2

اعداد و شمار کی عملی ترکیب (Data Processing)

© NCERT not to be republished

گذشتہ باب میں آپ نے پڑھا کہ اعداد وشمار کا نظم و نسق اور پیش کش انھیں قابل فہم بناتا ہے۔ اس سے اعداد وشمار کا عمل آسان ہو جاتا ہے۔ اعداد وشمار کا تجزیہ کرنے کے لیے کئی شماریاتی تکنیکوں کا استعمال کیا جاتا ہے۔ اس باب میں آپ مندرجہ ذیل تکنیک کی آموزش کریں گے۔

1۔ مرکزی رجحان کی پیمائش

2۔ انتشار کی پیمائش

3۔ رابطہ وتعلق کی پیمائش

مرکزی رجحان کی پیمائش جہاں مشاہدات کی ایک جماعت کی مثالی نمائندگی کرنے والا مقدار فراہم کرتی ہے وہیں انتشار کی پیمائش اعداد وشمار کے اندرونی تغیرات کا پتہ دیتی ہے، جو اکثر مرکزی رجحان کی پیمائش کے قریب ہوتے ہیں۔ دوسری طرف رابطے کی پیمائش دو یا دو سے زائد متعلق مظاہر جیسے بارش اور سیلاب کا واقعہ یا کھاد کا استعمال اور فصلوں کی پیداوار کے درمیان باہمی تعلق کے درجہ کو پیش کرتی ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش: (Measures of Central Tendency)

قابل پیمائش صفات جیسے بارش، بلندی، آبادی کی کثافت، تعلیمی حصولیابی کی سطح یا عمر کی جماعتیں بدلتی رہتی ہیں۔ اگر ہم ان کو سمجھنا چاہتے ہیں تو ہمیں کیا کرنا ہوگا؟ اس کے لیے شاید ہمیں ایک ایسی قیمت یا مقدار کی ضرورت ہوگی جو تمام مشاہدات کی بہتر نمائندہ ہو۔ یہ ایک تنہا قیمت یا مقدار عموماً تقسیم کے کسی کنارے پر ہونے کے بجائے اس کے مرکز کے نزدیک واقع ہوتی ہے۔ تقسیم کا مرکز معلوم کرنے والی شماریاتی تکنیکوں کو مرکزی رجحان کی پیمائش کے نام سے جانا جاتا ہے۔ مرکزی رجحان کو ظاہر کرنے والا عدد اعداد وشمار کی تمام جماعت کا نمائندہ عدد ہوتا ہے کیونکہ یہ ایسا نقطہ ہے جس کے ارد گرد مدوں کے انتشار کا رجحان ہوتا ہے۔

مرکزی رجحان کی پیائش کو شماریاتی اوسط کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔ اس کی کئی پیائشیں ہیں جیسے درمیانہ (Mean) وسطی (Median) اور تکثیری طرز (Mode)

درمیانہ (Mean)

درمیانہ وہ قیمت ہے جو سبھی قیمتوں کے مجموعہ کو کل مشاہدات کی عدد سے تقسیم دینے پر حاصل ہوتی ہے۔

وسطی (Median)

وسطی مرتبہ کی وہ مقدار ہے جو مرتب سلسلہ کو دو برابر اعداد میں تقسیم کرتی ہے۔ یہ مقدار اصل مقداروں سے آزاد ہوتی ہے اعداد وشار کو کم یا اضافہ شدہ ترتیب میں منظم کرنا اور درمیانی عدد کا پتہ لگانا وسطانیہ کی تحسیب میں سب سے اہم کام ہے۔ جفت عدد ہونے کی صورت میں دو درمیانی مرتبت مقداروں کا اوسط وسطی ہوگا۔

طرز تکثیر (Mode)

کسی نقطے یا مقدار کی کثرت وقوع یا تواتر تکثیری طرز ہوتا ہے۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ مختلف قسم کے اعداد وشار کے مجموعہ کے لحاظ سے ایک واحد نمائندہ عدد متعین کرنے کے لیے ان پیائشوں میں سے ہر ایک کا طریقہ الگ الگ ہے۔

درمیانہ (Mean)

کسی متغیر کی مختلف قدروں کا آسان حسابی اوسط درمیانہ کہلاتا ہے۔ غیر درجہ بند اور درجہ بند اعداد وشار کے لیے درمیانہ کو معلوم کرنے کا طریقہ الگ الگ ہے۔ درجہ بند اور غیر درجہ بند دونوں قسم کے اعداد وشار کے لیے درمیانہ، بلاواسطہ اور بالواسطہ طریقوں سے نکالا جاتا ہے۔

غیر درجہ بند اعداد وشار سے درمیانہ کی تحسیب (Computing Mean from Ungrouped Data)

بلاواسطہ طریقہ (Direct Method)

غیر درجہ بند اعداد وشار سے بلاواسطہ طریقے کے ذریعہ درمیانہ کی تحسیب کرنے کے لیے مشاہدہ کی سبھی قدروں کو جوڑ کر مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ درمیانہ کی تحسیب مندرجہ ذیل فارمولہ کا استعمال کرکے کی جاتی ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$$

جہاں

$\bar{x}$ = درمیانہ

$\sum$ = سلسلۂ پیائش کا مجموعہ

x = پیائش کے سلسلے میں خام شمار

$\sum x$ = پیائشوں کے سبھی قدروں کا مجموعہ

N = پیائشوں کی تعداد

مثال 2.1: مدھیہ پردیش میں مالوا پٹھار کے مختلف اضلاع کی جدول 2.1 میں دی گئی بارش کی بنیاد پر اس علاقے کی درمیانہ بارش کی تحسیب کیجیے۔

جدول 2.1: درمیانہ بارش کی تحسیب

مالوہ پٹھار کے اضلاع	عام بارش (ملی میٹر میں)	بالواسطہ طریقہ
	بلاواسطہ طریقہ x	d= x-800*
اندور	979	179
دیواس	1083	283
دھار	833	33
رتلام	896	96
اجین	891	91
منڈسور	825	25
شاجاپور	977	177
$\sum x$ اور $\sum d$	**6484**	**884**
$\frac{\sum x}{N}$ اور $\frac{\sum d}{N}$	**926.29**	**126.29**

* جس میں 800 تصوراتی درمیانہ ہے۔

d تصوراتی درمیانہ سے انحراف ہے۔

© NCERT not to be republished

جدول 2.1 میں دیے گئے اعدادوشمار کی تحسیب اس طرح کی جائے گی۔

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{N}$$

$$= \frac{6484}{7}$$

$$= 926.29$$

درمیانہ کی تحسیب سے یہ سمجھا جاسکتا ہے کہ بارش کے خام اعداد کو بلاواسطہ طریقہ پر جوڑ لیا گیا ہے اور اس کے جمع کو مشاہدات کی تعداد (اضلاع کی تعداد) سے تقسیم کر دیا گیا ہے اس لیے اسے بلاواسطہ طریقہ (Direct Method) کہتے ہیں۔

بالواسطہ طریقہ *(Indirect Method)*

مشاہدات کی تعداد جہاں بہت زیادہ ہوتی ہے وہاں درمیانہ کی تحسیب کے لیے عموماً بالواسطہ طریقے کا استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں ایک عدد مستقل کو سبھی قدروں سے کم کرنے پر مشاہدات کی تعداد کم ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر جدول 2.1 میں دکھایا گیا ہے کہ بارش کی مقدار 800 سے 1100 ملی میٹر اس کے درمیان ہے۔ ہم ایک ''تصوراتی درمیانہ'' مان کر ان مقداروں کی وسعت کو کم کر سکتے ہیں۔ اس مثال میں ہم نے 800 کو تصوراتی درمیانہ لے لیا ہے۔ اس طرح کے عمل کو کوڈنگ طریقہ (Coding) کہتے ہیں۔ اس کے بعد کم کی ہوئی قدروں کی بنیاد پر درمیانہ کی تحسیب کر لی جاتی ہے (جدول 2.1 میں کالم-3)

بالواسطہ طریقہ سے درمیانہ کی تحسیب درج ذیل فارمولے سے کی جاتی ہے:

