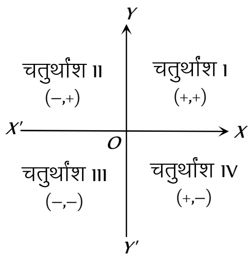
Chapter

14

समकोणीय कार्तीय निर्देशांक

प्रस्तावना (Introduction)

निर्देशांक बिन्दु वह वास्तविक चर होते हैं, जो किसी तल में किसी बिन्दु की व्याख्या करते हैं। किसी द्विविमीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म द्वारा विभिन्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।



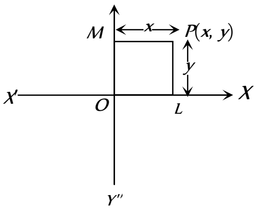
दो रेखायें XOX' और YOY' समतल को चार चतुर्थांशों (quadrants) में विभाजित करती हैं। XOY को प्रथम चतुर्थांश, YOX' को द्वितीय, $X'OY'$ को तृतीय और $Y'OX$ को चतुर्थ चतुर्थांश कहते हैं। मूलबिन्दु O से OX दिशा में मापी गयी लम्बाइयों को धनात्मक और इसके विपरीत OX' दिशा में मापी गयी लम्बाइयों को ऋणात्मक माना जाता है। इसी प्रकार OY दिशा में मापी गयी लम्बाईयाँ धनात्मक और इसके विपरीत OY दिशा में मापी गयी लम्बाईयाँ ऋणात्मक होती हैं।

किसी बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक (Cartesian co-ordinates of a point)

यह सर्वाधिक प्रचलित निर्देशांक पद्धति है।

x अक्ष : रेखा XOX' को x-अक्ष कहते हैं।

y अक्ष : रेखा YOY' को y-अक्ष कहते हैं।



निर्देशांक अक्षः x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों निर्देशांक अक्ष कहलाते हैं।

मूलबिन्दुः बिन्दु 'O' को निर्देशाक्षों का मूलबिन्दु या मूलबिन्दु कहते हैं।

तिर्यक अक्षः जब निर्देशाक्षों के मध्य कोण समकोण न हो, तो अक्ष तिर्यक अक्ष कहलाते हैं।

माना $OL = x$ एवं $OM = y$ जो कि क्रमशः भुज (या x निर्देशांक) एवं कोटि (या y निर्देशांक) है। बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं।

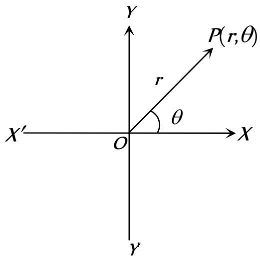
मूलबिन्दु के निर्देशांक (0, 0) होते हैं।

y-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का x-निर्देशांक शून्य होता है।

x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक शून्य होता है।

ध्रुवीय निर्देशांक (Polar co-ordinates)

माना कि OX कोई स्थिर रेखा है, जिसे सामान्यतः प्रारम्भिक रेखा (initial line) कहते हैं, तथा इस पर स्थिर बिन्दु O है। यदि किसी बिन्दु P की मूलबिन्दु से दूरी r तथा $\angle XOP = \theta$ हो, तो (r, θ) बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं।



यदि बिन्दु P का कार्तीय निर्देशांक (x, y) हो, तो $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

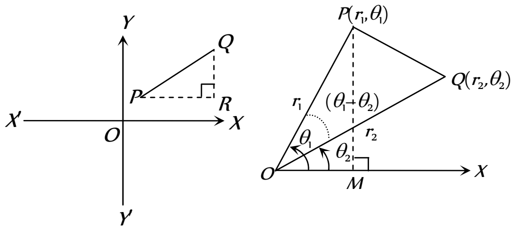
एवं $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी (Distance formula)

बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के मध्य दूरी =

$$PQ = \sqrt{(PR)^2 + (QR)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(i) **ध्रुवीय निर्देशांकों में दो बिन्दुओं के मध्य दूरी** : माना O ध्रुव एवं OX प्रारम्भिक रेखा है। माना P एवं Q दो बिन्दु हैं, जिनके ध्रुवीय निर्देशांक क्रमशः (r_1, θ_1) एवं (r_2, θ_2) हैं।



तब, $(PQ)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore \quad PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$,

θ_1 एवं θ_2 को सदैव रेडियन में लेते हैं।

कुछ ज्यामितीय आकृतियों के गुणधर्म
(Properties of some geometrical figures)

(1) किसी ΔABC में, यदि AD शीर्ष A से आधार BC पर खींची गई माध्यिका हो, तो $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

(2) एक त्रिभुज समद्विबाहु कहलाता है यदि इसकी कोई दो माध्यिकायें या दो भुजायें बराबर हो।

(3) किसी समकोण त्रिभुज में, कर्ण का मध्य बिन्दु शीर्षों से समदूरस्थ होता है।

(4) **समबाहु त्रिभुजः** सभी भुजाओं की लम्बाईयाँ बराबर होती है।

(5) **समचतुर्भुजः** सभी भुजायें बराबर होती हैं तथा कोई कोण समकोण नहीं होता है लेकिन विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा असमान होते हैं।

(6) **वर्गः** सभी भुजायें बराबर होती है तथा प्रत्येक कोण समकोण होता है। विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(7) **समान्तर चतुर्भुजः** सम्मुख भुजायें आपस में बराबर व समान्तर होती है तथा विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

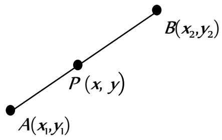
(8) **आयतः** सम्मुख भुजायें आपस में बराबर व समान्तर होती हैं तथा प्रत्येक कोण समकोण होता है। विकर्ण भी आपस में बराबर होते हैं।

(9) किसी चतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को क्रम से मिलाने पर निर्मित आकृति एक समान्तर चतुर्भुज होती है।

विभाजन सूत्र (Section formulae)

यदि $P(x, y)$, बिन्दु $A(x_1, y_1)$ एवं $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है $(m_1, m_2 > 0)$

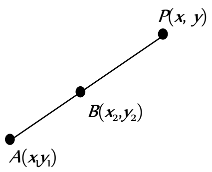
(1) **अन्तः विभाजन :** यदि $P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, अर्थात् $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$



तब बिन्दु $P(x, y)$ के निर्देशांक

$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$, $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ होंगे।

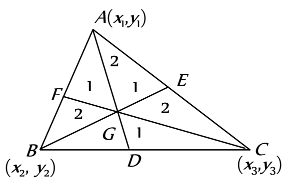
(2) **बाह्यतः विभाजन :** यदि $P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाह्यतः विभाजित करता है अर्थात् $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ तब बिन्दु P के निर्देशांक



$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$, $y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$ होंगे।

त्रिभुज से संबंधित बिन्दु (Some points of a triangle)

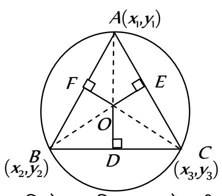
(1) **त्रिभुज का केन्द्रक :** किसी त्रिभुज की माध्यिकाओं (medians) का प्रतिच्छेद बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है। केन्द्रक प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।



यदि त्रिभुज के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं। यदि माध्यिका AD पर केन्द्रक G है, तब $AG : GD = 2 : 1$ तथा G के निर्देशांक

$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ होंगे।

(2) **परिकेन्द्र :** त्रिभुज के शीर्षों से जाने वाले वृत्त अर्थात् परिवृत्त का केन्द्र इसका परिकेन्द्र कहलाता है। यह भुजाओं के लम्ब अर्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है। स्पष्ट है कि परिकेन्द्र त्रिभुज के शीर्षों से बराबर दूरी पर होता है एवं यह दूरी परित्रिज्या कहलाती है।



माना त्रिभुज के शीर्षों A, B, C के निर्देशांक क्रमशः $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ एवं (x_3, y_3) हैं एवं परिकेन्द्र $O(x, y)$ है। तब $(OA)^2 = (OB)^2 = (OC)^2$ को हल करके परिकेन्द्र के निर्देशांक (x, y) ज्ञात किये जा सकते हैं। अर्थात्

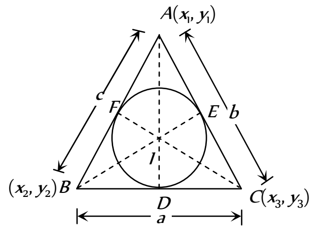
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

यदि त्रिभुज समकोण है, तो इसके कर्ण का मध्य बिन्दु परिकेन्द्र होता है।

यदि त्रिभुज के कोण A, B, C एवं त्रिभुज के शीर्ष $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ एवं $C(x_3, y_3)$ हो, तो त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र

$\left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}\right)$ होता है।

(3) **अन्तःकेन्द्र :** अन्तः केन्द्र त्रिभुज के अन्तः कोणों के अर्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है। यह त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त अर्थात् अन्तःवृत्त का केन्द्र भी होता है।

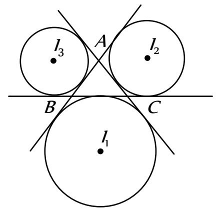


अन्तःकेन्द्र के निर्देशांक

$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$

जहाँ a, b, c त्रिभुज ABC की भुजायें हैं।

(4) **बर्हिवृत्त तथा बर्हिकेन्द्र :** किसी त्रिभुज की एक भुजा तथा दो बढ़ी हुई भुजाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त को बर्हिवृत्त कहते हैं। माना ABC एक त्रिभुज है, तो यहाँ तीन बर्हिवृत्तों के तीन बर्हिकेन्द्र होंगे।



माना शीर्षों $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ के सम्मुख बहिःकेन्द्र I_1, I_2, I_3 हैं, तब

$I_1 \equiv \left(\frac{-ax_1 + bx_2 + cx_3}{-a + b + c}, \frac{-ay_1 + by_2 + cy_3}{-a + b + c}\right)$

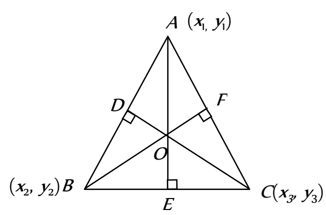
$I_2 \equiv \left(\frac{ax_1 - bx_2 + cx_3}{a - b + c}, \frac{ay_1 - by_2 + cy_3}{a - b + c}\right)$,

$I_3 \equiv \left(\frac{ax_1 + bx_2 - cx_3}{a + b - c}, \frac{ay_1 + by_2 - cy_3}{a + b - c}\right)$

कोणार्धक सम्मुख भुजाओं को, शेष भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है, अर्थात् $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$, अन्तःकेन्द्र कोणार्धक को अनुपात $(b + c) : a, (c + a) : b$ एवं $(a + b) : c$ में विभाजित करता है।

बर्हिकेन्द्र : किसी त्रिभुज की एक भुजा तथा दो बढ़ी हुई भुजाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त का केन्द्र त्रिभुज का बर्हिकेन्द्र कहलाता है किसी त्रिभुज के तीन बर्हिकेन्द्र होते हैं। अन्तःकेन्द्र के सूत्र में a, b, c के चिन्हों को क्रमशः परिवर्तित कर बर्हिकेन्द्र के निर्देशांक प्राप्त किये जा सकते हैं।

(5) **लम्बकेन्द्र :** त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु इसका लम्ब केन्द्र कहलाता है। किन्हीं भी दो लम्बों के समीकरण को हल करके लम्बकेन्द्र (O) प्राप्त कर सकते हैं।



यहाँ O लम्बकेन्द्र है, यदि $AE \perp BC$, $BF \perp AC$ एवं $CD \perp AB$ हो तो $OE \perp BC, OF \perp AC, OD \perp AB$

त्रिभुज ABC का लम्ब केन्द्र

$\left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}\right)$ होता है।

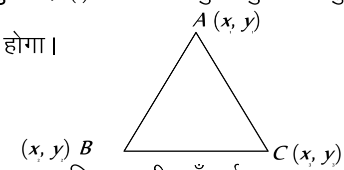
यदि त्रिभुज समकोण हो, तो इसका लम्बकेन्द्र समकोण वाले बिन्दु पर होगा।

कुछ ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल
(Area of some geometrical figures)

(1) **त्रिभुज का क्षेत्रफल :** त्रिभुज ABC के शीर्ष $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ व $C(x_3, y_3)$ हैं एवं त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल को 'Δ' द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

समबाहु त्रिभुज में, (i) यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a हो, तो इसका क्षेत्रफल $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ होगा।



(ii) यदि समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई (altitude) 'p' हो, तो इसका क्षेत्रफल $\frac{(p^2)}{\sqrt{3}}$ होगा।

(2) **समरेखीय बिन्दु :** तीन बिन्दु $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2); C(x_3, y_3)$ समरेखीय होंगे, यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य हो। अर्थात्,

(i) $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(ii) $AB + BC = AC$ या $AC + BC = AB$ या $AC + AB = BC$.

(3) **चतुर्भुज का क्षेत्रफल :** यदि चतुर्भुज के शीर्ष $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ और (x_4, y_4) हों, तो इसका क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_1 - x_1y_4)].$$

(4) **बहुभुज का क्षेत्रफल :** यदि बहुभुज के शीर्ष $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); ....(x_n, y_n)$ हों, तब बहुभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + ... + (x_ny_1 - x_1y_n)\}|$$

पंक्ति विधि (Stair method) : प्रथम निर्देशांक को अन्तिम पंक्ति में पुनः एक बार लिखकर नीचे की ओर तीर के लिए धनात्मक चिन्ह व ऊपर की ओर तीर के लिए ऋणात्मक चिन्ह का प्रयोग करते हैं।

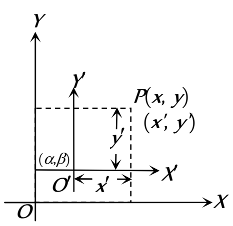
$$\therefore \text{ बहुभुज का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|\{(x_1y_2 + x_2y_3 + ... + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + ... + y_nx_1)\}|$$

अक्षों का रूपान्तरण (Transformation of axes)

(1) **अक्षों के घूर्णन के बिना मूलबिन्दु का परिवर्तन :** माना अक्षों OX एवं OY के सापेक्ष बिन्दु $P \equiv (x, y)$ है।

अब माना OX एवं OY के सापेक्ष नये मूलबिन्दु $O' \equiv (\alpha, \beta)$ है एवं $O'X'$ एवं $O'Y'$ के सापेक्ष बिन्दु $P \equiv (x', y')$ है, जहाँ OX एवं $O'X'$ समान्तर हैं तथा OY एवं $O'Y'$ समान्तर हैं।

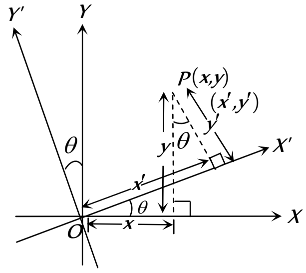


तब $x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta$

या $x' = x - \alpha, \quad y' = y - \beta$

इसलिए यदि निर्देशाक्षों की दिशाओं को परिवर्तित किये बिना मूलबिन्दु को नये बिन्दु (α, β) पर स्थानांतरित कर दिया जाये तो वक्र का समीकरण ज्ञात करने के लिए उसके समीकरण में x के स्थान पर $x' + \alpha$ और y के स्थान पर $y' + \beta$ रखकर हल करते हैं।

(2) **मूलबिन्दु के परिवर्तन के बिना अक्षों का घूर्णन :** माना O मूलबिन्दु है OX एवं OY के सापेक्ष बिन्दु $P \equiv (x, y)$ तथा अक्षों OX' एवं OY' के सापेक्ष बिन्दु $P \equiv (x', y')$ हैं, जहाँ $\angle X'OX = \angle YOY' = \theta$



तो $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

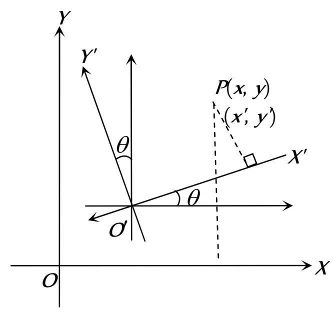
एवं $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

(x, y) एवं (x', y') में संबंधों को निम्न सारणी की सहायता से सरलतापूर्वक याद रख सकते हैं

	$x\downarrow$	$y\downarrow$
$x'\rightarrow$	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$y'\rightarrow$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

(3) **मूलबिन्दु का परिवर्तन एवं अक्षों का घूर्णन :** यदि मूल बिन्दु $O(0, 0)$ को बिन्दु $O'(\alpha, \beta)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाये एवं अक्षों को नये मूल बिन्दु O' के सापेक्ष वामावर्त दिशा में θ कोण से इस प्रकार घुमाया जाता है, कि बिन्दु $P(x, y)$ के निर्देशांक (x', y') हो जाते हैं, तब रूपान्तरित समीकरण



$x = \alpha + x'\cos\theta - y'\sin\theta$ एवं

$y = \beta + x'\sin\theta + y'\cos\theta$ होंगे।

(4) **परावर्तन (बिन्दु का प्रतिबिम्ब) :** माना कि $P(x, y)$ कोई बिन्दु है, तो इस बिन्दु का

(i) x-अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब $\Rightarrow (x, -y)$

(ii) y-अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब $\Rightarrow (-x, y)$

(iii) मूल बिन्दु के सापेक्ष प्रतिबिम्ब $\Rightarrow (-x, -y)$

(iv) रेखा $y = x$ के सापेक्ष प्रतिबिम्ब $\Rightarrow (y, x)$

बिन्दुपथ (Locus)

यदि कोई बिन्दु किसी दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार गति करता है, तो उस बिन्दु द्वारा अनुरेखित पथ उस बिन्दु का बिन्दुपथ कहलाता है।

बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण : वह समीकरण जो केवल बिन्दुपथ पर स्थित बिन्दुओं द्वारा ही सन्तुष्ट होता है, बिन्दुपथ का समीकरण कहलाता है।

बिन्दुपथ को ज्ञात करने की विधि

(i) माना उस बिन्दु के निर्देशांक (h, k) है, जिसका बिन्दुपथ ज्ञात करना है।

(ii) दिये गये प्रतिबंध के अनुसार (h, k) में गणितीय संबंध स्थापित करते हैं।

(iii) प्राप्त संबंध से चरों को विलुप्त करते हैं, यदि कोई चर हो।

(iv) पद (iii) से प्राप्त संबंध में h के स्थान पर x तथा k के स्थान पर y रखते हैं। इस प्रकार अभीष्ट बिन्दुपथ प्राप्त होता है।

Tips & Tricks

✍ यदि $P(x, y)$, बिन्दु $A(x_1, y_1)$ एवं $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा को अनुपात $\lambda : 1 (\lambda > 0)$ में विभाजित करे, तो $x = \frac{\lambda x_2 \pm x_1}{\lambda \pm 1}$; $y = \frac{\lambda y_2 \pm y_1}{\lambda \pm 1}$, जहाँ धनात्मक चिन्ह् अन्तः विभाजन एवं ऋणात्मक चिन्ह बाह्य विभाजन दर्शाता है।

✍ AB का मध्य बिन्दु $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ है;[जहाँ $m_1 : m_2 = 1 : 1$].

