પ્રકરણ **2**

સંબંધ અને વિધેય

2.1 વિહંગાવલોકન

આ પ્રકરણમાં બે ગણના ઘટકોની ક્રમયુક્ત જોડ બનાવી તેમની વચ્ચેના સંબંધો વિશે ચર્ચા કરીશું. વ્યાવહારિક રીતે આપણા દૈનિક વ્યવહારમાં બે ગણના ઘટકોની આવી ક્રમયુક્ત જોડ બનાવતા હોઈએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે T.V. સ્ટેશનની હવામાનના સમાચાર આપતી વ્યક્તિ દ્વારા દિવસના દરેક કલાકને સ્થાનિક હવામાન સાથે સાંકળવામાં આવે છે. શિક્ષક ઘણી વખત પ્રાપ્ય ગુણાંકના ગણના ઘટકોને વિદ્યાર્થીએ પ્રાપ્ત કરેલા ગુણ સાથે સાંકળે છે. આથી વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ વિષયવસ્તુને કેટલી સ્પષ્ટતાથી સમજ્યા છે તે જાણી શકાય છે. અંતમાં આપણે વિધેય તરીકે પ્રચલિત વિશિષ્ટ પ્રકારના સંબંધ વિશે જાણીશું.

2.1.1 ગણોનો કાર્તેઝિય ગુણાકાર

વ્યાખ્યા : આપેલ બે અરિક્ત ગણો A અને B માટે, પ્રત્યેક $x \in A$ અને પ્રત્યેક $y \in B$ થી બનતી તમામ ક્રમયુક્ત જોડો (x, y) ના ગણને A અને B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર કહે છે. તેને સંકેતમાં

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ અને $y \in B, A \neq \phi, B \neq \phi\}$ તરીકે લખાય.

જો $A = \{1, 2, 3\}$ અને $B = \{4, 5\}$ હોય, તો

$A \times B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

અને $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

(i) કોઈ બે ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન હોય અને બીજા ઘટક પણ સમાન હોય, તો તે બે ક્રમયુક્ત જોડ સમાન થાય, એટલે $x = u$ અને $y = v$ તો $(x, y) = (u, v)$.

(ii) જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$, તો $n(A \times B) = p \times q$.

(iii) $A \times A \times A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in A\}$. અહીં, (a, b, c) ને ક્રમયુક્ત ત્રય અથવા ત્રિપુટી અથવા ત્રેલું કહે છે.

2.1.2 સંબંધ : અરિક્ત ગણો A અને B માટે $A \times B$ ના કોઈ પણ ઉપગણને A થી B નો સંબંધ S કહે છે. આ ઉપગણ ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે.

S ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને S નો પ્રદેશ કહે છે અને પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને S ના પ્રતિબિંબનો ગણ કે વિસ્તાર કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $S = \left\{(1,2),(-2,3),\left(\frac{1}{2},3\right)\right\}$ એ એક સંબંધ છે.

S નો પ્રદેશ $= \left\{1,-2,\frac{1}{2}\right\}$ અને S નો વિસ્તાર $= \{2, 3\}$.

(i) સંબંધને યાદીના સ્વરૂપમાં કે ગુણધર્મના સ્વરૂપમાં અથવા કિરણ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવી શકાય. કિરણ આકૃતિ એ સંબંધનું દૃશ્ય નિરૂપણ છે.

(ii) જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય, તો $n(A \times B) = pq$ અને A થી B સુધીના કુલ શક્ય સંબંધોની સંખ્યા 2^{pq} થાય.

2.1.3 વિધેયો : જો કોઈ સંબંધ f દ્વારા ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે, તો આ સંબંધ f ને A થી Bનું વિધેય કહે છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો વિધેય f એ એવો સંબંધ છે જેમાં કોઈ પણ બે ક્રમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન ન હોય.

X થી Y પરના વિધેય f ને સંકેતમાં $f: X \rightarrow Y$ લખાય છે. ગણ X ને f નો પ્રદેશ અને ગણ Y ને f નો સહપ્રદેશ કહેવાય છે. આપેલ ઘટક $x \in X$ ને સંગત અનન્ય ઘટક હોય તેવા $y = f(x)$ એ Y માં મળે. આમ $f(x)$ ને x આગળ f નું મૂલ્ય અથવા f દ્વારા મળતું x નું પ્રતિબિંબ કહે છે.

