JEE MAIN - 2017 (Paper 1)

1. જો S જેના માટે નીચેની સુરેખ સમીકરણ સંહતિને ઉકેલ ના હોય તેવી ભિન્ન કિંમતો b નો ગણ હોય, તો

$x + y + z = 1$

$x + ay + z = 1$

$ax + by + z = 0$

S એ

(A) ખાલી ગણ છે

(B) અનંત ગણ છે

(C) બે કે તેથી વધુ ઘટકોવાળો સાન્ત ગણ છે

(D) એકાકી છે

ઉકેલ : ઉકેલ ન હોવાથી શ્રેણિકનો વ્યસ્ત મળે નહીં

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 0 \\ 1-a & a-b & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad R_1 \to R_1 - R_2,\ R_2 \to R_2 - R_3$$

$\therefore \ -(1 - a)^2 = 0$

$\therefore \ a = 1$

$a = 1$ માટે પહેલાં બે સમીકરણ એક જ છે, એટલે કે $x + y + z = 1$

હવે $x + by + z = 0$ નો વિચાર કરો.

$b = 1$ હોય તો ઉકેલ ન મળે. તેથી, $S = \{1\}$

જવાબ (D)

2. આપેલ વિધાન $(p \to q) \to [(\sim p \to q) \to q]$

(A) નિત્ય સત્ય છે.

(B) $\sim p \to q$ ને સમાન છે.

(C) $p \to \sim q$ ને સમાન છે.

(D) નિત્ય મિથ્યા છે.

ઉકેલ :

p	q	$p \to q$	$(\sim p \to q)$	$(\sim p \to q) \to q$	$(p \to q) \to [(\sim p \to q) \to q]$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T

$\therefore$ નિત્ય સત્ય છે.

બીજી રીત :

$(p' + q) \to (p + q)' + q$

$= pq' + p'q' + q$

$= q'(p + p') + q$

$= q' + q = t$

જવાબ (A)

3. જો $5(tan^2 x - cos^2 x) = 2cos\ 2x + 9$, તો $cos 4x$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $-\frac{7}{9}$

ઉકેલ : $5\ tan^2x = 5\ cos^2x + 2\ (2cos^2x - 1) + 9 = 9\ cos^2x + 7$

$\therefore \quad 5\ sec^2x - 5 = 9\ cos^2x + 7$

ધારો કે $cos^2x = t$

$\therefore \quad \frac{5}{t} = 9t + 12$

$\therefore \quad 9t^2 + 12t - 5 = 0.$

$\therefore \quad (3t - 1)(3t + 5) = 0$

$\therefore \quad t = \frac{1}{3}$, કારણ કે $t \neq -\frac{5}{3}$ $\left(cos^2 x \neq -\frac{5}{3}\right)$

$cos^2x = \frac{1}{3}.$

$\therefore\ cos\ 2x = 2cos^2x - 1$

$= -\frac{1}{3}$

$\therefore\ cos\ 4x = 2cos^2\ 2x - 1$

$= \frac{2}{9} - 1$

$= -\frac{7}{9}$ **જવાબ (D)**

4. ત્રણ ઘટના A, B અને C માટે P (A તથા B પૈકી એક જ ઘટના બને છે) = P(B અને C પૈકી એક જ ઘટના બને છે) = P(C અને A પૈકી એક જ ઘટના બને છે) = $\frac{1}{4}$ અને P(ત્રણેય ઘટના એકીસાથે ઉદ્ભવે છે.) = $\frac{1}{16}$. તો ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે તેવી સંભાવના

(A) $\frac{7}{32}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) $\frac{7}{64}$ (D) $\frac{3}{16}$

ઉકેલ : $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(B) + P(C) - 2P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(C) + P(A) - 2P(A \cap C) = \frac{1}{4}$

સરવાળો કરતાં, $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) = \frac{3}{8}$

હવે $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{16}$

$\therefore \quad P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$ **જવાબ (B)**

5. સંકર સંખ્યા ω માટે $2\omega + 1 = z$, જ્યાં $z = \sqrt{-3}$. જો

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\omega^2 - 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^7 \end{vmatrix} = 3k, \text{ તો } k = \ ....$$

(A) $-z$ (B) z (C) -1 (D) 1

ઉકેલ : $2\omega + 1 = z$, $z = \sqrt{-3}$

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

ω એ 1 નું સંકર ઘનમૂળ છે.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \qquad C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 3(\omega^2 - \omega^4)$$

$$= 3(\omega^2 - \omega)$$

$$= 3\left[\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) - \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]$$

$$= -3\sqrt{3}\, i$$

$$= -3z$$

તેથી, $3k = -3z$

$\therefore \quad k = -z$ **જવાબ (A)**

6. પૂર્ણાંક k માટે $(k, -3k)$, $(5, k)$ અને $(-k, 2)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 28 ચોરસ એકમ છે. આ ત્રિકોણનું લંબકેન્દ્ર .... છે.