✍ अनुपात ज्ञात करने के लिए अनुपात $\lambda : 1$ का उपयोग करते हैं। यदि λ धनात्मक है, तो अन्तः विभाजन एवं यदि λ ऋणात्मक है, तो बाह्य विभाजन होता है।

✍ रेखा $ax + by + c = 0$, बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ एवं $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा को अनुपात $\left(-\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}\right)$ में विभाजित करता है। यदि अनुपात ऋणात्मक है, तो बाह्य विभाजन एवं धनात्मक है, तो अन्तः विभाजन व्यक्त करता है।

✍ यदि त्रिभुज समबाहु हो, तो केन्द्रक, अन्तः केन्द्र, लम्बकेन्द्र तथा परिकेन्द्र एक ही बिन्दु पर होंगे अर्थात् ये संपाती होंगे।

✍ लम्बकेन्द्र, केन्द्रक एवं परिकेन्द्र सदैव समरेखीय होते हैं तथा केन्द्रक, लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

✍ समद्विबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र, अंतःकेन्द्र तथा परिकेन्द्र एक ही रेखा पर स्थित होते हैं।

✍ समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र, कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।

✍ यदि त्रिभुज के ध्रुवीय निर्देशांक $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ एवं (r_3, θ_3) हों, तो इसका क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}[r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_3 r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)].$$

✍ यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल एक परिमेय संख्या है, तो त्रिभुज कभी भी समबाहु नहीं हो सकता है।

✍ यदि आयत के दो विपरीत शीर्ष (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) हों, तो इसका क्षेत्रफल $|(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)|$ होगा।

✍ यदि वर्ग के दो विपरीत शीर्ष $A(x_1, y_1)$ एवं $C(x_2, y_2)$ हों, तो इसका क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$ होगा।

✍ बिन्दु P का बिन्दुपथ जो दो बिन्दुओं A तथा B से समदूरस्थ है, एक सरल रेखा है तथा रेखा AB का लम्ब समद्विभाजक है।

✍ उपरोक्त स्थिति में यदि $PA = kPB$ जहाँ $k \neq 1$, तो P का बिन्दुपथ एक वृत्त होगा।

✍ P का बिन्दुपथ, यदि A और B स्थिर हों

(a) वृत्त, यदि $\angle APB$ = नियतांक, (0 या π को छोड़कर)

(b) AB व्यास का वृत्त, यदि $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

(c) दीर्घवृत्त, यदि $PA + PB$ = नियतांक,($AB <$ नियतांक)

(d) अतिपरवलय, यदि $PA - PB$ = नियतांक, ($AB >$ नियतांक)

Ordinary Thinking

Objective Questions

निर्देशांक पद्धति, दो बिन्दुओं के बीच की दूरी तथा विभाजन सूत्र

1. किसी बिन्दु के निर्देशांक (0, 1) हैं तथा दूसरे बिन्दु की कोटि – 3 हैं। यदि दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी 5 हो, तो दूसरे बिन्दु का भुज है
   (a) 3 (b) – 3
   (c) ± 3 (d) 1

2. वर्ग का एक शीर्ष मूल बिन्दु पर है एवं आसन्न भुजायें धनात्मक अक्षों पर संपाती हैं। यदि भुजा 5 हो तो इनमें से कौन सा इसका एक शीर्ष नहीं होगा
   (a) (0, 5) (b) (5, 0)
   (c) (– 5, – 5) (d) (0, 0)

3. x-अक्ष पर स्थित सभी बिन्दुओं का सार्वलक्षण है **[MP PET 1988]**
   (a) $x = 0$ (b) $y = 0$
   (c) $a = 0, y = 0$ (d) $y = 0, b = 0$

4. यदि बिन्दुओं $(a, 2)$ तथा $(3, 4)$ के बीच की दूरी 8 हो, तो $a =$ **[MNR 1978]**
   (a) $2 + 3\sqrt{15}$ (b) $2 - 3\sqrt{15}$
   (c) $2 \pm 3\sqrt{15}$ (d) $3 \pm 2\sqrt{15}$

5. वह बिन्दु जिसका भुज उसकी कोटि के बराबर है और बिन्दुओं (1,0) तथा (0,3) से समान दूरी पर स्थित हैं, है
   (a) (1, 1) (b) (2, 2)
   (c) (3, 3) (d) (4, 4)

6. यदि $A(6, -1), B(1, 3)$ तथा $C(x, 8)$ ऐसे हों कि $AB = BC$, तो $x =$
   (a) – 3, 5 (b) 3, – 5
   (c) – 3, – 5 (d) 3, 5

7. बिन्दुओं $(am_1^2, 2am_1)$ तथा $(am_2^2, 2am_2)$ के बीच की दूरी है
   (a) $a(m_1 - m_2)\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 4}$
   (b) $(m_1 - m_2)\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 4}$
   (c) $a(m_1 - m_2)\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4}$
   (d) $(m_1 - m_2)\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4}$

8. यदि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं $(a + b, b - a)$ तथा $(a - b, a + b)$ से समान दूरी पर स्थित हों, तो **[MP PET 1983, 94]**
   (a) $ax + by = 0$ (b) $ax - by = 0$
   (c) $bx + ay = 0$ (d) $bx - ay = 0$

9. यदि बिन्दु (0, 0), $(2, 2\sqrt{3})$ तथा (a, b) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हों तो $(a, b) =$
   (a) (0, – 4) (b) (0, 4)
   (c) (4, 0) (d) (– 4, 0)

10. बिन्दुओं $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ तथा $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ के बीच की दूरी है

(a) $a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (b) $2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(c) $a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ (d) $2a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

11. बिन्दुओं (2, 0) तथा (0, 2) से समान दूरी पर स्थित एक बिन्दु है

(a) (1, 4) (b) (2, 1)

(c) (1, 2) (d) (2, 2)

12. *y*-अक्ष पर स्थित एक बिन्दु जिसकी बिन्दुओं (3, 2) तथा (–1, 3) से दूरियाँ बराबर हैं, है

(a) (0, –3) (b) (0, –3/2)

(c) (0, 3/2) (d) (0, 3)

13. यदि किसी समबाहु त्रिभुज का एक शीर्ष (0, 0) तथा दूसरा शीर्ष (4, 0) है, तब इसका तीसरा शीर्ष होगा

(a) $(2, \pm\sqrt{3})$ (b) $(3, \pm\sqrt{2})$

(c) $(2, \pm 2\sqrt{3})$ (d) $(3, \pm 2\sqrt{2})$

14. यदि किसी त्रिभुज ΔOAB के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ व $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ हैं तो $OA^2 + OB^2 =$

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

15. त्रिभुज *ABC* के शीर्ष *A* से डाले जाने वाले लम्ब की लम्बाई, जहाँ $A \equiv (-3, 0); B \equiv (4, -1)$ तथा $C \equiv (5, 2)$, है [Karnataka CET 2001]

(a) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{10}}$

(c) $\frac{11}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{22}{\sqrt{10}}$

16. बिन्दु $(b\cos\theta, b\sin\theta)$ की मूल बिन्दु से दूरी हैं [MP PET 1984]

(a) $b\cot\theta$ (b) b

(c) $b\tan\theta$ (d) $b\sqrt{2}$

17. बिन्दु $(a\sin\theta, 0)$ तथा $(0, a\cos\theta)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी है [MP PET 1999]

(a) $\frac{a}{2}$ (b) $\frac{1}{2}a(\sin\theta + \cos\theta)$

(c) $a(\sin\theta + \cos\theta)$ (d) a

18. यदि बिन्दु (1, 1), (–1, –1) व $(-\sqrt{3}, k)$ किसी समबाहु त्रिभुज के निर्देशांक हों तो *k* का मान है

(a) 1 (b) –1

(c) $\sqrt{3}$ (d) $-\sqrt{3}$

19. एक बिन्दु *P*, बिन्दुओं *A*(1,3), *B* (–3,5) तथा *C*(5,–1) से समान दूरी पर स्थित है, तब *PA* = [EAMCET 2003]

(a) 5 (b) $5\sqrt{5}$

(c) 25 (d) $5\sqrt{10}$

20. बिन्दुओं (7, 5) व (3, 2) के बीच की दूरी है [Pb. CET 2002]

(a) 2 इकाई (b) 3 इकाई

(c) 4 इकाई (d) 5 इकाई

21. यदि बिन्दुओं (*a*, *b*) तथा (5, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाला बिन्दु (4, 6) हो, तो

(a) $a = 1, b = 2$ (b) $a = 2, b = -4$

(c) $a = 2, b = 4$ (d) $a = -2, b = 4$

22. यदि बिन्दुओं (5, *a*) तथा (*b*,7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु (3,5) हो, तो (*a*, *b*) =

(a) (3, 1) (b) (1, 3)

(c) (–2, –2) (d) (–3, –1)

23. बिन्दुओं (2, –3) तथा (5, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को *x* अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है

(a) 2 : 1 (b) 1: 2

(c) 2 : –1 (d) इनमें से कोई नहीं

24. बिन्दुओं $(a+b, a-b)$ तथा $(a-b, a+b)$ को मिलाने वाली रेखा को $a : b$ के अनुपात में वाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दु है

(a) $\left(\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b}, \frac{a^2+b^2}{a-b}\right)$

(b) $\left(\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b}, \frac{a^2-b^2}{a-b}\right)$

(c) $\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}, \frac{a^2+b^2}{a-b}\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

25. बिन्दुओं *A*, *B*, *C* के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हैं और बिन्दु *D* रेखा *AB* को *l* : *k* के अनुपात में विभाजित करता हैं यदि बिन्दु *P* रेखा *DC* को *m* : *k* + *l* के अनुपात में विभाजित करता हो तो *P* के निर्देशांक हैं

(a) $\left(\frac{kx_1+lx_2+mx_3}{k+l+m}, \frac{ky_1+ly_2+my_3}{k+l+m}\right)$

(b) $\left(\frac{lx_1+mx_2+kx_3}{l+m+k}, \frac{ly_1+my_2+ky_3}{l+m+k}\right)$

(c) $\left(\frac{mx_1+kx_2+lx_3}{m+k+l}, \frac{my_1+ky_2+ly_3}{m+k+l}\right)$

(d) इनमें से कोई नहीं

26. बिन्दुओं (0, 0) व (9, 12) को मिलाने वाली रेखा को समत्रिभाग करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक हैं [RPET 1986]

(a) (3, 4), (6, 8) (b) (4, 3), (6, 8)

(c) (4, 3), (8, 6) (d) (3, 4), (8, 6)

27. बिन्दुओं (–1, 1) व (5,7) को मिलाने वाली रेखा को रेखा $x + y = 4$ निम्न अनुपात में विभाजित करती है [IIT 1965; UPSEAT 1999]

(a) 2 : 1 (b) 1 : 2

(c) 1 : 2 बाह्यतः (d) इनमें से कोई नहीं

28. यदि बिन्दु (*x*, – 1), (3, *y*), (– 2,3) तथा (– 3, – 2) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हों तो

(a) $x = 2, y = 4$ (b) $x = 1, y = 2$

(c) $x = 4, y = 2$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (2, 1), (–1, –3) व (4, 5) हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक होंगे

(a) $(7,9), (-3,-7), (1,1)$ (b) $(-3,-7), (1,1), (2,3)$

(c) $(1,1), (2,3), (-5,8),$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$ बिन्दुओं $(3,-5)$ व $(-7,2)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को निम्न अनुपात में विभाजित करता है

(a) 1 : 3 अन्तः (b) 3 : 1 अन्तः

(c) 1 : 3 बाह्यतः (d) 3 : 1बाह्यतः

31. बिन्दुओं (–2, 3) व (3, –1) को मिलाने वाले रेखा को समत्रिभाग करने वाले बिन्दुओं में से (–2, 3) के निकट का बिन्दु है

(a) $\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

(c) $\left(-\frac{3}{4},2\right)$ (d) $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

32. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $A(1,4), B(3,0)$ व $C(2,1)$, हों, तो C से गुजरने वाली माध्यिका की लम्बाई है [RPET 1995]

(a) 1 (b) 2

(c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

33. एक समान्तर चतुर्भुज के तीन शीर्ष क्रमशः $(-1,-6)$, $(2,-5)$, $(7,2)$ है, तब चौथा शीर्ष है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) (1, 4) (b) (4, 1)

(c) (1, 1) (d) (4, 4)

34. बिन्दुओं A (–2, 5) व B (3, 1) को जोड़ने वाली रेखा पर दो बिन्दु P व Q इस प्रकार हैं कि $AP = PQ = QB$, तो PQ का मध्य बिन्दु होगा

(a) $\left(\frac{1}{2},3\right)$ (b) $\left(-\frac{1}{2},4\right)$

(c) $(2,3)$ (d) $(1,4)$

35. बिन्दुओं (3, –2) व(–3, –4) को मिलाने वाली रेखा को समत्रिभाग करने वाले बिन्दुओं निर्देशांक हैं

(a) $\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{13}{4}\right)$

(c) $\left(1,-\frac{8}{3}\right),\left(-1,-\frac{10}{3}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

36. बिन्दुओं (4, –2) व (8, 6) को मिलाने वाली रेखा को 7 : 5 में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक हैं [AMU 1979; MP PET 1984]

(a) $(16,18)$ (b) $(18,16)$

(c) $\left(\frac{19}{3},\frac{8}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{8}{3},\frac{19}{3}\right)$

37. $(-3,-4)$ व $(1,-2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है [RPET 1995]

(a) 1 : 3 (b) 2 : 3

(c) 3 : 1 (d) इनमें से कोई नहीं

38. यदि किसी आयत के क्रम में तीन शीर्षों के निर्देशांक (2, –2), (8, 4) व (5, 7) हैं, तो चौथे शीर्ष के निर्देशांक हैं[CEE 1993]

(a) (1, 1) (b) (1, –1)

(c) (–1, 1) (d) इनमें से कोई नहीं

39. बिन्दुओं (2, –3) तथा (–5, 6) को मिलाने वाली रेखा y-अक्ष द्वारा किस अनुपात में विभाजित होती है [MP PET 1999]

(a) 2 : 5 (b) 2 : 3

(c) 3 : 5 (d) 1 : 2

40. यदि P (1,2), Q(4,6), R(5, 7) और S(a, b) एक समांतर चतुर्भुज $PQRS$ के शीर्ष हैं, तब [IIT 1998]

(a) $a=2, b=4$ (b) $a=3, b=4$

(c) $a=2, b=3$ (d) $a=3, b=5$

41. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण के सिरों के निर्देशांक (3,–4) व (–6,5) हैं। यदि तीसरा शीर्ष (–2,1) हो, तो चौथा शीर्ष होगा [RPET 1987]

(a) (1,0) (b) (–1,0)

(c) (1, 1) (d) इनमें से कोई नहीं

42. (0, –1) और (0, 3) किसी वर्ग के विपरीत शीर्ष हैं, तो शेष दोनों शीर्ष होंगे [Karnataka CET 2005]

(a) (0, 1), (0, –3) (b) (3, –1) (0, 0)

(c) (2, 1), (–2, 1) (d) (2, 2), (1, 1)

43. यदि किसी समांतर चतुर्भुज के शीर्ष क्रमानुसार $A(3,5), B(-5,-4)$, $C(7,10)$ लेते हैं, तो चौथा शीर्ष होगा [Kerala (Engg.) 2005]

(a) (10, 19) (b) (15, 10)

(c) (19, 10) (d) (19, 15)

(e) (15, 19)

44. यदि बिन्दु (a, a) रेखाओं $|x+y|=4$ के बीच रखा जाये, तब [AMU 2005]

(a) $|a|=2$ (b) $|a|=3$

(c) $|a|<2$ (d) $|a|<3$

ज्यामितीय प्रतिबन्धों पर आधारित प्रश्न

1. तीन बिन्दु (– 2, 2), (8, – 2) तथा (– 4, – 3) किसके शीर्ष हैं [RPET 1987]

(a) एक समद्विबाहु त्रिभुज (b) एक समबाहु त्रिभुज

(c) एक समकोणीय त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

2. बिन्दु $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},a\right),\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},2a\right)$ तथा $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},3a\right)$ किसके शीर्ष हैं

(a) एक समबाहु त्रिभुज (b) एक समद्विबाहु त्रिभुज

(c) एक समकोणीय त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

3. बिन्दु $(a,b),(c,d)$ तथा $\left(\frac{kc+la}{k+l},\frac{kd+lb}{k+l}\right)$ हैं

(a) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(b) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(c) एक समकोणीय त्रिभुज के शीर्ष

(d) समरेखीय

4. बिन्दु (0, 8/3), (1, 3) तथा (82, 30) किसके शीर्ष हैं [IIT 1983, RPET 1988]

(a) एक समबाहु त्रिभुज के (b) एक समद्विबाहु त्रिभुज के

(c) एक समकोणीय त्रिभुज के (d) इनमें से कोई नहीं

5. बिन्दु (3a, 0), (0, 3b) तथा (a, 2b) हैं [MP PET 1982]

(a) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(b) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(c) एक समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(d) समरेखीय

6. बिन्दु $(-a,-b),(a,b),(a^2,ab)$ हैं

(a) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(b) एक समकोणीय त्रिभुज के शीर्ष

(c) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष

(d) समरेखीय

7. शीर्षों (–1, 1), (0, –3), (5, 2) व (4, 6) से बनने वाला चतुर्भुज होगा [RPET 1986]

(a) वर्ग (b) समान्तर चतुर्भुज

(c) आयत (d) समचतुर्भुज

8. बिन्दु A(–4, –1), B (–2, –4), C(4, 0) व D(2, 3) निम्न के शीर्ष हैं [Roorkee 1973]

(a) समान्तर चतुर्भुज (b) आयत

(c) समचतुर्भुज (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष (0,2), (1,0) व (3,1) हैं, तो त्रिभुज है

(a) समबाहु त्रिभुज (b) समद्विबाहु त्रिभुज

(c) समकोण त्रिभुज (d) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज

10. बिन्दु $(-a,-b),(0,0),(a,b)$ व (a^2,ab) हैं [IIT 1979]
(a) समरेखीय (b) आयत के शीर्ष
(c) समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष (d) इनमें से कोई नहीं

11. बिन्दु $(0,0),(a,0)$ व $\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ निम्न के शीर्ष हैं
(a) समद्विबाहु त्रिभुज (b) समबाहु त्रिभुज
(c) विषमबाहु त्रिभुज (d) इनमें से कोई नहीं