$f(x)$ નાં બધાં જ મૂલ્યોના ગણને f નો વિસ્તાર કહે છે અથવા f દ્વારા મળતા તમામ $x \in A$ નાં પ્રતિબિંબના ગણને f નો વિસ્તાર કહે છે.

$$f \text{ નો વિસ્તાર} = \{ y \in Y \mid \text{કોઈક } x \in X \text{ માટે } y = f(x)\}$$

વ્યાખ્યા : જો કોઈ વિધેયનો વિસ્તાર R કે R નો કોઈ ઉપગણ હોય તો તે વિધેયને વાસ્તવિક કિંમતોનું વિધેય કહે છે અને જો તેનો પ્રદેશ R કે R નો કોઈ ઉપગણ હોય, તો તેને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

2.1.4 કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયો :

(i) તદેવ વિધેય : $f: R \rightarrow R$, પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $y = f(x) = x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયને તદેવ વિધેય કહેવાય.

$$f \text{ નો પ્રદેશ} = R, f \text{ નો વિસ્તાર} = R.$$

(ii) અચળ વિધેય : $c \in R$ કોઈ અચળ હોય તો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $y = f(x) = c$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f: R \rightarrow R$ ને અચળ વિધેય કહે છે. કોઈ વિધેયનો પ્રદેશ ગમે તે હોય પરંતુ વિસ્તાર એકાકી ગણ હોય, તો તે અચળ વિધેય છે.

f નો પ્રદેશ $= R$ અથવા R નો કોઈ પણ અરિક્ત ઊપગણ X

f નો વિસ્તાર $= \{c\}$

(iii) બહુપદી વિધેય : $f: R \rightarrow R$, પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે અને $a_0, a_1, a_2 ... a_n \in R$ ને બહુપદી વિધેય કહે છે. $a_n \neq 0$

(iv) સંમેય વિધેય : $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત બહુપદી વિધેયો $f(x)$ અને $g(x)$ માટે $\frac{f(x)}{g(x)}$ પ્રકારના વાસ્તવિક વિધેયને સંમેય વિધેય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $f: R - \{-2\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, \forall x \in R - \{-2\}$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય સંમેય વિધેય છે.

(v) માનાંક વિધેય : પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વિધેય $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત થતા વિધેયને માનાંક વિધેય કહેવાય છે.

f નો પ્રદેશ $= \mathbf{R}$

f નો વિસ્તાર $= \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

(vi) ચિહ્ન વિધેય : વાસ્તવિક વિધેય $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, જ્યાં

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{અથવા } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ને ચિહ્ન વિધેય કહેવાય છે. f નો પ્રદેશ = $\mathbf{R}$, f નો વિસ્તાર = $\{1, 0, -1\}$

(vii) મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય : વાસ્તવિક વિધેય $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ એ x થી નાના હોય અથવા x ને સમાન હોય તેવા તમામ પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક દર્શાવે, તો આ વિધેયને મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય કહે છે. તે પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, $f(x) = [x] = -1, \ -1 \le x < 0$

$f(x) = [x] = 0, \quad 0 \le x < 1$

$[x] = 1, \quad 1 \le x < 2$

$[x] = 2, \quad 2 \le x < 3$ વગેરે.

2.1.5 વાસ્તવિક વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ :

(i) બે વિધેયોનો સરવાળો :

$X \subset R$ માટે, ધારો કે $f: X \to R$ અને $g: X \to R$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમનો સરવાળો $(f+g): X \to R$ પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(ii) બે વિધેયોની બાદબાકી :

$X \subset \mathbf{R}$ માટે જો $f: X \to \mathbf{R}$ અને $g: X \to \mathbf{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમની બાદબાકી પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f-g): X \to \mathbf{R}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(iii) વિધેયનો અદિશ વડે એ ગુણાકાર :

ધારો કે, $f: X \to \mathbf{R}$ એ વાસ્તવિક વિધેય છે અને $\alpha \in \mathbf{R}$ એ કોઈ અદિશ છે. તો તેમનો ગુણાકાર αf એ X થી **R**નું વિધેય છે અને તે પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(iv) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર :

$X \subset \mathbf{R}$ માટે, જો $f: X \to \mathbf{R}$ અને $g: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમનો ગુણાકાર પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $(fg): X \to \mathbf{R}$, $(fg)(x) = f(x) \ g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

(v) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ભાગાકાર :

ધારો કે, બે વાસ્તવિક વિધેયો f અને g, X થી R પર વ્યાખ્યાયિત છે. બે વિધેયો f અને g નો ભાગાકાર $\frac{f}{g}$ દ્વારા દર્શાવાય છે અને તે Xના ઉપગણથી R નું વિધેય છે તથા $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

નોંધ : બે વિધેયોનો સરવાળો $f+g$, બે વિધેયોની બાદબાકી $f-g$ અને બે વિધેયોનો ગુણાકાર fg નો પ્રદેશ $= \{x : x \in D_f \cap D_g\}$, જ્યાં $D_f \cap D_g \neq \phi$

જ્યાં, D_f = વિધેય f નો પ્રદેશ

D_g = વિધેય g નો પ્રદેશ

બે વિધેયોનો ભાગાકાર $\frac{f}{g}$ નો પ્રદેશ $= \{x : x \in D_f \cap D_g$ અને $g(x) \neq 0\}$ જ્યાં આ ગણ અરિક્ત છે.

2.2 ઉદાહરણો :

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : જો A = {1, 2, 3, 4} અને B = {5, 7, 9} હોય, તો

(i) A × B મેળવો. (ii) B × A મેળવો.

(iii) A × B = B × A છે ? (iv) n (A × B) = n (B × A) છે ?

ઉકેલ : અહીં, A = {1, 2, 3, 4} અને B = {5, 7, 9} હોવાથી,

(i) A × B = {(1, 5), (1, 7), (1, 9), (2, 5), (2, 7), (2, 9), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)}

(ii) B × A = {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4)}

(iii) ના, A × B ≠ B × A. કારણ કે A × B અને B × A ની ક્રમયુક્ત જોડો સમાન નથી.

(iv) $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 4 \times 3 = 12$

$n(B \times A) = n(B) \times n(A) = 3 \times 4 = 12$

આથી $n(A \times B) = n(B \times A)$

ઉદાહરણ 2 : જો (i) $(4x + 3, y) = (3x + 5, -2)$ (ii) $(x - y, x + y) = (6, 10)$ હોય તો x, y શોધો.

ઉકેલ : (i) અહીં $(4x + 3, y) = (3x + 5, -2)$.

તેથી $4x + 3 = 3x + 5$ અને $y = -2$

$\therefore x = 2$ અને $y = -2$

(ii) $x - y = 6$

$x + y = 10$

$\therefore 2x = 16$

અથવા $x = 8$

$8 - y = 6$

$\therefore y = 2$

ઉદાહરણ 3 : જો A = {2, 4, 6, 9} અને B = {4, 6, 18, 27, 54}, $a \in$ A, $b \in$ B, તો જેમાં, 'a' એ 'b' નો અવયવ હોય અને $a < b$ થાય એવી ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) નો ગણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, A = {2, 4, 6, 9} અને B = {4, 6, 18, 27, 54}

હવે, આપણે જ્યાં a એ b નો અવયવ હોય અને $a < b$ થાય. એવી ક્રમયુક્ત જોડો (a, b) શોધવી છે.

2 એ 4 નો અવયવ છે અને $2 < 4$ છે. આમ, (2, 4) એ આપેલ શરતોનું પાલન કરતી એક ક્રમયુક્ત જોડ છે.

તે જ રીતે, (2, 6), (2, 18), (2, 54) તે જ પ્રકારની અન્ય ક્રમયુક્ત જોડો છે. આમ, આવશ્યક ક્રમયુક્ત જોડોનો ગણ.

$$\{(2, 4), (2, 6), (2, 18), (2, 54), (6, 18), (6, 54), (9, 18), (9, 27), (9, 54)\}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો $R = \left\{(x, y) : y = x + \frac{6}{x};\ \text{જ્યાં } x, y \in N \text{ અને } x < 6\right\}$ હોય તો સંબંધ R નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = 7 \in \mathbf{N}$, આથી $(1, 7) \in R$.