(A) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ (C) $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ (D) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & -3k & 1 \\ 5 & k & 1 \\ -k & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = 28$

$$\begin{vmatrix} k-5 & -4k & 0 \\ 5+k & k-2 & 0 \\ -k & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm 56 \qquad (R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3)$$

$(k^2 - 7k + 10) + 4k^2 + 20k = \pm 56$

$5k^2 + 13k + 10 = \pm 56$

$5k^2 + 13k - 46 = 0$ | $5k^2 + 13k + 66 = 0$

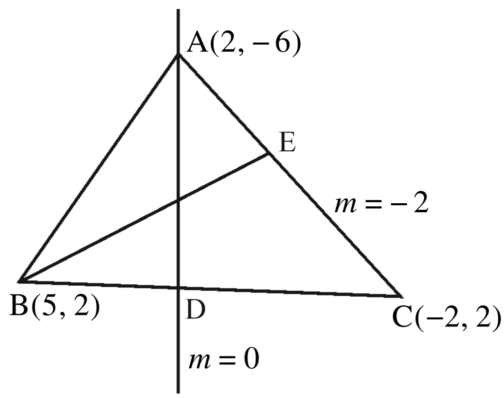
$5k^2 + 13k - 46 = 0$ | $\Delta < 0$. વાસ્તવિક બીજ ન મળે.

$\therefore (k - 2)(5k + 23) = 0$

$\therefore k = 2$ અથવા -4.6

પરંતુ k પૂર્ણાંક છે. તેથી, $k = 2$

$k = 2$ માટે



$\overleftrightarrow{BC}$ X-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore \quad \overleftrightarrow{AD}$ નું સમીકરણ $x = 2$ છે. ...(i)

$\overleftrightarrow{BE}$ નું સમીકરણ મેળવીએ.

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$ ($\overleftrightarrow{AC}$ નો ઢાળ = –2)

$2y - 4 = x - 5$

$x - 2y - 1 = 0$ ...(ii)

(i) તથા (ii) ઉકેલતાં, $2y = 1$

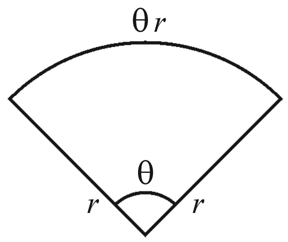
$y = \frac{1}{2}$

લંબકેન્દ્ર $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ છે. **જવાબ (D)**

7. વૃત્તાંશ આકારની ફૂલોની ક્યારીને વાડ કરવા માટે 20 મીટર તાર ઉપલબ્ધ છે. ક્યારીનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ .... સેમી છે.

(A) 12.5 (B) 10 (C) 25 (D) 30

ઉકેલ :



$2r + \theta r = 20$ $(l = \theta r)$ ...(i)

A = ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}r^2\theta$ ...(ii)

$\therefore$ A = $\frac{r^2}{2}\left(\frac{20-2r}{r}\right) = r(10 - r)$

$\therefore$ A = $10r - r^2$

મહત્તમ ક્ષેત્રફળ માટે,

$\frac{dA}{dr} = 10 - 2r = 0$. તેથી, $r = 5$

$\frac{d^2A}{dr^2} = -2 < 0$

$r = 5$ માટે ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે.

હવે, $10 + 5\theta = 20 \Rightarrow \theta = 2$ (રેડિયન)

ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}(5)^2 \cdot 2 = 25$ મી^{2}

બીજી રીત : $ax^2 + bx + c$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $\frac{4ac - b^2}{4a}$ છે. $(a < 0)$