12. किसी चतुर्भुज के शीर्षों के निर्देशांक A (0,0), B(3,4), C(7,7) व D(4,3) हैं, तो चतुर्भुज $ABCD$ है [RPET 1986]
(a) समान्तर चतुर्भुज (b) आयत
(c) वर्ग (d) समचतुर्भुज

13. यदि किसी चतुर्भुज के शीर्ष (0, –1), (2,1), (0, 3) तथा (– 2,1) है, तब यह है [RPET 1999]
(a) समान्तर चतुर्भुज (b) वर्ग
(c) आयत (d) समरेखीय

14. यदि त्रिभुज के शीर्ष (4, 0), (–1, –1), (3, 5) हों, तब त्रिभुज होगा [AIEEE 2002]
(a) समद्विबाहु तथा समकोण
(b) समद्विबाहु लेकिन समकोण नहीं
(c) समकोण पर समद्विबाहु नहीं
(d) न समकोण और न ही समद्विबाहु

15. बिन्दु P(2, 7), Q(4, –1), R(–2, 6) के संयोजन से बना त्रिभुज है [MP PET 1997]
(a) समबाहु त्रिभुज (b) समकोण त्रिभुज
(c) समद्विबाहु त्रिभुज (d) विषमबाहु त्रिभुज

16. यदि किसी आकृति के शीर्ष (–2, 2), (–2,–1), (3, –1) और (3, 2) हों तो आकृति होगी [Karnataka CET 1998]
(a) वर्ग (b) समचतुर्भुज
(c) आयत (d) समान्तर चतुर्भुज

17. दिये गये बिन्दु (1,1), (–1,–1) $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ एक त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो त्रिभुज है [MP PET 2004]
(a) समबाहु (b) समकोण
(c) समद्विबाहु (d) इनमें से कोई नहीं

त्रिभुज से सम्बन्धित प्रश्न (अंतः केन्द्र, परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र), ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्राफल, समरैखिकता

1. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(a,b-c),(b,c-a)$ तथा $(c,a-b)$ हों तो त्रिभुज का केन्द्रक है
(a) मूल बिन्दु पर (b) x-अक्ष पर
(c) y-अक्ष पर (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(a,1),(b,3)$ तथा $(4,c)$, हों तो त्रिभुज का केन्द्रक x-अक्ष पर होगा, यदि
(a) $a+c=-4$ (b) $a+b=-4$
(c) $c=-4$ (d) $b+c=-4$

3. रेखाओं $y=x$, $y=2x$ तथा $y=3x+4$ से बने त्रिभुज का परिकेन्द्र है
(a) (6, 8) (b) (6, – 8)
(c) (3, 4) (d) (– 3, – 4)

4. किसी त्रिभुज के दो शीर्ष (5, 4) व (–2, 4) हैं। यदि इसका केन्द्रक (5, 6) हो तो तीसरा शीर्ष होगा [MP PET 1993]
(a) (12, 10) (b) (10, 12)
(c) (–10, 12) (d) (12, –10)

5. यदि $A(4,-3)$, $B(3,-2)$ व $C(2,8)$ किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक हों, तो इसका केन्द्रक होगा [RPET 1984, 86]
(a) (–3,3) (b) (3,3)
(c) (3,1) (d) (1,3)

6. सभी बिन्दु, जो बिन्दुओं (1, 3), (5,0) व (–1,2) से बने त्रिभुज के अन्तर्गत हैं, सन्तुष्ट करते हैं [IIT 1986; Kurukshetra CEE 1998]
(a) $3x+2y\geq 0$ (b) $2x+y-13\leq 0$
(c) $2x-3y-12\leq 0$ (d) उपरोक्त सभी

7. त्रिभुज का केन्द्रक जिसके शीर्षों के निर्देशांक (2, 1), (5, 2) व (3,4) हैं, है [IIT 1964]
(a) $\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right)$
(c) $\left(-\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{10}{3},-\frac{7}{3}\right)$

8. शीर्षों (0, 0), (5, 12) व (16, 12) वाले त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र होगा [EAMCET 1984]
(a) (7,9) (b) (9,7)
(c) (–9, 7) (d) (–7,9)

9. त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण $x+y-5=0$; $x-y+1=0$ तथा $y-1=0$ हैं, तो परिकेन्द्र के निर्देशांक हैं [MP PET 1996]
(a) (2, 1) (b) (1, 2)
(c) (2, – 2) (d) (1, –2)

10. यदि किसी त्रिभुज के दो शीर्ष (6, 4), (2, 6) और केन्द्रक (4, 6) हो, तो उसका तीसरा शीर्ष होगा [RPET 1996]
(a) (4, 8) (b) (8, 4)
(c) (6, 4) (d) इनमें से कोई नहीं

11. शीर्ष $(1,\sqrt{3})$, (0, 0) तथा (2, 0) वाले त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र है [IIT Screening 2000]
(a) $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
(c) $\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (d) $\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

12. यदि $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ तथा $C(x_3,y_3)$ एक त्रिभुज के शीर्ष हों तो B के सापेक्ष बर्हिकेन्द्र है [RPET 2000]
(a) $\left(\frac{ax_1-bx_2+cx_3}{a-b+c},\frac{ay_1-by_2+cy_3}{a-b+c}\right)$
(b) $\left(\frac{ax_1+bx_2-cx_3}{a+b-c},\frac{ay_1+by_2-cy_3}{a+b-c}\right)$
(c) $\left(\frac{ax_1-bx_2-cx_3}{a-b-c},\frac{ay_1-by_2-cy_3}{a-b-c}\right)$
(d) इनमें से कोई नहीं

13. $x+y=1$ एवं $xy=0$ रेखाओं द्वारा निर्मित त्रिभुज का लम्बकेन्द्र होगा [Orissa JEE 2004]
(a) (0, 0) (b) (0, 1)
(c) (1, 0) (d) (–1, 1)

14. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(am_1^2,2am_1),(am_2^2,2am_2)$ तथा $(am_3^2,2am_3)$ हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है
(a) $a(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2)$
(b) $(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2)$

(c) $a^2(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2)$

(d) इनमें से कोई नहीं

15. यदि बिन्दुओं A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (4, 4), (3,–2) तथा (3,–16) हों, तो ABC का क्षेत्रफल है [MP PET 1982]

(a) 27 (b) 15

(c) 18 (d) 7

16. बिन्दुओं $(a, b+c), (b, c+a)$ तथा $(c, a+b)$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [IIT 1963; EAMCET 1982; RPET 2003]

(a) abc (b) $a^2+b^2+c^2$

(c) $ab+bc+ca$ (d) 0

17. रेखाओं $7x-2y+10=0$, $7x+2y-10=0$ तथा $y+2=0$ द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [IIT 1977]

(a) 8 वर्ग इकाई (b) 12 वर्ग इकाई

(c) 14 वर्ग इकाई (d) इनमें से कोई नहीं

18. यदि $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो दो त्रिभुज जिनके शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ तथा $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ हैं, होने चाहिए [IIT 1985]

(a) समरूप (b) सर्वांगसम

(c) कभी भी सर्वांगसम नहीं (d) इनमें से कोई नहीं

19. रेखाओं $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ तथा $x=0$ द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(a) $\frac{1}{2}\frac{(c_1+c_2)^2}{(m_1-m_2)}$ (b) $\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_1+m_2)}$

(c) $\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_1-m_2)}$ (d) $\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_1-m_2)}$

20. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्षों के निर्देशांक (1, –1), (–1, 1) व (–1, –1) हैं, है

[AMU 1981; RPET 1989; MP PET 1993; Pb. CET 2001]

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) 3

21. तीन बिन्दु $A(6, 3), B(-3, 5)$ व $C(4, -2)$ हैं। यदि $P(x, y)$ एक बिन्दु हो तो ΔPBC व ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात है [IIT 1983]

(a) $\left|\frac{x+y-2}{7}\right|$ (b) $\left|\frac{x-y+2}{2}\right|$

(c) $\left|\frac{x-y-2}{7}\right|$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $A(6,3)$, $B(-3,5)$, $C(4,-2)$ व $D(x, 3x)$ चार बिन्दु हैं। यदि ΔDBC व ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 2 है, तो x का मान होगा [IIT 1959]

(a) $\frac{11}{8}$ (b) $\frac{8}{11}$

(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

23. त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ व $(-a\cos\theta, -b\sin\theta)$ हैं, है

(a) $a\cos\theta\sin\theta$ (b) $ab\sin\theta\cos\theta$

(c) $\frac{1}{2}ab$ (d) ab

24. सरल रेखाओं $x=0$, $y=0$ व $x+2y+3=0$ द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{9}{4}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. शीर्षों $(-4, 1), (1, 2), (4, -3)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा [EAMCET 1980]

(a) 14 (b) 16

(c) 15 (d) इनमें से कोई नहीं

26. $P(2,1), Q(4,-1), R(3,2)$ किसी दिये गये त्रिभुज के शीर्ष हैं। यदि P तथा R से सामने वाली भुजाओं के समान्तर रेखायें खींची जाती हैं जो बिन्दु S पर काटती है, तो $PQRS$ का क्षेत्रफल है

(a) 6 (b) 4

(c) 8 (d) 12

27. (2,1), (4, 3) और (2,5) किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं। D, E, F भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं, तो त्रिभुज DEF का क्षेत्रफल है

(a) 1 (b) 1.5

(c) 3 (d) 4

28. यदि त्रिभुज के शीर्ष $(5,2), (2/3, 2)$ तथा $(-4, 3)$ हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) 28/6 (b) 5/2

(c) 43 (d) 13/6

29. त्रिभुज के शीर्ष $(x, 0), (1, 1)$ व $(0, 2)$ हैं जिसका क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है तो x का मान होगा [Karnataka CET 2004]

(a) – 2 (b) – 4

(c) – 6 (d) 8

30. तीन बिन्दु $(p+1, 1)$, $(2p+1, 3)$ तथा $(2p+2, 2p)$ समरेखीय होंगे, यदि p = [MP PET 1986]

(a) – 1 (b) 1

(c) 2 (d) 0

31. यदि बिन्दु $A(3, 4), B(7, 7), C(a, b)$ समरेखीय हों और $AC=10$ हो, तो (a, b) =

(a) $(11, 10)$ (b) $(10, 11)$

(c) $(11/2, 5)$ (d) $(5, 11/2)$

32. यदि बिन्दु $(k, 2-2k)$, $(1-k, 2k)$ तथा $(-k-4, 6-2k)$ समरेखीय हों तो k का सम्भावित मान है [AMU 1978; RPET 1997]

(a) $\frac{1}{2}, -1$ (b) $1, -\frac{1}{2}$

(c) $1, -2$ (d) $2, -1$

33. यदि बिन्दु $(a, b), (a', b')$ व $(a-a', b-b')$ समरेखीय हैं, तो [RPET 1999]

(a) $ab' = a'b$ (b) $ab = a'b'$

(c) $aa' = bb'$ (d) $a^2+b^2=1$

34. यदि बिन्दु $(a, 0), (0, b)$ व (1, 1) समरेखीय हों तो

(a) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ (b) $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$

(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ (d) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$

35. यदि बिन्दु $(-5, 1), (p, 5)$ व $(10, 7)$ समरेखीय हों, तो p का मान है

[MP PET 1984]

(a) 5 (b) 3
(c) 4 (d) 7

36. यदि बिन्दु (5, 5), (10, k) तथा (–5, 1) समरेखीय हों, तो k = [MP PET 1994, 99; RPET 2003]

(a) 3 (b) 5
(c) 7 (d) 9

37. यदि बिन्दु (–2,–5), (2,–2) तथा (8,a) समरेखीय हों तो a का मान है [MP PET 2002]

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

38. यदि बिन्दु $(x+1,2),(1,x+2),\left(\frac{1}{x+1},\frac{2}{x+1}\right)$ समरेखीय हो, तो $x=$ [RPET 2002]

(a) 4 (b) 0
(c) – 4 (d) इनमें से कोई नहीं

39. यदि त्रिभुज का एक शीर्ष (1, 1) है और इस शीर्ष से दोनों भुजाओं के मध्य बिन्दु के शीर्ष (–1, 2) और (3, 2) है, तो त्रिभुज का केन्द्रक होगा [AIEEE 2005]

(a) $\left(1,\frac{7}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$
(c) $\left(-1,\frac{7}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{-1}{3},\frac{7}{3}\right)$

40. शीर्षों (7, 1) (–1, 5) व $(3+2\sqrt{3},3+4\sqrt{3})$ वाले त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र होगा [J & K 2005]

(a) $\left(3+\frac{2}{\sqrt{3}},3+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\left(1+\frac{2}{3\sqrt{3}},1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$
(c) (7, 1) (d) इनमें से कोई नहीं

41. शीर्षों (– 2, – 6), (– 2, 4) व (1, 3) वाले त्रिभुज का लम्बकेन्द्र होगा [J & K 2005]

(a) (–3, 1) (b) (–1,1/3)
(c) (1, 3) (d) इनमें से कोई नहीं

42. शीर्षों (0, 0) (3, 0) व (0, 4) वाले त्रिभुज का लम्बकेन्द्र होगा [MNR 1982; RPET 1997]

(a) (0, 0) (b) (1, 1)
(c) (2, 2) (d) (3, 3)

43. यदि बिन्दु $(k,3),(2,k),(-k,3)$ समरेखीय हैं तो k का मान होगा [Kerala(Engg.) 2005]

(a) 2, 3 (b) 1, 0
(c) 1, 2 (d) 1, –1/2
(e) 0, 3

44. त्रिभुज की भुजाओं के समीकरण $xy+2x+2y+4=0$ और $x+y+2=0$ हैं, तो परिकेन्द्र के निर्देशांक हैं [Orissa JEE 2005]

(a) (–1, –1) (b) (0, –1)
(c) (1, 1) (d) (–1, 0)

45. त्रिभुज की तीन भुजाओं के समीकरण $x=2$, $y+1=0$ और $x+2y=4$ हैं, तो परिकेन्द्र के निर्देशांक हैं [AMU 2005]

(a) (4, 0) (b) (2, –1)
(c) (0, 4) (d) (–1, 2)

46. शीर्षों (0, 0), (8, 0), (4 6) वाले त्रिभुज का लम्बकेन्द्र होगा [EAMCET 1991]

(a) $\left(4,\frac{8}{3}\right)$ (b) (3, 4)
(c) (4, 3) (d) (–3, 4)

47. रेखाओं $x=0$, $y=0$ और $3x+4y=12$ से बने त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र होगा [RPET 1990]

(a) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (b) (1, 1)
(c) $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{11}{2},1\right)$

48. शीर्षों (0, 0), (3, 4) और (4, 0) वाले त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है [IIT Screening 2003]

(a) $\left(3,\frac{5}{4}\right)$ (b) (3, 12)
(c) $\left(3,\frac{3}{4}\right)$ (d) (3, 9)

49. रेखाओं $4x-7y+10=0$, $x+y=5$ और $7x+4y=15$ से बने त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है [IIT 1969, 76]

(a) (1, 2) (b) (1, –2)
(c) (–1, –2) (d) (–1, 2)

50. भुजाओं $x=3, y=4$ और $3x+4y=6$ से बने त्रिभुज के लम्बकेन्द्र के निर्देशांक हैं [MNR 1989]

(a) (0, 0) (b) (3, 0)
(c) (0, 4) (d) (3, 4)

51. रेखाओं $x+y=1, 2x+3y=6$ और $4x-y+4=0$ से बने त्रिभुज का लम्बकेन्द्र निम्न चतुर्थांश में स्थित है [IIT 1985]

(a) प्रथम (b) द्वितीय
(c) तृतीय (d) चतुर्थ

52. त्रिभुज के शीर्ष $[at_1t_2, a(t_1+t_2)]$, $[at_2t_3, a(t_2+t_3)]$, $[at_3t_1, a(t_3+t_1)]$, तो इसके लम्बकेन्द्र के निर्देशांक होंगे [IIT 1983]

(a) $[a, a(t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3)]$ (b) $[-a, a(t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3)]$
(c) $[-a(t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3), a]$ (d) इनमें से कोई नहीं

53. त्रिभुज के दो शीर्ष (4, –3) व (–2, 5) हैं यदि त्रिभुज का लम्बकेन्द्र (1, 2) पर है, तब तीसरा शीर्ष होगा [Roorkee 1987]

(a) (– 33, – 26) (b) (33, 26)
(c) (26, 33) (d) इनमें से कोई नहीं

54. शीर्षों $\left(2,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ व $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ वाले त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है [IIT 1993]

(a) $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}-3}{6}\right)$ (b) $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$
(c) $\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

55. शीर्षों (0, 0) (2, –1) व (1, 3) वाले त्रिभुज का लम्बकेन्द्र है [ISM Dhanbad1970; IIT 1967, 74]

(a) $\left(\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$ (b) $\left(-\frac{4}{7},-\frac{1}{7}\right)$
(c) (– 4, –1) (d) (4, 1)

56. बिन्दुओं $(a,b+c)$, $(b,c+a)$, $(c,a+b)$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है [Pb. CET 2003]

(a) abc (b) $a^2+b^2+c^2$
(c) $ab+bc+ca$ (d) 0

अक्षों का रूपान्तरण व बिन्दुपथ

1. मूल बिन्दु को (1,–2) पर स्थानान्तरित करने पर बिन्दु (4, 5) के नये निर्देशांक होंगे [MNR 1988; IIT 1989; UPSEAT 2000]
(a) (5, 3) (b) (3, 5)
(c) (3, 7) (d) इनमें से कोई नहीं

2. निर्देशांकों की दिशा को बिना बदले मूल बिन्दु को (h,k) पर प्रतिस्थापित करते हैं तब $x^2+y^2-4x+6y-7=0$ में रैखिक (एक घातीय) पदों का विलोपन हो जाता है। अतः बिन्दु (h,k) है
(a) (3, 2) (b) (– 3, 2)
(c) (2, – 3) (d) इनमें से कोई नहीं

3. उस बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण जिसकी बिन्दु $(a, 0)$ से दूरी इसकी y-अक्ष से दूरी के बराबर है, है [MP PET 1986]
(a) $y^2-2ax=a^2$ (b) $y^2-2ax+a^2=0$
(c) $y^2+2ax+a^2=0$ (d) $y^2+2ax=a^2$

4. दो बिन्दु A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (1, 0) तथा (–1, 0) हैं और Q एक ऐसा बिन्दु है जो सम्बन्ध $AQ-BQ=\pm 1$ को संतुष्ट करता है। बिन्दु Q का बिन्दुपथ है [MP PET 1986]
(a) $12x^2+4y^2=3$ (b) $12x^2-4y^2=3$
(c) $12x^2-4y^2+3=0$ (d) $12x^2+4y^2+3=0$