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d}{N}$$

جہاں

A = کم ہونے والا عدد مستقل

$\sum d$ = عدد مستقل سے انحرافی مقدار

N = مذکورہ سلسلے میں انفرادی مشاہدات کی تعداد

جدول 2.1 میں دیے گئے اعدادوشمار کے لیے بالواسطہ طریقے سے درمیانہ کی تحسیب اس طرح کی جاتی ہے:

$$\overline{X} = 800 + \frac{884}{7}$$

$$= 800 + \frac{884}{7}$$

x= 926.29 ملی میٹر

یہاں غور کرنے کی بات یہ ہے کہ خواہ جس طریقے سے بھی درمیانہ کی تحسیب کی گئی ہو اس کی مقدار یکساں ہوگی۔

© NCERT not to be republished

درجہ بندی اعداد وشمار سے درمیانہ کی تحسیب (Computing Mean from Grouped Data)

درجہ بند اعداد وشمار سے بھی بلا واسطہ اور بالواسطہ طریقے سے درمیانہ کی تحسیب کی جاتی ہے۔

بلاواسطہ طریقہ (Direct Method)

جب تواتر کی تقسیم کی صورت میں اعداد وشمار درجہ بند ہوں تو انفرادی قدروں کی پہچان نہیں رہتی۔ ان تمام قدروں کی نمائندگی درجے کے وقفہ کے وسطی نقاط سے ہو جاتی ہے جس میں وہ واقع ہیں۔ درجہ بند اعداد وشمار کے لیے بلاواسطہ طریقہ سے درمیانہ کی تحسیب کرتے وقت ہر درجے کے وسطی نقطہ سے اس میں واقع تواتر (f) سے ضرب دیا جاتا ہے۔ fx (اس میں x وسطی نقطہ ہے) کی تمام قدروں کو جوڑ کر $\sum fx$ حاصل کیا جاتا ہے جسے مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح درمیانہ کی تحسیب مندرجہ ذیل طریقہ سے کی جاتی ہے:

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

جس میں

$\overline{x}$ = درمیانہ

f = تواتر

x = درجاتی وقفے کا وسطی نقطہ

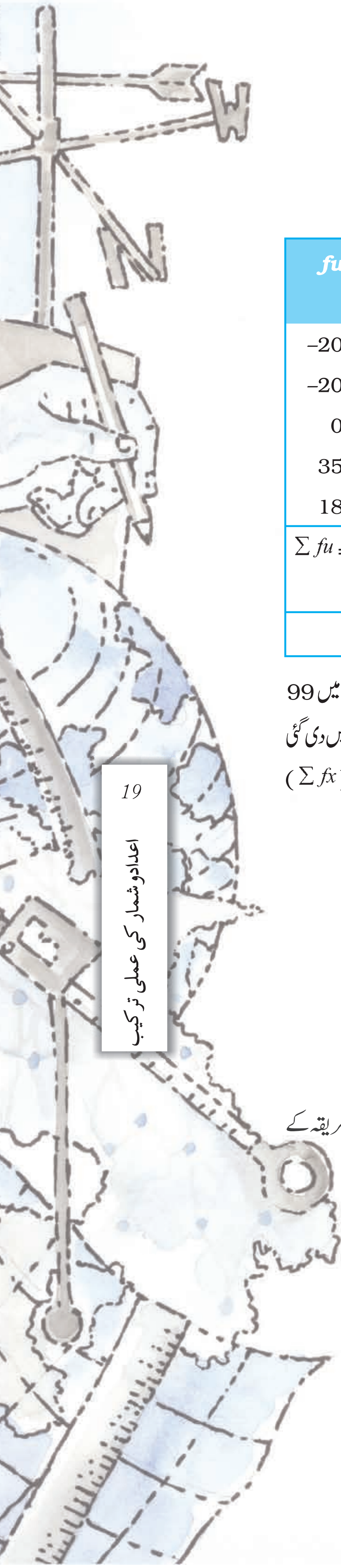
N = مشاہدات کی تعداد (اس کو $\sum f$ بھی کہا جاتا ہے)

مثال 2.2: جدول 2.2 میں دیے گئے اعداد وشمار کا استعمال کرکے فیکٹری میں کام کرنے والوں کی درمیانہ مزدوری شرح کا حساب لگائیں:

جدول 2.2: فیکٹری مزدوروں کی مزدوری کی شرح

مزدوری کی شرح (روپیے/یومیہ)	مزدوروں کی تعداد (f)
درجات	f
50–70	10
70–90	20
90–110	25
110–130	35
130–150	9

© NCERT not to be republished



جدول 2.3: درمیانہ کی تحسیب

درجات	تواتر (f)	وسطی نقطہ (x)	fx	d=x-100	fd	u=(x-100) /20	fu
50–70	10	60	600	–40	–400	–2	–20
70–90	20	80	1,600	–20	–400	–1	–20
90–110	**25**	**100**	2,500	**0**	0	0	0
110–130	35	120	4,200	20	700	1	35
130–150	9	140	1,260	40	360	2	18
$\sum fx$ اور $\sum fx$	$\sum f$ =99		$\sum fx$ = 10,160		$\sum fd$ = 260		$\sum fu$ =13
جس میں = 99	N= $\sum f$						

جدول 2.3 میں درجہ بند اعداد وشمار کے لیے درمیانہ کی تحسیب کرنے کا طریقہ بتایا گیا ہے۔ دیے گئے تواتر کی تقسیم میں 99 مزدوروں کو مزدوری شرح کے پانچ درجوں میں درجہ بند کیا گیا ہے۔ ان درجوں کے وسطی نقاط کی فہرست تیسرے کالم میں دی گئی ہے۔ درمیانہ معلوم کرنے کے لیے ہر وسطی نقطے (x) کو اس سے متعلقہ تواتر (f) سے ضرب دیا گیا ہے اور ان کے مجموعہ ($\sum fx$) کو N سے تقسیم کیا گیا ہے۔

اس طرح مندرجہ ذیل طریقہ کا استعمال کرکے درمیانہ کی تحسیب کی جاسکتی ہے۔

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{10,160}{99}$$

$$= 102.6$$

بالواسطہ طریقہ (Indirect Method)

درجہ بند اعداد وشمار سے بالواسطہ طریقہ سے درمیانہ معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ کے اصول غیر درجہ بند اعداد وشمار کے لیے بلا واسطہ طریقہ کے مشابہ ہیں۔

$$\overline{x} = A \pm \frac{\sum fd}{N}$$

جس میں

A = تصوراتی درمیانہ والی جماعت کا وسطی نقطہ

(جدول 2.3 میں 90 –100 تصوراتی درمیانہ والا درجہ مان لیا گیا ہے جس کا وسط 100 ہے)

© NCERT not to be republished

f = تواتر

d = تصوراتی درمیانہ والے درجہ (A) سے انحراف

N = تمام مدوں کا مجموعہ یا $\sum f$

i = وقفہ کی وسعت (اس حالت میں 20 ہے)

جدول 2.3 سے بالواسطہ طریقے سے درمیانہ کی تحسیب کرنے سے متعلق مندرجہ ذیل اقدام کیے جاتے ہیں:

(i) درمیانہ کو 110–90 والے درجے میں مان لیا گیا ہے، جہاں تک ممکن ہو تصوراتی درمیانہ کو سلسلہ کے وسط سے قریب تر ہونا چاہیے۔ اس عمل سے تحسیب کی ضخامت کم ہو جاتی ہے۔ جدول 2.3 میں A (تصوراتی درمیانہ) 100 ہے جو 110–90 والے درجے کا وسطی نقطہ ہے۔

(ii) پانچویں کالم (u) میں ہر جماعت کے وسطی نقطے کا تصوراتی درمیانہ والے (110–90) کے وسط نقطہ سے انحراف دکھایا گیا ہے۔

(iii) چھٹے کالم میں fd حاصل کرنے کے لیے ہر تواتر (f) کو اس سے متعلقہ d کی قیمت سے ضرب دیا گیا ہے۔ اس کے بعد fd کے منفی اور مثبت اعداد کو الگ الگ جوڑ کر ان کا مطلق فرق ($\sum fd$) حاصل کیا گیا ہے۔ یہاں یہ بات قابل غور ہے کہ $\sum fd$ سے متعلق نشان A کے بعد طریقے میں دیے گئے $\pm$ کے نشان سے بدل جاتا ہے۔

بالواسطہ طریقے کا استعمال کر کے درمیانہ کا حساب اس طرح کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = A \pm \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 100 + \frac{260}{99}$$

$$= 100 + 2.6$$

$$= 102.6$$

نوٹ: بالواسطہ طریقہ مساوی اور غیر مساوی دونوں ہی درجوں کے وقفہ والی تقسیم کے لیے کارآمد ہے۔