$\therefore$ $10r - r^2$નું મહત્તમ મૂલ્ય = $\frac{4.0 - 100}{4(-1)} = 25$ મી^{2}

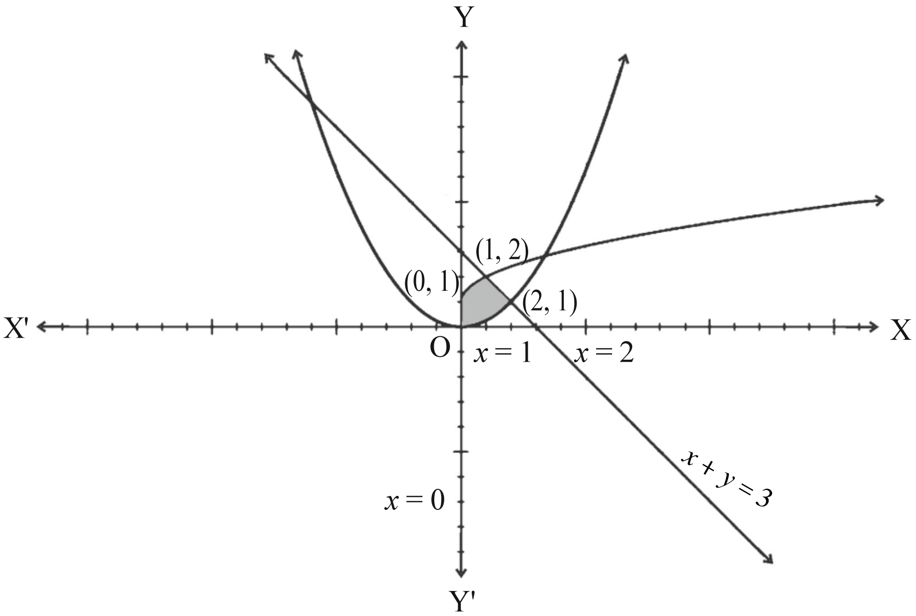
ત્રીજી રીત : $r(10 - r)$ મહત્તમ થવા માટે $r = 10 - r$ (કારણ કે $r + 10 - r = 10$ = અચળ છે)

$\therefore$ $r = 5$ માટે મહત્તમ મળે. **જવાબ (C)**

8. પ્રદેશ $\{(x, y) : x \ge 0, x + y \le 3, x^2 \le 4y$ અને $y \le 1 + \sqrt{x}\}$નું ક્ષેત્રફળ .... છે. (ચોરસ એકમમાં)

(A) $\frac{59}{12}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$

ઉકેલ :



$x + y = 3$ અને $x^2 = 4y$ ના છેદગણ માટે,

$x^2 = 4(3 - x)$

$\therefore \quad x^2 + 4x - 12 = 0$

$\therefore \quad (x + 6)(x - 2) = 0$

$\therefore \quad x = 2$ અથવા -6

$\therefore$ છેદબિંદુઓ $(2, 1), (-6, 9)$ છે. પરંતુ $x \geq 0$.

$y = \sqrt{x} + 1$ અને $x + y = 3$ નાં છેદબિંદુઓ માટે,

$x + \sqrt{x} + 1 = 3$

$\therefore \quad x = (2 - x)^2$

$\therefore \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$\therefore \quad x = 4$ અથવા 1, $y = -1$ અથવા 2

$\therefore \quad (1, 2)$ એક છેદબિંદુ છે. વળી, $x \neq 4$.

છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ $= \int_0^1 \left(\sqrt{x} + 1 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left((3 - x) - \frac{x^2}{4}\right) dx$

$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + x - \frac{x^3}{12}\right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_1^2$

$= \left[\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{12}\right] + \left[\frac{10}{3} - \frac{29}{12}\right]$

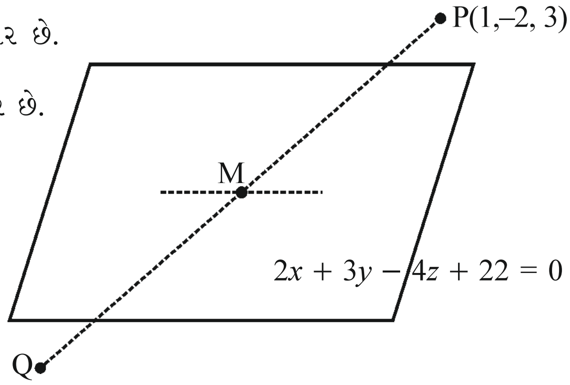
$= \frac{5}{2}$

જવાબ (D)

9. બિંદુ $P(1, -2, 3)$નું $\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ને સમાંતર $2x + 3y - 4z + 22 = 0$ માં પ્રતિબિંબ Q છે. તો PQ = ...

(A) $3\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{42}$ (C) $\sqrt{42}$ (D) $6\sqrt{5}$

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{PQ}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{5}$ એ આપેલ રેખાને સમાંતર છે.



ધારો કે છેદબિંદુ M $(\lambda + 1, 4\lambda - 2, 5\lambda + 3)$ સમતલ પર છે.

તે સમતલ $2x + 3y - 4z + 22 = 0$ પર છે.

