$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

અથવા $$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$$

અથવા $10x + 6y - 18z - 29 = 0$.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુ (1, 1, 1) એ ત્રિકોણ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર છે. જો A અને B ના યામ અનુક્રમે (3, –5, 7) અને (–1, 7, – 6), હોય તો બિંદુ C ના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ C ના યામ (x, y, z) છે અને ત્રિકોણ ABCના મધ્યકેન્દ્રના યામ (1, 1, 1) છે.

માટે $\frac{x+3-1}{3} = 1$, એટલે કે, $x = 1$; $\frac{y-5+7}{3} = 1$, એટલે કે, $y = 1$; $\frac{z+7-6}{3} = 1$, એટલે કે, $z = 2$.

આમ, બિંદુ C ના યામ (1, 1, 2) છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 12

1. A(3, – 1, 2), B (1, 2, – 4) અને C (– 1, 1, 2) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચોથા શિરોબિંદુના યામ શોધો.

2. A (0, 0, 6), B (0,4, 0) અને C (6, 0, 0) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણની મધ્યગાઓની લંબાઈ શોધો.

3. Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓ P $(2a, 2, 6)$, Q $(-4, 3b, -10)$ અને R$(8, 14, 2c)$ હોય તથા મધ્યકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો a, b અને c નાં મૂલ્યો શોધો.

4. બિંદુ P (3, –2, 5) થી $5\sqrt{2}$ અંતરે આવેલા y-અક્ષ પરના બિંદુના યામ શોધો.

5. P(2, –3, 4) અને Q (8, 0, 10) ને જોડતાં રેખાખંડ પર આવેલાં બિંદુ R નો x-યામ 4 હોય, તો બિંદુ R ના યામ શોધો.

   [**સૂચનઃ** ધારો કે R એ PQ નું ગુણોત્તર $k : 1$ માં વિભાજન કરે છે, તેથી બિંદુ R ના યામ $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$].

6. જો A (3, 4, 5) અને B (–1, 3, –7) આપેલ બિંદુઓ હોય. તો એવા બિંદુઓ P ના બિંદુ ગણનું સમીકરણ મેળવો કે જેથી $PA^2 + PB^2 = k^2$ થાય. જ્યાં k અચળ છે.

સારાંશ

◆ ત્રિપરિમાણમાં, યામાક્ષો એ લંબાક્ષ યામ-પદ્ધતિમાં પરસ્પર લંબરેખાઓ છે. અક્ષોને x, y અને z-અક્ષો કહે છે.

◆ અક્ષોની જોડ દ્વારા નિર્મિત થયેલાં ત્રણ સમતલોને યામ-સમતલો કહે છે. તે XY, YZ અને ZX-સમતલો છે.

◆ ત્રણ યામ સમતલો અવકાશને આઠ ભાગોમાં વિભાજિત કરે છે. પ્રત્યેક ભાગ ***અષ્ટાંશ*** તરીકે ઓળખાય છે.

◆ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં બિંદુ P ના યામ હંમેશાં ત્રય સ્વરૂપે (x, y, z) તરીકે લખાય છે. અહીં, x, y અને z એ અનુક્રમે P નાં YZ, ZX અને XY-સમતલોથી અંતર દર્શાવે છે.

◆ (i) x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુનું સ્વરૂપ $(x, 0, 0)$ છે.

(ii) y-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુનું સ્વરૂપ $(0, y, 0)$ છે.

(iii) z-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુનું સ્વરૂપ $(0, 0, z)$ છે.

◆ બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ વચ્ચેનું અંતર $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

◆ બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતાં રેખાખંડનું અંતઃ(અંદરથી) અને બાહ્ય(બહારથી) ગુણોત્તર $m : n$ માં વિભાજન કરતાં બિંદુ R ના યામ અનુક્રમે નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે:

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \text{ અને } \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right).$$

◆ બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ છે.

◆ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) હોય તે ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ છે.

Historical Note

Rene' Descartes (1596–1650), the father of analytical geometry, essentially dealt with plane geometry only in 1637. The same is true of his co-inventor Pierre Fermat (1601-1665) and La Hire (1640-1718). Although suggestions for the three dimensional coordinate geometry can be found in their works but no details. Descartes had the idea of coordinates in three dimensions but did not develop it.

J.Bernoulli (1667-1748) in a letter of 1715 to Leibnitz introduced the three coordinate planes which we use today. It was Antoinne Parent (1666-1716), who gave a systematic development of analytical solid geometry for the first time in a paper presented to the French Academy in 1700.

L.Euler (1707-1783) took up systematically the three dimensional coordinate geometry, in Chapter 5 of the appendix to the second volume of his "Introduction to Geometry" in 1748.

It was not until the middle of the nineteenth century that geometry was extended to more than three dimensions, the well-known application of which is in the Space-Time Continuum of Einstein's Theory of Relativity.