وسطی (Median)

وسطی مقامی اوسط ہے۔ اس کی تعریف تقسیم میں ایک ایسے نقطے کی حیثیت سے کی جا سکتی ہے جس کے دونوں طرف قدروں کی مساوی تعداد ہو۔ وسطی کی تعبیر M سے کی جاتی ہے۔

غیر درجہ بند اعداد وشمار کے لیے وسطی کی تحسیب (Computing Median for Ungrouped Data)

جب اعداد وشمار غیر درجہ بند ہوں تو انھیں بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں منظم کیا جاتا ہے۔ اس مرتب سلسلے میں مرکزی مشاہدے یا قیمت کا جائے وقوع معلوم کر کے وسطی کی تحسیب کی جاتی ہے۔ بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں مرتب سلسلے کے کسی بھی سرے سے مرکزی قیمت کا مقام معلوم کیا جا سکتا ہے۔ وسطی کی تحسیب کے لیے مندرجہ ذیل طریقے کا استعمال کیا جاتا ہے:

© NCERT not to be republished

$\left(\frac{N+1}{2}\right)$ والے مد کی قیمت

مثال 2.3: مندرجہ ذیل بلندیوں کا استعمال کر کے ہمالیہ کی پہاڑی چوٹیوں کی وسطی بلندی کی تحسیب کریں:

8,126 میٹر، 8,611 میٹر 7,817 میٹر، 8,172 میٹر، 8,076 میٹر، 8,848 میٹر، 8,598 میٹر

تحسیب: وسطی (M) کی تحسیب مندرجہ ذیل اقدام پر مبنی ہوگی۔

(i) دیے گئے اعداد و شمار کو بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں منظّم کیجیے۔

(ii) سلسلے میں مرکزی قیمت معلوم کرنے کے لیے طریقے کا استعمال کیجیے۔ اس طرح:

$\left(\frac{N+1}{2}\right)$ والے مد کی قیمت

$= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ والے مد کی قیمت

$= \left(\frac{8}{2}\right)$ والے مد کی قیمت

یعنی منظّم سلسلے میں چوتھے مد کی قیمت وسطی ہوگی۔

بڑھتی ترتیب میں اعداد و شمار کا نظم—

7,817; 8,076; 8,126; 8,172; 8,598; 8,611; 8,848

↓

چوتھے مد کی قیمت

اس لیے

M = 8,172 میٹر

درجہ بند اعداد و شمار سے وسطی کی تحسیب (Computing Median for Grouped Data)

اگر اعداد و شمار درجہ بند ہیں تو ہمیں اس نقطے کی قیمت معلوم کرنی پڑتی ہے جہاں کوئی فرد یا مشاہدہ کسی درجے کے وسط میں واقع ہو۔ اس کی تحسیب مندرجہ ذیل طریقہ سے کی جاتی ہے:

$$M = l + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c\right)$$

یا

جس میں

M = درجہ بند اعداد و شمار کا وسطی

l = وسطی درجہ بند کی کمتر حد

i = وقفہ

© NCERT not to be republished

f = وسطی درجہ کا تواتر

N = تواتر کی کل تعداد یا مشاہدات کی تعداد

c = درجہ وسطی سے قبل درجے کا مجموعی تواتر

مثال 2.4: درج ذیل تقسیم کے لیے وسطی کی تحسیب کیجیے۔

درجہ	50–60	60–70	70–80	80–90	100–90	100–110
f	3	7	11	16	8	5

جدول 2.4: وسطی کی تحسیب

درجات	تواتر (f)	مجموعی تواتر (F)	وسطی درجے کی تحسیب
50–60	3	3	
60–70	7	10	
70–80	11	21c	
80–90 (وسطی درجہ)	**16 *f***	**37**	
90–100	8	45	$M=\frac{N}{2}$
100–110	5	50	$=\frac{50}{2}$
	Σf یا N=50		= 25

وسطی کی تحسیب مندرجہ ذیل اقدام کے مطابق کی جاتی ہے۔

(i) جدول 2.4 کی طرح تواتر کا جدول بنایا جاتا ہے۔

(ii) جدول 2.4 کے کالم 3 کے مطابق ہر درجے کے اگلے تواتر کو جوڑ کر مجموعی تواتر (F) حاصل کیا جاتا ہے۔

(iii) $\frac{N}{2}$ کے ذریعہ عدد وسطی حاصل کیا جاتا ہے جو اس مثال میں $\frac{50}{2} = 25$ ہے جیسا کہ جدول 2.4 کے کالم 4 میں دکھایا گیا ہے۔

(iv) $\frac{N}{2}$ سے زیادہ قیمت حاصل ہونے تک مجموعی تواتر (F) کی تقسیم میں اوپر سے نیچے کی طرف گنتی کیجیے۔ اس مثال میں $\frac{N}{2}$ =25 ہے جو 40–44 والے درجے میں شامل ہے اس لیے اسے درجہ وسطی کہیں گے۔ اس درجے کا مجموعی تواتر 37 ہے، اس سے پہلے درجے کا مجموعی تواتر 21 ہے جب کہ درجہ وسطی کا اصلی تواتر 16 ہے۔

(v) چوتھے قدم پر حاصل تمام مقررہ قیمتوں کو سامنے رکھ کر وسطی کی تحسیب مندرجہ ذیل مساوات سے کی جاتی ہے:

© NCERT not to be republished

$$M = l + \frac{i}{f}(m - c)$$
$$= 80 + \frac{10}{16}(25 - 21)$$
$$= 80 + \frac{5}{8} \times 4$$
$$= 80 + \frac{5}{2}$$
$$= 80 + 2.5$$
$$M = 82.5$$

طرز تکثیر (Mode)

کسی تقسیم میں جو مقدار کثرت سے بار بار واقع ہوتی ہے اسے طرز کہا جاتا ہے۔ اس کا نشان **Z** یا **M_o** ہے۔ طرز تکثیر ایک ایسی پیمائش ہے جس کا استعمال درمیانہ اور وسطی کے مقابلے میں کم کیا جاتا ہے۔ کسی اعدادی مجموعہ میں ایک سے زیادہ طرز بھی ہو سکتے ہیں۔

غیر درجہ بند اعداد و شمار کے لیے طرز تکثیر کی تحسیب (Computing Mode for Ungrouped Data)

دیے گئے اعداد و شمار کے مجموعہ سے طرز تکثیر کی تحسیب کرنے کے لیے سب سے پہلے سبھی مدوں کو بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں منظّم کرلیا جاتا ہے۔ اس سے سب سے زیادہ واقع ہونے والے تواتر کی پہچان کرنے میں آسانی ہو جاتی ہے۔

مثال **2.5**: مندرجہ ذیل دس طلبا کے جغرافیہ کی جانچ میں حاصل نمبرات کے لیے طرز تکثیر کی تحسیب کیجیے:

61,10,88,37,61,72,55,61,46,22

تحسیب: طرز تکثیر معلوم کرنے کے لیے درج ذیل طریقہ کے مطابق تمام نمبرات کو بڑھتی ترتیب میں منظّم کرلیا جاتا ہے:

10,22,37,46,55,**61,61,61**,72,88.