$2(\lambda + 1) + 3(4\lambda - 2) - 4(5\lambda + 3) + 22 = 0$

$\therefore \quad -6\lambda + 6 = 0$. આથી, $\lambda = 1$

$\therefore \quad M = (2, 2, 8)$

$\therefore \quad PM = \sqrt{1+16+25} = \sqrt{42}$

$\therefore \quad PQ = 2\sqrt{42}$

જવાબ **(B)**

10. જો $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ માટે $tan^{-1}\left(\frac{6x\sqrt{x}}{1-9x^3}\right)$ નો વિકલિત $\sqrt{x} \cdot g(x)$ હોય, તો $g(x) =$ ....

(A) $\frac{9}{1+9x^3}$ (B) $\frac{3x\sqrt{x}}{1+9x^3}$ (C) $\frac{3x}{1-9x^3}$ (D) $\frac{3}{1+9x^3}$

ઉકેલ : $f(x) = tan^{-1}\left(\frac{2(3x\sqrt{x})}{1-(3x\sqrt{x})^2}\right)$

$f(x) = 2tan^{-1}(3x\sqrt{x})$, કારણ કે $x\sqrt{x} > 0$ અને $9x^3 < \frac{9}{64} < 1$ કારણ કે $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

$f'(x) = \frac{9\sqrt{x}}{1+9x^3} = \sqrt{x}\, g(x)$

$g(x) = \frac{9}{1+9x^3}$

જવાબ **(A)**

11. જો $(2 + sinx)\frac{dy}{dx} + (y + 1)\, cosx = 0$ અને $y(0) = 1$, તો $y\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ ....

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

ઉકેલ : $(2 + sinx)\frac{dy}{dx} + (y + 1)\, cosx = 0$

$y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

$\frac{1}{y+1}\, dy + \frac{cos\, x}{2+sin\, x}\, dx = 0$

$\log|y + 1| + \log(2 + sin\, x) = \log c$

$(y + 1)(2 + sin\, x) = c$

Let $x = 0$, $y = 1$.

$\therefore \quad (1 + 1) \cdot 2 = c$. આથી, $c = 4$

હવે, $(y + 1)(2 + sin\, x) = 4$

$x = \frac{\pi}{2}$ માટે,

$(y + 1)(2 + 1) = 4$

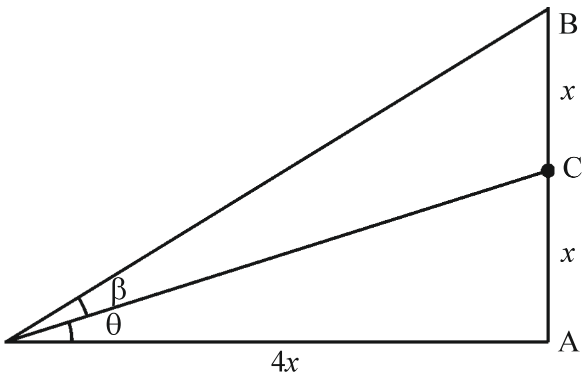
$y + 1 = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ **જવાબ (A)**

12. શિરોલંબ ટાવર $\overline{AB}$નો છેડો A જમીન પર છે. C એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ છે. P જમીન પર એવું બિંદુ છે કે જેથી AP = 2AB. જો $m\angle BPC = \beta$, તો $tan\,\beta$ = ...

(A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$

ઉકેલ : ધારો કે AB = $2x$. આથી, AP = $4x$



$tan\theta = \frac{1}{4}$

$tan(\theta + \beta) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{\frac{1}{4} + tan\beta}{1 - \frac{1}{4}tan\beta} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad 2(1 + 4tan\beta) = 4 - tan\beta$

ઉકેલતાં, $tan\beta = \frac{2}{9}$ **જવાબ (C)**

13. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, તો $adj\,(3A^2 + 12A)$ = ...

(A) $\begin{bmatrix} 72 & -84 \\ -63 & 51 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 51 & 63 \\ 84 & 72 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 51 & 84 \\ 63 & 72 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 72 & -63 \\ -84 & 51 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2) - 12$

$f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$

$\because$ A માટે $f(A) = O$

$\therefore \quad A^2 - 3A - 10I = O$

$A^2 - 3A = 10I$

$3A^2 - 9A = 30I$

$3A^2 + 12A = 30I + 21A$

$= \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 & -63 \\ -84 & 21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 72 & -63 \\ -84 & 51 \end{bmatrix}$

$adj\,(3A^2 + 12A) = \begin{bmatrix} 51 & 63 \\ 84 & 72 \end{bmatrix}$

બીજી રીત : જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

તો $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\,I = O$

$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ માટે,

$A^2 - 3A - 10\,I = O$

$A^2 = 3A + 10\,I$

$3A^2 = 9A + 30\,I$

$3A^2 + 12A = 21A + 30\,I$

$= \begin{bmatrix} 42 & -63 \\ -84 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 72 & -63 \\ -84 & 51 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad adj\,A\,(3A^2 + 12A) = \begin{bmatrix} 51 & 63 \\ 84 & 72 \end{bmatrix}$