5. एक बिन्दु P का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार गति करता है कि रेखाखण्ड OP, जहाँ O मूल बिन्दु है, की प्रवणता $\sqrt{3}$ रहती है, होगा
(a) $x-\sqrt{3}y=0$ (b) $x+\sqrt{3}y=0$
(c) $\sqrt{3}x+y=0$ (d) $\sqrt{3}x-y=0$

6. एक बिन्दु के निर्देशांक समीकरणों $x=a(1-\cos\theta)$ तथा $y=a\sin\theta$ से दिये गये हों, तो बिन्दु का बिन्दुपथ होगा
(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक परवलय (d) एक दीर्घवृत्त

7. यदि $P=(1,0)$, $Q=(-1,0)$ तथा $R=(2,0)$ तीन दिये हुये बिन्दु हों तो सम्बन्ध $SQ^2+SR^2=2SP^2$ को सन्तुष्ट करने वाले बिन्दु S का बिन्दुपथ है [IIT 1988]
(a) x-अक्ष के समान्तर एक रेखा
(b) मूल बिन्दु से जाने वाला एक वृत्त
(c) एक वृत्त जिसका केन्द्र मूल बिन्दु है
(d) y-अक्ष के समान्तर एक रेखा

8. बिन्दुओं O, A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (0,0), (0,4) तथा (6,0) हैं। यदि एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि ΔPOA का क्षेत्रफल हमेशा ΔPOB के क्षेत्रफल का दुगना हो, तो बिन्दु P के बिन्दुपथ के दोनों भागों का समीकरण है [IIT 1964]
(a) $(x-3y)(x+3y)=0$ (b) $(x-3y)(x+y)=0$
(c) $(3x-y)(3x+y)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी बिन्दुओं $A(2,0)$ तथा $B(-2,0)$ से दूरियों के वर्गों का योग हमेशा बिन्दुओं A तथा B के बीच की दूरी के वर्ग के बराबर रहता है। बिन्दु का बिन्दुपथ है
(a) $x^2+y^2-2=0$ (b) $x^2+y^2+2=0$
(c) $x^2+y^2+4=0$ (d) $x^2+y^2-4=0$

10. एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि उसकी बिन्दु $(a,0)$ से दूरी हमेशा उसकी रेखा $x+a=0$ से दूरी के बराबर रहती है। बिन्दु का बिन्दुपथ है [MP PET 1982]
(a) $y^2=4ax$ (b) $x^2=4ay$
(c) $y^2+4ax=0$ (d) $x^2+4ay=0$

11. एक बिन्दु, जो इस प्रकार गति करता है कि उसकी x-अक्ष से दूरी हमेशा उसकी मूल बिन्दु से दूरी की आधी रहती है, तो उसका बिन्दुपथ है
(a) $x^2+3y^2=0$ (b) $x^2-3y^2=0$
(c) $3x^2+y^2=0$ (d) $3x^2-y^2=0$

12. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि उसकी बिन्दु (–1, 0) से दूरी हमेशा बिन्दु (0, 2) से दूरी की तिगुनी रहती है। बिन्दु का बिन्दुपथ है
(a) एक रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक परवलय (d) एक दीर्घवृत्त

13. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी x-अक्ष से दूरी उसकी y-अक्ष से दूरी की दुगनी है। बिन्दु का बिन्दुपथ है [AMU 1978; MP PET 1984]
(a) $x=2y$ (b) $y=2x$
(c) $x=5y+1$ (d) $y=2x+3$

14. O मूल बिन्दु है तथा A बिन्दु (3, 4) है। यदि एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता हो कि रेखा OP हमेशा रेखाखण्ड OA के समानान्तर हो तो P के बिन्दुपथ का समीकरण है
(a) $4x-3y=0$ (b) $4x+3y=0$
(c) $3x+4y=0$ (d) $3x-4y=0$

15. उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार गति करता है कि वह हमेशा बिन्दुओं $A(a, 0)$ तथा $B(-a, 0)$ से समान दूरी पर रहता है [MP PET 1984]
(a) एक वृत्त
(b) रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक
(c) x-अक्ष के समानान्तर एक रेखा
(d) इनमें से कोई नहीं

16. बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ तथा $(-a,0)$ हैं। यदि एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता हो कि $PA^2-PB^2=2k^2$, जहाँ k एक अचर है, तो बिन्दु P के बिन्दुपथ का समीकरण है
(a) $2ax-k^2=0$ (b) $2ax+k^2=0$
(c) $2ay-k^2=0$ (d) $2ay+k^2=0$

17. यदि एक बिन्दु के निर्देशांक समीकरणों $x=b\sec\phi,\ y=a\tan\phi$ में दिये गये हों तो बिन्दु का बिन्दुपथ होगा
(a) एक सरल रेखा (b) एक वृत्त
(c) एक दीर्घवृत्त (d) एक अतिपरवलय

18. बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक $(ak,0)$ तथा $\left(\frac{a}{k},0\right)$ हैं $(k=\pm 1)$ यदि एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि $PA=kPB$, तो P के बिन्दुपथ का समीकरण है
(a) $k^2(x^2+y^2)-a^2=0$ (b) $x^2+y^2-k^2a^2=0$
(c) $x^2+y^2+a^2=0$ (d) $x^2+y^2-a^2=0$

19. उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार गति करता है कि इसकी (0, 0) से दूरी इसकी x-अक्ष से दूरी की तीन गुनी रहती है, है [MP PET 1993]
(a) $x^2-8y^2=0$ (b) $x^2+8y^2=0$
(c) $4x^2-y^2=0$ (d) $x^2-4y^2=0$

20. ऐसे सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ जो कि बिन्दु (4, 2) व x-अक्ष से समान दूरी पर है, है [CEE 1993]
(a) $x^2+8x+4y-20=0$ (b) $x^2-8x-4y+20=0$
(c) $y^2-4y-8x+20=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. चर रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, जहाँ p नियतांक है, का अक्षों के मध्य कटे भाग के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है [MNR 1985; CEE 1993; UPSEAT 2000; AIEEE 2002]

(a) $x^2+y^2=4p^2$ (b) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{4}{p^2}$

(c) $x^2+y^2=\frac{4}{p^2}$ (d) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{2}{p^2}$

22. उस बिन्दु का बिन्दुपथ, जिसकी $(-g,-f)$ से दूरी हमेशा 'a' रहती है, है (जहाँ $k=g^2+f^2-a^2$)

(a) $x^2+y^2+2gx+2fy+k=0$

(b) $x^2-y^2+2gx+2fy+k=0$

(c) $x^2+y^2+2xy+2gx+2fy+k=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

23. बिन्दु P का बिन्दुपथ जो इस प्रकार गति करता है कि $2PA=3PB$, जहाँ $A(0, 0)$ व $B(4, -3)$ है [AMU 1980]

(a) $5x^2-5y^2-72x+54y+225=0$

(b) $5x^2-5y^2+72x+54y+225=0$

(c) $5x^2+5y^2+72x+54y+225=0$

(d) $5x^2+5y^2-72x+54y+225=0$

24. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी दो स्थिर बिन्दुओं $(ae, 0)$ व $(-ae, 0)$ से दूरी का योग $2a$ रहता है, तो इसके बिन्दुपथ का समीकरण है [MNR 1981]

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$ (b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$

(c) $\frac{x^2}{a^2(1-e^2)}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (d) इनमें से कोई नहीं

25. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी $(1, -2)$ से दूरी, $(-3, 5)$ से दूरी की दुगनी रहती है, बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) $3x^2+y^2+26x+44y-131=0$

(b) $x^2+3y^2-26x+44y-131=0$

(c) $3(x^2+y^2)+26x-44y+131=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

26. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी मूल बिन्दु से दूरी हमेशा 4 रहती है तो बिन्दु का बिन्दुपथ है

(a) $x^2+y^2=4$ (b) $x^2+y^2=16$

(c) $x^2+y^2=2$ (d) इनमें से कोई नहीं

27. यदि $A(-a,0)$ व $B(a,0)$ दो स्थिर बिन्दु हैं, तो उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिस पर रेखा AB समकोण अन्तरित करती है, है

(a) $x^2+y^2=2a^2$ (b) $x^2-y^2=a^2$

(c) $x^2+y^2+a^2=0$ (d) $x^2+y^2=a^2$

28. यदि A व B दो स्थिर बिन्दु हैं एवं P एक चर बिन्दु इस प्रकार है कि $PA+PB=4$, तो P का बिन्दुपथ है [IIT 1989; MNR 1991; UPSEAT 2000]

(a) परवलय (b) दीर्घवृत्त

(c) अतिपरवलय (d) इनमें से कोई नहीं

29. यदि A तथा B समतल में दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि $PA-PB$ = नियतांक, तो P का बिन्दुपथ है [MNR 1991, 95]

(a) अतिपरवलय (b) वृत्त

(c) परवलय (d) दीर्घवृत्त

30. यदि A व B दो स्थिर बिन्दु हैं एवं P एक दूसरा चर बिन्दु इस प्रकार है कि PA^2+PB^2 = नियतांक, तो P का बिन्दुपथ है [MNR 1991]

(a) अतिपरवलय (b) वृत्त

(c) परवलय (d) दीर्घवृत्त

31. बिन्दु P का बिन्दुपथ जिसके लिए $\Delta PAB=12$ वर्ग इकाई जहाँ $A(2,3)$ व $B(-4,5)$ हैं, होगा [EAMCET 1989]

(a) $(x+3y-1)(x+3y-23)=0$

(b) $(x+3y+1)(x+3y-23)=0$

(c) $(3x+y-1)(3x+y-23)=0$

(d) $(3x+y+1)(3x+y+23)=0$

32. समय t पर किसी चर बिन्दु की XY-समतल पर स्थिति $\left((u\cos\alpha)t, (u\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\right)$, जहाँ u,α,g नियतांक हैं, तो गतिशील बिन्दु का बिन्दुपथ होगा

(a) एक वृत्त (b) एक परवलय

(c) एक दीर्घवृत्त (d) इनमें से कोई नहीं

33. यदि $A(\cos\alpha,\sin\alpha), B(\sin\alpha,-\cos\alpha), C(1,2)$ किसी त्रिभुज ΔABC के शीर्ष हैं (α चर है) तो इस त्रिभुज के केन्द्रक का बिन्दुपथ होगा

(a) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$

(b) $3(x^2+y^2)-2x-4y+1=0$

(c) $x^2+y^2-2x-4y+3=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

34. बिन्दुओं (a_1,b_1) व (a_2,b_2) से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c=0$ है, तो $c=$

(a) $a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2$ (b) $\sqrt{a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2}$

(c) $\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2)$ (d) $\frac{1}{2}(a_2^2+b_2^2-a_1^2-b_1^2)$

35. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात करो जिसकी मूल बिन्दु और रेखा $x=2$ से दूरियों का योग 4 हो [RPET 1997]

(a) $x^2-12y=36$ (b) $y^2+12x=36$

(c) $y^2-12x=36$ (d) $x^2+12y=36$

36. उस बिन्दु का बिन्दुपथ क्या होगा, जिसकी बिन्दुओं $(3, 0)$ तथा $(-3, 0)$ से दूरियों का अन्तर 4 है [MP PET 2002]

(a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ (b) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

(c) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ (d) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

37. उस त्रिभुज के केन्द्रक का बिन्दुपथ क्या होगा, जिसके शीर्ष $(a\cos t, a\sin t), (b\sin t, -b\cos t)$ तथा $(1, 0)$ है, जहाँ t प्राचल है [AIEEE 2003]

(a) $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2-b^2$

(b) $(3x-1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$

(c) $(3x+1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$

(d) $(3x+1)^2+(3y)^2=a^2-b^2$

38. यदि कोई बिन्दु P बिन्दुओं $A(a+b,a-b)$ तथा $B(a-b,a+b)$ से समान दूरी पर स्थित है, तब बिन्दु P का बिन्दुपथ है [Karnataka CET 2003]

(a) $x-y=0$ (b) $ax+by=0$

(c) $bx-ay=0$ (d) $x+y=0$

39. उस बिन्दु का बिन्दुपथ जो इस तरह से गमन करता है कि उसकी x-अक्ष से दूरी, मूलबिन्दु से दूरी की 4 गुनी है, है [Karnataka CET 2004]

(a) $x^2+y^2-4y=0$ (b) $x^2+y^2-4|y|=0$

(c) $x^2+y^2-4x=0$ (d) $x^2+y^2-4|x|=0$

40. माना $P(1, 0)$ व Q वक्र $y^2=8x$ पर कोई बिन्दु है तब PQ के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है [AIEEE 2005]

(a) $x^2+4y+2=0$ (b) $x^2-4y+2=0$

(c) $y^2-4x+2=0$ (d) $y^2+4x+2=0$

Critical Thinking

Objective Questions

1. वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु मूल बिन्दु पर है एवं निर्देशाक्ष विकर्णों के अनुदिश हैं। यदि भुजा 'a' लम्बाई की है तो निम्न में से कौनसा इसका एक शीर्ष नहीं होगा

(a) $(a\sqrt{2},0)$ (b) $\left(0,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

(c) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ (d) $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$

2. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। यदि आधार के निर्देशांक $B(1,3)$ व $C(-2, 7)$ हैं तो शीर्ष A के निर्देशांक होंगे [Orissa JEE 2002; Pb. CET 2002]

(a) (1, 6) (b) $\left(-\frac{1}{2},5\right)$

(c) $\left(\frac{5}{6},6\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $A(at^2, 2at), B(a/t^2, -2a/t)$ तथा $C(a,0)$ हो, तो $2a$ बराबर है [RPET 2000]

(a) CA तथा CB के समान्तर माध्य के

(b) CA तथा CB के गुणोत्तर माध्य के

(c) CA तथा CB के हरात्मक माध्य के

(d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि A व B के निर्देशांक क्रमशः (2, 4) व (4, 2) हैं एवं बिन्दु M इस प्रकार है कि $A-M-B$ तथा $AB = 3\ AM$ तो M के निर्देशांक हैं

(a) $\left(\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{10}{3},\frac{14}{4}\right)$

(c) $\left(\frac{10}{3},\frac{6}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{13}{4},\frac{10}{4}\right)$

5. (0, 3) और (6, –3) को मिलाने वाली रेखा को समत्रिभाग करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक हैं

(a) $(2,0)$ एवं $(4,-1)$ (b) $(2,-1)$ एवं $(4,1)$

(c) $(3,1)$ एवं $(4,-1)$ (d) $(2,1)$ एवं $(4,-1)$

6. बिन्दु $A(2a, 4a)$, $B(2a, 6a)$ व $C\ (2a+\sqrt{3}a, 5a)$, $(a>0)$ निम्न के शीर्ष हैं

(a) एक न्यूनकोण त्रिभुज के (b) एक समकोण त्रिभुज के

(c) एक समद्विबाहु त्रिभुज के (d) इनमें से कोई नहीं

7. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(1,a)$, $(2,b)$ तथा $(c^2,3)$ हों तो त्रिभुज का केन्द्रक

(a) मूल बिन्दु पर है (b) x-अक्ष पर नहीं हो सकता है

(c) y-अक्ष पर नहीं हो सकता है (d) इनमें से कोई नहीं

8. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष (0,0), (6,0) तथा (6,8) हों, तो उसका अन्तःकेन्द्र होगा

(a) (2,1) (b) (1,2)

(c) (4,2) (d) (2,4)

9. यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु (–2, 3), (4, –3) तथा (4, 5) हों, तो त्रिभुज का केन्द्रक है

(a) (5/3, 2) (b) (5/6, 1)

(c) (2, 5/3) (d) (1, 5/6)

10. यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष P, Q और R परिमेय (Rational) बिन्दु हों तो त्रिभुज PQR का/के निम्न बिन्दु हमेशा परिमेय बिन्दु होगा/होंगे [IIT 1998]

(a) केन्द्रक (b) अन्तःकेन्द्र

(c) परिकेन्द्र (d) लम्बकेन्द्र

(परिमेय बिन्दु वह बिन्दु है जिसके दोनों निर्देशांक परिमेय संख्या हों)

11. एक त्रिभुज का केन्द्रक (2, 7) तथा इसके दो शीर्ष (4, 8) तथा (–2, 6) हैं। तब त्रिभुज का तीसरा शीर्ष होगा [Kerala (Engg.) 2002]

(a) (0,0) (b) (4,7)

(c) (7,4) (d) (7,7)

12. बिन्दु $(1,1)$, $(0,\sec^2\theta)$, $(\text{cosec}^2\theta, 0)$ समरेखीय होंगे, यदि [Roorkee 1963]

(a) $\theta=\frac{n\pi}{2}$ (b) $\theta\neq\frac{n\pi}{2}$

(c) $\theta=n\pi$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. l लम्बाई की एक छड़ के सिरे दो परस्पर लम्ब रेखाओं पर गति करते हैं। छड़ के उस बिन्दु, जो उसको 1 : 2 के अनुपात में विभजित करता है, का बिन्दुपथ है [IIT 1987; RPET 1997]

(a) $36x^2-9y^2=4l^2$ (b) $36x^2+9y^2=l^2$

(c) $9x^2+36y^2=4l^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

14. यदि दो स्थिर बिन्दु $A(a,0)$ व $B(-a,0)$ हैं। यदि $\angle A-\angle B=\theta$ तो $\Delta\ ABC$ में बिन्दु C का बिन्दुपथ होगा [Roorkee 1982]

(a) $x^2+y^2+2xy\tan\theta=a^2$ (b) $x^2-y^2+2xy\tan\theta=a^2$

(c) $x^2+y^2+2xy\cot\theta=a^2$ (d) $x^2-y^2+2xy\cot\theta=a^2$

15. माना $A(2,-3)$ और $B(-2,1)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष है यदि त्रिभुज का केन्द्रक रेखा $2x+3y=1$ निम्न पर स्थित है तब शीर्ष C का बिन्दुपथ निम्न रेखा होगी, है [AIEEE 2004]

(a) $3x-2y=3$ (b) $2x-3y=7$

(c) $3x+2y=5$ (d) $2x+3y=9$

Answers

निर्देशांक पद्धति, दो बिन्दुओं के बीच की दूरी तथा विभाजन सूत्र

1	c	2	c	3	b	4	d	5	b
6	a	7	a	8	d	9	c	10	d
11	d	12	b	13	c	14	c	15	d
16	b	17	a	18	c	19	d	20	d
21	c	22	a	23	b	24	a	25	a
26	a	27	b	28	a	29	a	30	a
31	a	32	a	33	b	34	a	35	c
36	c	37	c	38	c	39	a	40	c
41	b	42	c	43	e	44	c		

ज्यामितीय प्रतिबन्धों पर आधारित प्रश्न

1	c	2	b	3	d	4	d	5	d
6	d	7	b	8	b	9	d	10	a
11	b	12	d	13	b	14	a	15	b
16	c	17	a						

त्रिभुज से सम्बन्धित प्रश्न (अंतः केन्द्र, परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र), ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्राफल, समरैखिकता

1	b	2	c	3	b	4	a	5	c
6	d	7	b	8	a	9	a	10	a
11	d	12	a	13	a	14	c	15	d
16	d	17	c	18	d	19	c	20	a
21	a	22	a	23	d	24	b	25	a
26	b	27	a	28	d	29	c	30	c
31	a	32	a	33	a	34	c	35	a
36	c	37	b	38	b, c	39	a	40	a
41	c	42	a	43	e	44	a	45	a
46	a	47	b	48	c	49	a	50	d
51	a	52	b	53	b	54	b	55	b
56	d								

अक्षों का रूपान्तरण व बिन्दुपथ

1	c	2	c	3	b	4	b	5	d
6	b	7	d	8	a	9	d	10	a
11	b	12	b	13	b	14	a	15	b
16	b	17	d	18	d	19	a	20	b
21	b	22	a	23	d	24	a	25	c
26	b	27	d	28	b	29	a	30	b
31	b	32	b	33	b	34	d	35	b
36	a	37	b	38	a	39	b	40	c

Critical Thinking Questions

1	a	2	c	3	c	4	a	5	d
6	a	7	c	8	c	9	c	10	a,c,d
11	b	12	b	13	c	14	d	15	d

Answers and Solutions

निर्देशांक पद्धति, दो बिन्दुओं के बीच की दूरी तथा विभाजन सूत्रा

1. (c) $25 = x^2 + 16 \Rightarrow x = \pm 3$.