دیے گئے اعداد و شمار کے مجموعہ میں تین بار واقع ہونے والا 61 کا عدد سلسلے کا طرز تکثیر ہے۔ چونکہ اس سلسلے میں کوئی دوسرا عدد ایسی صفت والا نہیں ہے، اس لیے یہ سلسلہ وحدانی طرز تکثیر ہے۔

مثال **2.6**: ایک دوسرے نمونے میں دس طلبا کے حاصل کردہ مندرجہ ذیل نمبرات کی بنیاد پر طرز تکثیر کی تحسیب کیجیے:

82,11,57,82,08,11,82,95,41,11

تحسیب: مندرجہ ذیل کے مطابق دیے گئے تمام حاصل کردہ نمبرات کو بڑھتی ترتیب میں سجائیے:

08,11,11,11,41,57,82,82,82,95

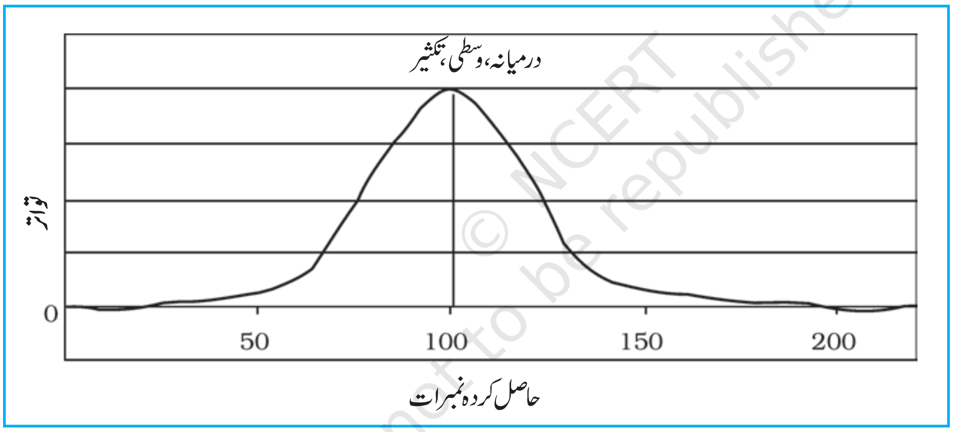
اب آسانی سے مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ 11 اور 82 کے اعداد تقسیم میں تین بار واقع ہوئے ہیں۔ اس لیے اعداد و شمار کا یہ مجموعہ

© NCERT not to be republished

دورخی طرز تکثیر والا ہے۔ اگر کسی سلسلے میں تین اعداد کی مساوی اور سب سے زیادہ قیمت ہے تو اس سلسلے کو سہ رخی طرز تکثیر کہتے ہیں۔ ایسے ہی کسی سلسلے میں کئی اعداد کے بار بار واقع ہونے کو کثیر رخی طرز تکثیر کہا جاتا ہے۔ پھر بھی اگر کسی سلسلے میں کوئی بھی عدد بار بار واقع نہیں ہو رہا ہے تو اسے بلا طرز تکثیر کہیں گے۔

درمیانہ، وسطی اور طرز تکثیر کا موازنہ (Comparison of Mean, Median and Mode)

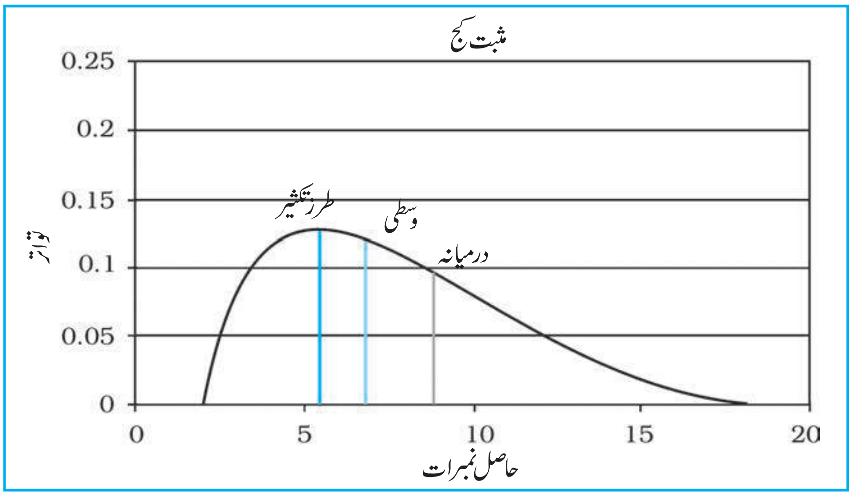
نارمل تقسیمی خم کی مدد سے مرکزی رجحان کی تینوں پیمائشوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکتا ہے۔ نارمل خم تواتر کی ایسی تقسیم ہوتی ہے جس میں نمبرات کی ترسیم کو اکثر گھنٹہ نما خم کہا جاتا ہے۔ بہت سے انسانی اوصاف جیسے ذہانت، شخصیت کے نشانات اور طلبا کے تحصیلی نمبرات کی نارمل تقسیم ہوتی ہے۔ نارمل تقسیمی خم کی شکل گھنٹہ نما ہوتی ہے کیونکہ یہ خم متشاکل ہوتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں زیادہ تر مشاہدات سلسلے کے وسطی مقدار یا اس کے آس پاس مرکوز ہوتے ہیں۔ یہ جیسے جیسے انتہائی قدروں کی طرف جاتے ہیں مشاہدات کی تعداد متشاکل طور پر گھٹتی جاتی ہے۔ نارمل خم میں اعداد و شمار کا تغیر کم یا زیادہ ہو سکتا ہے۔ اس کی ایک مثال شکل 2.3 میں دی گئی ہے۔



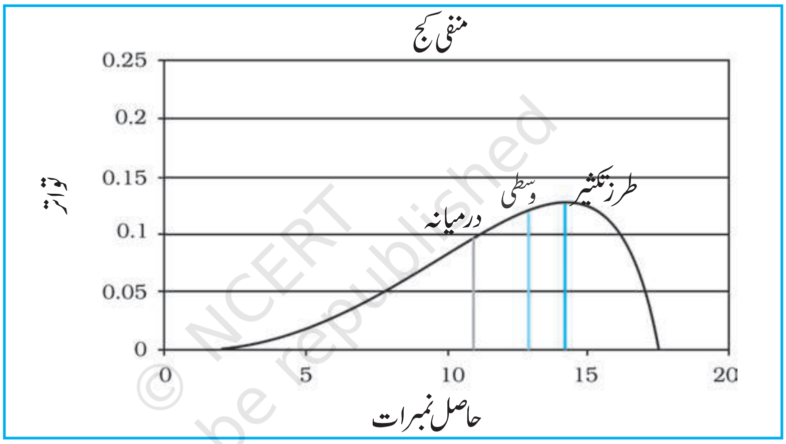
شکل 2.3: نارمل تقسیم کا خم

نارمل تقسیم کی ایک اہم خصوصیت ہوتی ہے۔ جس میں درمیانہ، وسطی اور طرز تکثیر کی قدریں یکساں ہوتی ہیں۔ (شکل 2.3 میں یہ قدر 100 ہے) کیونکہ نارمل تقسیم متشاکل ہوتی ہے۔ سب سے زیادہ تواتر کی مقدار تقسیم کے وسط میں ہوتی ہے اور اس وسط سے نصف اکائیاں اوپر اور نصف نیچے ہوتی ہے۔ زیادہ تر اکائیاں تقسیم کے وسط میں یا درمیانہ کے نزدیک ہوتی ہیں۔ سب سے زیادہ اور سب سے کم حاصل نمبرات کا تواتر زیادہ نہیں ہوتا، اس لیے انھیں کمتر ہی مانا جاتا ہے۔

اگر اعداد و شمار کسی طرح کج یا منحنی ہو جائیں تو درمیانہ، وسطی اور طرز تکثیر یکساں نہیں ہوں گے اور ایسی صورت میں کج اعداد و شمار کے اثرات پر غور کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ (شکل 2.4 اور 2.5)



شکل2.4: مثبت کج



شکل2.5: منفی کج

© NCERT not to be republished

انتشار کی پیمائش (Measures of Dispersion)

صرف مرکزی رجحان کی پیمائش مناسب طور پر تقسیم کا بیان نہیں کرتی کیونکہ یہ محض تقسیم کا جائے وقوع بتاتی ہیں اوران سے یہ معلوم نہیں ہوتا کہ مختلف اقدار یا پیمائش مرکز کے تعلق سے کس طرح منتشر ہیں۔ مرکزی رجحان کی پیمائش کی اس کمی کو سمجھنے کے لیے ہم جدول 2.5 اور 2.6 میں دیے گئے اعدادوشمار کا استعمال کرتے ہیں۔

جدول 2.5: افراد کے حاصل کردہ نمبرات

افراد	نمبرات
X1	52
X2	55
X3	50
X4	48
X5	45

جدول 2.6: افراد کے حاصل کردہ نمبرات

افراد	نمبرات
X1	28
X2	00
X3	98
X4	55
X5	69

دونوں ہی تقسیم میں $\overline{x} = 50$ ہے

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ دونوں اعداد وشمار کے مجموعے (جدول 2.5 اور 2.6) سے نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے یعنی 50۔ جدول 2.5 میں دکھائے گئے سب سے زیادہ اور سب سے کم حاصل کردہ نمبرات بالترتیب 55 اور 45 ہیں۔ جدول 2.6 میں دی گئی تقسیم کا سب سے زیادہ نمبر 98 اور سب سے کم نمبر صفر ہے۔ پہلی تقسیم کی وسعت 10 اور دوسری تقسیم کی وسعت 98 ہے۔ حالانکہ دونوں گروپ کا درمیانہ یکساں ہے۔ اس دوسری تقسیم میں جو زیادہ غیر مستقل یا غیر یکساں ہے کی بہ نسبت پہلی تقسیم زیادہ مستقل اور یکساں ہے۔ اس سے یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا درمیانہ تقسیم کی تمام خصوصیات کا مناسب اشاریہ ہے۔ اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ ایسا نہیں ہے۔ اس لیے تقسیم کی بہتر تصویر حاصل کرنے کے لیے ہمیں مرکزی رجحان کی پیمائش اور انتشار یا تغیر کی پیمائش کی بھی ضرورت ہوتی ہے۔