જવાબ (B)

14. જો ત્રણ ધન સંખ્યાઓ a, b, c માટે $9(25a^2 + b^2) + 25(c^2 - 3ac) = 15b(3a + c)$. તો,

(A) b, c તથા a ગુ. શ્રે.માં છે (B) b, c અને a સ. શ્રે.માં છે

(C) a, b તથા c સ. શ્રે.માં છે (D) a, b અને c ગુ. શ્રે.માં છે

ઉકેલ : $9(25a^2 + b^2) + 25(c^2 - 3ac) = 15b(3a + c)$

$\therefore \quad (15a)^2 + (3b)^2 + (5c)^2 - 45ab - 15bc - 75ac = 0$

$\therefore \quad (15a - 3b)^2 + (3b - 5c)^2 + (15a - 5c)^2 = 0$

$\therefore \quad 15a - 3b = 0$ તથા $3b - 5c = 0$ તથા $15a - 5c = 0$

$\therefore \quad 15a = 3b = 5c$

ધારો કે $\frac{a}{1} = \frac{b}{5} = \frac{c}{3} = k$. આથી $a = k$, $c = 3k$, $b = 5k$

$\therefore \quad b, c, a$ સ. શ્રે.માં છે **જવાબ (B)**

15. $(1, -1, -1)$માંથી પસાર થતા તથા $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{3}$ અને $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+7}{-1}$ રેખાઓને લંબ અભિલંબવાળા સમતલનું $(1, 3, -7)$થી અંતર .... છે.

(A) $\frac{20}{\sqrt{74}}$ (B) $\frac{10}{\sqrt{83}}$ (C) $\frac{5}{\sqrt{83}}$ (D) $\frac{10}{\sqrt{74}}$

ઉકેલ : ધારો કે સમતલનું સમીકરણ

$a(x - 1) + b(y + 1) + c(z + 1) = 0.$

તેનો અભિલંબ આપેલ રેખાઓને લંબ છે.

$\therefore \quad a - 2b + 3c = 0$ અને $2a - b - c = 0$

અથવા $(a, b, c) = (1, -2, 3) \times (2, -1, -1)$

ઉકેલતાં, $a : b : c = 5 : 7 : 3$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $5x + 7y + 3z + 5 = 0$ છે.

$(1, 3, -7)$નું સમતલથી લંબ અંતર $= \frac{5 + 21 - 21 + 5}{\sqrt{83}} = \frac{10}{\sqrt{83}}$ **જવાબ (B)**

16. ધારો કે $I_n = \int tan^n x \, dx$, $(n > 1)$. જો $I_4 + I_6 = a \, tan^5 x + bx^5 + c$, (જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે) તો ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) = ...

(A) $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$

ઉકેલ : $I_n = \int tan^n x \, dx$, $n > 1$

$I_4 + I_6 = \int (tan^4 x + tan^6 x) \, dx$

$= \int tan^4 x \, sec^2 x dx$

ધારો કે $tanx = t$

$\therefore \quad sec^2x\, dx = dt$

$\therefore \quad I_4 + I_6 = \int t^4 dt$

$= \frac{t^5}{5} + c$

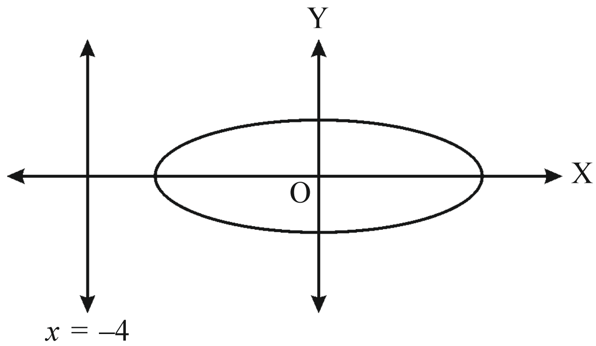
$= \frac{1}{5} tan^5x + c$

$a = \frac{1}{5}, b = 0$ **જવાબ (B)**

17. ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{1}{2}$ છે. તેની એક નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -4$ હોય તો $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $2y - x = 2$ (B) $4x - 2y = 1$ (C) $4x + 2y = 7$ (D) $x + 2y = 4$

ઉકેલ : $x = -4$ એક નિયામિકા છે.



$e = \frac{1}{2}$ ઉત્કેન્દ્રતા છે. તેથી, $\frac{-a}{e} = -4$

$\therefore \quad a = 4 \times e = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

$\therefore \quad a = 2$

હવે, $b^2 = a^2(1 - e^2) = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3$

ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ છે.