2. (c) स्पष्टतः (–5, –5) वर्ग का शीर्ष नहीं होगा चूँकि वर्ग प्रथम चतुर्थांश में है।

3. (b) यह स्पष्ट है।

4. (d) $(a-3)^2 + (2-4)^2 = 8^2 \Rightarrow (a-3)^2 = 60$

$\Rightarrow a - 3 = \pm 2\sqrt{15} \Rightarrow a = 3 \pm 2\sqrt{15}$.

5. (b) माना बिन्दु (x, x) है, अतः प्रतिबन्ध के अनुसार

$(x-1)^2 + (x-0)^2 = (x-0)^2 + (x-3)^2$

$\Rightarrow -2x + 1 = -6x + 9 \Rightarrow x = 2$.

अतः बिन्दु (2, 2) है।

6. (a) $AB = BC \Rightarrow (6-1)^2 + (3+1)^2 = (x-1)^2 + (8-3)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 - (4)^2 = 0 \Rightarrow x = 5, -3$.

7. (a) $s = \sqrt{(am_1^2 - am_2^2)^2 + (2am_1 - 2am_2)^2}$

$= a(m_1 - m_2)\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 4}$.

8. (d) $\{x-(a+b)\}^2 + \{y-(b-a)\}^2 = \{x-(a-b)\}^2 + \{y-(a+b)\}^2$

$\Rightarrow x^2 + (a+b)^2 - 2x(a+b) + y^2 + (b-a)^2 - 2y(b-a)$

$= x^2 + (a-b)^2 - 2x(a-b) + y^2 + (a+b)^2 - 2y(a+b)$

हल करने पर $bx - ay = 0$

ट्रिक: बिन्दुपथ दिये गये बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्ब समद्विभाजक होगा अतः रेखा दिये गये बिन्दुओं के मध्य बिन्दु से गुजरेगी अर्थात् (a, b). स्पष्टतः विकल्प (d) में दी गयी रेखा (a, b) से होकर गुजरती है।

9. (c) $l = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 16$

व $(a-2)^2 + (b - 2\sqrt{3})^2 = 16 \Rightarrow a + \sqrt{3}b = 4$

अतः $(a, b) = (4, 0)$.

10. (d) दूरी $= \sqrt{a^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + a^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2}$

$= a\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}$

$= a\sqrt{2\{1 - \cos(\alpha - \beta)\}} = 2a\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

ट्रिक: $a = 1, \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{6}$, रखने पर बिन्दु (0, 1) व $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ होंगे। स्पष्टतः इन दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी 1 है जो कि विकल्प (d) से प्राप्त होती है।

$\left\{\because 2a\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \times 1 \times \sin\frac{(\pi/2)-(\pi/6)}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1\right\}$

11. (d) $(x-2)^2+y^2=x^2+(y-2)^2 \Rightarrow (x, y)=(2, 2)$

ट्रिक: विकल्पों से निरीक्षण करने पर पता चलता है कि बिन्दु (2, 2) बिन्दुओं (2, 0) व (0, 2) से समदूरस्थ है।

12. (b) बिन्दु $(0, b)$ y-अक्ष पर है, अतः दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार,

$(0-3)^2+(b-2)^2=(0+1)^2+(b-3)^2$

$\Rightarrow 9+b^2+4-4b=1+b^2+9-6b \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$

अतः बिन्दु $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ है।

13. (c) निरीक्षण से पता चलता है कि तीनों भुजाओं की लम्बाईयाँ बराबर होना चाहिए। अतः अभीष्ट बिन्दु $(2, \pm 2\sqrt{3})$ है।

14. (c) $OA^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

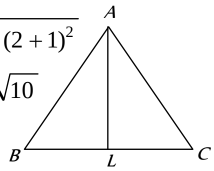
व $OB^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

अतः $OA^2+OB^2=1+1=2$.

15. (d) ΔABC में, $A \equiv (-3, 0); B \equiv (4, -1)$ तथा $C \equiv (5, 2)$

हम जानते हैं कि $BC=\sqrt{(5-4)^2+(2+1)^2}$

$=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$



तथा ΔABC का क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}[-3(-1-2)+4(2-0)+5(0+1)]=11$

अतः लम्ब $AL=\frac{2\,\Delta ABC}{BC}=\frac{2\times 11}{\sqrt{10}}=\frac{22}{\sqrt{10}}$.

16. (b) दूरी $=\sqrt{b^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=b$.

17. (a) मध्य बिन्दु $\left(\frac{a\sin\theta}{2}, \frac{a\cos\theta}{2}\right)$ होगा तथा उसकी मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{\left(\frac{a\sin\theta}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a\cos\theta}{2}-0\right)^2}=\frac{a}{2}$ होगी।

18. (c) $l^2=2^2+2^2=8=(\sqrt{3}+1)^2+(k-1)^2 \Rightarrow k=\sqrt{3}$.

19. (d) बिन्दुओं $A(1, 3)$ तथा $B(-3, 5)$ का लम्ब समद्विभाजक है,

$2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)=(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)$

$\Rightarrow 2x(1+3)+2y(3-5)=(1+9)-(9+25)$

$\Rightarrow 2x-y+6=0$ .....(i)

बिन्दुओं $A(1, 3)$ तथा $C(5, -1)$ का लम्ब समद्विभाजक है,

$2x(1-5)+2y(3+1)=(1+9)-(25+1)$

$\Rightarrow x-y-2=0$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) का प्रतिच्छेद बिन्दु $P=(-8, -10)$

तब $PA=\sqrt{(1+8)^2+(3+10)^2}=\sqrt{81+169}$

$=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$.

20. (d) बिन्दुओं (7, 5) व (3, 2) के बीच की दूरी

$=\sqrt{(3-7)^2+(2-5)^2}=\sqrt{16+9}=5$ इकाई

21. (c) $\frac{2\times 5+1(a)}{2+1}=4 \Rightarrow a=2$

एवं $\frac{2\times 7+1(b)}{2+1}=6 \Rightarrow b=4$.

22. (a) $\frac{5+b}{2}=3, \frac{a+7}{2}=5 \Rightarrow b=1, a=3$.

23. (b) माना अनुपात $k:1$ है एवं x- अक्ष के निर्देशांक $(a, 0)$ हैं, अतः

$0=\frac{k\times 6+1\times(-3)}{k+1} \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

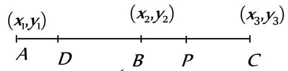
अतः अनुपात 1 : 2 है।

वैकल्पिक : सूत्र (सैद्धान्तिक भाग में दिया है) के उपयोग से अभीष्ट अनुपात $-\left(\frac{-3}{6}\right)$ या 1 : 2 है।

24. (a) यहाँ $x=\frac{a(a-b)-b(a+b)}{a-b}=\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b}$

$y=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a-b}$.

25. (a)



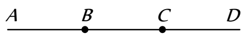
D के निर्देशांक $\left(\frac{lx_2+kx_1}{l+k}, \frac{ly_2+ky_1}{l+k}\right)$ होंगे

पुनः DC, P द्वारा $m:k+l$ में विभाजित की जाती है,

तब P निर्देशांक

$\left(\frac{mx_3+lx_2+kx_1}{k+l+m}, \frac{my_3+ly_2+ky_1}{k+l+m}\right)$ होंगे।

26. (a) माना बिन्दु (x, y) है।



(i) बिन्दु $B(x, y)$ AD को 1 : 2 में विभाजित करता है।

$\therefore x=\frac{0+9}{3}=3$ व $y=\frac{0+12}{3}=4$

(ii) अब बिन्दु $C(x, y)$, AD को 2 : 1 में विभाजित करता है, तो

तब $x=\frac{0+18}{3}=6$ व $y=\frac{0+24}{3}=8$.

27. (b) अनुपात $=-\left(\frac{-1+1-4}{5+7-4}\right)=\frac{1}{2}$ (पुस्तक में दिये गये सूत्र के प्रयोग से)

28. (a) विकर्णो के मध्यबिन्दु एक ही होने चाहिए

$\Rightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{-3+3}{2} \Rightarrow x=2$

व $\frac{-1+3}{2}=\frac{-2+y}{2} \Rightarrow y=4$.

29. (a) $\frac{x_1+x_2}{2}=2, \frac{x_2+x_3}{2}=-1, \frac{x_3+x_1}{2}=4$

$x_1=7, x_2=-3, x_3=1$

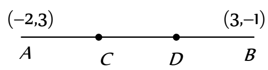
इसी प्रकार y_1, y_2, y_3 को प्राप्त किया जा सकता है।

30. (a) माना अनुपात $k:1$ है,

इसलिए $\frac{-7k+3}{k+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{1}{3}$.

अतः अनुपात 1 : 3 (अन्तः) होगा।

31. (a) C रेखा को 1 : 2, में विभाजित करता है, अतः C के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ होंगे।

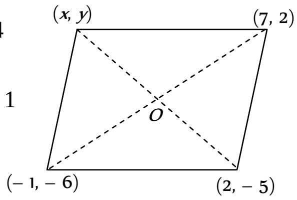


यह अभीष्ट बिन्दु होगा।

32. (a) AB का मध्य बिन्दु (2, 2) है, अतः अभीष्ट माध्यिका की लम्बाई बिन्दुओं (2, 2) व (2, 1) के बीच की दूरी अर्थात् 1 होगी।

33. (b) $\frac{-1+7}{2} = \frac{2+x}{2} \Rightarrow x = 4$

$\frac{-6+2}{2} = \frac{-5+y}{2} \Rightarrow y = 1$



अतः चौथा शीर्ष $(x, y) = (4, 1)$.

34. (a) दिये गये प्रतिबंध को देखने पर PQ का मध्यबिन्दु वही होगा जो AB का है अर्थात् $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

35. (c) माना $A(3, -2), B(-3, -4)$ तथा दो बिन्दु C व D, AB के समत्रिभाग करने वाले बिन्दु हैं।

स्पष्टतः C, AB को 1 : 2, में विभाजित करता है, अतः C के निर्देशांक $\left(\frac{1(-3)+2(3)}{1+2}, \frac{1(-4)+2(-2)}{1+2}\right) = \left(1, -\frac{8}{3}\right)$.

इसी प्रकार D, AB को 2 : 1 में विभाजित करता है।

अतः D के निर्देशांक

$\left(\frac{2(-3)+1(3)}{2+1}, \frac{2(-4)+1(-2)}{2+1}\right) = \left(-1, -\frac{10}{3}\right)$.

36. (c) $x = \frac{4\times5+8\times7}{12} = \frac{19}{3}$ व $y = \frac{-2\times5+6\times7}{12} = \frac{8}{3}$.

37. (c) सूत्र $-\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, का प्रयोग करने पर तब अभीष्ट अनुपात $-\left(\frac{-3}{1}\right) = 3 : 1$ है।

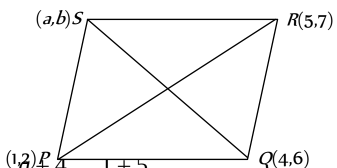
38. (c) माना चौथा शीर्ष (x, y) है, तो $\frac{x+8}{2} = \frac{2+5}{2}$ व

$\frac{y+4}{2} = \frac{-2+7}{2} \Rightarrow x = -1, y = 1$.

39. (a) y-अक्ष, $k = \frac{-x_1}{x_2}$ के अनुपात में विभाजित करेगा

$\therefore k = -\left(\frac{2}{-5}\right) = \frac{2}{5}$.

40. (c) चूँकि विकर्ण मध्य बिन्दु पर काटते हैं,



अतः $\frac{a+4}{2} = \frac{1+5}{2} \Rightarrow a = 2$

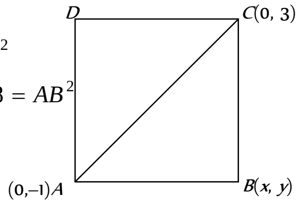
$\frac{b+6}{2} = \frac{2+7}{2} \Rightarrow b = 3$.

41. (b) माना $A(3, -4)$ व $C(-6, 5)$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण के सिरों के निर्देशांक हैं। माना $B(-2, 1)$ तथा $D(x, y)$, तब विकर्णों AC व BD के मध्य बिन्दु सम्पाती होंगे। अतः $\frac{x-2}{2} = \frac{-6+3}{2}$

व $\frac{y+1}{2} = \frac{5-4}{2} \Rightarrow x = -1, y = 0$

अतः D के निर्देशांक (–1, 0) होंगे।

42. (c) विकर्ण की लम्बाई = 4



अब, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow 8 = AB^2$

$AB = BC = 2\sqrt{2}$

माना $B(x, y)$; $\therefore AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow (x-0)^2 + (y+1)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2$

$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 6y + 9$

$\Rightarrow y = 1$; $\therefore x^2 + (2)^2 = 8; \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore$ अन्य शीर्ष (2, 1),(–2, 1) हैं।

43. (e) माना $A(3,5)$ व $C(7,10)$ का मध्य बिन्दु = $M\left(5, \frac{15}{2}\right)$

$\therefore$ BD का मध्य बिन्दु $= M\left(5, \frac{15}{2}\right)$

$B(-5,-4)$ और $D(x, y)$

$\therefore \frac{-5+x}{2} = 5$; $x = 10 + 5 = 15$

$\frac{-4+y}{2} = \frac{15}{2}$; $y = 15 + 4 = 19$

$\therefore$ चौथे शीर्ष के निर्देशांक $D = (15, 19)$.

44. (c) रेखायें $x + y = 4$ और $x + y = -4$ समानान्तर हैं और बिन्दु (2, 2) और (–2, –2) इन रेखाओं पर स्थित हैं।

यदि बिन्दु (a, a) रेखाओं के बीच स्थित है तो $a > -2$ और $a < 2$ अर्थात् $-2 < a < 2 \Rightarrow |a| < 2$.

ज्यामितीय प्रतिबन्धों पर आधारित प्रश्न

1. (c) $a = \sqrt{(8+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{116}$

$b = \sqrt{(-4-8)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{145}$

$c = \sqrt{(-4+2)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{29} \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2$

अतः यह समकोण त्रिभुज है।

2. (b) माना $A\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\right)$, $B\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, 2a\right)$ व $C\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 3a\right)$

तब $AB^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (a-2a)^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$

इसी प्रकार $BC^2 = \frac{4a^2}{3}$ व $AC^2 = 4a^2$

अतः त्रिभुज समद्विबाहु है।

3. (d) दिये गये बिन्दु समरेखीय हैं क्योंकि बिन्दु $\left(\frac{kc+la}{k+l}, \frac{kd+lb}{k+l}\right)$ बिन्दुओं (a, b) व (c, d) को $k : l$ में विभाजित करते हैं।

4. (d) चूँकि इन बिन्दुओं द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य हैं, अतः बिन्दु समरेखीय हैं।

5. (d) $l_1 = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2 + b^2}$

$l_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

व $l_3 = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow l_1 = l_2 + l_3$

अतः बिन्दु समरेखीय हैं।

6. (d) $l_1 = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

$l_2 = \sqrt{(a^2 - a)^2 + b^2(a-1)^2} = (a-1)\sqrt{a^2 + b^2}$

$l_3 = \sqrt{(a^2 + a)^2 + b^2(a+1)^2} = (a+1)\sqrt{a^2 + b^2}$

अब $l_1 + l_2 = l_3$. अतः बिन्दु समरेखीय हैं।

7. (b) माना $A(-1, 1), B(0, -3), C(5, 2)$ व $D(4, 6)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{17}, CD = \sqrt{17}, BC = \sqrt{50},$

$AD = \sqrt{50}, AC = \sqrt{37}$ व $BD = \sqrt{97}$

स्पष्टतः $AB = CD$ व $BC = AD$ एवं विकर्ण $AC \neq BD$. अतः चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज होगा।

8. (b) विकर्णों के मध्यबिन्दु एक समान हैं

एवं $S_{AB} = \frac{-4+1}{-2+4} = \frac{-3}{2}, S_{AD} = \frac{3+1}{2+4} = \frac{2}{3}$

$S_{AB}.S_{AD} = -1$. अतः यह आयत है।

9. (d) यहाँ $A(0, 2), B(1, 0)$ व $C(3, 1)$.

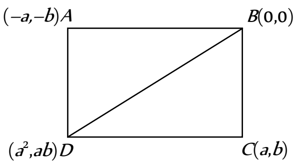
इसलिए $AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

व $AC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

यह स्पष्ट है कि $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

अतः त्रिभुज समकोणीय समद्विबाहु है।

10. (a) यहाँ चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल + ΔBCD का क्षेत्रफल



$$= \begin{vmatrix} -a & -b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2 & ab & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & ab & 1 \end{vmatrix} = 0$$

अतः बिन्दु समरेखीय हैं।

11. (b) माना $A(0,0), B(a, 0)$ व $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

अतः $AB = \sqrt{a^2 + 0} = a, BC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a$

व $AC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a$

अतः त्रिभुज समबाहु है।

12. (d) स्पष्टतः $AB = BC = CD = AD = 5$

व साथ ही, $AC \neq BD$. अतः यह समचतुर्भुज होगा।

13. (b) माना $A(0, -1), B(2, 1), C(0, 3)$ तथा $D(-2, 1)$.

