अध्याय

4 वर्ग तथा वर्गमूल

Square and Square Root

यदि किसी संख्या (x) को उसी संख्या से गुणा किया जाए, तो प्राप्त गुणनफल (x^2) को उस संख्या का 'वर्ग' तथा उस संख्या (x) को प्राप्त गुणनफल (x^2) का 'वर्गमूल' कहा जाता है। वर्गमूल को चिह्न '$\sqrt{\ }$' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

जैसे 8 *का वर्ग* $= 8 \times 8 = 64$; 64 *का वर्गमूल* $= \sqrt{8 \times 8} = 8$

वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ
Methods to Find Out Square Root

वर्गमूल ज्ञात करने की निम्न दो विधियाँ हैं

1. **गुणनखण्ड विधि** Factorization Method

यह विधि निम्न उदाहरण द्वारा समझी जा सकती है।

उदाहरण 900 का वर्गमूल क्या है?

हल

2	900
2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$\Rightarrow \quad 900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$\Rightarrow \sqrt{900} = \sqrt{2\times2\times3\times3\times5\times5} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

2. **भाग विधि** Division Method

यह विधि निम्न उदाहरण द्वारा समझी जा सकती है।

उदाहरण 99856 का वर्गमूल ज्ञात करो।

हल

	316
3	99856
	9
61	98
	61
626	3756
	3756
	×

अत: 99856 का वर्गमूल 316 है।

एक (पूर्ण वर्ग) दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना
To Find Out Square Root of a Decimal Number (Perfect Square)

किसी दशमलव संख्या को परिमेय संख्या के रूप में बदले बिना भी हम इसका वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं।

यह प्रक्रिया इस प्रकार की जाती है

चरण 1 दशमलव संख्या के पूर्णांकीय भाग में सामान्य रीति से दण्ड खींचिए।

चरण 2 दशमलव भाग में प्रथम दशमलव स्थान से आरम्भ कर अंकों के प्रत्येक युग्म पर दण्ड लगाइए।

चरण 3 अब सामान्य विभाजन विधि से वर्गमूल निकालना आरम्भ कीजिए।

चरण 4 जैसे ही पूर्णांकीय भाग समाप्त हो, भागफल में दशमलव बिन्दु स्थापित कर दीजिए।

चरण 5 शून्य शेषफल प्राप्त होते ही प्रक्रिया रोक दीजिए। इस स्थिति में, भागफल ही संख्या का वर्गमूल है।

कुछ महत्त्वपूर्ण संख्याओं के वर्ग

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
11	121	21	441
12	144	22	484
13	169	23	529
14	196	24	576
15	225	25	625
16	256	30	900
17	289	35	1225
18	324	40	1600
19	361	45	2025
20	400	50	2500

उदाहरण 37.0881 का वर्गमूल विभाजन विधि से ज्ञात करें।

हल

	6.09
6	37.08 81
	36
120	108
	0
1209	10881
	10881
	×

$\therefore \quad \sqrt{37.0881} = 6.09$

www.classroomnotes.in

महत्त्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के इकाई के स्थान पर 1 हो, तो वर्गमूल में इकाई के स्थान पर 1 या 9; 4 हो, तो 2 या 8; 5 हो, तो 5; 6 हो, तो 4 या 6 तथा 9 हो, तो 3 या 7 होगा।
- सम संख्या का वर्गमूल सम संख्या तथा विषम संख्या का वर्गमूल विषम संख्या होता है।
- जिस संख्या के अन्त में इकाई का अंक 2, 3, 7 या 8 हो, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होगी।

कुछ महत्त्वपूर्ण वर्गमूल

(i) $\sqrt{2} = 1.414$ (ii) $\sqrt{3} = 1.732$ (iii) $\sqrt{5} = 2.236$
(iv) $\sqrt{6} = 2.449$ (v) $\sqrt{7} = 2.646$ (vi) $\sqrt{10} = 3.162$

साधित उदाहरण

1. 5808 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा किया जाए कि वह पूर्ण वर्ग बन जाए?
(1) 2 (2) 11 (3) 7 (4) 3
(5) इनमें से कोई नहीं