انتشار کا مطلب مرکزی رجحان کی پیمائش کے اردگرد اکائیوں کے بکھرنے سے سمجھا جاسکتا ہے۔ اس کا استعمال اس حد کی پیمائش کرنے کے لیے کیا جاتا ہے جہاں تک انفرادی مدیں یا ہندسی اعداد وشمار ایک اوسط قیمت کے اردگرد بکھر سکتی ہیں یا پھیل سکتی ہیں۔ اس طرح انتشار مرکزی قیمت سے پیمائشوں کے تغیر، بکھراؤ یا وسعت کا درجہ ہے۔

انتشار مندرجہ ذیل دو بنیادی مقاصد کی تکمیل کرتا ہے۔

(i) اس سے ہمیں تقسیم یا سلسلے کی ساخت کی فطرت کا پتہ چلتا ہے۔

(ii) اس سے دی گئی تقسیم کا موازنہ استقلال اور یکسانیت کی صورت میں کیا جاسکتا ہے۔

انتشار کی پیمائش کے طریقے (Methods of Measuring Dispersion)

انتشار کی پیمائش کے مندرجہ ذیل طریقے ہیں۔

1۔ وسعت

2۔ چوتھائی انحراف

3۔ درمیانہ انحراف

4۔ معیاری انحراف اور تغیر کا ضریب (C.V.)

5۔ لارنز خمیدگی

ان طریقوں میں سے ہر ایک کی اپنی افادیت اور کمیاں ہیں۔ اس لیے ان میں سے ہر ایک کا استعمال احتیاط سے کرنا ضروری ہے۔ وسعت کے ساتھ ساتھ مطلق پیمائش کی شکل میں معیاری انحراف (s) اور اضافی پیمائش کی صورت میں تغیر کا ضریب (C.V.) انتشار کی سب سے زیادہ مستعمل پیمائشیں ہیں۔ ہم ان میں سے ہر ایک پیمائش کی تحسیب کا طریقہ بیان کریں گے۔

وسعت (Range)

کسی تقسیمی سلسلے میں بیشتر اور کمتر کے درمیان فرق کو وسعت (R) کہتے ہیں۔ اس طرح یہ کسی سلسلے میں سب سے چھوٹی سے لے کر سب سے بڑی پیمائش کی دوری ہے۔ اس کی تعریف سب سے بلند مقدار میں سب سے نچلی مقدار کو کم کرنے کی صورت میں کی جاسکتی ہے۔

© NCERT not to be republished

غیر درجہ بند اعدادو شمار کے لیے وسعت کی تحسیب(Range for Ungrouped Data)

مثال 2.7: روزانہ مزدوری کی مندرجہ ذیل تقسیم کے لیے وسعت کا حساب لگائیے:

40، 42، 45، 48، 50، 52، 55، 58، 60، 100 روپے

وسعت کی تحسیب(Computation of Range)

R کی تحسیب مندرجہ ذیل طریقہ کی مدد سے کی جاسکتی ہے:

$$R = L - S$$

جس میں

'R' وسعت ہے۔

L اور S بالترتیب بیشتر اور کمتر اقدار کی نمائندگی کرتے ہیں۔

اس لیے

$$R = L - S$$

$$= 100 - 4 = 60$$

اگر ہم مذکورہ تقسیم سے دسویں قیمت کو ہٹادیں تو R کی قیمت 20 (40–60) رہ جائے گی۔ سلسلے میں سے صرف ایک قدر کو ہٹا دینے پر R کی قیمت کم ہو کر ایک تہائی رہ گئی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ تغیر کی پیائش کے طور پر R کے ساتھ مشکل یہ ہے کہ اس کی قیمت مکمل طور پر دو انتہائی قیمتوں پر مبنی ہوتی ہے۔ اس طرح انتشار کی پیائش کی صورت میں R کا عمل ٹھیک اسی طرح ہے جس طرح مرکزی رجحان کی پیائش میں طرز تکثیر کا ہے۔ دونوں ہی پیائش بہت غیر مستقل ہیں۔

معیاری انحراف(Standard Deviation)

انتشار کی پیائش کے لیے معیاری انحراف سب سے زیادہ مستعمل پیائش ہے۔ اس کی تعریف انحرافوں کے مربع کے اوسط جذر کی شکل میں کی جاتی ہے۔ اس کا حساب ہمیشہ درمیانہ سے لگایا جاتا ہے۔ معیاری انحراف تغیر کی سب سے زیادہ مستقل پیائش ہے جس کا استعمال کئی دیگر شماریاتی عمل میں کیا جاتا ہے۔ یونانی حرف σ اس کا اشاریاتی حرف ہے۔

معیاری انحراف SD حاصل کرنے کے لیے سب سے پہلے کسی سلسلے کے درمیانہ (x) سے ہر ایک قیمت کے انحراف کا مربع کیا جاتا ہے۔ یہاں یہ بات قابل غور ہے کہ اس اقدام سے x^2 انحراف کے سبھی منفی اقدار مثبت ہو جاتے ہیں۔ یہ عمل معیاری انحراف کو اوسط انحراف کی ایک بڑی تنقید سے جو مقدار قوت x کا استعمال کرتا ہے۔ اس کے بعد تمام مربع انحرافوں کو جوڑ لیا جاتا ہے (x^2) (ہاں اس میں یہ احتیاط رکھنی پڑتی ہے کہ انحرافوں کو پہلے جوڑ کر مربع نہیں کیا جاتا)۔ مربع انحرافوں کے مجموعہ کو مدوں کی تعداد سے تقسیم کر کے اس کا جذر نکالا جاتا ہے۔ اس لیے معیاری انحراف کی تعریف درمیانہ مربع انحراف کے جذر کی شکل میں کی جاتی ہے۔ دیے گئے اعدادو شمار کے کسی بھی مجموعہ کے لیے اس کی تحسیب مندرجہ ذیل طریقہ سے کی جاتی ہے۔

© NCERT not to be republished

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

ان اقدام کے دوران مربع نکالنے سے پہلے ایک اصطلاح آتی ہے۔ جسے ایک خصوصی نام دیا جاتا ہے،تغیر۔تغیر کا استعمال اعلیٰ شماریاتی اعمال میں سب سے زیادہ کیا جاتا ہے۔اس کا جذر معیاری مربع ہوتا ہے۔اسی طرح اس کا برعکس بھی صحیح ہے یعنی معیاری انحراف (SD) کا مربع تغیر ہے۔

غیر درجہ بند اعدادو شمار کے لیے معیاری انحراف *(Standard Deviation for Ungrouped Data)*

مثال **2.8**: مندرجہ ذیل قیمتوں کے لیے معیاری انحراف معلوم کیجیے:

09،07،05،03،01

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{5}}$$

$$= \sqrt{8} = 2.828$$

$$= 2.83$$

جدول **2.7**: معیاری انحراف کی تحسیب

x	$x(x-\bar{x})$	x^2
1	–4	16
3	-2/–6	4
5	0	0
7	2	4
9	6-Apr	16
$\sum X = 25$		
N = 5		
∴ = 5		

آیئے اب ہم اس تحسیب میں مستعمل اقدام کا خلاصہ دیکھیں:

(i) تمام اقدار کو **X** کے ذریعے نشان زد کالم میں رکھا گیا ہے۔

(ii) خام اقدار کو جوڑ کر N سے تقسیم کرنے پر درمیانہ معلوم کیا گیا۔

(iii) ہر قدر کے انحراف **(x)** کو اصل قدر سے درمیانہ کو کم کر کے حاصل کیا گیا ہے۔اس کے صحیح ہونے کی جانچ انحرافوں کے مجموعہ سے کی جاسکتی ہے جو ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔اس مشق میں یہ عمل بھی صحیح ہے۔