स्पष्टतः $AB = BC = CD = AD = 2\sqrt{2}$

साथ ही,, $AC = BD = 4$ तथा रेखा AB की प्रवणता $= 1$,

रेखा AD की प्रवणता $= 1$,

$\therefore \angle DAB = 90^o$ इसी प्रकार $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

अर्थात् चतुर्भुज का प्रत्येक कोण समकोण है। अतः चतुर्भुज एक वर्ग है

14. (a) माना $A(4, 0), B(-1, -1), C(3, 5)$ तब $AB = \sqrt{26}$,

$AC = \sqrt{26}$ तथा $BC = \sqrt{52}$ अर्थात् $AB = AC$.

अतः Δ समद्विबाहु त्रिभुज है तथा $(BC)^2 = AB^2 + AC^2$

अतः Δ समकोण त्रिभुज भी है।

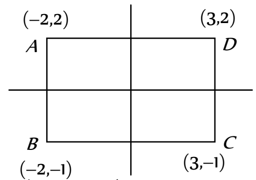
15. (b) चूँकि $PQ = \sqrt{68}, PR = \sqrt{17}, QR = \sqrt{85}$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = QR^2$, अर्थात् त्रिभुज समकोण है।

16. (c) माना दिए गए शीर्ष *A, B, C* तथा *D* क्रमशः $(-2, 2)$, $(-2, -1), (3, -1)$ और $(3, 2)$ हैं। तब

$AB = 3, BC = 5$

$CD = 3, DA = 5$



स्पष्टतः विकर्णों के बीच का कोण 90^o है, अतः आयत होगा।

17. (a) दिया गया है कि त्रिभुज के शीर्ष $A(1,1), B(-1,-1)$ और $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ हैं।

अब, $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$BC = \sqrt{(-\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{8}$

$CA = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{8}$

अर्थात्, $AB = BC = CA$. अतः त्रिभुज समबाहु है।

त्रिभुज से सम्बन्धित प्रश्न (अंतःकेन्द्र, परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र), ज्यामितीय आकृतियों का क्षेत्राफल, समरैखिकता

1. (b) $x = \frac{a+b+c}{3}, y = \frac{b-c+c-a+a-b}{3} = 0$

अतः केन्द्रक *x*-अक्ष पर स्थित है।

2. (c) बिन्दु *x*-अक्ष पर होगा यदि $y = 0$,

अतः $\frac{1+3+c}{3} = 0 \Rightarrow c = -4$.

3. (b) $x^2 + y^2 = (x+4)^2 + (y+8)^2 \Rightarrow 8x + 16y + 80 = 0$

व $x^2 + y^2 = (x+2)^2 + (y+2)^2 \Rightarrow 4x + 4y + 8 = 0$

सरल करने पर, $y = -8$ व $x = 6$ है।

4. (a) माना तीसरा शीर्ष (x, y), है, तो

$5 = \frac{x+5-2}{3} \Rightarrow x = 12$ व $6 = \frac{y+4+4}{3} \Rightarrow y = 10$.

5. (c) माना केन्द्रक (x, y) है तब

$x = \frac{4+3+2}{3} = 3$ व $y = \frac{-3-2+8}{3} = 1$.

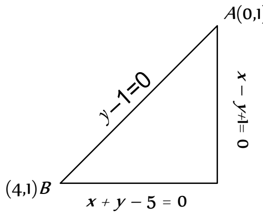
6. (d) $(1, 3)$ के लिए, $3x + 2y = 3 + 6 > 0$,

(5, 0) के लिए, $3\times5+0>0$ एवं
$(-1, 2)$ के लिए $(-1, 2), -3+4>0$
इसी प्रकार अन्य असमिकायें सन्तुष्ट हैं।

7. (b) $x=\frac{2+5+3}{3}=\frac{10}{3}$ व $y=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}$.

8. (a) स्पष्टतः $a=11, b=20, c=13$,
अतः अन्तःकेन्द्र
$$\left(\frac{11\times0+20\times5+13\times16}{11+20+13}, \frac{11\times0+20\times12+13\times12}{11+20+13}\right)$$
अर्थात् (7, 9) है।

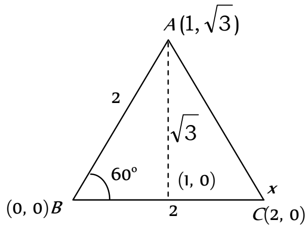
9. (a)



चूँकि त्रिभुज समकोण है, अतः इसका परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु अर्थात् (2, 1) होगा ।

10. (a) $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$
$\therefore 4=\frac{6+2+x_3}{3}, 6=\frac{4+6+y_3}{3} \Rightarrow x_3=4, y_3=8$
$\therefore$ तीसरा शीर्ष (4, 8) है।

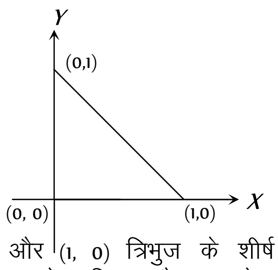
11. (d)



स्पष्टतः त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है। अतः अन्तकेन्द्र तथा केन्द्रक एक ही बिन्दु पर है।
$$\therefore \text{अन्तकेन्द्र}=\left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{\sqrt3+0+0}{3}\right)=\left(1, \frac{1}{\sqrt3}\right).$$

12. (a) यह स्पष्ट है।

13. (a) दी गयी रेखायें $x+y=1$ और $xy=0$ हैं।
जब $x=0$ तब $y=1$, जब $x=1$ तब $y=0$



$\therefore$ (0, 1) और (1, 0) त्रिभुज के शीर्ष हैं। स्पष्टतः त्रिभुज समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है। समकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र समकोण का शीर्ष होता है। अतः रेखा $x+y=1$ और $xy=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0) है।

14. (c) क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} am_1^2 & 2am_1 & 1\\ am_2^2 & 2am_2 & 1\\ am_3^2 & 2am_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}a^2\times2\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1\\ m_2^2 & m_2 & 1\\ m_3^2 & m_3 & 1\end{vmatrix}$

$=a^2\begin{vmatrix} m_1^2-m_2^2 & m_1-m_2 & 0\\ m_2^2-m_3^2 & m_2-m_3 & 0\\ m_3^2 & m_3 & 1\end{vmatrix}$, $\begin{matrix} R_1\to R_1-R_2\\ R_2\to R_2-R_3\end{matrix}$ से

$=a^2(m_2^2-m_3^2)(m_1-m_2)-(m_2-m_3)(m_1^2-m_2^2)$

$=a^2(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)$.

ट्रिक: माना $a=2, m_1=0, m_2=1, m_3=2$,
तो निर्देशांक (0, 0), (2, 4), (8, 8) होंगे।

$\therefore \Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 2 & 8 & 1\\ 4 & 8 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(16-32)=8$ वर्ग इकाई.

15. (d) $\Delta=\frac{1}{2}[4(-2+16)+3(-16-4)+3(4+2)$
$=\frac{1}{2}[56-60+18]=7$.

16. (d) क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1\\ b & c+a & 1\\ c & a+b & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a+b+c & 1\\ b & a+b+c & 1\\ c & a+b+c & 1\end{vmatrix}$

($C_2\to C_1+C_2$ का प्रयोग करने से)

$=\frac{(a+b+c)}{2}\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ b & 1 & 1\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को तथ्य समझकर याद रखें।

17. (c) समीकरणों को हल करने पर, त्रिभुज के शीर्ष (– 2, – 2), (2, – 2) व (0, 5) प्राप्त होंगे।

अतः क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}=14$ वर्ग इकाई.

18. (d) दिये गये प्रतिबन्ध का अर्थ है कि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है, लेकिन इसका यह अर्थ नहीं है कि त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

19. (c) रेखाओं के समीकरण को हल करने पर त्रिभुज के शीर्ष $(0, c_1), (0, c_2)$ व $\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)$ हैं।

अतः क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & c_1 & 1\\ 0 & c_2 & 1\\ \frac{c_2-c_1}{m_1-m_2} & \frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2} & 1\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\left[0+c_1\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}\right)-c_2\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\frac{(c_2-c_1)(c_1-c_2)}{m_1-m_2}=\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_1-m_2)}$.

(चिन्ह की उपेक्षा करने पर)

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को सूत्र की तरह याद रखें।

20. (a) $\Delta = \frac{1}{2}[1(1+1) - 1(-1+1) - 1(-1-1)] = 2$.

21. (a) $\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \left|\frac{[-3(-2-y)+4(y-5)+x(5+2)]}{[6(5+2)-3(-2-3)+4(3-5)]}\right|$

$= \left|\frac{7x+7y-14}{49}\right| = \left|\frac{x+y-2}{7}\right|$.

22. (a) $\frac{\Delta DBC}{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\Delta DBC = \Delta ABC$

$\Rightarrow 2(14x-7) = \frac{49}{2} \Rightarrow x = \frac{77}{56} = \frac{11}{8}$.

23. (d) क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta & 1 \\ -a\sin\theta & b\cos\theta & 1 \\ -a\cos\theta & -b\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(a \times b)\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{ab}{2}[\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta) - \sin\theta(-\sin\theta+\cos\theta)$

$+1(\sin^2\theta+\cos^2\theta)]$

$= \frac{ab}{2}(1+1) = ab$.

24. (b) $\Delta = \frac{3^2}{2\times1\times2} = \frac{9}{4}$.

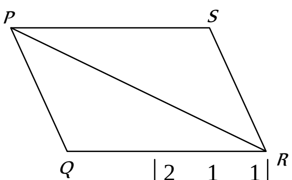
(पुस्तक में दिये गये सूत्र के प्रयोग से)

25. (a) Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[-4(2+3) - 1(1-4) + 1(-3-8)]$

$= \frac{1}{2}|-28| = 14$ इकाई

26. (b) चूँकि $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल त्रिभुज PQR से दो गुना होगा।



अतः $PQRS$ का क्षेत्रफल $= 2.\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

27. (a) $D(3, 2), E(3, 4), F(2, 3)$

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[3(4-3) - 2(3-2) + 1(9-8)]$

$= 1$ वर्ग इकाई

28. (d) $\Delta = \frac{1}{2}\left|\left\{5(2-3) + \frac{2}{3}(3-2) + (-4)(2-2)\right\}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{-13}{3}\right)\right| = \frac{13}{6}$.

29. (c) दिया गया है, त्रिभुज का क्षेत्रफल = 4

$\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow x = -6$.

30. (c) $\begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 \\ 2p+1 & 3 & 1 \\ 2p+2 & 2p & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (p+1)(3-2p) + 1(2p+2-2p-1)$

$+1[(2p)(2p+1) - 3(2p+2)] = 0$

$\Rightarrow p = 2$.

31. (a) $(a-3)^2 + (b-4)^2 = 100$ और $\frac{b-7}{3} = \frac{a-7}{4}$

$\therefore (a, b) = (11, 10)$.

ट्रिक: विकल्प द्वारा परीक्षण करें। (11, 10) दोनों प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है अर्थात् $AC = \sqrt{(11-3)^2 + (10-4)^2} = 10$ साथ ही यह A, B के साथ समरेखीय है।

32. (a) बिन्दु समरेखीय होंगे यदि इन बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य हो।

$\Rightarrow \frac{1}{2}[k\{2k-(6-2k)\} + (1-k)\{(6-2k)-(2-2k)\}$

$+(-4-k)\{(2-2k)-2k\}] = 0$

सरल करने पर, $k = -1$ या $\frac{1}{2}$.

33. (a) $\frac{a-a'-a'}{a'-a} = \frac{b-b'-b'}{b'-b}$

$\Rightarrow \frac{a-2a'}{a'-a} = \frac{b-2b'}{b'-b} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow ab' = a'b.$

34. (c) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a(b-1) + 0 + 1(-b) = 0$

$\Rightarrow ab - a - b = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

35. (a) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ p & 5 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ p & 5 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 10 - (p-10) + (7p-50) = 0 \Rightarrow p = 5$.

36. (c) प्रश्नानुसार $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 10 & k & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 5 & k-5 & 0 \\ -10 & 1-5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 7$.

37. (b) माना $A(-2, -5)$, $B(2, -2)$ तथा $C(8, a)$, समरेखीय हैं। हम जानते हैं कि तीन बिन्दु समरेखीय होते हैं, यदि AB की प्रवणता = BC की प्रवणता $\Rightarrow \frac{-2+5}{2+2} = \frac{a+2}{8-2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$.

38. (b,c) माना $A \equiv (x+1, 2)$, $B \equiv (1, x+2)$, $C \equiv \left(\frac{1}{x+1}, \frac{2}{x+1}\right)$

तब A, B, C समरेखीय होंगे यदि ΔABC का क्षेत्रफल = 0

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \\ \frac{1}{x+1} & \frac{2}{x+1} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 1 & x+2 & 1 \\ \frac{1}{x+1} & \frac{2}{x+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(R_1 \to R_1 - R_2)$

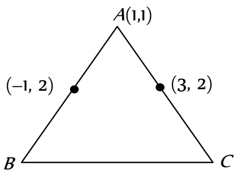
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x+3 & 1 \\ \frac{1}{x+1} & \frac{3}{x+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(C_2 \to C_2 + C_1)$

$$\Rightarrow x\left(x+3-\frac{3}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow x(x^2+3+4x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, -4 .$$

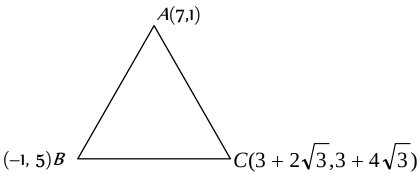
39. (a) त्रिभुज का शीर्ष (1, 1) है और इस शीर्ष से होकर जाने वाली भुजाओं के मध्य बिन्दु (–1, 2) व (3, 2) हैं



$\Rightarrow$ शीर्ष B व C (–3, 3) व (5, 3) हैं।

$\therefore$ केन्द्रक = $\left(\frac{1-3+5}{3}, \frac{1+3+3}{3}\right) = (1, 7/3)$

40. (a)



$\because AB = BC = CA = 4\sqrt{5}$ अर्थात् दिया गया त्रिभुज समबाहु है।

(यदि त्रिभुज समबाहु है, तो त्रिभुज का अंतः केन्द्र, केन्द्रक के बराबर होता है)

अंतः केन्द्र = $\left(\frac{7-1+3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{1+5+3+4\sqrt{3}}{3}\right)$

$= \left(3+\frac{2}{\sqrt{3}}, 3+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

41. (c) माना $A(-2,-6), B(-2,4) C(1,3)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं।

BC की प्रवणता $= \frac{3-4}{1+2} = \frac{-1}{3}$

BC के लम्ब की प्रवणता = 3

A से जाने वाले लम्ब का समीकरण

$y+6 = 3(x+2) \Rightarrow y+6 = 3x+6 \Rightarrow y = 3x$ .....(i)

CA की प्रवणता $= \frac{3+6}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$

CA से लम्ब की प्रवणता = $\frac{-1}{3}$

B से जाने वाले लम्ब का समीकरण

$y-4 = \frac{-1}{3}(x+2) \Rightarrow 3y-12 = -x-2$

$\Rightarrow x+3y-10 = 0$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर $x = 1, y = 3$

$\therefore$ लम्ब केन्द्र (1, 3) हैं।

42. (a) यह समकोण त्रिभुज है (मूलबिन्दु पर) अतः लम्ब केन्द्र = (0, 0).

43. (e) यदि बिन्दु $(k,3), (2,k)$ व $(-k,3)$ समरेखीय हैं तब

$[k(k-3)+2(3-3)-k(3-k)] = 0$

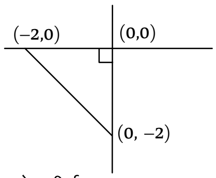
$\Rightarrow [k(k-3)+0+k(k-3) = 0 \Rightarrow 2k(k-3) = 0$

$\Rightarrow k = 0, 3$.

44. (a) $xy+2x+2y+4 = 0$ .....(i)

और $x+y+2 = 0$ ......(ii)

(i) व (ii) से $xy = 0 \Rightarrow x = y = 0$



$\therefore$ त्रिभुज के शीर्ष (–2,0) (0,0) (0,–2) हैं

(समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होता है)

$\therefore$ (–1,–1) परिकेन्द्र है।

45. (a) त्रिभुज की तीन भुजाओं के समीकरण $x = 2$, $y+1 = 0$ व $x+2y = 4$ हैं।

$x = 2$ व $y+1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु (2, –1) हैं।

$x = 2$ व $x+2y = 4$ के प्रतिच्छेद बिन्दु (2, 1) हैं।

$y+1 = 0$ व $x+2y = 4$ के प्रतिच्छेद बिन्दु (6, –1) हैं।

माना परिकेन्द्र (x, y) है

$(x-2)^2+(y+1)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$

$(y+1)^2 = (y-1)^2$; $y^2+2y+1 = y^2-2y+1$

$4y = 0$, $y = 0$ व $(x-2)^2+(y-1)^2 = (x-6)^2+(y+1)^2$

इस समीकरण में $y = 0$ रखने पर

$(x-2)^2+(0-1)^2 = (x-6)^2+(0+1)^2$

$(x-2)^2+1 = (x-6)^2+1$; $(x-2)^2-(x-6)^2 = 0$

$(x-2+x-6)(x-2-x+6) = 0$

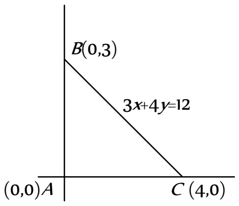
$4(2x-8) = 0 \Rightarrow 8(x-4) = 0$

$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$\therefore$ परिकेन्द्र (4, 0) है।

46. (a) माना Δ के निर्देशांक $O(0, 0)$, $A(8,0)$, व $B(4,6)$ शीर्ष O से भुजा AB पर डाले गये लम्ब का समीकरण $y = \frac{2}{3}x$ है और $A(8,0)$ से भुजा OB पर डाले गये लम्ब का समीकरण $3y = -2x + 16$ है। अतः इनके प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(4, \frac{8}{3}\right)$ हैं।

47. (b) यहाँ $a = BC = 5,\ b = AC = 4,\ c = AB = 3$



अंतः केन्द्र $\left(\frac{0+0+3\times 4}{5+4+3}, \frac{0+4\times 3+0}{5+4+3}\right) = (1, 1)$.