$\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ના અભિલંબનું સમીકરણ

$\frac{x-1}{\frac{1}{4}} = \frac{y - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2\times 3}}$. એટલે કે $4x - 2y - 1 = 0$ **જવાબ (B)**

18. એક અતિવલય $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$માંથી પસાર થાય છે અને તેની નાભિઓ $(\pm 2, 0)$ છે. P આગળનો સ્પર્શક ....માંથી પણ પસાર થાય છે.

(A) $(3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ (B) $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ (C) $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ (D) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

ઉકેલ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ અતિવલયનું સમીકરણ છે. $ae = 2$ કારણ કે નાભિ $(\pm 2, 0)$ છે.

$a^2 + b^2 = 4$ $(a^2 + b^2 = a^2e^2)$

તથા $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$, કારણ કે $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ અતિવલય પર છે.

$\frac{2}{4 - b^2} - \frac{3}{b^2} = 1$

$\therefore \quad 2b^2 - 12 + 3b^2 = 4b^2 - b^4$

$\therefore \quad b^4 + b^2 - 12 = 0$

$\therefore \quad (b^2 + 4)(b^2 - 3) = 0$

$\therefore \quad b^2 = 3$ $\qquad (b^2 \neq -4)$

$\therefore \quad a^2 = 1$ $\qquad (a^2 + b^2 = 4)$

$\therefore \quad x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

$\therefore$ $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$ છે. $\qquad \left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1\right)$

સ્પષ્ટ છે કે તે $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ (B)**

19. વિધેય $f : R \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, ...

(A) સામાન્ય વિધેય છે.

(B) એકએક છે, વ્યાપ્ત નથી.

(C) વ્યાપ્ત છે, એકએક નથી.

(D) એકએક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 1 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1, -1$$

$\therefore$ $f'(x)$ ભિન્ન અંતરાલોમાં ચિહ્ન બદલે છે.

f' એ $(-\infty, -1)$માં ઋણ છે. $(-1, 1)$માં ધન છે તથા $(1, \infty)$માં ઋણ છે.

$\therefore$ f એકએક નથી.

ઉદાહરણ તરીકે $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$. જો $f(x_1) = f(x_2)$ તો $x_1x_2 = 1$.

ધારો કે $y = \frac{x}{1+x^2}$

$yx^2 - x + y = 0$

$y \neq 0$ માટે,

$D = 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$. જો $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$ તો $y \in R_f$.

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\therefore \quad y \in R_f$

$\therefore$ વિસ્તાર : $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત છે અને એકએક નથી. **જવાબ (C)**

20. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x - \cos x}{(\pi - 2x)^3}$ = ...

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x - \cos x}{(\pi - 2x)^3}$

ધારો કે $\frac{\pi}{2} - x = t$

માંગેલ લક્ષ $= \lim_{t \to 0} \dfrac{\tan t - \sin t}{8t^3}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}}{8t^3 \cdot \cos t}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} \dfrac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\frac{t^2}{4} \cdot 16} \cdot \frac{1}{1}$

$= \frac{1}{16}$ **જવાબ (B)**

21. ધારો કે $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$. ધારો કે $\vec{c}$ એવો છે કે જેથી $|\vec{c} - \vec{a}| = 3$, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = 3$ તથા $\vec{c}$ અને $\vec{a} \times \vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 30^o છે. તો $\vec{a} \cdot \vec{c}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{25}{8}$ (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{1}{8}$

ઉકેલ : $\vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

હવે, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = 3$

$\therefore \ |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \sin 30^o = 3$

$\therefore \ |\vec{c}| = 2$ $(|\vec{a} \times \vec{b}| = 3)$

હવે, $|\vec{c} - \vec{a}| = 3$

$\therefore \ |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{c}) = 9$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \dfrac{4 + 9 - 9}{2} = 2$ $(|\vec{a}| = 3, |\vec{c}| = 2)$ **જવાબ (B)**

22. જ્યાં વક્ર $y(x - 2)(x - 3) = x + 6$ એ Y-અક્ષને છેદે છે ત્યાં આગળનો તેનો અભિલંબ .... બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(A) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

ઉકેલ : $y(x-2)(x-3) = x+6$

Y-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુ માટે $x = 0$.

$\therefore\ 6y = 6$. તેથી, $y = 1$.

વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx}(x-2)(x-3) + y(2x-5) = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(6) + 1(-5) = 1 \qquad (x = 0, y = 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{6} = 1$$

તેથી (0, 1) આગળ અભિલંબનો ઢાળ = –1

(0, 1) આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - 1 = -1(x - 0)$

$x + y - 1 = 0$ (i)

રેખા (i) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ (B)**

23. {0, 1, 2, 3,..., 10}માંથી બે ભિન્ન પૂર્ણાંક પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તેમનો સરવાળો તથા નિરપેક્ષ તફાવત 4નો ગુણિત હોય તેની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{6}{55}$ (B) $\frac{12}{55}$ (C) $\frac{14}{45}$ (D) $\frac{7}{55}$

ઉકેલ : 11 પૂર્ણાંકોમાંથી બે પૂર્ણાંક પસંદ કરવાના પ્રકારોની સંખ્યા $= {}^{11}C_2$

$= 55$

અનુકૂળ ઘટકોની સંખ્યા (0, 4), (0, 8), (4, 8), (2, 6), (2, 10), (6, 10)

માંગેલી સંભાવના $= \frac{6}{55}$ **જવાબ (A)**

24. એક માણસ X ને 7 મિત્રો છે. તે પૈકી 4 સ્ત્રી અને 3 પુરુષ છે. તેની પત્ની Yને પણ 7 મિત્રો છે. તે પૈકી 3 સ્ત્રીઓ છે અને 4 પુરુષ છે. X અને Yને કોઈ સામાન્ય મિત્ર નથી. X અને Y એ Xના 3 મિત્રો તથા Yના 3 મિત્રોને આમંત્રણ આપીને પાર્ટી કરી શકે જેથી તેમાં 3 પુરુષ અને 3 સ્ત્રી આવે તેવા પ્રકારોની સંખ્યા .... છે.

(A) 485 (B) 468 (C) 369 (D) 484

ઉકેલ :

X(4 L 3 G)	Y(3 L 4 G)
3 L 0 G	0 L 3 G
2 L 1 G	1 L 2 G
1 L 2 G	2 L 1 G
0 L 3 G	3 L 0 G

માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા $= {}^4C_3 \cdot {}^4C_3 + ({}^4C_2 \cdot {}^3C_1)^2 + ({}^4C_1 \cdot {}^3C_2)^2 + ({}^3C_3)^2$

$= 16 + 324 + 144 + 1$

$= 485$ **જવાબ (A)**

25. $({}^{21}C_1 - {}^{10}C_1) + ({}^{21}C_2 - {}^{10}C_2) + ({}^{21}C_3 - {}^{10}C_3) + ({}^{21}C_4 - {}^{10}C_4) + ... + ({}^{21}C_{10} - {}^{10}C_{10})$નું મૂલ્ય ....

(A) $2^{21} - 2^{11}$ (B) $2^{21} - 2^{10}$ (C) $2^{20} - 2^9$ (D) $2^{20} - 2^{10}$

ઉકેલ : ${}^{21}C_1 + {}^{21}C_2 + ... + {}^{21}C_{10} = \frac{1}{2}\{{}^{21}C_0 + {}^{21}C_1 + ... + {}^{21}C_{21}\} - 1$

$= 2^{20} - 1$

${}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 + ... + {}^{10}C_{10} = 2^{10} - 1$

$\therefore$ માંગેલ સરવાળો $= (2^{20} - 1) - (2^{10} - 1)$

$= 2^{20} - 2^{10}$ **જવાબ (D)**

26. એક પેટીમાં 15 લીલા અને10 પીળા દડા છે. તે પૈકી 10 દડા યાદચ્છિક રીતે એક પછી એક પૂરવણી સહિત પસંદ કર્યા. લીલા દડાની સંખ્યાનું વિચરણ .... છે.

(A) $\frac{12}{5}$ (B) 6 (C) 4 (D) $\frac{6}{25}$

ઉકેલ : $n = 10$

p(લીલા દડાની પસંદગી) $= \frac{15}{25}$

$\therefore \quad p = \frac{3}{5}, q = \frac{2}{5}$

$V(x) = npq$

$= 10 \cdot \frac{6}{25} = \frac{12}{5}$ **જવાબ (A)**

27. $a, b, c \in R$. જો $f(x) = ax^2 + bx + c$ માટે $a + b + c = 3$ અને

$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy, \forall x, y \in R$, તો $\sum_{n=1}^{10} f(n) =$ ....

(A) 330 (B) 165 (C) 190 (D) 255

ઉકેલ : $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$

વળી, $f(1) = 3$ (કારણ કે $a + b + c = 3$)

$x = y = 1$ લેતાં, $f(2) = 2f(1) + 1 = 7$

ખરેખર તો $f(n + 1) = f(n) + f(1) + n = f(n) + n + 3$

$\therefore \quad f(n + 1) - f(n) = n + 3$

$\therefore \quad f(2) - f(1) = 4$. તેથી, $f(2) = 7$

$f(3) - f(2) = 5$

$f(4) - f(3) = 6$

. . . .