हल *(4)* $5808 = 11^2 \times 4^2 \times 3$ अतः अभीष्ट संख्या = 3

2. $\sqrt{0.01 + \sqrt{0.0064}}$ बराबर है
(1) 0.003 (2) 0.03 (3) 0.3 (4) 0.0003
(5) इनमें से कोई नहीं

हल *(3)* $\sqrt{0.01 + \sqrt{0.0064}} = \sqrt{0.01 + 0.08} = \sqrt{0.09} = 0.3$

3. $(3 - \sqrt{5})$ का वर्गमूल है
(1) $(\sqrt{3} - 5^{1/4})$ (2) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
(3) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5} - 1)$
(5) इनमें से कोई नहीं

हल *(4)* $3 - \sqrt{5}$ का वर्गमूल $= \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{1}{2}(5 + 1 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5} - 1)$

4. दो धनात्मक संख्याओं का अन्तर 3 है, यदि उनके वर्गों का योग 369 हो, तो उन संख्याओं का योग है
(1) 81 (2) 33 (3) 27 (4) 25
(5) 27

हल *(5)* माना एक संख्या x, तब दूसरी संख्या $= x + 3$

तब, $x^2 + (x + 3)^2 = 369$

$x^2 + x^2 + 9 + 6x = 369$

$2x^2 + 6x - 360 = 0$

$x^2 + 3x - 180 = 0 \Rightarrow x^2 + 15x - 12x - 180 = 0$

$x(x + 15) - 12(x + 15) = 0$

$(x + 15)(x - 12) = 0$

$x = -15$ तथा 12

चूँकि विकल्पों में धनात्मक मान है।

तब $x = 12$

∴ दोनों संख्याओं का योग $= x + x + 3$

$= 12 + 12 + 3 = 27$

5. 5 अंकों की बड़ी-से-बड़ी वह कौन-सी संख्या है जो एक पूर्ण वर्ग है?
(1) 99999 (2) 99764 (3) 99976 (4) 99856
(5) 99786

हल *(4)* चूँकि 5 अंकों की बड़ी-से-बड़ी संख्या = 99999

	316
3	9 99 99
	9
61	99
	61
626	3899
	3756
	143

∴ अभीष्ट संख्या = 99999 − 143 = 99856

6. छात्रों के एक समूह में प्रत्येक छात्र से उतने ही पैसे लिए गए जितने इस समूह में छात्र थे। यदि कुल धन ₹ 5929 इकट्ठा हुआ हो, तो समूह में कितने छात्र थे?
(1) 67 (2) 76 (3) 87 (4) 57
(5) 77

हल *(5)* छात्रों की अभीष्ट संख्या $= \sqrt{5929} = 77$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि $\frac{x}{\sqrt{0.09}} = 12$ हो, तो x का मान क्या होगा?
(1) 0.3 (2) 3 (3) 36
(4) 3.6 (5) 6

2. $\sqrt{32} - \sqrt{128} + \sqrt{50}$ का मान क्या होगा?
(1) 1.414 (2) 4.141 (3) 1.732
(4) 2.000 (5) 2.141

3. $\sqrt{128} + \sqrt{160} - \sqrt{16}$ का मान क्या होगा?
(1) 17.96 (2) 16.66 (3) 19.96
(4) 18.86 (5) 17.76

4. $\sqrt{15612 + \sqrt{154 + \sqrt{225}}}$ बराबर है
(1) 135 (2) 155 (3) 105
(4) 120 (5) 125

www.classroomnotes.in

5. यदि $\sqrt{1+\frac{25}{144}} = 1+\frac{x}{12}$ हो, तो x का मान बराबर है
(1) 1 (2) 2 (3) 5
(4) 9 (5) 3

6. यदि $\sqrt{x} + 238 = 360$ का $\frac{4}{5}$ हो, तो x का मान है
(1) 5000 (2) 3025 (3) 3600
(4) 6400 (5) 2500

7. यदि $\frac{\sqrt{32.4}}{\sqrt{x}} = 2$ हो, तो x का मान है
(1) 9 (2) 0.9 (3) 0.09
(4) 9.9 (5) इनमें से कोई नहीं

8. $\sqrt{\frac{36.1}{102.4}}$ बराबर है
(1) $\frac{29}{32}$ (2) $\frac{19}{72}$ (3) $\frac{19}{32}$
(4) $\frac{29}{62}$ (5) $\frac{19}{23}$