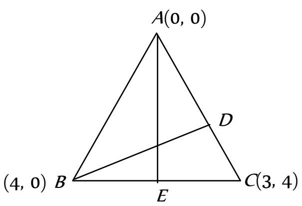
48. (c) $BD \perp AC$; BD की प्रवणता $= -\frac{3}{4}$

BD का समीकरण $3x + 4y - 12 = 0$ .....(i)

$AE \perp BC$

AE की प्रवणता $= \frac{1}{4}$

AE का समीकरण $x - 4y = 0$ .....(ii)



(i) व (ii) से, $x = 3, y = \frac{3}{4}$

अतः त्रिभुज का लम्बकेन्द्र $\left(3, \frac{3}{4}\right)$ है।

49. (a) समकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र समकोण का शीर्ष होता है। अतः $7x + 4y - 15 = 0$ व $4x - 7y + 10 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु (1, 2) है।

50. (d) स्पष्टतः यह (3, 4) पर समकोण त्रिभुज है। अतः लम्बकेन्द्र (3, 4) है।

51. (a) समीकरणों को हल करने पर शीर्ष (−3, 4) व $\left(\frac{-3}{7}, \frac{16}{7}\right)$ प्राप्त होते हैं। साथ ही, शीर्षों से डाले गये लम्बों के समीकरण $x + 4y = 13$ व $7x - 7y = -19$ हैं। इन रेखाओं को हल करने पर लम्बकेन्द्र $\left(\frac{3}{7}, \frac{22}{7}\right)$ अर्थात् प्रथम चतुर्थांश में है।

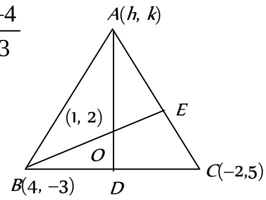
52. (b) $m_1 = \frac{-a(t_1t_2 - t_2t_3)}{a(t_1 - t_3)} = -t_2, m_2 = -t_3$

तृतीय बिन्दु से डाला गया लम्ब $t_2x + y = a[t_1t_2t_3 + t_1 + t_3]$

प्रथम बिन्दु से डाला गया लम्ब $t_3x + y = a[t_1t_2t_3 + t_1 + t_2]$

$x = -a, y = a[t_1t_2t_3 + t_1 + t_2 + t_3]$.

53. (b) माना तृतीय शीर्ष (h, k) है। AD की प्रवणता $= \frac{k-2}{h-1}$,



BC की प्रवणता $= \frac{5+3}{-2-4} = \frac{-4}{3}$

BE की प्रवणता $= \frac{-3-2}{4-1} = \frac{-5}{3}$

AC की प्रवणता $= \frac{k-5}{h+2}$

$\because AD \perp BC \Rightarrow \frac{k-2}{h-1} \times \frac{-4}{3} = -1$

$3h - 4k + 5 = 0$ ......(i)

$BE \perp AC \Rightarrow -\frac{5}{3} \times \frac{k-5}{h+2} = -1$

$\Rightarrow 3h - 5k + 31 = 0$ .....(ii)

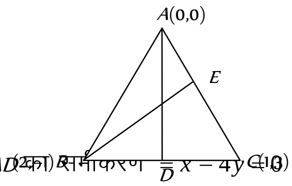
(i) व (ii) को हल करने पर, $h = 33, k = 26$

अतः तीसरा शीर्ष (33, 26) है।

54. (b) यहाँ दिया गया त्रिभुज शीर्ष $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ पर समकोण है।

अतः लम्ब केन्द्र $\left(2, \frac{-1}{2}\right)$ हैं।

55. (b) BC रेखा का समीकरण $4x + y = 7$ है तब AD रेखा का समीकरण $x - 4y + k = 0$ है पर यह (0,0) बिन्दु से गुजरती है



अतः AD का समीकरण $x - 4y = 0$ .....(i)

इसी तरह AC का समीकरण $= 3x - y = 0$ व BE का समीकरण $x + 3y + 1 = 0$ है। .....(ii)

समी. (i) व (ii) को हल करने पर अभीष्ट लम्बकेन्द्र $\left(\frac{-4}{7}, \frac{-1}{7}\right)$ है।

56. (d) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ b+c+a & c+a & 1 \\ c+a+b & a+b & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

अक्षों का रूपान्तरण व बिन्दुपथ

1. (c) हम जानते हैं कि यदि मूल बिन्दु (h, k) पर स्थानान्तरित कर दिया जाए, तो (x, y) के नये निर्देशांक $(x - h, y - k)$ हो जाते हैं। अतः (4, 5) के नये निर्देशांक मूल बिन्दु (1, − 2) के सापेक्ष (3, 7) होंगे।

2. (c) $x = x' + h, y = y' + k,$ रखने पर दिया गया समीकरण निम्न रूप में बदल जाता है

$x'^2 + y'^2 + x'(2h - 4) + y'(2k + 6) + h^2 + k^2 - 7 = 0$

रेखीय पदों का विलोपन करने के लिये

$2h - 4 = 0, 2k + 6 = 0 \Rightarrow h = 2, k = -3$

अर्थात् $(h, k) = (2, -3)$.

3. (b) माना बिन्दु (h, k) हैं, अतः

$(h - a)^2 + (k - 0)^2 = h^2 \Rightarrow h^2 + a^2 - 2ah + k^2 = h^2$

अतः बिन्दुपथ $y^2 - 2ax + a^2 = 0$ है।

4. (b) दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार,

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \pm 1$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$2x^2 + 2y^2 + 1 = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

पुनः वर्ग करने पर, $12x^2 - 4y^2 = 3$.

5. (d) प्रवणता $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} \Rightarrow \int dy = \sqrt{3} \int dx$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + c = 0$

परन्तु यह (0, 0) से गुजरती है, अतः $c = 0$

अतः अभीष्ट बिन्दुपथ $\sqrt{3}x - y = 0$ होगा।

6. (b) θ का विलोपन करने पर हमें अभीष्ट बिन्दुपथ प्राप्त हो जाता है। चूँकि $x = a(1 - \cos\theta) \Rightarrow x - a = -a\cos\theta$ .....(i)

एवं $y = a\sin\theta$ .....(ii)

अब (i) व (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ जो कि एक वृत्त का समीकरण है।

7. (d) माना $S(x, y)$ तब

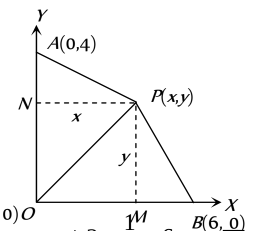
$(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 = 2[(x-1)^2 + y^2]$

$\Rightarrow 2x + 1 + 4 - 4x = -4x + 2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

अतः यह एक सरल रेखा है जो y-अक्ष के समान्तर है।

8. (a) तीन दिये गये बिन्दु $O(0, 0), A(0, 4)$ व $B(6, 0)$ हैं और माना $P(x, y)$ गतिशील बिन्दु है।

ΔPOA का क्षेत्रफल = 2 ΔPOB का क्षेत्रफल



$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times x = \pm 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times y$ या $x = \pm 3y$

अतः बिन्दुपथ के दोनों भागों का समीकरण

$(x - 3y)(x + 3y) = 0$.

9. (d) $(x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$.

10. (a) $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 \Rightarrow y^2 = 4ax$

नोट: यह परवलय $y^2 = 4ax$ की परिभाषा है।

11. (b) माना गतिशील बिन्दु (x, y) है, अतः इसकी x-अक्ष से दूरी y होगी, इसलिए दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार,

$\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = y \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 0$,

जो कि बिन्दु (x, y) का अभीष्ट बिन्दुपथ है।

12. (b) $(x+1)^2 + y^2 = 3^2[x^2 + (y-2)^2]$

$\Rightarrow 8(x^2 + y^2) - 36y - 2x + 35 = 0$, जो कि एक वृत्त है.

13. (b) यह स्पष्ट है।

14. (a) चूँकि OA व OP समान्तर तभी होंगी जबकि O, A व P समरेखीय हों अतः

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 3y = 0$.

15. (b) माना बिन्दु (h, k) हैं, $(h-a)^2 + k^2 = (h+a)^2 + k^2$

$\Rightarrow 4ha = 0 \Rightarrow h = 0. \therefore x = 0$.

16. (b) माना बिन्दु (x, y) है, तो

$(x-a)^2 + y^2 - (x+a)^2 - y^2 = 2k^2$

$\Rightarrow -4ax - 2k^2 = 0 \Rightarrow 2ax + k^2 = 0$.

17. (d) यहाँ $\frac{x}{b} = \sec\phi$ व $\frac{y}{a} = \tan\phi$

इसलिये $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = \sec^2\phi - \tan^2\phi \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$,

जो कि स्पष्टतः अतिपरवलय है।

18. (d) $(x - ak)^2 + y^2 = k^2\left[\left(x - \frac{a}{k}\right)^2 + y^2\right]$

$\Rightarrow (1 - k^2)(x^2 + y^2) - 2akx + 2akx + a^2k^2 - a^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

19. (a) माना बिन्दु (x, y) है, तब दिये गये प्रतिबन्ध के अनुसार

$\sqrt{x^2 + y^2} = 3y$ {$\because$ x-अक्ष से दूरी y है}

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9y^2 \Rightarrow x^2 - 8y^2 = 0$.

20. (b) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$.

21. (b) सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, x-अक्ष पर बिन्दु $A\left(\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$ व y-अक्ष पर बिन्दु $B\left(0, \frac{p}{\sin\alpha}\right)$ पर मिलती है। माना (h, k), AB रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं

तब, $h = \frac{p}{2\cos\alpha}$ व $k = \frac{p}{2\sin\alpha}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{p}{2h}$ व $\sin\alpha = \frac{p}{2k}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{p^2}{4h^2} + \frac{p^2}{4k^2} = 1$

अतः (h, k) का बिन्दु पथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ है।

22. (a) यह स्पष्ट है।

23. (d) माना $P(h, k)$, दिया है, $2PA = 3PB \Rightarrow 4PA^2 = 9PB^2$

$\Rightarrow 4(h^2 + k^2) = 9[(h-4)^2 + (k+3)^2]$

$\Rightarrow 5h^2 + 5k^2 - 72h + 54k + 225 = 0$

अतः बिन्दु P का बिन्दुपथ $5x^2 + 5y^2 - 72x + 54y + 225 = 0$ है

24. (a) माना $A(ae, 0)$ व $B(-ae, 0)$ दिये गये दो बिन्दु हैं व (h, k) गतिशील बिन्दु P के निर्देशांक हैं, अब

$PA + PB = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(h-ae)^2 + k^2} + \sqrt{(h+ae)^2 + k^2} = 2a$ .....(i)

परन्तु हम जानते हैं कि,

$[(h-ae)^2 + k^2] - [(h+ae)^2 + k^2] = -4aeh$ .....(ii)

(ii) में (i)का भाग देने पर,

$\sqrt{[(h-ae)^2 + k^2]} - \sqrt{[(h+ae)^2 + k^2]} = -2eh$ .....(iii)

(i) व (iii)को जोड़ने पर, $2\sqrt{[h-ae)^2 + k^2]} = 2(a - eh)$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$\Rightarrow (h-ae)^2 + k^2 = (a-eh)^2 \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

अतः P का बिन्दुपथ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ है।

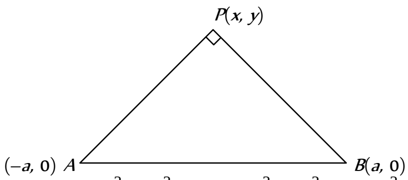
25. (c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2[(x+3)^2 + (y-5)^2]$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) + 26x - 44y + 131 = 0$.

26. (b) अभीष्ट बिन्दुपथ $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16$ है।

27. (d) हम जानतें हैं कि $PA^2 + PB^2 = AB^2$



$\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 + (x+a)^2 + y^2 = (2a)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$.

28. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

29. (a) यह आधारभूत संकल्पना है।

30. (b) यह आधारभूत संकल्पना है।

31. (b) माना $P(x, y)$ है। $\Delta = \pm 12$

$\Rightarrow x + 3y + 1 = 0$ व $x + 3y - 23 = 0$.

32. (b) माना $h = u\cos\alpha . t,\ k = u\sin\alpha . t - \frac{1}{2}gt^2$, तब $t = \frac{h}{u\cos\alpha}$.

$k = u\sin\alpha . t - \frac{1}{2}gt^2$, में t का मान रखने पर

$k = h\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{h^2}{u^2\cos^2\alpha}$

$\therefore$ (h, k) का बिन्दुपथ $y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$ है, जो कि परवलय है।

33. (b) माना (h, k) केन्द्रक है, तब

$h = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}{3}$ व $k = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha + 2}{3}$

$\Rightarrow 3h - 1 = \cos\alpha + \sin\alpha$ व $3k - 2 = \sin\alpha - \cos\alpha$

$\Rightarrow (3h-1)^2 + (3k-2)^2 = 2$, (वर्ग करके जोड़ने पर)

$\Rightarrow 9(h^2 + k^2) - 6h - 12k + 3 = 0$

$\Rightarrow 3(h^2 + k^2) - 2h - 4k + 1 = 0$

$\therefore$ (h, k) का बिन्दुपथ $3(x^2 + y^2) - 2x - 4y + 1 = 0$ है।

34. (d) माना (h, k) बिन्दुपथ पर एक बिन्दु है, तब दिये गये प्रतिबंधानुसार $(h-a_1)^2 + (k-b_1)^2 = (h-a_2)^2 + (k-b_2)^2$

$\Rightarrow 2h(a_1 - a_2) + 2k(b_1 - b_2) + a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0$

$\Rightarrow h(a_1 - a_2) + k(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2) = 0$.(i)

चूँकि (h, k) दिये गये बिन्दुपथ पर स्थित है, अतः

$(a_1 - a_2)h + (b_1 - b_2)k + c = 0$ .....(ii)

(i) व (ii)से तुलना करने पर

$c = \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2)$.

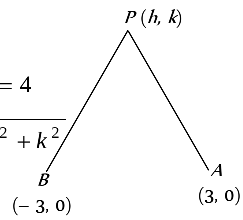
35. (b) माना बिन्दु $P(x, y)$ है।

अतः मूलबिन्दु से दूरी $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ तथा रेखा से दूरी $= (x - 2)$

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} + (x-2) = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = (-x + 6)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 36 - 12x \Rightarrow y^2 + 12x = 36$.

36. (a) माना बिन्दु $P(h, k)$ है।



दिया है, $PA - PB = 4$

$\sqrt{(h-3)^2 + k^2} - \sqrt{(h+3)^2 + k^2} = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(h-3)^2 + k^2} = 4 + \sqrt{(h+3)^2 + k^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$(h-3)^2 + k^2 = 16 + (h+3)^2 + k^2 + 8\sqrt{(h+3)^2 + k^2}$

$\Rightarrow h^2 + 9 - 6h + k^2 = 16 + h^2 + 9 + 6h + k^2 + 8\sqrt{(h+3)^2 + k^2}$

$\Rightarrow -6h = 16 + 6h + 8\sqrt{(h+3)^2 + k^2}$

$\Rightarrow -8\sqrt{(h+3)^2 + k^2} = 12h + 16$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$64(h^2 + 9 + 6h + k^2) = 144h^2 + 256 + 2.16.12h$

$\Rightarrow 4(h^2 + 9 + 6h + k^2) = 9h^2 + 16 + 24h$

$\Rightarrow 4h^2 + 36 + 24h + 4k^2 = 9h^2 + 16 + 24h$

$\Rightarrow 5h^2 - 4k^2 = 20 \Rightarrow \frac{h^2}{4} - \frac{k^2}{5} = 1$

अतः बिन्दु P का बिन्दुपथ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ है।

37. (b) $3h = a\cos t + b\sin t + 1,\ 3k = a\sin t - b\cos t$

$a^2+b^2=(3h-1)^2+(3k)^2$

$(3x-1)^2+(3y)^2=a^2+b^2$.

38. (a) माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं।

दिया है, $PA=PB\Rightarrow(PA)^2=(PB)^2$

$\Rightarrow\{x-(a+b)\}^2+\{y-(a-b)\}^2$

$=\{x-(a-b)\}^2+\{y-(a+b)\}^2$

$-2y(a+b+a-b)\ -2y(a-b-a-b)$

$\Rightarrow 4ax+4by=0$

$ax+by=0\Rightarrow -x+y=0\Rightarrow x-y=0$.

39. (b) माना अभीष्ट बिन्दु (x_1, y_1) है

तब प्रश्नानुसार $4|\,y_1|=(x_1^2+y_1^2)$

$\Rightarrow\ x_1^2+y_1^2-4|y_1|=0$

(x_1, y_1) को (x, y) से प्रतिस्थापित करने पर

$x^2+y^2-4y=0$ अभीष्ट बिन्दुपथ है।

40. (c) $P=(1,0), Q=(h,k)$ इस प्रकार हैं कि $k^2=8h$

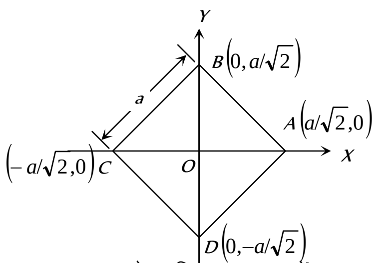
माना (α,β) PQ का मध्य बिन्दु है

$\alpha=\dfrac{h+1}{2}, \beta=\dfrac{k+0}{2};\ 2\alpha-1=h,\ 2\beta=k$

$(2\beta)^2=8(2\alpha-1)\Rightarrow\beta^2=4\alpha-2\Rightarrow y^2-4x+2=0$.

Critical Thinking Questions

1. (a)



स्पष्टतः समकोण त्रिभुज BOA में,

$$OA=OB=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

अतः $(a\sqrt{2},\ 0)$ वर्ग का शीर्ष नहीं होगा।

2. (c) शीर्ष $A(x, y)$, B व C से बराबर दूरी पर है क्योंकि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, अतः

$(x-1)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-7)^2$

$\Rightarrow 6x-8y+43=0$

इस प्रकार कोई भी बिन्दु जो इस रेखा पर होगा, शीर्ष A हो सकता है केवल BC के मध्य बिन्दु $\left(-\dfrac{1}{2}, 5\right)$ को छोड़कर।

3. (c) $CA=\sqrt{(at^2-a)^2+(2at)^2}=a\sqrt{(t^2-1)^2+4t^2}$

$=a\sqrt{(t^2+1+2t^2)}=a(1+t^2)$

$CB=\sqrt{\left(\dfrac{a}{t^2}-a\right)^2+\left(\dfrac{-2a}{t}\right)^2}=a\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$

CA तथा CB का हरात्मक माध्य $=\dfrac{2a^2(1+t^2)\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}{a\left[1+t^2+1+\dfrac{1}{t^2}\right]}=2a$.

$\left[\because x \text{ तथा } y \text{ का हरात्मक माध्य} =\dfrac{2xy}{x+y}\right]$

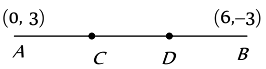
4. (a) चूँकि हमें दिया गया है $AB=3AM$

$\Rightarrow AM+MB=3AM\Rightarrow MB=2AM$

इसलिए अनुपात $AM:MB=1:2$

अतः बिन्दु $M\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ होगा।

5. (d)



$C\left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-3+6}{3}\right)\equiv(2, 1)$

$D\left(\dfrac{2\times6+0}{3}, \dfrac{-6+3}{3}\right)\equiv(4, -1)$.