(iv) انحرافوں **x** کا مربع کر کے اسے جمع کر دیا گیا ہے۔

(v) مربع جاتی انحرافوں کے مجموعہ **x²s** کو N یعنی مدوں کی تعداد سے تقسیم کیا گیا ہے۔واضح رہے کہ اس سے تغیر معلوم ہوجاتا ہے۔

(vi) اس کا جذر نکالنے سے معیاری انحراف حاصل ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

درجہ بند اعداد و شمار کے لیے معیاری انحراف کی تحسیب

مثال: اعداد و شمار کی مندرجہ ذیل تقسیم کے لیے معیاری انحراف کی تحسیب کیجیے:

درجات	120–130	130–140	140–150	150–160	160–170	170–180
f	2	4	6	12	10	6

مندرجہ ذیل جدول میں درجہ بند اعداد و شمار کے لیے معیاری انحراف معلوم کرنے کا طریقہ سمجھایا گیا ہے۔ اس جدول میں پہلے چار کالموں کے اقدام وہی ہیں جو ہم نے درجہ بند اعداد و شمار کے لیے درمیانہ کی تحسیب میں کیا تھا۔ ہم تحسیب کا آغاز وقفہ جاتی درجہ 160–150 میں درمیانہ کے تصور سے کرتے ہیں۔ اس لیے اس درجے کے سامنے صفر کا عدد دیا گیا ہے۔ اسی طرح دوسرے انحرافات کا تعیین کیا جاتا ہے۔ کالم 4 (fx') کی قدریں پہلے کی دو قدروں کو ضرب دے کر حاصل کی جاتی ہیں۔ پانچویں کالم $(fx'2)$ کی قدریں تیسرے اور چوتھے کالموں کی قدروں کو ضرب دے کر حاصل کی جاتی ہیں۔ اس کے بعد تمام کالموں کی قدروں کو جوڑ کر جمع کر لیا جاتا ہے۔

(1) درجہ	(2) f	(3) x'	(4) fx'	(5) $fx'2$
120–130	2	– 3	– 6	18
130–140	4	– 2	– 8	16
140–150	6	–1	– 6/20	6
150–160	12	0	0	0
160–170	10	1	10	10
170–180	6	2	12/22	24
	N = 40		$\sum fx' = 2$	$\sum fx'2=74$

معیاری انحراف کی تحسیب میں مندرجہ ذیل طریقہ کا استعمال کیا جاتا ہے:

$$SD = i^2 | \sum fx'^2 - \frac{\sum fx'}{N}$$

تغیر کا ضریب (Coefficient of Variation (CV))

جب مختلف مقامات یا اوقات کے لیے مشاہدات پیائش کی مختلف اکائیوں میں ہوں اور ان کا موازنہ کرنا ہو تو تغیر کا ضریب کافی مفید ثابت ہوتا ہے۔ تغیر کا ضریب معیاری انحراف کو درمیانہ کے فی صد کی شکل میں ظاہر کرتا ہے۔ اس کا تعین مندرجہ ذیل طریقے کا استعمال کر کے کیا جاتا ہے:

© NCERT not to be republished

$$CV = \frac{\text{معیاری انحراف}}{\text{درمیانہ}} \times 100$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$$

جدول 2.7 میں دیے گئے شماری مجموعہ کے لیے CV مندرجہ ذیل ہوگا:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$$

$$CV = \frac{2.83}{5} \times 100$$

$$CV = 56\%$$

درجہ بند اعداد و شمار کے لیے تغیر کا ضریب اس طریقہ سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مرتبہ جاتی باہمی ربط (Rank Correlation)

ابھی تک جتنے شماریاتی طریقوں کا ذکر کیا گیا ان سب کا تعلق ایک ہی متغیر سے تھا۔ اب ہم دو متغیروں کے درمیان باہمی ربط دریافت کرنے کے طریقوں کو بیان کریں گے اور اس باہمی ربط کے عددی تعبیر پر غور کریں گے۔ جب دو یا دو سے زیادہ شماریاتی مجموعے کا ذکر ہوتا ہے تو یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا کسی ایک متغیر میں تبدیلی کا اثر دوسرے متغیر کی تبدیلی پر پڑتا ہے۔

بسا اوقات ہماری دلچسپی دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے درمیان باہمی ربط یا باہمی انحصار کی فطرت جاننے میں ہوتی ہے۔ ایسا دیکھا گیا ہے کہ باہمی ربط اس مقصد کو پورا کرنے میں مفید ہے۔ یہ بنیادی طور پر دو یا دو سے زیادہ اعداد و شمار کے مجموعے کے درمیان باہمی ربط کی پیمائش ہے۔ چونکہ ہم اس کے تحت یہ مطالعہ کرتے ہیں کہ یہ کس طرح بدلتے ہیں اس لیے ہم ان واقعات کو ''متغیرہ'' کہتے ہیں۔ اس طرح باہمی ربط کی اصطلاح مطابقت یا دو متغیرات کے درمیان تعلق کی فطرت اور شدت بتاتی ہے۔ اس تعریف میں شامل اصطلاحات فطرت اور شدت کا مطلب متغیرات کے سمت اور اس کے درجے سے ہیں جس کے مطابق وہ باہم دگر منحرف ہوتے ہیں۔

باہمی ربط کا سمت (Direction of Correlation)

یہ ہمارا عام تجربہ ہے کہ کچھ ماحصل حاصل کرنے کے لیے ماد خل لگانا پڑتا ہے۔ اس میں تین امکان ہیں۔

1۔ ماد خل کو بڑھانے سے ماحصل بڑھتا ہے۔

2۔ ماد خل کو بڑھانے سے ماحصل کم ہوتا ہے۔

3۔ ماد خل میں تبدیلی سے ماحصل میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

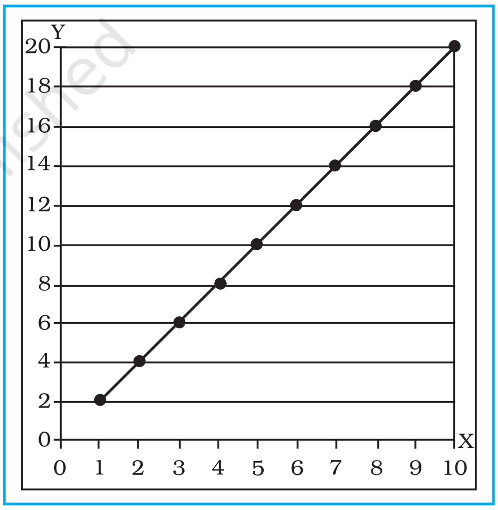
پہلی صورت میں ماد خل اور ماحصل میں باہمی ربط کی سمت ایک ہی ہے۔ اسے یوں کہا جاسکتا ہے کہ دونوں کے درمیان مثبت باہمی ربط ہے۔

© NCERT not to be republished

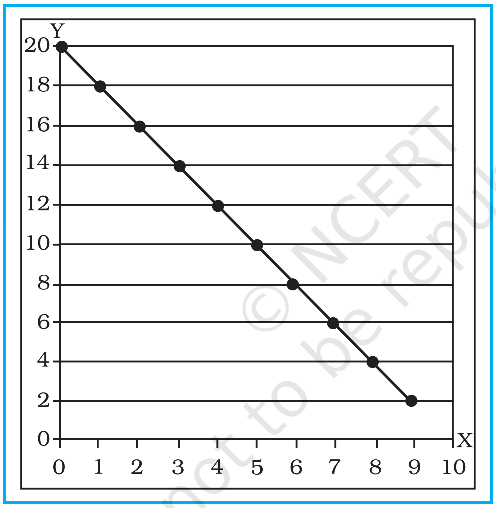
دوسری صورت میں ماخل اور ماحصل کے درمیان تبدیلی کی سمت ایک دوسرے کے مخالف ہے۔ اسے یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ دونوں کے درمیان منفی باہمی ربط ہے۔

تیسری صورت میں ماخل میں تبدیلی کا ماحصل کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہے۔ اس لیے اسے یوں کہا جا سکتا ہے کہ ان دونوں میں شماریاتی طور پر کوئی اہم باہمی ربط نہیں ہے۔