9. $\sqrt{\frac{0.289}{0.00121}}$ बराबर है
(1) $\frac{170}{11}$ (2) $\frac{17}{110}$ (3) $\frac{17}{11}$
(4) $\frac{0.17}{11}$ (5) $\frac{170}{110}$

10. $\sqrt{\frac{0.081 \times 0.484}{0.0064 \times 6.25}}$ बराबर है
(1) 9 (2) 0.9 (3) 99
(4) 0.99 (5) 0.999

11. यदि $\sqrt{75.24 + x} = 8.71$ हो, तो x का मान है
(1) 0.6241 (2) 6.241 (3) 62.41
(4) 0.06241 (5) इनमें से कोई नहीं

12. $(\sqrt{72} - \sqrt{18}) \div \sqrt{12}$ का मान है
(1) $\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
(4) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (5) $\sqrt{5}$

13. $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}}$ का मान क्या होगा?
(1) $2^{63/64}$ (2) 5 (3) $5^{63/64}$
(4) $5^{64/63}$ (5) $5^{60/46}$

14. $\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+\sqrt{225}}}}}$ का मान है
(1) 10 (2) 8 (3) 6
(4) 2 (5) 4

15. 294 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा किया जाये कि इस प्रकार प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग हो?
(1) 2 (2) 3 (3) 6
(4) 24 (5) 12

16. 1470 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से भाग दिया जाये कि प्राप्त भागफल एक पूर्ण वर्ग हो?
(1) 6 (2) 5 (3) 15
(4) 30 (5) 25

17. 5 अंकों की बड़ी से बड़ी वह कौन-सी संख्या है, जो एक पूर्ण वर्ग हो?
(1) 99999 (2) 99764 (3) 99976
(4) 99856 (5) 99658

18. छात्रों के एक समूह में प्रत्येक छात्र से उतने ही पैसे लिए गए जितने इस समूह में छात्र थे। यदि कुल धन ₹ 59.29 एकत्र हुआ हो, तो समूह में कितने छात्र थे?
(1) 67 (2) 77 (3) 87
(4) 57 (5) 97

19. $0.\overline{4}$ का वर्गमूल है
(1) $0.\overline{8}$ (2) $0.\overline{6}$ (3) $0.\overline{7}$
(4) $0.\overline{9}$ (5) $0.\overline{45}$

20. $\sqrt{\frac{0.25}{0.0009}} \times \sqrt{\frac{0.09}{0.36}}$ बराबर है
(1) $\frac{5}{6}$ (2) $7\frac{1}{2}$ (3) $7\frac{1}{3}$
(4) $8\frac{1}{3}$ (5) $8\frac{1}{2}$

21. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ का वर्गमूल है
(1) 0.414 (2) 0.454 (3) 0.514
(4) 1.414 (5) 0.424

22. $(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})$ का वर्गमूल है
(1) 4 (2) $\sqrt{5}$ (3) $3\sqrt{5}$
(4) 2 (5) 3

23. वह कौन-सी न्यूनतम संख्या है जिसे 0.000326 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा?
(1) 0.000004 (2) 0.000002 (3) 0.04
(4) 0.02 (5) 0.00002

24. $\sqrt{\frac{0.00001225}{0.00005329}}$ बराबर है
(1) $\frac{25}{77}$ (2) $\frac{35}{73}$ (3) $\frac{35}{77}$
(4) $\frac{25}{73}$ (5) $\frac{36}{77}$

25. दिया है $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{8} + 2\sqrt{32} - 3\sqrt{128} + 4\sqrt{50}$ का मान है
(1) 8.484 (2) 8.526
(3) 8.426 (4) 8.876
(5) 8.884

26. $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान है
(1) 1 (2) 2 (3) 3
(4) 8 (5) 7

27. $\sqrt{(0.798)^2 + 0.404 \times 0.798 + (0.202)^2 + 1}$ बराबर है
(1) 0 (2) 2
(3) 1.596 (4) 0.404
(5) 0.414

28. यदि $\frac{50}{x} = \frac{x}{12\frac{1}{2}}$ हो, तो x का मान है
(1) $\frac{25}{2}$ (2) $\frac{4}{25}$ (3) 4
(4) 25 (5) 28

www.classroomnotes.in

29. किसी संख्या के वर्ग का $\frac{3}{5}$, 126.15 है। वह संख्या क्या है?