ફરી જ્યારે $x = 2$ ત્યારે $y = 2 + \frac{6}{2} = 2 + 3 = 5 \in \mathbf{N}$, આથી $(2, 5) \in R$.

ફરી જ્યારે $x = 3$, $y = 3 + \frac{6}{3} = 3 + 2 = 5 \in \mathbf{N}$, આથી $(3, 5) \in R$.

તે જ પ્રમાણે $x = 4$ લેતાં, $y = 4 + \frac{6}{4} \notin \mathbf{N}$ અને $x = 5$, $y = 5 + \frac{6}{5} \notin \mathbf{N}$.

તેથી, $R = \{(1, 7), (2, 5), (3, 5)\}$, આમ, R નો પ્રદેશ $= \{1, 2, 3\}$, R નો વિસ્તાર $= \{5, 7\}$

બીજી રીત : x, y પૂર્ણાંક હોવાથી $\frac{6}{x}$ પૂર્ણાંક હોવો જોઈએ. આથી x એ 6 નો અવયવ એટલે કે 1, 2, 3 કે 6 હોય. પરંતુ $x < 6$. આથી $x = 1, 2, 3$ લેતાં.

$R = \{(1, 7), (2,5), (3,5)\}$

ઉદાહરણ 5 : નીચેના પૈકી કયો સંબંધ વિધેય છે ? કારણ આપો.

(i) $R_1 = \left\{(2, 3), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (2, 7), (-4, 6)\right\}$

(ii) $R_2 = \{(x, |x|) \mid x$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.$\}$

ઉકેલ : (i) અહીં (2, 3) અને $(2, 7) \in R_1$

$\Rightarrow$ $R_1 (2) = 3$ અને $R_1 (2) = 7$

આમ, R_1 (2) તે 2 નું અનન્ય પ્રતિબિંબ નથી. તેથી આ સંબંધ R_1 વિધેય નથી.

(iii) $R_2 = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbf{R}\}$

પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ ને અનુરૂપ અનન્ય પ્રતિબિંબ $|x| \in \mathbf{R}$ મળે.

તેથી આ સંબંધ R_2 એ વિધેય છે.

ઉદાહરણ 6 : વિધેયો $f(x) = 2x^2 - 1$ અને $g(x) = 1 - 3x$ નાં મૂલ્યો સમાન થાય તેવો પ્રદેશ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 1 = 1 - 3x$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 4x - x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x(x + 2) - 1(x + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad (2x - 1)(x + 2) = 0$

તેથી જેના માટે $f(x) = g(x)$ થાય તેવો પ્રદેશ $= \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$.

ઉદાહરણ 7 : નીચેનાં વિધેયના તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યાઓને સમાવતા પ્રદેશ શોધો :

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$ (ii) $f(x) = [x] + x$

ઉકેલ : (i) અહીં, f એ $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ પ્રકારનું સંમેય વિધેય છે. વળી $g(x) = x$ અને $h(x) = x^2 + 3x + 2$.

હવે $h(x) \neq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) \neq 0$ અને તેથી, આપેલ વિધેયનો પ્રદેશ $R - \{-1, -2\}$ થશે.

(ii) $f(x) = [x] + x$.

આથી, $f(x) = h(x) + g(x)$ જ્યાં, $h(x) = [x]$ અને $g(x) = x$

અહીં, h નો પ્રદેશ $= \mathbf{R}$

અને g નો પ્રદેશ $= \mathbf{R}$

તેથી, f નો પ્રદેશ $= \mathbf{R}$

ઉદાહરણ 8 : નીચેના સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થઈ શકતા વાસ્તવિક વિધેયોના વિસ્તાર શોધો :

(i) $\dfrac{|x-4|}{x-4}, x \neq 4$ (ii) $\sqrt{16 - x^2}, |x| \leq 4$

ઉકેલ : (i) $f(x) = \dfrac{|x-4|}{x-4} = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-4} = 1, & x > 4 \\ \dfrac{-(x-4)}{x-4} = -1, & x < 4 \end{cases}$

તેથી $\dfrac{|x-4|}{x-4}$ નો વિસ્તાર $= \{1, -1\}$.