6. (a) $AB=\sqrt{(2a-2a)^2+(4a-6a)^2}=2a$

$BC=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+a^2}=2a$

$CA=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(-a)^2}=2a$

चूँकि $AB=BC=CA$, अतः त्रिभुज समबाहु है, इसलिए यह न्यूनकोण त्रिभुज है।

7. (c) केन्द्रक $\left(\dfrac{1+2+c^2}{3}, \dfrac{a+b+3}{3}\right)$ है।

अब चूँकि y-अक्ष पर $x=0;\Rightarrow\dfrac{3+c^2}{3}=0\Rightarrow c^2=-3$,

जो कि असम्भव है, अतः यह y-अक्ष पर नहीं हो सकता है.

8. (c) माना $A(0, 0), B(6, 0)$ व $C(6,8)$

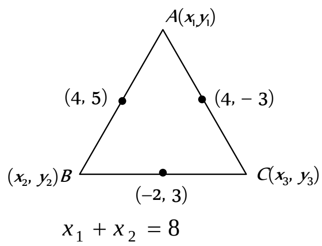
अतः $c=AB=6,\ a=BC=8$ व $b=AC=10$

अतः अन्तः केन्द्र

$=\left(\dfrac{8\times0+10\times6+6\times6}{8+10+6}, \dfrac{8\times0+10\times0+6\times8}{8+10+6}\right)=(4,\ 2)$.

9. (c) माना त्रिभुज के शीर्ष

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ व $C(x_3, y_3)$, हैं, तो



$x_1+x_2=8$ .....(i)

$y_1+y_2=10$ .....(ii)

$x_2+x_3=-4$ .....(iii)

$y_2 + y_3 = 6$ .....(iv)

$x_3 + x_1 = 8$ .....(v)

$y_3 + y_1 = -6$ .....(vi)

इन समीकरणों को हल करने पर,

$x_1 = 10, x_2 = -2, x_3 = -2, y_1 = -1, y_2 = 11$

व $y_3 = -5$

अतः केन्द्रक $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ है।

वैकल्पिक : जैसा कि हम जानते हैं कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक तथा इस त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बने त्रिभुज का केन्द्रक एक ही होता है। अतः अभीष्ट केन्द्रक $\left(\frac{4+4-2}{3}, \frac{5-3+3}{3}\right) \equiv \left(2, \frac{5}{3}\right)$ है।

10. (a,c,d) यदि $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$, जहाँ x_1, y_1 आदि परिमेय संख्याएँ है। तब $\Sigma x_1, \Sigma y_1$ भी परिमेय होगें अतः केन्द्रक के निर्देशांक $\left(\frac{\Sigma x_1}{3}, \frac{\Sigma y_1}{3}\right)$ परिमेय होगें

$AB = c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, c, परिमेय व अपरिमेय हो सकता हैं तथा यह $\sqrt{p}$ के रूप में अपरिमेय संख्या हो सकती है। अतः अन्तःकेन्द्र के निर्देशांक $\left(\frac{\Sigma a x_1}{\Sigma a}, \frac{\Sigma a y_1}{\Sigma a}\right)$ परिमेय हो भी सकते या है नहीं भी हो सकते हैं।

यदि (α, β) परिकेन्द्र तथा लम्बकेन्द्र हैं। α, β का मान α, β में दो रैखिक समीकरणों जिनके गुणांक परिमेय हैं, को हल करके ज्ञात कर सकते हैं। अतः α, β परिमेय संख्याएं होना चाहिये।

11. (b) माना तीसरा शीर्ष (x, y) हैं, तब

$\frac{x + 4 + (-2)}{3} = 2 \Rightarrow x = 4$

$\frac{y + 8 + 6}{3} = 7 \Rightarrow y = 7$

$\therefore$ तीसरा शीर्ष $(x, y) = (4, 7)$.

12. (b) दिये गये बिन्दु समरेखीय होंगे यदि

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sec^2\theta & 1 \\ \text{cosec}^2\theta & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

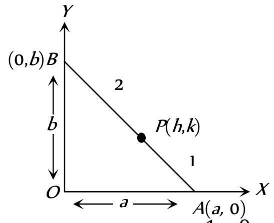
$$\Rightarrow 1(\sec^2\theta) + 1(\text{cosec}^2\theta) - 1(\text{cosec}^2\theta . \sec^2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

इसलिए बिन्दु θ, के किसी भी मान के लिए समरेखीय होंगे केवल $\theta = \frac{n\pi}{2}$ को छोड़कर, क्योंकि $\theta = \frac{n\pi}{2}$, $\sec^2\theta = \infty$ है।

13. (c) चित्रानुसार



$AP : PB = 1 : 2$, तो $h = \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2} = \frac{2a}{3}$

$\therefore a = \frac{3h}{2}$, इसी प्रकार $b = 3k$

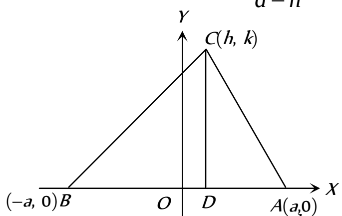
$\therefore OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\Rightarrow \left(\frac{3h}{2}\right)^2 + (3k)^2 = l^2$

अतः बिन्दु $P(h, k)$ का बिन्दुपथ $9x^2 + 36y^2 = 4l^2$.

14. (d) दिया है $\angle A - \angle B = \theta \Rightarrow \tan(A - B) = \tan\theta$ .....(i)

समकोण ΔCDA में, $\tan A = \frac{k}{a-h}$



इसी प्रकार ΔCDB में, $\tan B = \frac{k}{a+h}$

साथ ही, (i) से, $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B} = \tan\theta$

$\tan A$ व $\tan B$ का मान रखने पर,

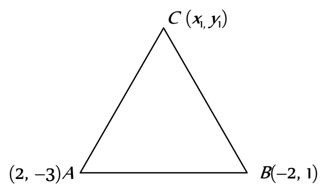
$h^2 - k^2 + 2hk\cot\theta = a^2$

अतः बिन्दुपथ $x^2 - y^2 + 2xy\cot\theta = a^2$ है।

15. (d) माना तीसरा शीर्ष (x_1, y_1) है तब

केन्द्रक $(G) \equiv \left(\frac{x_1 + 2 - 2}{3}, \frac{y_1 - 3 + 1}{3}\right)$

अर्थात् $G\left(\frac{x_1}{3}, \frac{y_1 - 2}{3}\right)$ है



दिया गया है कि केन्द्रक, रेखा $2x + 3y = 1$ पर स्थित है।

$\therefore 2\left(\frac{x_1}{3}\right) + 3\left(\frac{y_1 - 2}{3}\right) = 1$ अर्थात् $2x_1 + 3y_1 = 9$

(x_1, y_1) का बिन्दुपथ $2x + 3y = 9$ है।

* * *

समकोणीय कार्तीय निर्देशांक

SET Self Evaluation Test -14

1. यदि O मूल बिन्दु हो और किन्हीं दो बिन्दुओं Q_1 तथा Q_2 के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हों, तो $OQ_1.OQ_2 \cos Q_1OQ_2 =$ [IIT 1961]
   (a) $x_1x_2 - y_1y_2$ (b) $x_1y_1 - x_2y_2$
   (c) $x_1x_2 + y_1y_2$ (d) $x_1y_1 + x_2y_2$

2. यदि A (2, 2), B(– 4, – 4), C(5, – 8) किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक हों, तो C से गुजरने वाली माध्यिका की लम्बाई है [RPET 1988]
   (a) $\sqrt{65}$ (b) $\sqrt{117}$
   (c) $\sqrt{85}$ (d) $\sqrt{113}$

3. किसी समान्तर चतुर्भुज के शीर्षों के निर्देशांक (1, 3), (2, 0) व (5, 1) हों, तो इसका चौथा शीर्ष है [RPET 1988, 2001]
   (a) (3, 3)   (b) (4, 4)
   (c) (4, 0)   (d) (0, – 4)

4. यदि एक त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक पूर्णांक हों, तो त्रिभुज है [IIT 1975; MP PET 1983]
   (a) समबाहु   (b) कभी भी समबाहु नहीं
   (c) समद्विबाहु   (d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $ABCD$ एक चतुर्भुज है तथा क्रमित भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाया जाता है, तब चतुर्भुज $PQRS$ हमेशा होगा [Orissa JEE 2002]
   (a) वर्ग   (b) समान्तर चतुर्भुज
   (c) आयत   (d) समचतुर्भुज

6. यदि त्रिभुज के शीर्ष (2,1), (5,2) तथा (3,4) हों, तो उसका परिकेन्द्र होगा [IIT 1964]
   (a) $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{13}{4}, \frac{9}{4}\right)$
   (c) $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right)$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. एक स्तम्भ त्रिभुजाकार पार्क ABC के अन्दर ऊर्ध्वाधर खड़ा है। यदि पार्क के प्रत्येक कोने से स्तम्भ के शिखर का कोण समान हो, तो $\Delta\, ABC$ में स्तम्भ का पाद है [IIT Screening 2000]
   (a) केन्द्रक   (b) परिकेन्द्र
   (c) अन्तःकेन्द्र   (d) लम्बकेन्द्र

8. बिन्दु A बिन्दुओं (–5,1) तथा (3,5) को मिलाने वाली रेखा को k :1 के अनुपात में विभाजित करता है और बिन्दुओं B तथा C के निर्देशांक क्रमशः (1,5) तथा (7, –2) हैं। यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 2 इकाई हो, तो k = [IIT 1967; Kurukshetra CEE 1998]
   (a) 6,7   (b) 31/9,9
   (c) 7, 31/9   (d) 7, 9

9. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 5 है। यदि उसके दो शीर्ष (2,1), (3,–2) हों और तीसरा शीर्ष रेखा $y = x + 3$ पर हो, तो तीसरा शीर्ष है [IIT 1978; UPSEAT 1999]
   (a) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$
   (c) $\left(\frac{7}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$

10. तीन बिन्दु $P(3,1), Q(6,5)$ व $R(x,y)$ इस प्रकार हों कि कोण PRQ समकोण हैं एवं ΔRPQ का क्षेत्रफल = 5 है, तो इस प्रकार के संभव कुल बिन्दुओं R की संख्या होगी
    (a) 0   (b) 1
    (c) 2   (d) 4

11. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष $(a,b), (x_1,y_1)$ व (x_2,y_2), जहाँ a, x_1 व x_2 गुणोत्तर श्रेणी में हैं जिसका सार्वअनुपात r एवं b, y_1 व y_2 गुणोत्तर श्रेणी में हैं जिसका सार्वअनुपात s है, होगा
    (a) $ab(r-1)(s-1)(s-r)$
    (b) $\frac{1}{2}ab(r+1)(s+1)(s-r)$
    (c) $\frac{1}{2}ab(r-1)(s-1)(s-r)$
    (d) $ab(r+1)(s+1)(r-s)$

12. किसी निर्देशांक अक्ष को 135° से घुमाने पर प्राप्त नये निकाय मे बिन्दु P के निर्देशांक (4, – 3) प्राप्त होते हैं, तब वास्तविक (पूर्ववत्) निकाय में बिन्दु P के निर्देशांक हैं [EAMCET 2003]
    (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-7}{\sqrt{2}}\right)$
    (c) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-7}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

13. किसी त्रिभुज ABC के बिन्दु $A(a,0)$ व $B(-a,0)$ दो स्थिर बिन्दु हैं। शीर्ष C इस प्रकार गति करता है कि $\cot A + \cot B = \lambda$, जहाँ λ एक नियतांक है, तो बिन्दु C का बिन्दुपथ है [MP PET 1981]
    (a) $y\lambda = 2a$ (b) $ya = 2\lambda$
    (c) $y = \lambda a$ (d) इनमें से कोई नहीं

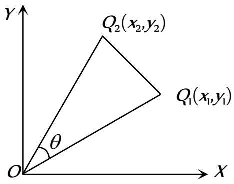
14. दो बिन्दु $A(0,4)$ व $B(0,-4)$ दिये गये हैं, तो $P(x,y)$ का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार गति करता है कि $|AP - BP| = 6$ है [IIT 1983; MP PET 1994]
    (a) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{9} = 1$ (b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$
    (c) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ (d) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

15. l लम्बाई का एक छड़ कमरे की दीवार तथा तल के सहारे रखी है। यदि छड़ तल पर फिसलना आरम्भ करती है, तब इसके मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है [MP PET 1996]
    (a) एक सरल रेखा   (b) एक वृत्त
    (c) एक परवलय   (d) एक दीर्घवृत्त

Answers and Solutions

(SET - 14)

1. त्रिभुज OQ_1Q_2 से cosine सूत्र का उपयोग करने पर,



$$Q_1Q_2^2 = OQ_1^2 + OQ_2^2 - 2OQ_1.OQ_2 \cos Q_1OQ_2$$

या $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$$= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2OQ_1.OQ_2 \cos\theta$$

या $x_1x_2 + y_1y_2 = OQ_1.OQ_2 \cos Q_1OQ_2$.

2. (c) अभीष्ट लम्बाई $= \sqrt{(5+1)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{85}$.

3. (b) $\frac{1+5}{2} = \frac{x+2}{2} \Rightarrow x = 4$ व $\frac{3+1}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 4$.

4. (b) माना $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ व (x_3, y_3) त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक हैं एवं $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ सभी पूर्णांक हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

= कुछ परिमेय संख्या क्योंकि सभी x व y पूर्णांक हैं एवं यदि त्रिभुज समबाहु है व a इसकी भुजा की लम्बाई है, तो

$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a$ एक धनात्मक पूर्णांक संख्या

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}.a.a \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

{∵ प्रत्येक कोण 60^o का होगा

जो कि अपरिमेय है क्योंकि a^2 धनात्मक पूर्णांक है। परन्तु पूर्व में हम यह गणना कर चुके हैं कि त्रिभुज का क्षेत्रफल परिमेय संख्या है। अतः यह विरोधाभास हुआ। इसलिए यदि त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक पूर्णांक हैं तो त्रिभुज समबाहु नहीं हो सकता है।

नोट : विद्यार्थी इस प्रश्न को तथ्य मानकर याद रखें।

5. (b) यह स्पष्ट है।

6. (b) माना परिकेन्द्र $O(x, y)$ व दिये गये बिन्दु $A(2, 1), B(5, 2), C(3, 4)$ हैं। अतः $OA^2 = OB^2 = OC^2$

$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2$ .....(i)

व $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$ .....(ii)

(i) व (ii) को हल करने पर, $x = \frac{13}{4}$ व $y = \frac{9}{4}$

ट्रिक : यदि (x, y) परिकेन्द्र हैं तो इसकी त्रिभुज के शीर्षों से दूरियाँ बराबर होंगी। अतः विकल्पों से निरीक्षण करने पर बिन्दु $\left(\frac{13}{4}, \frac{9}{4}\right)$, बिन्दुओं (2, 1), (5, 2) व (3, 4) से बराबर दूरी पर है।

7. (b) माना P पाद है, तब $PA = PB = PC$, अतः P परिकेन्द्र है।

8. (c) A बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{3k-5}{k+1}, \frac{5k+1}{k+1}\right)$ हैं एवं B व C के क्रमशः (1, 5) व (7, – 2) हैं।

अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3k-5}{k+1}(5+2) + 1\left(-2 - \frac{5k+1}{k+1}\right) + 7\left(\frac{5k+1}{k+1} - 5\right)\right] = \pm 2$$

$\Rightarrow 21k - 35 - 7k - 3 - 28 = \pm 4(k+1)$

$\Rightarrow k = 7$ या $\frac{31}{9}$.

9. (d) माना तीसरा शीर्ष (p, q) है। चूँकि यह रेखा $y = x + 3$ पर है, अतः $q = p + 3$ .....(i)

एवं त्रिभुज का क्षेत्रफल 5 है, अतः

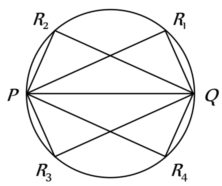
$\frac{1}{2}[2(-2-q) + 3(q-1) + p(1+2)] = \pm 5$

$\Rightarrow q + 3p - 7 = \pm 10$ .....(ii)

अतः (i) व (ii) को हल करने पर, $p = \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}$ व $q = \frac{13}{2}, \frac{3}{2}$.

अतः अभीष्ट शीर्ष $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ या $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ हैं।

10. (d) चित्र में सम्भावित चार बिन्दु दिखाये गये हैं।



11. (c) यहाँ $x_1 = ar, x_2 = ar^2, y_1 = bs, y_2 = bs^2$

अतः $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ ar & bs & 1 \\ ar^2 & bs^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & s & 1 \\ r^2 & s^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r-1 & s-1 & 0 \\ r^2-1 & s^2-1 & 0 \end{vmatrix}$$

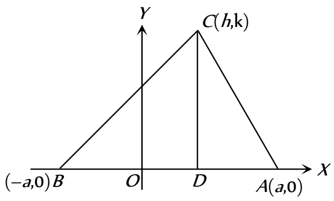
($R_2 - R_1, R_3 - R_1$, के प्रयोग से)

$$= \frac{1}{2}ab(r-1)(s-1)(s-r).$$

12. (d) $P = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

$= \left(4.\frac{-1}{\sqrt{2}} + 3.\frac{1}{\sqrt{2}}, 4.\frac{1}{\sqrt{2}} + 3.\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

13. (a) माना A व B के निर्देशांक $A(a, 0)$ व $B(-a, 0)$ एवं गतिशील बिन्दु $C(h,k)$ हैं।



चित्र में, $\cot A = \frac{a-h}{k}$ व $\cot B = \frac{a+h}{k}$

प्रतिबन्ध के अनुसार, $\cot A + \cot B = \lambda$

$\Rightarrow \frac{a-h}{k} + \frac{a+h}{k} = \lambda \Rightarrow \frac{2a}{k} = \lambda \Rightarrow k\lambda = 2a.$

अतः बिन्दुपथ $y\lambda = 2a$ है।

14. (d) P का बिन्दुपथ

$|\sqrt{x^2+y^2-8y+16} - \sqrt{x^2+y^2+8y+16}| = 6$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$x^2+y^2-2 = \sqrt{x^2+y^2+8y+16}\,\sqrt{x^2+y^2-8y+16}$

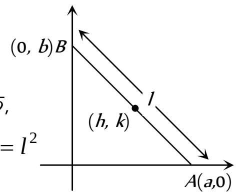
$\Rightarrow (x^2+y^2-2)^2 = (x^2+y^2+16)^2 - (8y)^2$

$\Rightarrow$ सरल करने पर, $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$.

15. (b) माना छड़ AB का मध्य बिन्दु (h, k) है। अतः

$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right) \equiv (h, k) \Rightarrow h = \frac{a}{2}, k = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow a = 2h, b = 2k$



किन्तु चित्र से हम जानते हैं कि,

$a^2 + b^2 = l^2 \Rightarrow 4h^2 + 4k^2 = l^2$

अतः बिन्दुपथ $x^2 + y^2 = \frac{l^2}{4}$ है। जो कि स्पष्टतः वृत्त है।

* * *