(1) 210.25 (2) 75.69 (3) 14.5
(4) 145 (5) 147

30. वह छोटी-से-छोटी संख्या जिसे 680621 में जोड़ने पर योग एक पूर्ण वर्ग बन जाता है, निम्न है

(1) 4 (2) 5 (3) 6
(4) 8 (5) 3

उत्तरमाला

1. (4)	**2.** (1)	**3.** (3)	**4.** (5)	**5.** (1)	**6.** (5)	**7.** (5)	**8.** (3)	**9.** (1)	**10.** (4)
11. (1)	**12.** (4)	**13.** (3)	**14.** (5)	**15.** (3)	**16.** (4)	**17.** (4)	**18.** (2)	**19.** (2)	**20.** (4)
21. (1)	**22.** (4)	**23.** (2)	**24.** (2)	**25.** (1)	**26.** (2)	**27.** (2)	**28.** (4)	**29.** (3)	**30.** (1)

संकेत एवं हल

1. $\frac{x}{\sqrt{0.09}} = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{0.3} = 12 \Rightarrow x = 3.6$

2. $\sqrt{32} - \sqrt{128} + \sqrt{50} = 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$

$= \sqrt{2} = 1.414$

6. $\sqrt{x} + 238 = 360 \times \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sqrt{x} + 238 = 288 \Rightarrow \sqrt{x} = 50 \Rightarrow x = 2500$

7. $\frac{\sqrt{32.4}}{\sqrt{x}} = 2$

$\Rightarrow \frac{32.4}{x} = 4 \Rightarrow x = \frac{32.4}{4} = 8.1$

9. $\sqrt{\frac{0.289}{0.00121}} = \sqrt{\frac{289 \times 100}{121}} = \frac{17 \times 10}{11} = \frac{170}{11}$

10. $\sqrt{\frac{0.081 \times 0.484}{0.0064 \times 6.25}} = \sqrt{\frac{81 \times 484}{64 \times 625}} = \frac{198}{200} = 0.99$

11. $\sqrt{75.24 + x} = 8.71$

$\Rightarrow 75.24 + x = 75.8641$

$\Rightarrow x = 75.8641 - 75.24$

$\Rightarrow x = 0.6241$

13. $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}}$

$= 5^{(2^6 - 1)/2^6} = 5^{(64-1)/64} = 5^{63/64}$

15. $\because 294 = 7 \times 7 \times 3 \times 2$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि 294 में 6 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जायेगा।

17. 5 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या = 99999

	316
3	9 99 99
	9
61	99
	61
626	38 99
	37 56
	143

∴ अभीष्ट संख्या = 99999 − 143 = 99856

18. माना छात्रों की संख्या $= x$

प्रत्येक छात्र द्वारा दिए गए पैसे $= x$

∴ कुल धन = ₹ 59.29

$\Rightarrow x^2 = 5929$ पैसे

$\Rightarrow x = \sqrt{5929} = 77$

19. $\sqrt{0.\overline{4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$

20. $\sqrt{\frac{0.25}{0.0009}} \times \sqrt{\frac{0.09}{0.36}} = \sqrt{\frac{2500}{9}} \times \sqrt{\frac{9}{36}}$

$= \frac{50}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$

21. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}-1)^2$

$= (1.414 - 1)^2 = (0.414)^2$

∴ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ का वर्गमूल = 0.414

22. $\sqrt{(7 + 3\sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})} = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2}$

$= \sqrt{49 - 45}$

$= \sqrt{4} = 2$

24. $\sqrt{\frac{0.00001225}{0.00005329}} = \sqrt{\frac{1225}{5329}} = \frac{35}{73}$

29. माना संख्या x है।

∴ $x^2 \times \frac{3}{5} = 126.15$

$\Rightarrow x^2 = \frac{126.15 \times 5}{3} = 210.25$

$\Rightarrow x = \sqrt{210.25} = 14.5$

30.

	825
8	68 06 21
	64
162	406
	324
1645	82 21
	8225
	4

∴ अभीष्ट संख्या = 4

www.classroomnotes.in