(ii) અહીં $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$16 - x^2 \geq 0$ થવું જોઈએ. એટલે કે $x^2 \leq 16$

$\therefore$ f નો પ્રદેશ $[-4, 4]$ થશે.

હવે, વિસ્તાર માટે ધારો કે, $y = \sqrt{16 - x^2}$

$\therefore \quad y^2 = 16 - x^2$

$\therefore \quad x^2 = 16 - y^2$

અહીં $\quad x \in [-4, 4]$

તેથી, f નો વિસ્તાર $= [0, 4]$

નોંધ : $|x| \leq 4$

$\therefore\ x^2 \le 16$

$0 \le 16 - x^2 \le 16$

$0 \le \sqrt{16-x^2} \le 4$

$\therefore\ \mathbf{R}_f = [0, 4]$

ઉદાહરણ 9 : $f(x) = |x-1| + |1+x|,\ -2 \le x \le 2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયની પુનઃ સરળ સ્વરૂપમાં ($f(x) = ax + b$ તરીકે) રજૂઆત કરો.

ઉકેલ : $f(x) = |x-1| + |1+x|,\ -2 \le x \le 2$

$$= \begin{cases} -x+1\ -1-x, & -2 \le x < -1 \\ -x+1\ +x+1, & -1 \le x < 1 \\ x-1\ +1+x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x, & -2 \le x < -1 \\ 2, & -1 \le x < 1 \\ 2x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ઉદાહરણ 10 : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય વાસ્તવિક વિધેય બને તે માટે તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યા x ને સમાવતો f નો પ્રદેશ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$.તેથી જો $[x]^2 - [x] - 6 > 0$ હોય, તો f વ્યાખ્યાયિત થાય.

$\therefore\ ([x]-3)([x]+2) > 0,$

$\Rightarrow\ [x] < -2$ અથવા $[x] > 3$

$\Rightarrow\ x < -2$ અથવા $x \ge 4$

તેથી, માંગેલ પ્રદેશ $= (-\infty, -2) \cup [4, \infty)$.

બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 11 અને 12 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 11 : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f નો વિસ્તાર = ...

(A) R (B) R^+ (C) R^- (D) આ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ :

અહીં, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$ આપેલ છે.

જ્યાં, $x - |x| = \begin{cases} x - x = 0, & x \ge 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$ (છેદ 0 ના લેવાય) (ઋણ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ ના મળે)

તેથી, $\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ એ કોઈ પણ $x \in \mathbf{R}$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી.

આમ, f એ કોઈ પણ $x \in \mathbf{R}$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી.

$\therefore$ વિધેય જ વ્યાખ્યાયિત ન હોવાથી વિસ્તારનો પ્રશ્ન જ નથી ઉદ્ભવતો.

સાચો ઉકેલ (D) છે.

ઉદાહરણ 12 : જો $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, તો $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ...$.

(A) $2x^3$ (B) $2 - \frac{1}{x^3}$ (C) 0 (D) 1

ઉકેલ :

અહીં, $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$

તેથી, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3} - x^3$

$\therefore$ $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} - x^3 = 0$

સાચો ઉકેલ (C) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 13 અને 14 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 13 : કોઈ બે ગણો A અને B માટે જો $n(\text{B}) = p$ અને $n(\text{A}) = q$ હોય, તો $f : \text{A} \to \text{B}$ પ્રકારનાં કુલ .... વિધેયો મળે.

ઉકેલ : ગણ A માંથી કોઈ પણ ઘટક x_i ને ગણ B ના કોઈ પણ ઘટક સાથે p પ્રકારે જોડી શકાય અને A ના પ્રત્યેક ઘટક માટે આ કાર્ય p^q પ્રકારે થઈ શકે. આમ, કુલ p^q વિધેયો મળે.

ઉદાહરણ 14 : વિધેયો f અને g નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

$f = \{(2, 4), (5, 6), (8, -1), (10, -3)\}$

$g = \{(2, 5), (7, 1), (8, 4), (10, 13), (11, -5)\}$ તો $f + g$ નો પ્રદેશ = ...