آیئے اب ہم شکل 2.7 کو دیکھیں جو شکل 2.6 کے برعکس ہے۔ اس میں درج قدروں کی سمت اوپر بائیں سے نیچے داہنی طرف ہے۔ یہ بھی دیکھیے کہ x محور پر ہر ایک اکائی اضافے کے ساتھ y محور پر دو اکائیوں کی کمی ہو جاتی ہے۔ یہ منفی باہمی ربط کی مثال ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دونوں متغیرات میں ایک دوسرے کے برخلاف حرکت کا رجحان ہے یعنی ایک متغیرہ میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسرے میں کمی ہوتی ہے اور اس کے برعکس بھی۔ ہم اس طرح کا باہمی ربط متغیرات کے کئی جغرافیائی جوڑوں کے درمیان دیکھ سکتے ہیں۔ سطح سمندر سے اونچائی اور ہوا کا دباؤ، درجۂ حرارت اور ہوا کا دباؤ وغیرہ کچھ ایسی ہی مثالیں ہیں۔ اس سے یہ بھی پتہ چلتا ہے کہ باہمی ربط کی شکل حاصل کرنے سے پہلے علم الحساب کے نشانات (+ یا –) کا ہونا ضروری ہے خاص کر اس وقت جب باہمی ربط منفی ہو۔



شکل 2.6 مکمل منفی باہمی ربط

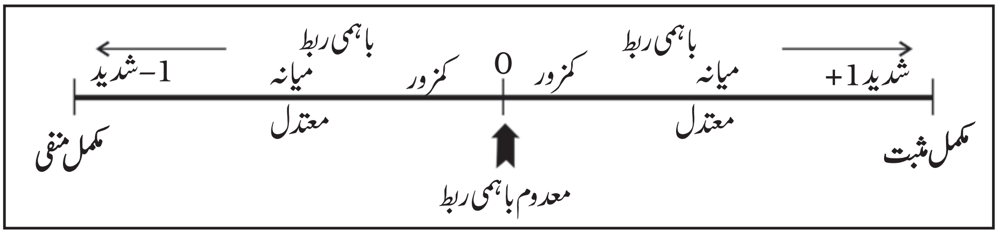


شکل 2.7 مکمل مثبت باہمی ربط

© NCERT not to be republished

باہمی ربط کا درجہ (Degree of Correlation)

جب باہمی ربط کی سمت منفی یا مثبت کے بارے میں حوالہ دیا جاتا ہے تو فطری طور پر یہ جاننے کی ضرورت پڑتی ہے کہ دونوں متغیرات میں مطابقت یا باہم ربط کا درجہ کیا ہے۔ علم الحساب کی اصطلاح میں اس مطابقت یا ربط کا سب سے زیادہ درجہ 1 (ایک) ہوتا ہے۔ اس درجے میں باہمی ربط کی سمت کا عنصر جوڑنے پر اس کی وسعت 1– سے صفر ہوتے ہوئے 1+ تک ہوتا ہے۔ یہ کبھی ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔ اس وسعت کی خاکائی تعبیر کو شکل 2.8 میں بھی دکھایا جا سکتا ہے۔ باہمی ربط 1 ہونے پر (خواہ مثبت ہو یا منفی) اسے مکمل باہمی ربط کہتے ہیں۔ اس طرح مکمل باہمی ربط کے دو مخالف سروں کے بالکل وسط میں صفر (0) باہمی ربط ہوتا ہے یعنی ایک ایسا نقطہ جہاں متغیرات کے درمیان باہمی ربط معدوم ہوتا ہے یا نہیں ہوتا ہے۔



شکل 2.8: باہمی ربط کی سمت اور درجے کی وسعت

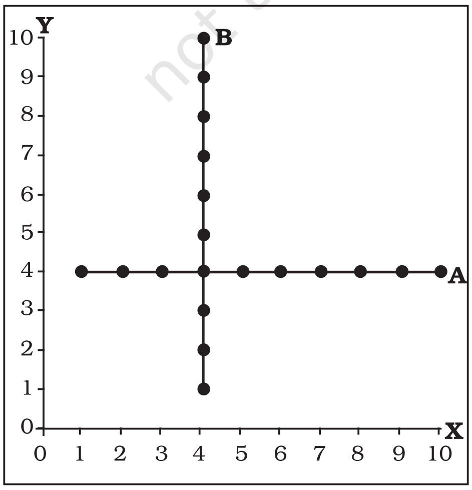
مکمل باہمی ربط (Perfect Correlations)

شکل 2.6 اور 2.7 کو دو متغیرات کے درمیان مثالی تعلق دکھانے کے لیے بنایا گیا ہے، غور کریں کہ یہ گراف x اور y قدروں کے بکھراؤ یا انتشار کو دکھاتے ہیں۔ اس لیے ایسے گراف کو انتشاری خاکہ کہتے ہیں۔ شکل 2.6 سے واضح ہے کہ جب اس قسم کے قدروں کا خاکہ بنایا جاتا ہے تو تمام نقاط ایک خط مستقیم (سیدھی لکیر) پر واقع ہوتے ہیں اور جب یہ خط مستقیم انتشاری خاکے کے نچلی بائیں طرف سے اوپری دائیں طرف چلتا ہے تو یہ مکمل مثبت باہمی ربط (1.00) کی مثال بن جاتی ہے۔ شکل 2.7 اس کے بالکل برعکس ہے۔ اس میں بھی تمام نقاط ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو اب انتشاری خاکے کے اوپری بائیں حصے سے اس کے نچلے دائیں حصے کی طرف چلتا ہے۔ یہ مکمل منفی باہمی ربط (جس کی قیمت 1.00– ہے) کی ایک مثال ہے معدوم باہمی ربط (یا صفر باہمی ربط) ہے جو اس وقت ہوتا ہے جب جوڑے کا کوئی بھی متغیر ایک دوسرے کی تبدیلی سے متاثر نہیں ہوتا۔ اس صورت میں دونوں متغیرات کے درمیان کوئی ربط نہیں ہوتا۔ اس لیے اس حالت کو معدوم باہمی ربط یا صفر باہمی ربط کہتے ہیں۔ اسے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔ X متغیر میں تبدیلی کا Y متغیر میں کوئی اثر نہیں ہونے کو انتشاری خاکہ –A کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح انتشاری خاکہ –B میں بھی صفر باہمی ربط کی حالت ہے جو کہ Y متغیر میں تبدیلی ہونے پر X متغیر پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

© NCERT not to be republished

A

X	Y
1	4
2	4
3	4
4	4
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	4



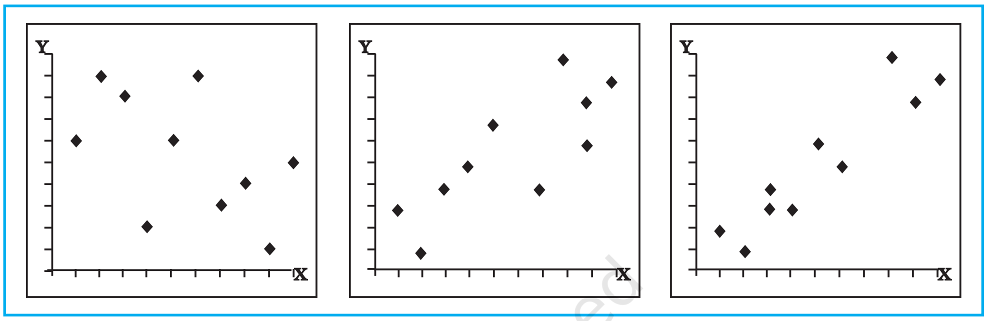
B

X	Y
4	1
4	2
4	3
4	4
4	5
4	6
4	7
4	8
4	9
4	10

شکل 2.9: معدوم باہمی ربط دکھانے والا انتشاری خاکہ

دیگر باہمی رابطے (Other Correlations)

مکمل باہمی ربط (1±) اور صفر باہمی ربط کے درمیان میں باہمی ربط کے عام حالات ہوتے ہیں جنھیں کمزور، میانہ یا معتدل اور شدید باہمی ربط کے نام سے جانا جاتا ہے۔ان تینوں حالتوں کو بالترتیب شکل 2.10، 2.11 اور 2.12 میں واضح طور پر دکھایا گیا ہے۔خاکائی نقاط کی وسعت یا انتشار اور انھیں دی گئی اصطلاحات کمزور، میانہ اور شدید پر غور کیجیے (یہ عمومی اصطلاحات ہیں جن کی کوئی خصوصی حد نہیں ہے)۔انتشار جتنا زیادہ ہوگا، باہمی ربط اتنا ہی کمزور ہوگا اور انتشار جتنا کم ہوگا، باہمی ربط اتنا ہی شدید ہوگا اور جب خاکائی نقاط ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے تو مکمل باہمی ربط ہوگا (شکل 2.6 اور 2.7)