. . . .

$f(n) - f(n-1) = n + 2$

$\therefore$ ઉમેરતાં $f(n) - f(1) = 4 + 5 + 6 + ... + n + 2$

$f(n) = 3 + 4 + 5 + ... + (n + 2)$ $\qquad (f(1) = 3)$

$= \frac{1}{2}n(n + 5)$

$$\therefore \quad \sum^{n} f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{5n(n+1)}{4}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{10} f(n) = \frac{(10)(11)(21)}{12} + \frac{5(10)(11)}{4}$$

$$= \frac{55}{2}(7 + 5) = 330$$

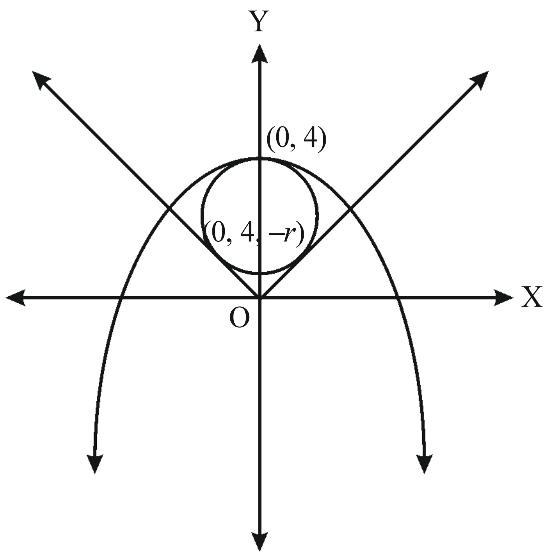
જવાબ (A)

28. $y = 4 - x^2$ તથા $y = |x|$ ને સ્પર્શતા ન્યૂનતમ ક્ષેત્રફળવાળા વર્તુળની ત્રિજ્યા .... છે.

(A) $2(\sqrt{2}+1)$ (B) $2(\sqrt{2}-1)$ (C) $4(\sqrt{2}-1)$ (D) $4(\sqrt{2}+1)$

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વર્તુળનું કેન્દ્ર Y-અક્ષ પર છે.

ધારો કે કેન્દ્ર : $(0, 4 - r)$



$\therefore$ $(0, 4 - r)$માંથી $x - y = 0$ પરના લંબની લંબાઈ $r = \left|\frac{0-4+r}{\sqrt{2}}\right|$.

$\therefore \quad r - 4 = \pm\sqrt{2}\,r$

$\therefore \quad r = \dfrac{4}{1 \pm \sqrt{2}}, r \neq \dfrac{4}{1-\sqrt{2}}$

$\therefore \quad r = 4(\sqrt{2} - 1)$ **જવાબ (C)**

29. ધન પૂર્ણાંક n માટે દ્વિઘાત સમીકરણ $x(x + 1) + (x + 1)(x + 2) +...+ (x + \overline{n-1})(x + n) = 10n$ ને બે ક્રમિક પૂર્ણાંક ઉકેલ હોય, તો n = ...

(A) 12 (B) 9 (C) 10 (D) 11

ઉકેલ : સમીકરણનું પુનર્ગઠન કરતાં,

$nx^2 + \{1 + 3 + 5 +...+ (2n - 1)\}x + \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 +...+ (n - 1)n)\} = 10n$

$\therefore \quad nx^2 + n^2x + \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3} = 10n$

$\therefore \quad x^2 + nx + \left(\dfrac{n^2-31}{3}\right) = 0$

બીજોનો તફાવત = 1

$\therefore \quad |\alpha - \beta| = 1.$

આથી, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

$\therefore \quad n^2 - \frac{4}{3}(n^2 - 31) = 1$

$\therefore \quad n^2 = 121$

$\therefore \quad n = 11$ **જવાબ (D)**

નોંધ : $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 +...+ (n - 1)n$

$= \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)$

$= \Sigma i^2 + \Sigma i$

$= \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \dfrac{(n-1)n}{2}$

$= \dfrac{n(n-1)[2n-1+3]}{6}$

$= \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$

30. સંકલ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1+cos\,x}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) –2 (B) 2 (C) 4 (D) –1

ઉકેલ : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1+cos\,x} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} sec^2\frac{x}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= tan\frac{3\pi}{8} - tan\frac{\pi}{8}$$

$$\left[tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{1+cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}, tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-cos\frac{3\pi}{4}}{1+cos\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2}+1\right]$$

$$= (\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)$$

$$= 2$$

જવાબ **(B)**

●