ઉકેલ : વિધેય f નો પ્રદેશ $= \text{D}_f = \{2, 5, 8, 10\}$ અને g નો પ્રદેશ $= \text{D}_g = \{2, 7, 8, 10, 11\}$,

$\therefore$ $f + g$ નો પ્રદેશ $= \{x \mid \text{D}_f \cap \text{D}_g\} = \{2, 8, 10\}$

સ્વાધ્યાય 2.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. જો A = {–1, 2, 3} અને B = {1, 3} હોય, તો

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $B \times B$ (iv) $A \times A$ મેળવો.

2. જો $P = \{x \mid x < 3, x \in \mathbf{N}\}$, $Q = \{x \mid x \le 2, x \in \mathbf{W}\}$ હોય, તો $(P \cup Q) \times (P \cap Q)$ મેળવો જ્યાં **W** એ પૂર્ણ સંખ્યાઓનો ગણ છે.

3. જો $A = \{x \mid x \in \mathbf{W}, x < 2\}$ $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 1 < x < 5\}$ અને C = {3, 5} હોય, તો

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $A \times (B \cup C)$ મેળવો.

4. નીચેના માટે a તથા b મેળવો :

(i) $(2a + b, a - b) = (8, 3)$ (ii) $\left(\frac{a}{4}, a-2b\right) = (0, 6 + b)$

5. જો $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન કરતી ક્રમયુક્ત જોડ મેળવો :

(i) $x + y = 5$ (ii) $x + y < 5$ (iii) $x + y > 8$

6. જો $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{W}, x^2 + y^2 = 25\}$ હોય, તો સંબંધ R નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

7. જો સંબંધ $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2x + 7$, જ્યાં $x \in \mathbf{R}$ અને $-5 \le x \le 5\}$ હોય, તો R_1 નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

8. જો સંબંધ $R_2 = \{(x, y) \mid x$ અને y પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય અને $x^2 + y^2 = 64\}$ હોય, તો R_2 ને યાદીની રીતે દર્શાવો.

9. જો સંબંધ $R_3 = \{(x, |x|) \mid x$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા$\}$ હોય, તો R_3 નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

10. નીચે પૈકી કયો સંબંધ વિધેય છે ? કારણ આપો.

(i) $h = \{(4, 6), (3, 9), (-11, 6), (3, 11)\}$

(ii) $f = \{(x, x) \mid x$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.$\}$

(iii) $g = \left\{\left(n, \frac{1}{n}\right) \middle| n \text{ એ ધન પૂર્ણાંક છે.}\right\}$

(iv) $s = \{(n, n^2) \mid n$ એ ધન પૂર્ણાંક છે.$\}$

(v) $t = \{(x, 3) \mid x$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.$\}$

11. જો $f(x) = x^2 + 7$ અને $g(x) = 3x + 5$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયો f અને g માટે નીચેની કિંમતો મેળવો :

(a) $f(3) + g(-5)$ (b) $f\left(\frac{1}{2}\right) \times g(14)$ (c) $f(-2) + g(-1)$

(d) $f(t) - f(-2)$ (e) $\frac{f(t) - f(5)}{t - 5}$, $t \ne 5$

12. જો વિધેયો f અને g, $f(x) = 2x + 1$ અને $g(x) = 4x - 7$ થી વ્યાખ્યાયિત હોય, તો

(a) x ના કયા મૂલ્ય માટે $f(x) = g(x)$ થાય ?

(b) x ના કયા મૂલ્યો માટે $f(x) < g(x)$ થાય ?

13. જો $f(x) = 2x + 1$ અને $g(x) = x^2 + 1$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયો f અને g માટે,

(i) $f + g$ (ii) $f - g$ (iii) fg અને (iv) $\frac{f}{g}$ શોધો.

14. નીચે આપેલા વિધેયને ક્રમયુક્ત જોડના ગણ તરીકે દર્શાવો અને તેમનો વિસ્તાર મેળવો :

$f: X \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 1$, જ્યાં $X = \{-1, 0, 3, 9, 7\}$

15. વિધેય $f(x) = 3x^2 - 1$ અને $g(x) = 3 + x$ સમાન વિધેયો હોય તો x મેળવો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

16. $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ વિધેય છે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો. જો આ સંબંધ $g(x) = \alpha x + \beta$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે, તો α અને β ની કિંમતો મેળવો.