شکل 2.12 شدید مثبت باہمی ربط　　شکل 2.11 میانہ معتدل مثبت باہمی ربط　　شکل 2.10 کمزور منفی باہمی ربط

© NCERT not to be republished

باہمی ربط کی تحسیب کے طریقے (Methods of Calculating Correlation)

باہمی ربط کی تحسیب کے کئی طریقے ہیں لیکن وقت اور جگہ کی کمی کی وجہ سے ہم صرف اسپیرمین کے مرتبہ جاتی باہمی ربط کا ہی تذکرہ کریں گے۔

اسپیرمین کا مرتبہ جاتی باہمی ربط (Spearman's Rank Correlation)

اسپیرمین نے مرتبے کی مدد سے باہمی ربط کی تحسیب کرنے کا طریقہ فروغ دیا ہے۔عرف عام میں اسے اسپیرمین کا مرتبہ جاتی باہمی ربط کہا جاتا ہے جس کا شماریاتی اشارہ σ (یونانی حرف تہجی rho رھو) ہے۔آسان ہونے کی وجہ سے اسپیرمین کا مرتبہ جاتی باہمی ربط وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔اس کی تحسیب مندرجہ ذیل اقدام پر کی جاتی ہے:

(i) مشق میں دیے گئے متغیرات X–Y سے متعلق اعداد و شمار کو نقل کر کے جدول کے پہلے اور دوسرے کالم میں رکھ دیجیے۔

(ii) دونوں متغیرات کا مرتبہ الگ الگ مقرر کیجیے۔X متغیر کے مرتبوں کو کالم 3 میں XR (X کا مرتبہ) عنوان کے تحت رکھیے اسی طرح Y متغیر کے مرتبوں (YR) چوتھے کالم میں درج کیجیے اعداد و شمار میں سب سے اونچی قیمت کو ایک کا درجہ دیا گیا ہے دوسری سب سے اونچی قیمت کو دو کا اور اسی طرح دوسرے مرتبوں کا درجہ مقرر کیا گیا ہے۔مان لیجیے کہ X متغیر کے اعداد و شمار 4، 8، 2، 10، 1، 9، 7، 3، 0 اور 5 ہوں گے۔XR 5، 3، 8، 1، 9، 6 اور 10، 7، 4، 2، ہوں گے۔غور کیجیے کہ آخری مرتبہ (اس مثال میں 10) مشاہدات کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے۔ YR کے مرتبوں کی تعیین بھی اسی طرح کیا جاتا ہے۔

(iii) XR اور YR مراتب کا تعیین کرنے کے بعد دونوں مراتب کا فرق معلوم کیجیے (اس میں مثبت اور منفی نشانات کا

لحاظ نہیں رکھتے) اور اسے پانچویں کالم میں درج کر لیجیے۔ چونکہ اگلے عمل میں اس فرق کا مربع نکالا جاتا ہے، اس لیے مثبت اور منفی نشانات کا لحاظ نہیں کیا جاتا۔

(iv) ان میں سے ہر فرق کا مربع نکال کر، انھیں جوڑ کر جمع کر لیا جاتا ہے، ان قیمتوں کو چھٹے کالم میں رکھا جاتا ہے۔

(v) اس کے بعد باہمی ربط کی تحسیب مندرجہ ذیل طریقہ سے کی جاتی ہے:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

جس میں

ρ = مرتبہ جاتی باہمی ربط ہے۔

$\sum D^2$ = دونوں مراتب کے فرق کے مربع کا جمع ہے۔

N = X–Y جوڑوں کی تعداد

مثال 2.9: مندرجہ ذیل اعداد و شمار کی بنیاد پر اسپیرمین کے مرتبہ جاتی باہمی ربط کی تحسیب کیجیے:

معاشیات میں حاصل نمبرات (X):	02	08	00	20	12	16	06	18	09	10
جغرافیہ میں حاصل نمبرات (Y):	04	12	06	24	16	18	08	20	09	10

© NCERT not to be republished

جدول 2.8 اسپیرمین کے مرتبہ جاتی باہمی ربط کی تحسیب:

(1) X	2 (Y)	(3) XR	(4) YR	(5) D	(6) D^2
2	4	9	10	1	1
8	12	7	5	2	4
0	6	10	9	1	1
20	24	1	1	0	0
12	16	4	4	0	0
16	18	3	3	0	0
6	8	8	8	0	0
18	20	2	2	0	0
9	9	6	7	1	1
10	10	5	6	1	1
N = 10					D^2 =8

تحسیب:(Calculation)

جب ρ مرتبہ جاتی باہمی ربط: D دونوں متغیر x اور y کے مرتبے کا فرق اور N، x–y کے مدوں کی تعداد ہوتو،

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 8}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{48}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{48}{10(99)}$$

$$= 1 - \frac{48}{(990)}$$

$$= 1 - 0.05$$

$$= 0.95$$

جب مدوں کی تعداد کم ہوتو دیگر قسم کے باہمی ربطوں کے بالمقابل ''رہو' ' سب سے اچھا متبادل ہے۔ جب اکائیوں کے نمبر چھوٹے چھوٹے ہوتے ہیں N کی تعداد زیادہ ہونے پر یہ بے فائدہ ہوجاتا ہے کیونکہ جب تک ہم تمام اکائیوں کو مرتبہ دیں گے تب تک دوسرے طریقہ سے باہمی ربط کی تحسیب کرلیں گے۔

© NCERT not to be republished

مشق

1۔ مندرجہ ذیل چار متبادل میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے:

(i) مرکزی رجحان کی پیمائش جو انتہائی قیمتوں سے متاثر نہیں ہوتا:

(a) درمیانہ (b) درمیانہ اور طرز تکثیر

(c) طرز تکثیر (d) وسطی

(ii) مرکزی رجحان کی وہ پیمائش جو کسی تقسیم کے کوہان سے ہمیشہ مطابقت رکھتی ہو:

(a) وسطی (b) درمیانہ اور طرز تکثیر

(c) درمیانہ (d) طرز تکثیر

(iii) منفی باہمی ربط کے خاکائی انتشار میں مندرج قیمتوں کی سمت ہوگی:

(a) اوپر بائیں سے نیچے دائیں کی طرف (b) نیچے بائیں سے اوپر دائیں کی طرف

(c) بائیں سے دائیں طرف (d) اوپر دائیں سے نیچے بائیں کی طرف

2۔ مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات تقریباً 30 الفاظ میں دیجیے:

(i) درمیانہ کی تعریف کیجیے۔

(ii) طرز تکثیر کے استعمال کے کیا فوائد ہیں؟

(iii) انتشار کسے کہتے ہیں؟

(iv) باہمی ربط کی تعریف کیجیے۔

(v) مکمل باہمی ربط کیا ہے؟

(vi) باہمی ربط کی آخری حد کیا ہے؟

3۔ مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات تقریباً 125 الفاظ میں دیجیے:

(i) خاکوں کی مدد سے ایک نارمل تقسیم اور عوضی تقسیم میں درمیانہ، وسطی اور طرز تکثیر کی اضافی حیثیت کی وضاحت کیجیے۔

(ii) درمیانہ، وسطی اور طرز تکثیر کے استعمال پر تبصرہ کیجیے۔ (اشارہ: ان کی خوبیوں اور خرابیوں کی حیثیت سے)

(iii) ایک تصوراتی مثال کی مدد سے معیاری انحراف کی تحسیب کا عمل سمجھائیے۔

(iv) انتشار کی کون سی پیمائش سب سے زیادہ غیر مستقل ہے اور کیوں؟

(v) باہمی ربط کی شدت پر ایک تفصیلی نوٹ لکھیے۔

(vi) مرتبہ جاتی باہمی ربط کی تحسیب کے مختلف اقدام کیا ہیں؟

سرگرمی

1۔ جغرافیائی تجزیہ پر مشتمل ایک تصوراتی مثال لے کر غیر درجہ بند اعداد و شمار کی تحسیب کرنے کے لیے بلاواسطہ اور بالواسطہ طریقوں کی وضاحت کیجیے۔

2۔ مختلف قسم کے مکمل باہمی ربط کے لیے خاکائی انتشار بنائیے۔

© NCERT not to be republished