17. નીચે આપેલા પ્રત્યેક વાસ્તવિક વિધેય માટે તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યાઓને સમાવતો પ્રદેશ શોધો :

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + |x|}}$ (iii) $f(x) = x\,|x|$

(iv) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1}$ (v) $f(x) = \frac{3x}{2x - 8}$

18. નીચેનાં વાસ્તવિક વિધેયોનો વિસ્તાર મેળવો. પ્રદેશ વાસ્તવિક વિધેય માટે તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો બનેલો છે :

(i) $f(x) = \frac{3}{2 - x^2}$ (ii) $f(x) = 1 - |x - 2|$

(iii) $f(x) = |x - 3|$ (iv) $f(x) = 1 + 3\cos 2x$

(**સૂચન :** $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos 2x \le 3 \Rightarrow -2 \le 1 + 3\cos 2x \le 4$)

19. નીચે આપેલા વિધેયને સરળ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$f(x) = |x - 2| + |2 + x|, \quad -3 \le x \le 3$

20. જો $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ હોય, તો નીચેનાં પરિણામ સાબિત કરો.

(i) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ (ii) $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{f(x)}$

21. જો પ્રદેશ ગણ $R^+ \cup \{0\}$ માં વિધેયો $f(x) = \sqrt{x}$ અને $g(x) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરેલ હોય, તો નીચેનાની કિંમત મેળવો :

(i) $(f + g)(x)$ (ii) $(f - g)(x)$ (iii) $(fg)(x)$ (iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ થી વ્યાખ્યાયિત થતા વિધેય માટે શક્ય તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓથી બનતો પ્રદેશ મેળવો અને તેનો વિસ્તાર મેળવો.

23. જો $f(x) = y = \frac{ax-b}{cx-a}$ હોય, તો દર્શાવો કે $f(y) = x$.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 24 થી 35 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

24. જો $n(A) = m$ અને $n(B) = n$ હોય, તો A થી B પર વ્યાખ્યાયિત અરિક્ત સંબંધોની સંખ્યા .... છે.

(A) m^n (B) $n^m - 1$ (C) $mn - 1$ (D) $2^{mn} - 1$

25. જો $[x]^2 - 5[x] + 6 = 0$ હોય, તો .... (જ્યા [.] એ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય દર્શાવે છે.)

(A) $x \in [3, 4]$ (B) $x \in (2, 3]$ (C) $x \in [2, 3]$ (D) $x \in [2, 4)$

26. વિધેય $f(x) = \frac{1}{1-2\cos x}$ નો વિસ્તાર = ... (f વાસ્તવિક વિધેય બને તેવા તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યાઓથી બનતો પ્રદેશ)

(A) $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ (B) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ (C) $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ (D) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

27. જો $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ હોય, તો

(A) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ (B) $f(xy) \geq f(x) \cdot f(y)$

(C) $f(xy) \leq f(x) \cdot f(y)$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ

[**સૂચન :** $f(xy) = \sqrt{1+x^2y^2}$, $f(x) \cdot f(y) = \sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2}$ શોધો.]

28. $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$ $(a > 0)$ નો પ્રદેશ .... છે.

(A) $(-a, a)$ (B) $[-a, a]$ (C) $[0, a]$ (D) $(-a, 0]$

29. જો $f(x) = ax + b$ જ્યાં a અને b ધન પૂર્ણાંકો છે તેમ જ $f(-1) = -5$ અને $f(3) = 3$ હોય, તો a અને b .... થાય.

(A) $a = -3, b = -1$ (B) $a = 2, b = -3$ (C) $a = 0, b = 2$ (D) $a = 2, b = 3$

30. $f(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f નો પ્રદેશ = ... (f વાસ્તવિક વિધેય બને તેવી તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યા સમાવતો)

(A) $(-\infty, -1) \cup (1, 4]$ (B) $(-\infty, -1] \cup (1, 4]$

(C) $(-\infty, -1) \cup [1, 4]$ (D) $(-\infty, -1) \cup [1, 4)$

31. $f(x) = \frac{4-x}{x-4}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર .... થાય.

(A) પ્રદેશ = **R**, વિસ્તાર = $\{-1, 1\}$ (B) પ્રદેશ = **R** – $\{1\}$, વિસ્તાર = **R**

(C) પ્રદેશ = **R** – $\{4\}$, વિસ્તાર = $\{-1\}$ (D) પ્રદેશ = **R** – $\{-4\}$, વિસ્તાર = $\{-1, 1\}$

32. $f(x) = \sqrt{x-1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય fનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર = ... (f વાસ્તવિક વિધેય બને તેવી તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યા સમાવતો પ્રદેશ)

(A) પ્રદેશ = $(1, \infty)$, વિસ્તાર = $(0, \infty)$ (B) પ્રદેશ = $[1, \infty)$, વિસ્તાર = $(0, \infty)$

(C) પ્રદેશ = $(1, \infty)$, વિસ્તાર = $[0, \infty)$ (D) પ્રદેશ = $[1, \infty)$, વિસ્તાર = $[0, \infty)$

33. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશ = ... (f વાસ્તવિક વિધેય બને તેવી તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યા સમાવતો પ્રદેશ)

(A) **R** – $\{3, -2\}$ (B) **R** – $\{-3, 2\}$ (C) **R** – $[3, -2]$ (D) **R** – $(3, -2)$

34. $f(x) = 2 - |x-5|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર = ... (f વાસ્તવિક વિધેય બને તેવી તમામ શક્ય વાસ્તવિક સંખ્યા સમાવતો પ્રદેશ)

(A) પ્રદેશ = $\mathbf{R}^+$, વિસ્તાર = $(-\infty, 1]$ (B) પ્રદેશ = **R**, વિસ્તાર = $(-\infty, 2]$

(C) પ્રદેશ = **R**, વિસ્તાર = $(-\infty, 2)$ (D) પ્રદેશ = $\mathbf{R}^+$, વિસ્તાર = $(-\infty, 2]$

35. જે પ્રદેશમાં વિધેયો $f(x) = 3x^2 - 1$ અને $g(x) = 3 + x$ સમાન થાય, તેવો પ્રદેશ .... છે.

(A) $\left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$ (B) $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$ (C) $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ (D) $\left[-1, \frac{4}{3}\right)$

નીચેના પ્રશ્ન ક્રમાંક 36 થી 37માં વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

36. ધારો કે વાસ્તવિક વિધેયો f અને g,

$f = \{(0, 1), (2, 0), (3, -4), (4, 2), (5, 1)\}$ અને $g = \{(1, 0), (2, 2), (3, -1), (4, 4), (5, 3)\}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય તો $f \cdot g$ નો પ્રદેશ = ...

37. જો $f = \{(2, 4), (5, 6), (8, -1), (10, -3)\}$ અને $g = \{(2, 5), (7, 1), (8, 4), (10, 13), (11, 5)\}$

આપેલાં બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો નીચેના વિભાગ Iની અભિવ્યક્તિને વિભાગ IIની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી વિધાન સત્ય બને :

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) $f - g$	(i) $\left\{\left(2, \frac{4}{5}\right), \left(8, \frac{-1}{4}\right), \left(10, \frac{-3}{13}\right)\right\}$
(b) $f + g$	(ii) $\{(2, 20), (8, -4), (10, -39)\}$
(c) $f \cdot g$	(iii) $\{(2, -1), (8, -5), (10, -16)\}$
(d) $\frac{f}{g}$	(iv) $\{(2, 9), (8, 3), (10, 10)\}$

નીચેના પ્રશ્ન ક્રમાંક 38 થી 42 વાળા વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

38. ક્રમયુક્ત જોડ (5, 2) એ સંબંધ $R = \{(x, y) : y = x - 5, x, y \in \mathbf{Z}\}$ નો ઘટક છે.

39. જો $P = \{1, 2\}$ હોય, તો $P \times P \times P = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1)\}$

40. જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ અને $C = \{4, 5, 6\}$ હોય, તો $(A \times B) \cup (A \times C)$

$= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$.

41. જો $(x - 2, y + 5) = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$ સમાન ક્રમયુક્ત જોડો હોય, તો $x = 4$ અને $y = \frac{-14}{3}$.

42. જો $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ હોય, તો $A = \{a, b\}$ અને $B = \{x, y\}$.